

UNIVERSITAS INDONESIA

**PERANCANGAN DAN SIMULASI PENGENDALIAN SISTEM  
GERAK ROTASI QUADROTOR MENGGUNAKAN  
*LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)***

TESIS

SUPRIYONO

0806424705

FAKULTAS TEKNIK  
PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO  
UNIVERSITAS INDONESIA  
JUNI 2011



UNIVERSITAS INDONESIA

**PERANCANGAN DAN SIMULASI PENGENDALIAN SISTEM  
GERAK ROTASI QUADROTOR MENGGUNAKAN  
*LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)***

TESIS

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister**

SUPRIYONO

0806424705

FAKULTAS TEKNIK  
PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO  
KEKHUSUSAN TEKNIK KONTROL INDUSTRI  
UNIVERSITAS INDONESIA

JUNI 2011

## PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang diikuti maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Supriyono

NPM : 0806424705

Tanda tangan :

Tanggal : 14 Juni 2011

## LEMBAR PENGESAHAN

Tesis dengan judul:

### **PERANCANGAN DAN SIMULASI PENGENDALIAN SISTEM GERAK ROTASI QUADROTOR MENGGUNAKAN *LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)***

Dibuat untuk melengkapi sebagian persyaratan menjadi Magister Teknik pada Program Studi Teknik Elektro, Kekhususan Teknik Kontrol Industri Departemen Teknik Elektro, Fakultas Teknik Universitas Indonesia dan disetujui untuk diajukan dalam presentasi tesis.

Depok, 14 Juni 2011

Dosen Pembimbing,



Dr. Abdul Halim, M.Eng

NIP. 040803012

## PENGESAHAN DEWAN PENGUJI

Tesis ini diajukan oleh :  
Nama : Supriyono  
NPM : 0806424705  
Program Studi : Teknik Elektro  
Kekhususan : Teknik Kontrol Industri  
Judul Tesis : Perancangan dan Simulasi Pengendalian Sistem Gerak  
Rotasi Quadrotor Menggunakan *Linear Quadratic  
Gaussian* (LQG)

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Teknik pada Program Studi Teknik Elektro, Kekhususan Teknik Kontrol Industri, Fakultas Teknik Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

1. Dr. Abdul Halim, M.Eng.
2. Dr. Abdul Muis, S.T, M.Eng.
3. Dr. Ir. Feri Yusivar, M.Eng.
4. Ir. Aries Subiantoro, M.sc.



Ditetapkan di : Depok.  
Tanggal : 30 Juni 2011

## KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kepada Allah SWT, karena atas Rahmat dan Ridho-Nya, saya dapat menyelesaikan laporan tesis ini. Penulisan laporan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Teknik Elektro pada Fakultas Teknik Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangat sulit bagi saya untuk menyelesaikannya. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Abdul Halim, M.Eng selaku dosen pembimbing yang telah banyak menyediakan waktu dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan tesis ini.
2. Orang tua yang tanpa lelah selalu mendoakan dan mendorong saya dalam penyelesaian tesis ini.
3. Seluruh dosen Departemen Teknik Elektro FTUI, dan seluruh teman mahasiswa program Magister Elektro FTUI, khususnya Teknik Kontrol Industri yang telah banyak membantu saya dalam penyelesaian tesis ini.

Akhir kata, saya berharap semoga Allah SWT berkenan membalas kebaikan semua pihak yang telah banyak membantu. Semoga seminar ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 14 Juni 2011

Penulis,

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI  
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Supriyono  
NPM : 0806424705  
Program Studi : Teknik Elektro  
Departemen : Teknik Elektro  
Fakultas : Teknik  
Jenis karya : Tesis

demikian demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

**Perancangan dan Simulasi Pengendalian Sistem Gerak Rotasi Quadrotor Menggunakan *Linear Quadratic Guussian (LQG)*.**

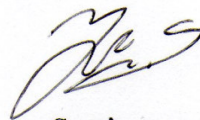
beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 14 Juni 2011

Yang menyatakan



Supriyono

## ABSTRAK

Nama : Supriyono  
Program Studi : Teknik Elektro  
Judul : Perancangan dan Simulasi Pengendalian Sistem Gerak  
Rotasi Quadrotor Menggunakan *Linear Quadratic  
Gaussian* (LQG)

Tesis ini membahas tentang perancangan kendali sistem gerak rotasi quadrotor menggunakan *linear quadratic gaussian* (LQG) dan simulasi digunakan untuk memverifikasi kinerja pengendali. Tujuan dari perancangan adalah mengendalikan sudut roll, pitch dan yaw yang terdapat *noise* dan *disturbance*. Parameter model quadrotor diambil dari quadrotor OS4 yang dikembangkan oleh Ecole Polytechnique Federale de Lausanne (EPFL). Model quadrotor yang dipakai merupakan model MIMO dengan empat masukan yaitu kecepatan keempat rotor quadrotor dan enam keluaran yaitu sudut roll, pitch, yaw dan kecepatan sudut roll, pitch dan yaw. Perancangan kendali dilakukan dengan mendesain gain *feedback* regulator, estimator atau observer untuk mengestimasi variabel keadaan yang tidak terukur dari keluaran yang terukur dan pre-kompensator pada masukan referensi. Kinerja kontrol LQG diuji menggunakan simulasi. Dengan menggunakan perkiraan matriks Q dan R, pengendali yang dirancang telah menunjukkan kinerja yang baik.

Kata kunci: Quadrotor, Rotasi roll, Rotasi pitch, Rotasi yaw, LQG.



## ABSTRACT

Name : Supriyono  
Study Program : Electrical Engineering  
Title : Design and Simulation of Quadrotor Rotation Motion Control System Using Linear Quadratic Gaussian (LQG).

This thesis discusses the design of rotational motion quadrotor control systems using Linear Quadratic Gaussian (LQG) method and simulation verifying the performance of the controller. The objective of design is to regulate roll, pitch and yaw angles in the existing of noise and disturbance. Quadrotor model parameters are from OS4 developed by Ecole Polytechnique federales de Lausanne (EPFL). Quadrotor model is MIMO with four inputs namely the speed four-rotor of quadrotor and six outputs namely the rotation angles roll, pitch, yaw and angular velocity of roll, pitch, and yaw. The control design is done by designing the feedback gain regulator, estimator or observer to estimate unmeasured state variables from the measured output, and design a pre-compensator input reference. LQG control performance is tested using simulations. By using approximate matrix Q dan R, the proposed controller have shown good performance.

Key word : Quadrotor, Roll rotation, Pitch rotation, Yaw rotation, LQG.

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
PERNYATAAN ORISINALITAS.....	iii
LEMBAR PENGESAHAN.....	iv
PENGESAHAN DEWAN PENGUJI.....	v
KATA PENGANTAR.....	vi
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH.....	vii
ABSTRAK.....	viii
ABSTRACT.....	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xii
DAFTAR SIMBOL.....	xiv
BAB 1 PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Tujuan.....	1
1.3 Pembatasan Masalah.....	2
1.4 Susunan Penulisan.....	2
BAB 2 DASAR TEORI GERAK ROTASI QUADROTOR DAN KENDALI LQG ( <i>LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN</i> )	
2.1 Model Gerak Rotasi Quadrotor.....	3
2.2 Dasar Teori Kendali LQG ( <i>Linear Quadratic Gaussian</i> ).....	13
BAB 3 PERANCANGAN SISTEM KENDALI LQG	
3.1 Model Simulasi Gerak Rotasi Quadrotor.....	24
3.2 Perancangan Kendali LQG Untuk Gerak Rotasi Quadrotor.....	31
3.3 Kestabilan Kendali LQG untuk Model Gerak Rotasi Quadrotor.....	37

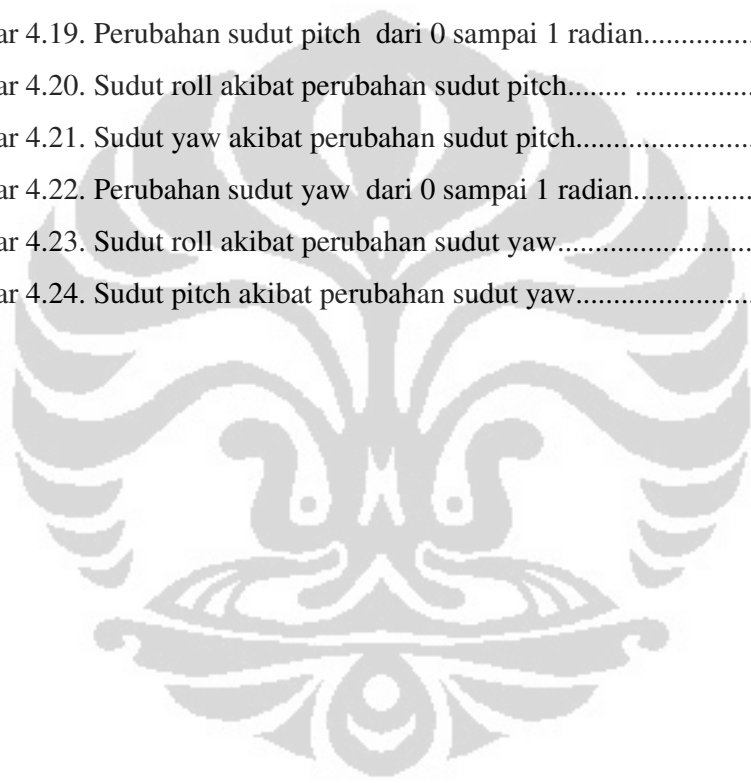
BAB 4 SIMULASI DAN ANALISA HASIL SIMULASI KENDALI LQG	
4.1 Simulasi Kendali LQG Untuk Modek Gerak Rotasi Quadrotor Tanpa <i>Setpoint</i> .....	38
4.2 Simulasi Kendali LQG Untuk Modek Gerak Rotasi Quadrotor Dengan <i>Setpoint</i> .....	46
BAB 5 KESIMPULAN.....	
DAFTAR REFERENSI.....	57
LAMPIRAN.....	58



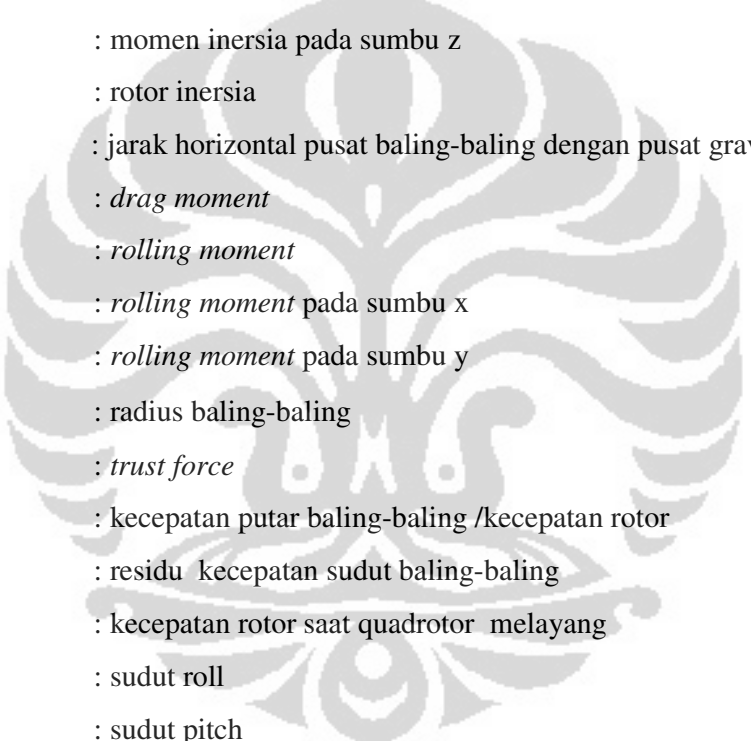
## DARTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Konfigurasi quadrotor.....	4
Gambar 2.2. Variasi gerak baling-baling quadrotor.....	4
Gambar 2.3. Arah gerak rotasi quadrotor.....	6
Gambar 2.4. Bentuk umum sistem kendali LQR.....	14
Gambar 2.5. Bentuk umum sistem kendali LQG.....	15
Gambar 2.6. Hubungan koneksitas antara model plant dengan observer.....	18
Gambar 2.7. Bentuk umum kalman filter sebagai estimator variabel keadaan .....	20
Gambar 2.8. Sistem kendali LQG dengan pre-kompensator.....	21
Gambar 3.1. Model simulasi non linier gerak rotasi quadrotor.....	26
Gambar 3.2. Model rotor sebagai aktuator.....	27
Gambar 3.3. Blok simulasi rotor yang menggunakan konversi satuan pada masukan dan keluarannya.....	27
Gambar 3.4. Model simulasi non linier gerak rotasi quadrotor dengan model aktuator.....	28
Gambar 3.5. Diagram alir perancangan kendali LQG.....	32
Gambar 4.1. Blok simulasi kendali LQG gerak rotasi quadrotor tanpa masukan referensi/ <i>setpoint</i> .....	39
Gambar 4.2. Stabilisasi sudut roll hasil simulasi kendali LQG.....	40
Gambar 4.3. Stabilisasi sudut roll hasil simulasi kendali LQ metode Pearson.	40
Gambar 4.4. Stabilisasi sudut pitch hasil simulasi kendali LQG.....	41
Gambar 4.5. Stabilisasi sudut pitch hasil simulasi kendali LQ metode Pearson.....	41
Gambar 4.6. Stabilisasi sudut yaw hasil simulasi kendali LQG.....	42
Gambar 4.7. Stabilisasi sudut yaw hasil simulasi kendali LQ metode Pearson.	42
Gambar 4.8. Sudut roll hasil simulasi dengan <i>noise</i> pengukuran.....	43
Gambar 4.9. Sudut pitch hasil simulasi dengan <i>noise</i> pengukuran .....	44
Gambar 4.10. Sudut yaw hasil simulasi dengan <i>noise</i> pengukuran.....	44
Gambar 4.11. Kecepatan rotor dengan <i>disturbance</i> hasil simulasi.....	45

Gambar 4.12. Blok simulasi kendali LQG gerak rotasi quadrotor dengan masukan referensi/ <i>setpoint</i> .....	46
Gambar 4.13. Sudut roll hasil simulasi kendali LQG dengan <i>setpoint</i> .....	47
Gambar 4.14. Sudut pitch hasil simulasi kendali LQG dengan <i>setpoint</i> .....	48
Gambar 4.15. Sudut yaw hasil simulasi kendali LQG dengan <i>setpoint</i> .....	48
Gambar 4.16. Perubahan sudut roll dari 0 sampai 1 radian.....	49
Gambar 4.17. Sudut pitch akibat perubahan sudut roll.....	50
Gambar 4.18. Sudut yaw akibat perubahan sudut roll.....	50
Gambar 4.19. Perubahan sudut pitch dari 0 sampai 1 radian.....	51
Gambar 4.20. Sudut roll akibat perubahan sudut pitch.....	51
Gambar 4.21. Sudut yaw akibat perubahan sudut pitch.....	52
Gambar 4.22. Perubahan sudut yaw dari 0 sampai 1 radian.....	53
Gambar 4.23. Sudut roll akibat perubahan sudut yaw.....	53
Gambar 4.24. Sudut pitch akibat perubahan sudut yaw.....	54



## DAFTAR SIMBOL



$H$	: <i>hub force</i>
$H_x$	: <i>hub force</i> pada sumbu x
$H_y$	: <i>hub force</i> pada sumbu y
$h$	: jarak vertikal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor
$I_x$	: momen inersia pada sumbu x
$I_y$	: momen inersia pada sumbu y
$I_z$	: momen inersia pada sumbu z
$J_r$	: rotor inersia
$l$	: jarak horizontal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor
$Q$	: <i>drag moment</i>
$R_{Rm}$	: <i>rolling moment</i>
$R_{mx}$	: <i>rolling moment</i> pada sumbu x
$R_{my}$	: <i>rolling moment</i> pada sumbu y
$R_{rad}$	: radius baling-baling
$T$	: <i>trust force</i>
$\Omega$	: kecepatan putar baling-baling /kecepatan rotor
$\Omega_r$	: residu kecepatan sudut baling-baling
$\Omega_H$	: kecepatan rotor saat quadrotor melayang
$\phi$	: sudut roll
$\theta$	: sudut pitch
$\psi$	: sudut yaw
$\dot{\phi}$	: kecepatan sudut roll
$\dot{\theta}$	: kecepatan sudut pitch
$\dot{\psi}$	: kecepatan sudut yaw
$\ddot{\phi}$	: percepatan sudut roll
$\ddot{\theta}$	: percepatan sudut pitch
$\ddot{\psi}$	: percepatan sudut yaw

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Quadrotor disebut juga quadrotor helicopter atau quadrocopter, adalah sebuah pesawat tanpa awak (*unmanned aerial vehicle / UAV*) yang digerakan oleh empat rotor. Quadrotor mempunyai enam derajat kebebasan yaitu yaw, pitch, roll, x (pergerakan ke depan dan belakang), y (pergerakan ke samping) dan z (pergerakan ke atas dan bawah). Beberapa kelebihan quadrotor dibanding jenis UAV yang lain, antara lain secara mekanik sederhana dan dikendalikan dengan hanya merubah kecepatan rotasi dari empat rotor, memiliki kemampuan bermanuver, dapat dengan mudah melayang-layang stabil dekat target, dan quadrotor merupakan jenis VTOL (*vertical take off and Landing*) UAV sehingga tidak memerlukan area yang luas untuk *take off* dan *landing*.

Quadrotor mempunyai empat rotor yang terletak di kanan, kiri, depan dan belakang ujung kerangka silang yang simetri. Rotor depan dan belakang berputar searah jarum jam sedangkan rotor kiri dan kanan berputar berlawanan dengan jarum jam. Pengendalian gerak quadrotor dapat dicapai dengan memvariasikan kecepatan relatif dari masing-masing rotor untuk mengubah daya dorong dan torsi yang dihasilkan oleh masing-masing rotor.

Pengendalian gerak rotasi quadrotor atau pengendalian sudut roll, pitch dan yaw merupakan inti dari pengendalian gerak quadrotor. Sudut roll pitch dan yaw hasil pengendalian gerak rotasi quadrotor diperlukan untuk gerak translasi quadrotor. Sistem kendali gerak rotasi quadrotor yang baik sangat diperlukan untuk mendapatkan sudut roll, pitch dan yaw sesuai dengan yang diinginkan. Untuk dapat mengendalikan sudut roll, pitch dan yaw, dalam penelitian ini dirancang sebuah sistem kendali LQG (*Linear Quadratic gaussian*).

### 1.2 Tujuan Penulisan

Pembahasan dalam tesis ini bertujuan untuk merancang sistem kendali LQG (*linear quadratic gaussian*) untuk gerak rotasi quadrotor dan memastikan kinerja kendali LQG dengan simulasi.

### 1.3 Pembatasan Masalah

Tesis ini membahas tentang perancangan sistem kendali LQG untuk gerak rotasi quadrotor. Quadrotor yang akan dimodelkan diasumsikan mempunyai batasan dan spesifikasi;

1. Parameter quadrotor diambil dari quadrotor OS4 Ecole Polytechnique Federale de Lausanne (EPFL).
2. Kondisi awal quadrotor diasumsikan dalam kondisi melayang stabil atau tidak bergerak secara translasi.
3. Model yang dipakai untuk merancang pengendali LQG hanya model gerak rotasi, gaya dan momen gaya yang mempengaruhi gerak rotasi akibat gerak translasi quadrotor tidak dimasukkan dalam pemodelan.

### 1.4 Susunan Penulisan

Penulisan laporan seminar ini dibagi ke dalam lima bab yang akan menjelaskan secara bertahap isi keseluruhan dari laporan tesis ini. Bab satu merupakan pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan susunan penulisan. Bab dua membahas tentang dasar teori gerak rotasi quadrotor dan sistem kendali LQG. Bab tiga membahas tentang perancangan sistem kendali gerak rotasi quadrotor yang terdiri dari sub bab model simulasi gerak rotasi quadrotor, sub bab perancangan sistem kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor dan sub bab kestabilan kendali LQG. Bab empat berisi tentang simulasi dan analisa hasil simulasi kendali gerak rotasi quadrotor untuk verifikasi kinerja kendali LQG. Bab lima merupakan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan dalam laporan tesis ini.



## BAB 2

### DASAR TEORI GERAK ROTASI QUADROTOR DAN KENDALI LQG

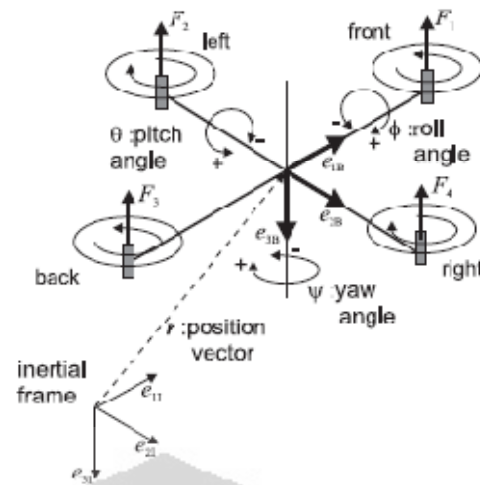
Bab dua terdiri dari dua sub bab, yaitu model gerak rotasi quadrotor dan dasar teori kendali LQG. Sub bab pertama menjelaskan secara sederhana prinsip kerja quadrotor terutama gerak rotasi quadrotor yang akan dimodelkan dan model dinamik gerak rotasi quadrotor. Sub bab kedua, dasar teori kendali LQG terdiri dari komponen-komponen kendali LQG dan kestabilan kendali LQG. Komponen kendali LQG dalam sub bab kedua terdiri dari gain *feedback* regulator, estimator/observer variabel keadaan, dan pre-kompensator untuk masukan referensi atau *setpoint*.

#### 2.1 Model Gerak Rotasi Quadrotor

##### 2.1.1 Konfigurasi dan prinsip kerja quadrotor

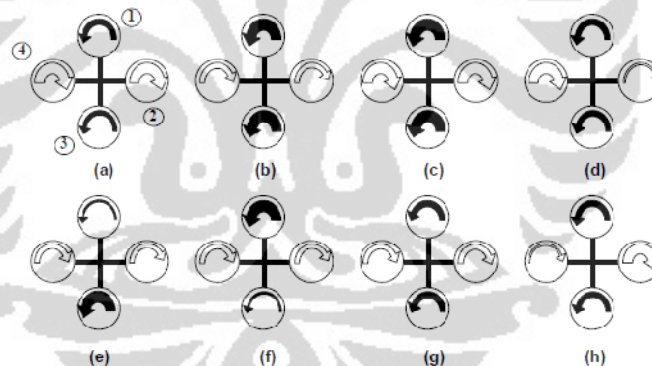
Quadrotor mempunyai empat rotor yang terletak di kanan, kiri, depan dan belakang ujung kerangka silang yang simetri. Rotor depan dan belakang berputar searah jarum jam sedangkan rotor kiri dan kanan berputar berlawanan dengan jarum jam. Pengendalian gerak quadrotor dapat dicapai dengan memvariasikan kecepatan relatif dari masing-masing rotor untuk mengubah daya dorong dan torsi yang dihasilkan oleh masing-masing rotor. Pengendalian gerak quadrotor bisa dibagi menjadi dua bagian, yaitu pengendalian gerak translasi dan pengendalian gerak rotasi quadrotor.

Gerak translasi quadrotor terdiri dari gerak sepanjang sumbu  $x$ ,  $y$  dan  $z$  dalam bidang koordinat sedangkan gerak rotasi yaitu gerak rotasi roll, pitch dan yaw. Gerak translasi quadrotor pada sumbu  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  diatur dengan memvariasikan sudut pitch, roll dan yaw hasil gerak rotasi serta kecepatan dari semua rotor. Pengaturan sudut pitch dilakukan dengan memvariasikan kecepatan rotor 1 (rotor depan) dan rotor 3 (rotor belakang) sedangkan kecepatan rotor 2 dan 4 dibuat sama dan tetap. Sudut roll diatur dengan memvariasikan kecepatan rotor 2 (rotor kanan) dan 4 (rotor kiri), sedangkan kecepatan rotor 1 dan 3 dibuat sama dan tetap. Sudut yaw diatur dengan memvariasikan keempat rotornya. Konfigurasi quadrotor ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Konfigurasi quadrotor [4].

Secara sederhana pengaturan sudut pitch, roll dan yaw digambarkan pada Gambar 2.2. Tanda panah lebar pada Gambar 2.2 menunjukkan putaran rotor yang lebih cepat daripada tanda panah yang lebih kecil.



Gambar 2.2. Variasi gerak baling-baling quadrotor [2].

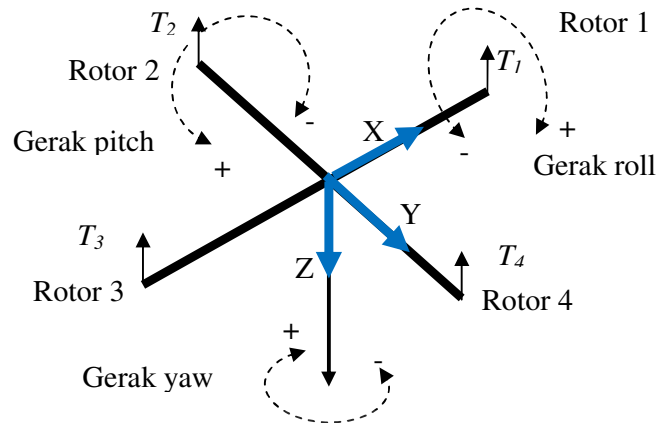
Keterangan:

- (a) Yaw (berlawanan arah jarum jam)
- (b) Yaw (searah jarum jam)
- (c) Take-off (naik)
- (d) Roll (searah jarum jam)
- (e) Pitch (berlawanan arah jarum jam)
- (f) Pitch (searah jarum jam)
- (g) Landing (turun)
- (h) Roll (berlawanan arah jarum jam)

Gerakkan rotor pada Gambar 2.2a dan 2.2b menghasilkan gerak rotasi yaw pada quadrotor. Yaw berlawanan arah jarum jam diperoleh dengan menggerakkan rotor 2 dan 4 lebih cepat daripada kecepatan putar rotor 1 dan 3, sebaliknya untuk mendapatkan yaw searah jarum jam, putaran rotor 1 dan 3 harus lebih cepat daripada rotor 2 dan 4. Gerak rotasi pitch didapatkan dengan memvariasikan rotor 1 dan 3 sedangkan kecepatan rotor 2 dan 4 dibuat tetap. Pitch searah jarum jam didapat dengan memutar rotor 1 lebih cepat dari rotor 3 seperti Gambar 2.2f dan sebaliknya pitch berlawanan arah jarum jam didapat dengan memutar rotor 3 lebih cepat daripada rotor 1 dengan kecepatan putar rotor 2 dan 4 dibuat tetap seperti pada Gambar 2.2e. Gerak rotasi roll pada dasarnya sama dengan pitch, bedanya hanya pada kecepatan rotor yang divariasikan, yaitu rotor 2 dan 4, rotor 1 dan 3 dibuat tetap seperti Gambar 2.2d dan 2.2h. Gerak vertikal naik atau turun didapat dengan menaikkan atau menurunkan kecepatan ke empat rotor seperti Gambar 2.2c dan Gambar 2.2g.

### **2.1.2 Model dinamik gerak rotasi quadrotor**

Persamaan gerak rotasi quadrotor terdiri dari persamaan gerak roll, gerak pitch dan gerak yaw. Gerak rotasi ini disebabkan oleh variasi perbedaan kecepatan putar dari keempat rotor quadrotor. Perbedaan kecepatan putar rotor menghasilkan gaya dan momen gaya yang membuat quadrotor bergerak. Secara umum gerak rotasi roll disebabkan oleh perbedaan kecepatan rotor 2 dan 4 sedangkan kecepatan rotor 1 dan 3 dibuat tetap pada titik kesetimbangannya, gerak rotasi pitch disebabkan oleh perbedaan kecepatan rotor 1 dan 3 sedangkan kecepatan rotor 2 dan 4 dibuat tetap pada titik kesetimbangannya, dan gerak rotasi yaw diakibatkan oleh perbedaan besarnya kecepatan antara rotor 1 dan 3 dengan rotor 2 dan 4. Gambar 2.3 menunjukkan arah dari masing-masing gerak rotasi quadrotor.



Gambar 2.3. Arah gerak rotasi quadrotor.

### 1. Persamaan gerak rotasi roll

Persamaan gerak rotasi roll pada quadrotor dipengaruhi oleh *body gyro effect*, *propeller gyro effect*, aksi aktuator roll, *hub moment* akibat quadrotor terbang ke arah samping, serta *rolling moment* yang disebabkan quadrotor terbang ke arah depan. Berikut ini beberapa persamaan komponen yang mempengaruhi gerak rotasi roll:

- *Body gyro effect*:

$$\dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z) \quad (2.1)$$

- *Propeller gyro effect*:

$$J_r \dot{\theta} \Omega_r \quad (2.2)$$

- Aksi aktuator roll:

$$l(-T_2 + T_4) \quad (2.3)$$

- *Hub moment* yang disebabkan oleh quadrotor yang terbang ke arah samping:

$$h \left( \sum_{i=1}^4 H_{yi} \right) \quad (2.4)$$

- *Rolling moment* yang disebabkan oleh quadrotor yang terbang ke arah depan:

$$(-1)^{i+1} \left( \sum_{i=1}^4 R_{mxi} \right) \quad (2.5)$$

Dari Persamaan 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 dan 2.5 dapat disusun persamaan gerak rotasi roll sebagai berikut [1]:

$$I_x \ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) + J_r \dot{\theta} \Omega_r + l(T_4 - T_2) + h \left( \sum_{i=1}^4 H_{yi} \right) + (-1)^{i+1} \left( \sum_{i=1}^4 R_{mxi} \right) \quad (2.6)$$

Gaya dan momen gaya akibat gerak translasi tidak dihitung karena quadrotor diasumsikan tidak bergerak secara translasi, sehingga *hub moment* dan *rolling moment* tidak dimasukkan dalam persamaan gerak rotasi roll dan persamaan 2.6 menjadi sebagai berikut:

$$I_x \ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) + J_r \dot{\theta} \Omega_r + l(T_4 - T_2) \quad (2.7)$$

dimana:

- $\ddot{\phi}$  : percepatan sudut roll (rad/sec<sup>2</sup>)
- $\dot{\theta}$  : kecepatan sudut pitch (rad/sec)
- $\dot{\psi}$  : kecepatan sudut yaw (rad/sec)
- $I_x$  : momen inersia pada sumbu x (kg.m<sup>2</sup>)
- $I_y$  : momen inersia pada sumbu y (kg.m<sup>2</sup>)
- $I_z$  : momen inersia pada sumbu z (kg.m<sup>2</sup>)
- $J_r$  : rotor inersia (kg.m<sup>2</sup>)
- $\Omega_r$  : residu kecepatan sudut baling-baling (rad/sec)
- $l$  : jarak horizontal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor (m)
- $T_2$  : *trust force* pada rotor 2
- $T_4$  : *trust force* pada rotor 4
- $h$  : jarak vertikal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor (m)
- $H_{yi}$  : *hub force* yang bekerja disumbu y pada rotor  $i$
- $R_{mxi}$  : *rolling moment* yang bekerja disumbu x pada rotor  $i$

## 2. Persamaan gerak rotasi pitch

Persamaan gerak rotasi pitch dipengaruhi oleh *body gyro effect*, *Propeller gyro effect*, aksi aktuator pitch, *Hub moment* yang disebabkan quadrotor terbang ke arah samping serta dipengaruhi juga oleh *rolling moment* yang disebabkan quadrotor terbang ke arah depan. Berikut ini persamaan-persamaan yang mempengaruhi gerak rotasi pitch:

- *Body gyro effect*:

$$\dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x) \quad (2.8)$$

- *Propeller gyro effect*:

$$J_r\dot{\phi}\Omega_r \quad (2.9)$$

- Aksi aktuator pitch:

$$l(-T_1 + T_3) \quad (2.10)$$

- *Hub moment* yang disebabkan quadrotor terbang ke arah samping:

$$h\left(\sum_{i=1}^4 H_{xi}\right) \quad (2.11)$$

- *rolling moment* yang disebabkan quadrotor terbang ke arah depan:

$$(-1)^{i+1}\left(\sum_{i=1}^4 R_{myi}\right) \quad (2.12)$$

Persamaan gerak rotasi pitch dapat disusun dari Persamaan 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 dan 2.12. Berikut ini persamaan gerak rotasi pitch quadrotor [1]:

$$I_y\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x) - J_r\dot{\phi}\Omega_r + l(T_3 - T_1) - h\left(\sum_{i=1}^4 H_{xi}\right) + (-1)^{i+1}\left(\sum_{i=1}^4 R_{myi}\right) \quad (2.13)$$

Sama seperti persamaan gerak roll, *hub moment* dan *rolling moment* akibat gerak translasi quadrotor tidak dimasukkan pada persamaan gerak pitch, sehingga persamaan 2.13 menjadi sebagai berikut:

$$I_y \ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) - J_r \dot{\phi} \Omega_r + l(T_3 - T_1) \quad (2.14)$$

dimana:

- $\ddot{\theta}$  : percepatan sudut pitch (rad/sec<sup>2</sup>)
- $\dot{\phi}$  : kecepatan sudut roll (rad/sec)
- $\dot{\psi}$  : kecepatan sudut yaw (rad/sec)
- $I_x$  : momen inersia pada sumbu x (kg.m<sup>2</sup>)
- $I_y$  : momen inersia pada sumbu y (kg.m<sup>2</sup>)
- $I_z$  : momen inersia pada sumbu z (kg.m<sup>2</sup>)
- $J_r$  : rotor inersia (kg.m<sup>2</sup>)
- $\Omega_r$  : residu kecepatan sudut baling-baling (rad/sec)
- $l$  : jarak horizontal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor (m)
- $T_1$  : *trust force* pada rotor 1
- $T_3$  : *trust force* pada rotor 3
- $h$  : jarak vertikal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor (m)
- $H_{xi}$  : *hub force* yang bekerja disumbu x pada rotor  $i$
- $R_{myi}$  : *rolling moment* yang bekerja disumbu y pada rotor  $i$

### 3. Persamaan gerak rotasi yaw

Persamaan gerak rotasi yaw dipengaruhi oleh beberapa komponen antara lain; *body gyro effect*, *inertial counter-torque*, *counter torque unbalance*, ketidak seimbangan *hub force* pada saat terbang ke arah depan, serta ketidak seimbangan hub force pada saat terbang ke arah samping. Berikut ini persamaan-persamaan yang menyusun persamaan gerak rotasi yaw pada quadrotor:

- *Body gyro effect*:

$$\dot{\theta} \dot{\phi} (I_x - I_y) \quad (2.15)$$

- *Inertial counter-torque:*

$$J_r \dot{\Omega}_r \quad (2.16)$$

- *Counter torque unbalance:*

$$(-1)^{i+1} \left( \sum_{i=1}^4 Q_i \right) \quad (2.17)$$

- Ketidak seimbangan *hub force* pada saat terbang ke arah depan:

$$l(-H_{x2} + H_{x4}) \quad (2.18)$$

- Ketidak seimbangan *hub force* pada saat terbang ke arah samping:

$$l(-H_{y1} + H_{y3}) \quad (2.19)$$

Persamaan gerak rotasi yaw yang disusun dari persamaan 2.15, 2.16, 2.17, 2.18 dan 2.19 adalah [1]:

$$I_z \ddot{\psi} = \dot{\theta} \dot{\phi} (I_x - I_y) + J_r \dot{\Omega}_r + (-1)^{i+1} \left( \sum_{i=1}^4 Q_i \right) + l(-H_{x2} + H_{x4}) + l(-H_{y1} + H_{y3}) \quad (2.20)$$

Gaya dan momen gaya akibat gerak translasi quadrotor tidak dimasukkan ke dalam persamaan gerak rotasi yaw, sehingga persamaan 2.20 menjadi sebagai berikut:

$$I_z \ddot{\psi} = \dot{\theta} \dot{\phi} (I_x - I_y) + J_r \dot{\Omega}_r + (-1)^{i+1} \left( \sum_{i=1}^4 Q_i \right) \quad (2.21)$$

Dimana:

- $\ddot{\psi}$  : percepatan sudut yaw (rad/sec<sup>2</sup>)
- $\dot{\phi}$  : kecepatan sudut roll (rad/sec)
- $\dot{\theta}$  : kecepatan sudut pitch (rad/sec)
- $I_x$  : momen inersia pada sumbu x (kg.m<sup>2</sup>)
- $I_y$  : momen inersia pada sumbu y (kg.m<sup>2</sup>)



- $I_z$  : momen inersia pada sumbu z (kg.m<sup>2</sup>)  
 $J_r$  : rotor inersia (kg.m<sup>2</sup>)  
 $\Omega_r$  : residu kecepatan sudut baling-baling (rad/sec)  
 $l$  : jarak horizontal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor (m)  
 $Q_i$  : *drag moment* pada masing- masing rotor  
 $h$  : jarak vertikal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor (m)  
 $H_{xi}$  : *hub force* yang bekerja disumbu x pada rotor  $i$   
 $R_{myi}$  : *rolling moment* yang bekerja disumbu y pada rotor  $i$

Persamaan gerak rotasi roll, pitch, dan yaw pada Persamaan 2.7, 2.14, dan 2.21 merupakan persamaan non linier dari gerak rotasi quadrotor. Persamaan non linier gerak rotasi quadrotor bisa ditulis menjadi sebagai berikut [1]:

$$\begin{aligned}
 I_x \ddot{\phi} &= \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) + J_r \dot{\theta} \Omega_r + l(T_4 - T_2) \\
 I_y \ddot{\theta} &= \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) - J_r \dot{\phi} \Omega_r + l(T_3 - T_1) \\
 I_z \ddot{\psi} &= \dot{\theta} \dot{\phi} (I_x - I_y) + J_r \dot{\psi} \Omega_r + (-1)^{i+1} \left( \sum_{i=1}^4 Q_i \right)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Persamaan 2.22 dapat diubah dengan memindah momen-momen inersia ke ruas sebelah kanan persamaan, dan persamaan tersebut menjadi [1]:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi} &= \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{l}{I_x} U_2 + \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta} \Omega_r \\
 \ddot{\theta} &= \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{l}{I_y} U_3 - \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi} \Omega_r \\
 \ddot{\psi} &= \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{1}{I_z} U_4
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

dimana:

$$\begin{aligned}
 U_2 &= T_4 - T_2 \\
 U_3 &= T_3 - T_1 \\
 U_4 &= (Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4) \\
 \Omega_r &= \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4
 \end{aligned}$$

Gaya trust dan momen drag nilainya diasumsikan proposional terhadap kuadrat kecepatan rotor, sehingga  $U_2$ ,  $U_3$ , dan  $U_4$  dapat ditulis menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U_2 &= b(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ U_3 &= b(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2) \\ U_4 &= d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{aligned}$$

Dengan  $b$  dan  $d$  merupakan faktor trust ( $N.s^2$ ) dan faktor drag ( $Nm.s^2$ ) pada saat quadrotor melayang stabil.

Persamaan 2.23 dapat dirubah ke dalam persamaan ruang keadaan menjadi sebagai berikut:

$$\dot{X} = f(X, U) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\psi a_1 + \dot{\theta}c_1\Omega_r + b_1U_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\psi a_2 - \dot{\phi}c_2\Omega_r + b_2U_3 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}\dot{\theta}a_3 + b_3U_4 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

variabel keadaan persamaan gerak rotasi quadrotor berupa sudut roll, pitch dan yaw, serta kecepatan sudut roll, pitch dan yaw  $[\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$ .

dimana;

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) & a_3 &= \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) \\ a_2 &= \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) & b_1 &= \frac{l}{I_x} \\ b_2 &= \frac{l}{I_y} & b_3 &= \frac{1}{I_z} \\ c_1 &= \frac{J_r}{I_x} & c_2 &= \frac{J_r}{I_y} \end{aligned}$$

Rotor sebagai aktuator quadrotor menggunakan motor BLDC (*Brush-less direct current*) dengan sebuah *gearbox* dan baling-baling. Model rotor bisa dibuat dalam bentuk orde satu dengan *dead time* yang sederhana. Berikut ini

bentuk model orde satu dengan *dead time* yang bisa dibuat untuk memodelkan rotor pada quadrotor:

$$e^{-\theta s} \left( \frac{Kp}{\tau s + 1} \right) \quad (2.25)$$

dimana:

- $Kp$  : gain rotor  
 $\tau$  : konstanta waktu (*time constant*)  
 $\theta$  : waktu tunda (*dead time* atau *delay time*)

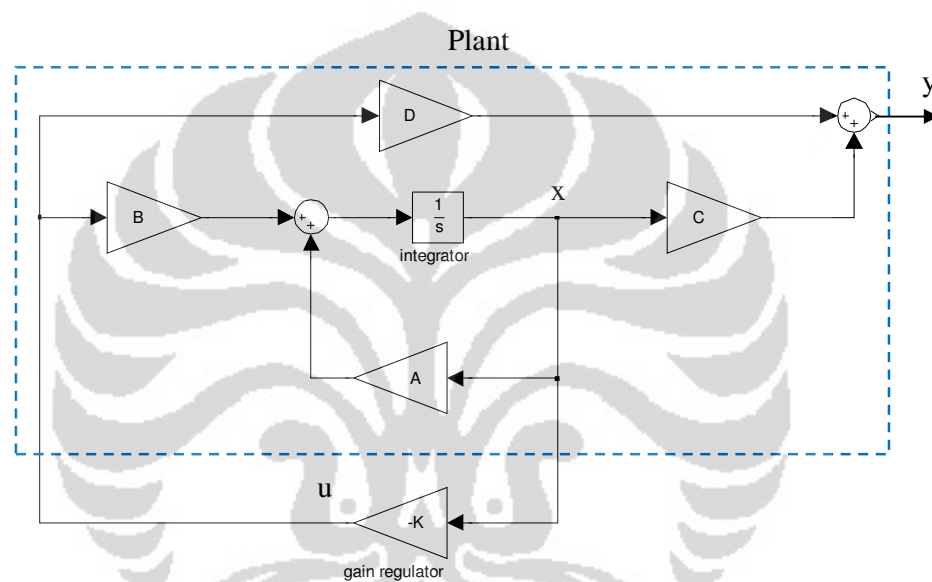
Untuk model rotor yang tidak memakai masukan dalam satuan yang sama dengan satuan sinyal kendali dari sistem kendali yang akan dibuat, maka diperlukan sebuah konversi dari satuan sinyal kendali ke dalam satuan masukan model rotor sebelum disimulasikan.

## 2.2 Dasar Teori Kendali LQG (*Linear Quadratic Gaussian*)

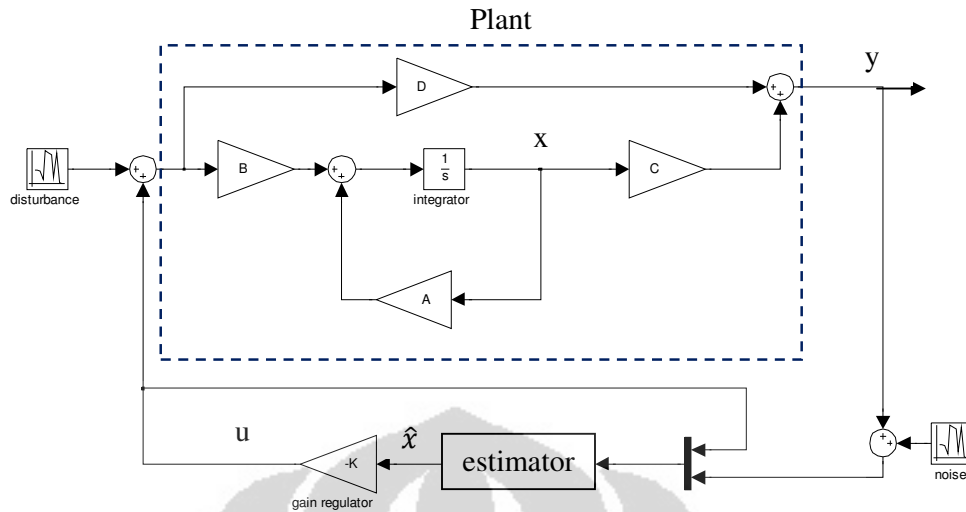
Kendali LQG merupakan kendali LQR (*Linear Quadratic Regulator*) dengan kalman filter sebagai estimator variabel keadaannya. Kendali LQR mengendalikan *plant* dengan kombinasi linier variabel keadaan *plant* tersebut untuk proses kendalinya sehingga semua variabel keadaannya (x) harus bisa terukur, hal ini menjadi tidak efisien bila jumlah variabel keadaannya banyak sehingga memerlukan sensor yang banyak juga untuk mengukur semua variabel keadaannya. Jika tidak semua variabel keadaannya terukur, maka LQR harus ditambah dengan estimator atau observer untuk mengestimasi variabel keadaan-variabel keadaan yang tidak terukur berdasarkan model *plant* atau keluaran yang terukur (y).

Kalman filter digunakan sebagai estimator untuk mengestimasi semua variabel keadaan yang diperlukan kendali LQR berdasarkan model *plant* atau keluaran yang terukur, karena pada sistem tertentu hanya variabel keadaan yang diinginkan saja yang diukur. Kalman filter juga dapat mengestimasi variabel keadaan dari keluaran *plant* yang terkontaminasi oleh *noise* dan *disturbance* pada *plant*. Kendali LQR dengan estimator variabel keadaan yang berupa kalman filter

ini yang disebut kendali LQG. Kendali LQG juga memerlukan suatu pre-kompensator agar keluaran *plant* yang telah dikendalikan ( $y$ ) dapat mengikuti *setpoint* yang diinginkan ( $r$ ). Dalam kendali LQG ada tiga komponen utama kendali LQG yang perlu didesain yaitu gain *feedback* regulator, kalman filter sebagai estimator variabel keadaan serta pre-kompensator agar keluaran *plant* ( $y$ ) sesuai dengan *setpoint* yang diinginkan ( $r$ ). Gambar 2.4 merupakan bentuk umum dari sistem kendali LQR, sedangkan Gambar 2.5 merupakan bentuk umum dari kendali LQG.



Gambar 2.4. Bentuk umum sistem kendali LQR (*Linear Quadratic Regulator*).



Gambar 2.5. Bentuk umum sistem kendali LQG (*Linear Quadratic Gaussian*).

## 2.2.1 Komponen kendali LQG

### 1. Gain *feedback* regulator (**K**)

Perancangan kendali LQG diawali dengan mendesain gain regulator (**K**) yang bisa meminimasi fungsi kriteria/biaya (*cost function*):

$$J = \int [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)]dt \quad (2.26)$$

Dimana  $Q$  dan  $R$  merupakan matriks pembobot, kedua matriks ini harus berupa *symetric positive-definite* (simetris dan positif). Tidak ada solusi khusus dalam pemilihan matriks-matriks ini, pemilihan matriks ini tergantung dari seberapa besar pengaruh keluaran ( $y$ ) dan sinyal kendali ( $u$ ) yang diinginkan pada *cost function* dan pemilihannya dilakukan dengan *trial and error*. Satu aturan yang bisa menjadi acuan awal dalam melakukan *trial and error* dalam pemilihan matriks  $Q$  dan  $R$  adalah aturan Bryson. Dalam aturan Bryson, *trial and error* pemilihan matriks diagonal  $Q$  dan  $R$  dapat dimulai dengan persamaan:

$$Q_{ii} = \frac{1}{y_{i\max}^2}$$

$$R_{ii} = \frac{1}{u_{i\max}^2} \quad (2.27)$$

dengan  $i=(1,2,\dots,n)$

dimana:

$y_{i\max}^2$  : Nilai maksimal dari kuadrat keluaran  $y_i$  yang diperbolehkan.

$u_{i\max}^2$  : Nilai maksimal dari kuadrat sinyal kendali  $u_i$  yang diperbolehkan.

Gain regulator K dibuat berdasarkan model linier sistem yang akan dikendalikan dalam bentuk umum model ruang keadaan:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2.28}$$

dimana gain regulator K diperoleh dari persamaan;

$$K = (D'QD + R)^{-1}(D'P + D'QC)\tag{2.29}$$

Jika matriks D dari sistem sama dengan nol maka gain regulator K menjadi:

$$K = R^{-1}B'P\tag{2.30}$$

Dengan P adalah solusi dari persamaan aljabar Ricatti:

$$0 = A'P + PA + C'QC - (PB + C'QD)(D'QD + R)^{-1}(B'P + D'QC)\tag{2.31}$$

Sinyal kendali (u) dalam kendali LQR (*state-feedback*) didapat dari persamaan;

$$u = -Kx\tag{2.32}$$

Sinyal kendali dalam LQR membutuhkan pengukuran semua variabel keadaan (x) dari *plant* yang akan dikendalikan. Pada kendali LQG variabel keadaan yang tidak terukur di estimasi berdasarkan keluaran *plant* yang terukur (y) sehingga didapatkan variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ) dan persamaan sinyal kendalinya menjadi sebagai berikut:

$$u = -K\hat{x}\tag{2.33}$$

## 2. Estimator/observer variabel keadaan dengan kalman filter.

Kendali LQG memerlukan estimator/observer untuk mengestimasi variabel keadaan yang tidak terukur berdasarkan keluaran *plant* yang terukur. Dimisalkan persamaan variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ) sebagai berikut:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \quad (2.34)$$

dengan eror estimasi ( $e$ ) merupakan selisih antara variabel keadaan ( $x$ ) dengan variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ).

$$e = x - \hat{x} \quad (2.35)$$

Berdasarkan persamaan 2.28, 2.34 dan 2.35 dapat disimpulkan persamaan dinamika eror estimasi menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ax - A\hat{x} \\ \dot{e} &= Ae \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ketika matriks  $A$  *asymptotically stable*, eror estimasi ( $e$ ) mendekati nol untuk setiap masukan ( $u$ ) atau variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ) mendekati variabel keadaan yang sebenarnya ( $x$ ) untuk setiap waktu ( $t \rightarrow \infty$ ). Tetapi ketika matriks  $A$  tidak stabil, eror estimasi menjadi tidak terbatas dan nilai variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ) menjauh dari nilai variabel keadaan yang sebenarnya ( $x$ ) untuk setiap waktu ( $t \rightarrow \infty$ ). Untuk menghindari eror estimasi yang terlalu besar maka persamaan 2.34 diubah menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dimana  $\hat{y}$  dianggap sebagai keluaran hasil estimasi dari keluaran  $y$  dan  $L$  adalah matriks gain estimator. Ketika variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ) sama dengan atau mendekati variabel keadaan ( $x$ ) maka  $\hat{y}$  juga akan sama dengan atau mendekati  $y$ , dan koreksi  $L(y - \hat{y})$  menjadi tidak begitu berpengaruh. Tetapi ketika  $\hat{x}$  nilainya jauh dari  $x$  maka koreksi  $L(y - \hat{y})$  diharapkan akan mengoreksi

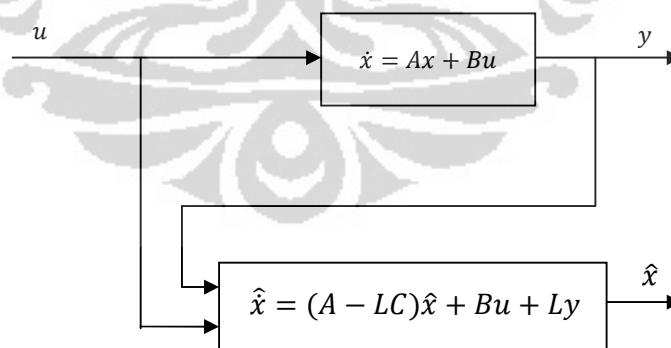
eror tersebut. Untuk melihat bagaimana koreksi  $L(y - \hat{y})$  dapat bekerja, persamaan dinamika eror estimasi pada persamaan 2.36 ditulis ulang berdasarkan persamaan 2.28 dan persamaan 2.37, dan persamaanya menjadi;

$$\begin{aligned}\dot{e} &= Ax - A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x}) \\ \dot{e} &= (A - LC)e\end{aligned}\quad (2.38)$$

Ketika  $A - LC$  *asymptotically stable* maka eror estimasi ( $e$ ) akan sama dengan atau mendekati nol, bahkan ketika matriks  $A$  tidak stabil,  $A - LC$  dapat dibuat stabil dengan memilih matriks  $L$  yang tepat. Persamaan variabel keadaan hasil estimasi pada persamaan 2.37 bisa diubah menjadi;

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (2.39)$$

Persamaan 2.39 disebut *full-order observer*. *Full-order observer* mempunyai dua masukan yaitu sinyal kendali ( $u$ ) dan keluaran *plant* yang terukur ( $y$ ) serta mempunyai satu keluaran yaitu variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ). Gambar 2.6 menunjukkan koneksitas hubungan antara model *plant* dengan *full-order observer*.



Gambar 2.6. Hubungan koneksitas antara model *plant* dengan *observer*.

Persamaan dinamika eror estimasi pada persamaan 2.38 membutuhkan pemilihan matriks gain estimator  $L$  (gain kalman) yang tepat agar eror estimasi ( $e$ ) sama dengan atau mendekati nol atau nilai dari variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ )



mendekati atau sama dengan variabel keadaan yang sebenarnya ( $x$ ). Pada kenyataannya keluaran ( $y$ ) untuk estimasi variabel keadaan juga dipengaruhi oleh *noise* pengukuran dan juga *disturbance* pada *plant*, sehingga persamaan pada *plant* yang dipengaruhi oleh *noise* dan *disturbance* menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + B_w w \\ y &= Cx + v\end{aligned}\tag{2.40}$$

Dengan  $B_w$  adalah matriks *disturbance*,  $w$  adalah *disturbance* pada *plant* dan  $v$  adalah *noise* pengukuran.

Kalman filter digunakan sebagai estimator/observer dalam kendali LQG yang mengestimasi variabel keadaan dari keluaran *plant* ( $y$ ) yang terkontaminasi oleh *noise* ( $v$ ) dan juga *disturbance* ( $w$ ) pada *plant* dengan *noise* ( $v$ ) dan *disturbance* ( $w$ ) dari sumber yang berbeda. Tujuan dari kalman filter adalah mengestimasi variabel keadaan ( $x$ ) dari hasil keluaran ( $y$ ) dengan meminimasi eror estimasi:

$$j = E[\{x - \hat{x}\}'\{x - \hat{x}\}]\tag{2.41}$$

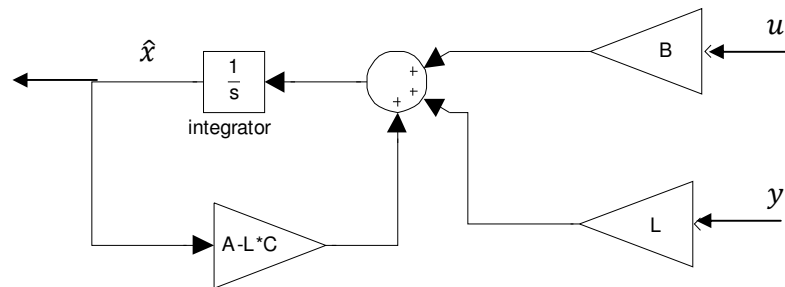
Gain estimator  $L$  (gain kalman) didapat dari persamaan;

$$L = ZC'S_v^{-1}\tag{2.42}$$

Dimana  $Z$  merupakan solusi dari persamaan aljabar Ricatti:

$$0 = AZ + ZA' + B_w S_w B_w' - ZC'S_v^{-1}CZ\tag{2.43}$$

dengan  $S_v$  merupakan *spectral density* dari *noise* pada keluaran ( $y$ ) dan  $S_w$  merupakan *spectral density* dari *disturbance* pada *plant* yang besarnya masing-masing nilainya ditentukan sebelumnya dalam perancangan kalman filter. Bentuk umum kalman filter sebagai estimator variabel keadaan ditunjukkan pada Gambar 2.7



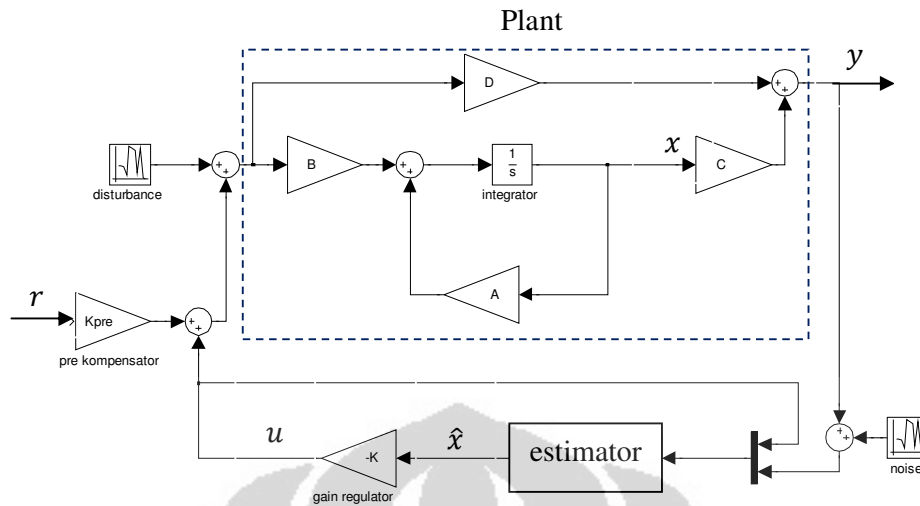
Gambar 2.7. Bentuk umum kalman filter sebagai estimator variabel keadaan.

Pemilihan matriks  $S_v$  dan  $S_w$  yang berbeda memberikan nilai gain estimator yang berbeda pula, berikut ini pengaruh dari nilai matriks  $S_v$  dan  $S_w$  terhadap matriks gain estimator  $L$ :

1. Ketika  $S_v$  terlalu kecil dibandingkan dengan  $S_w$ , pengukuran terhadap *noise* menjadi kecil, sehingga estimator menganggap ada perbedaan yang besar antara nilai  $\hat{y}$  dengan nilai  $y$ , ini mengindikasikan estimasi terhadap variabel keadaan kurang baik dan memerlukan koreksi estimasi. Hal ini menyebabkan matriks  $L$  menjadi besar, dan *pole-pole* matriks  $A-LC$  menjadi semakin cepat.
2. Ketika  $S_v$  sangat besar, pengukuran terhadap *noise* besar sehingga estimator jauh lebih peka dalam bereaksi terhadap perbedaan  $\hat{y}$  dengan  $y$ . Hal ini umumnya mengarah pada semakin kecilnya nilai gain estimator  $L$  dan *pole-pole* matriks  $A-LC$  menjadi semakin lambat.

### 3. Pre kompensator ( $K_{pre}$ )

Pre kompensator diperlukan agar keluaran *plant* ( $y$ ) yang telah dikendalikan bisa mengikuti *setpoint* ( $r$ ) yang diinginkan. Dimisalkan pada sistem kendali LQG belum ada pre kompensator, agar keluaran ( $y$ ) sama dengan *setpoint* ( $r$ ) maka total gain dari sistem loop tertutup ( $G$ ) harus bernilai satu, jadi untuk mendesain pre kompensator harus dicari dahulu gain frekuensi rendah ( $M$ ) dari sistem loop tertutup ( $G$ ). Agar memenuhi syarat total gain pada sistem loop tertutupnya bernilai satu maka pada masukan referensi atau *setpoint* perlu dikalikan dengan gain pre kompensator yang nilainya sebesar  $\frac{1}{M}$ . Gambar 2.8 merupakan blok sistem kendali LQG dengan pre kompensator.



Gambar 2.8. Sistem kendali LQG dengan pre-kompensator.

Langkah pertama dalam mendesain pre kompensator adalah mencari gain frekuensi rendah dari sistem loop tertutup *plant*. Gain frekuensi rendah ( $M$ ) dicari dengan persamaan:

$$M = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (2.44)$$

Dimana  $G(s)$  merupakan fungsi transfer loop tertutup dari sistem pengendalian *plant*.

$$G(s) = \frac{y(s)}{r(s)} \quad (2.45)$$

Dengan  $y(s)$  adalah keluaran sistem dan  $r(s)$  adalah *setpoint* sistem. Diasumsikan nilai  $D$  pada Gambar 2.8 sama dengan nol, sehingga besarnya  $y(s)$  adalah:

$$y(s) = Cx(s) \quad (2.46)$$

Variabel keadaan  $x(s)$  didapat dari persamaan:

$$sx(s) = Ax(s) - BK\hat{x}(s) + Br(s) \quad (2.47)$$

Variabel keadaan hasil estimator pada kalman filter  $\hat{x}(s)$  didapat dari persamaan;

$$s\hat{x}(s) = (A - LC)\hat{x}(s) - BK\hat{x}(s) + LCx(s)$$

$$\begin{aligned}
 (sI - A + LC + BK)\hat{x}(s) &= LCx(s) \\
 \hat{x}(s) &= (sI - A + LC + BK)^{-1}LCx(s)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 2.48 ke dalam persamaan 2.47 didapat nilai  $x(s)$  sebesar:

$$\begin{aligned}
 sx(s) &= Ax(s) - BK\hat{x}(s) + Br(s) \\
 sx(s) &= Ax(s) - BK(sI - A + LC + BK)^{-1}LCx(s) + Br(s) \\
 (sI - A + BK(sI - A + LC + BK)^{-1}LC)x(s) &= Br(s) \\
 x(s) &= (sI - A + BK(sI - A + LC + BK)^{-1}LC)^{-1}Br(s)
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Kemudian persamaan 2.49 disubstitusikan ke dalam persamaan 2.46, dan didapat:

$$y(s) = C(sI - A + BK(sI - A + LC + BK)^{-1}LC)^{-1}Br(s) \tag{2.50}$$

Dari persamaan 2.45 dan 2.46 didapat fungsi transfer loop tertutup sistem sebesar:

$$G(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = C(sI - A + BK(sI - A + LC + BK)^{-1}LC)^{-1}B \tag{2.51}$$

Fungsi transfer loop tertutup sistem pada persamaan 2.51 disubstitusikan ke dalam persamaan 2.44 untuk mendapatkan gain frekuensi rendah ( $M$ ) dari sistem. Gain frekuensi rendah dari sistem adalah:

$$M = C(-A + BK(-A + LC + BK)^{-1}LC)^{-1}B \tag{2.52}$$

Agar besarnya keluaran  $y(s)$  sama dengan  $r(s)$  maka total gain pada sistem kendali LQG harus bernilai satu. Persyaratan total gain harus bernilai satu dapat terpenuhi dengan mengalikan *setpoint*  $r(s)$  dengan gain yang besarnya sama dengan  $1/M$ , jadi pre kompensatornya ( $K_{pre}$ ) menjadi:

$$K_{pre} = (C(-A + BK(-A + LC + BK)^{-1}LC)^{-1}B)^{-1} \tag{2.53}$$

### 2.2.2 Kestabilan Sistem Kendali LQG

Kestabilan sistem loop tertutup kendali LQG dapat diamati dari persamaan-persamaan yang membentuk sistem loop tertutup kendali LQG yaitu persamaan 2.28, 2.33 dan 2.39. Berikut ini persamaan-persamaan yang membentuk sistem loop tertutup kendali LQG:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu; & y &= Cx \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + LCx; & u &= -K\hat{x} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Kestabilan kendali LQG lebih mudah diamati dengan mempertimbangkan eror estimasi  $e = x - \hat{x}$  dibandingkan variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ), sehingga  $\hat{x}$  pada persamaan 2.54 diganti dengan  $x - e$  dan menghasilkan persamaan:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BK(x - e) = (A - BK)x + BKe \\ \dot{e} &= (A - LC)e \end{aligned} \quad (2.55)$$

Persamaan 2.55 dapat ditulis dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Nilai eigen dari sistem loop tertutup kendali LQG didapat dari dinamika *feedback* regulator variabel keadaan ( $A - BK$ ) bersama dengan dinamika estimator variabel keadaan ( $A - LC$ ). Jika kedua matriks tersebut stabil maka sistem loop tertutup kendali LQG pada persamaan 2.56 juga stabil.

### BAB 3

#### PERANCANGAN SISTEM KENDALI LQG

Bab tiga terdiri dari tiga sub bab, yaitu sub bab model simulasi gerak rotasi quadrotor, sub bab perancangan kendali LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) dan sub bab kestabilan kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor. Sub bab model simulasi terdiri dari model simulasi non-linier dan model simulasi linier gerak rotasi quadrotor. Sub bab perancangan kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor membahas tentang desain kendali LQG yang akan digunakan untuk mengendalikan gerak rotasi quadrotor berdasarkan model simulasi linier gerak rotasi quadrotor yang telah dibuat.

### 3.1 Model Simulasi Gerak Rotasi Quadrotor.

#### 3.1.1 Model non-linier gerak rotasi quadrotor.

Parameter-parameter model quadrotor yang dipakai menggunakan parameter-parameter dari quadrotor OS4 Ecole Polytechnique Federale de Lausanne (EPFL). Dalam tesis ini, hanya beberapa parameter dari keseluruhan parameter quadrotor OS4 yang dipakai, hanya parameter-parameter yang berkaitan dengan gerak rotasi quadrotor yang dijelaskan dalam sub bab ini. Berikut ini parameter-parameter quadrotor yang akan digunakan dalam tesis ini:

Parameter	Nilai	Keterangan
$I_x$	$0.006228 \text{ kg.m}^2$	• momen inersia pada sumbu x.
$I_y$	$0.006228 \text{ kg.m}^2$	• momen inersia pada sumbu y.
$I_z$	$0.01121 \text{ kg.m}^2$	• momen inersia pada sumbu z.
$J_r$	$0.0000601 \text{ kg.m}^2$	• rotor inersia
$g$	$9.806 \text{ m/s}^2$	• percepatan gravitasi
$p$	4	• jumlah rotor
$l$	$0.232 \text{ m}$	• jarak horizontal pusat baling-baling dengan pusat gravitasi quadrotor
$b$	$3.13E-5 \text{ N.s}^2$	• faktor trust saat quadrotor

$d$	$7.5E-7 \text{ Nm.s}^2$	melayang.
slo	2.7542	<ul style="list-style-type: none"> <li>• faktor drag saat quadrotor melayang.</li> <li>• konstanta slope dari kurva linier <math>\Omega=f(\text{bin})</math>, kurva konversi dari <math>\Omega</math> (rad/det) ke dalam bentuk binari <i>setpoint</i> rotor.</li> </ul>
shi	3.627	<ul style="list-style-type: none"> <li>• konstanta shift dari kurva linier <math>\Omega=f(\text{bin})</math>, kurva konversi dari <math>\Omega</math> (rad/det) ke dalam bentuk binari <i>setpoint</i> rotor.</li> </ul>

Model simulasi non linier gerak rotasi quadrotor dibuat berdasarkan persamaan gerak rotasi quadrotor pada persamaan 2.24. Quadrotor mempunyai empat aktuator yang masing-masing berupa motor BLDC (*Brush-less direct current*) dengan sebuah *one-stage gearbox* dan baling-baling. Aktuator dimodelkan dalam bentuk orde satu dengan *dead time* seperti pada persamaan 2.25. Berikut ini parameter model aktuator yang dipakai dalam simulasi:

- Gain rotor ( $K_p$ ) : 0.936
- Kostanta waktu (*time constant*  $\tau$ ) : 0.11325
- Waktu tunda (*dead time* atau *delay time*  $\theta$ ) : 0.02545

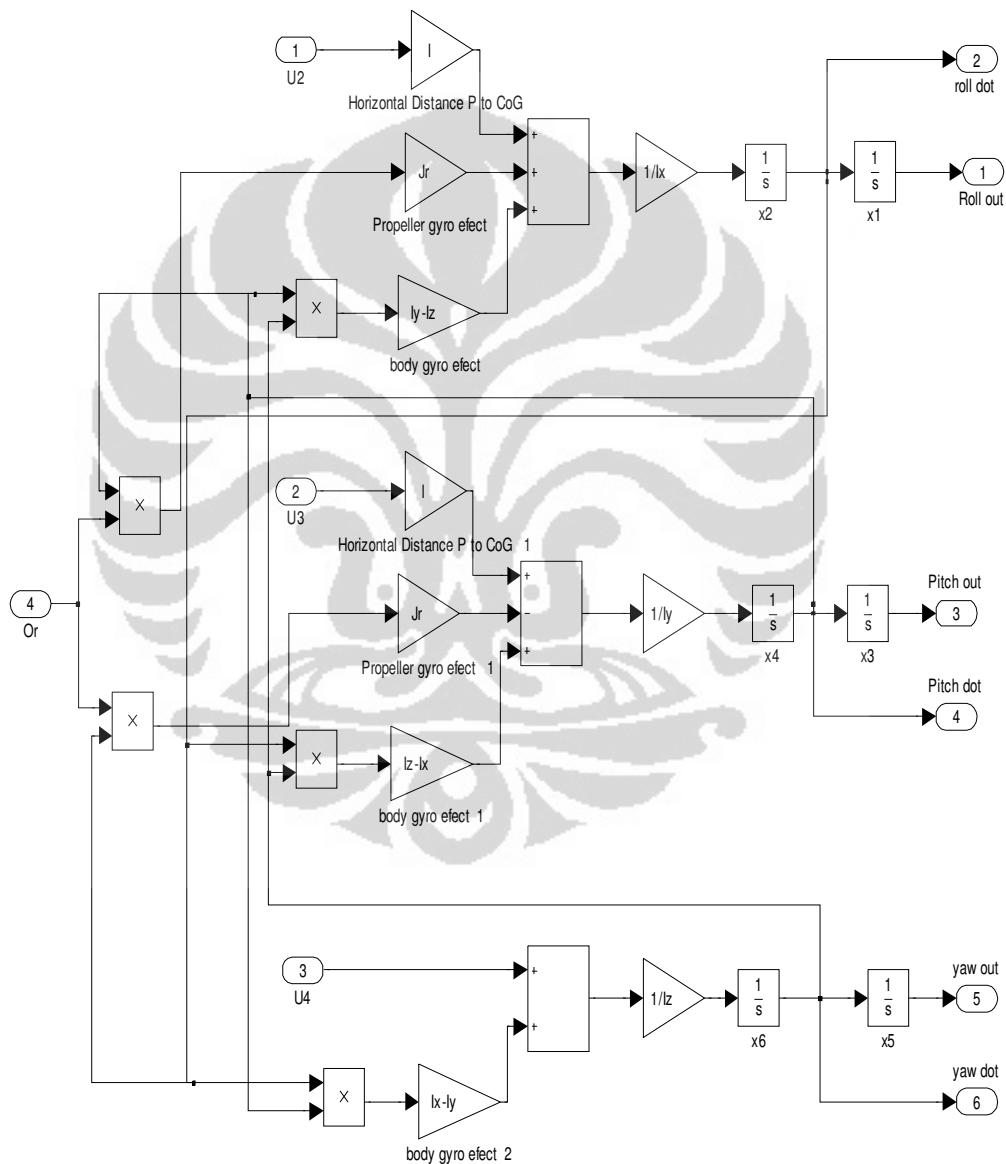
Dianggap keempat aktuator mempunyai spesifikasi yang sama atau serupa, dengan memasukan nilai parameter-parameter model aktuator didapat model keempat rotornya adalah:

$$r_{1234} = e^{-0.02545s} \left( \frac{0.936}{0.11325s + 1} \right) \quad (3.1)$$

Karena masukan kecepatan rotor yang dipakai rotor dalam bentuk binari *setpoint*, sedangkan satuan kecepatan rotor yang dipakai model dinamik quadrotor dalam bentuk omega  $\Omega$  (rad/sec), maka perlu adanya konversi. Persamaan konversi menggunakan parameter slo dan shi, berikut ini persamaannya:

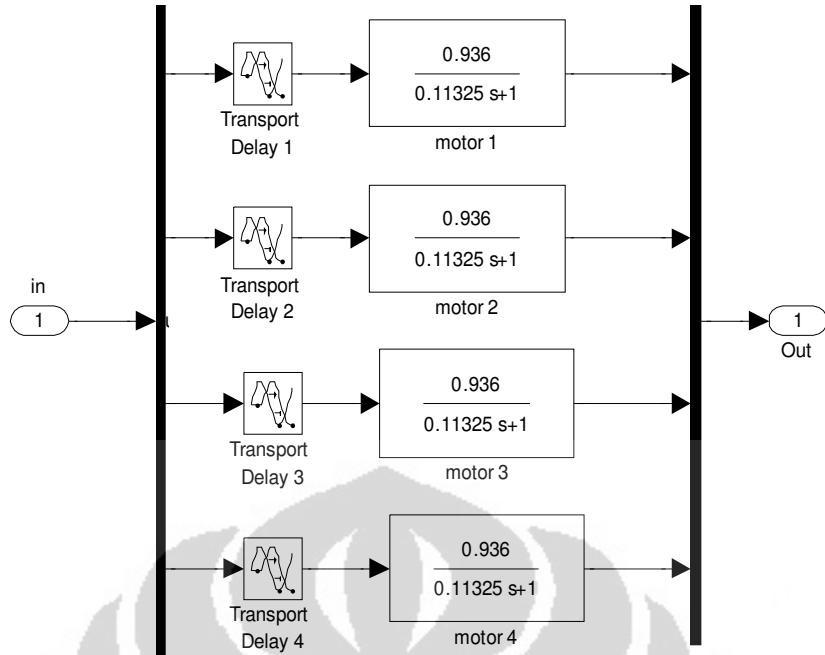
$$\text{binari setpoint rotor} = (\Omega + \text{shi})/\text{slo} \quad (3.2)$$

Gambar 3.1 merupakan blok simulasi model non linier gerak rotasi quadrotor yang dibuat berdasarkan persamaan gerak rotasi quadrotor dengan enam keluaran, yaitu sudut roll, pitch dan yaw serta kecepatan sudut roll, pitch dan yaw. Gambar 3.2 merupakan blok simulasi dari aktuator quadrotor yang dibuat berdasarkan persamaan 3.1 dan Gambar 3.3 merupakan blok simulasi rotor yang telah menggunakan konversi satuan pada masukan dan keluarannya.

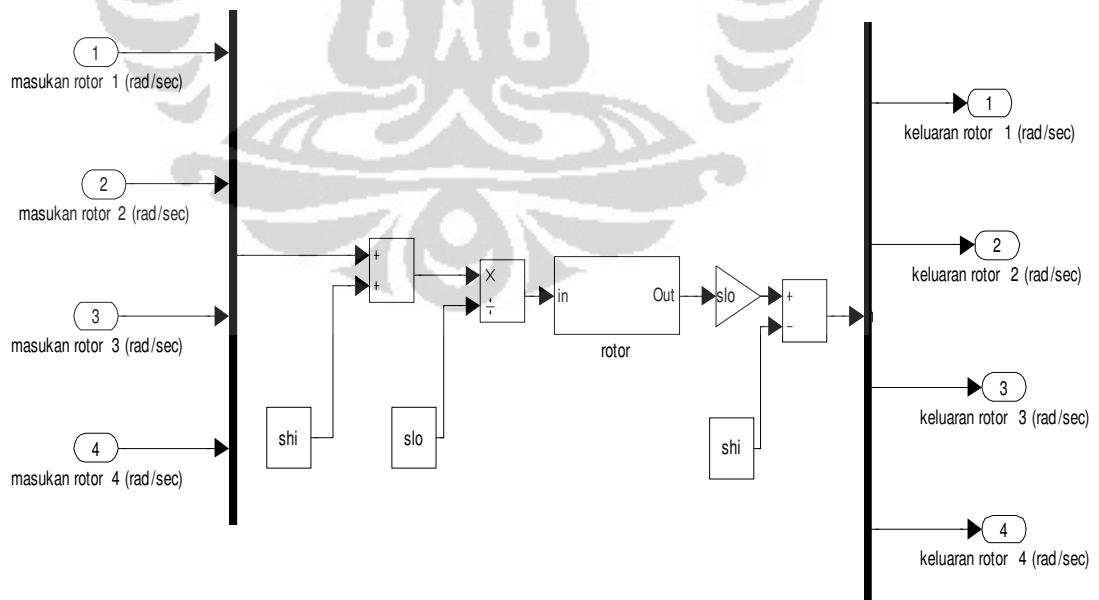


Gambar 3.1. Model simulasi non linier gerak rotasi quadrotor.



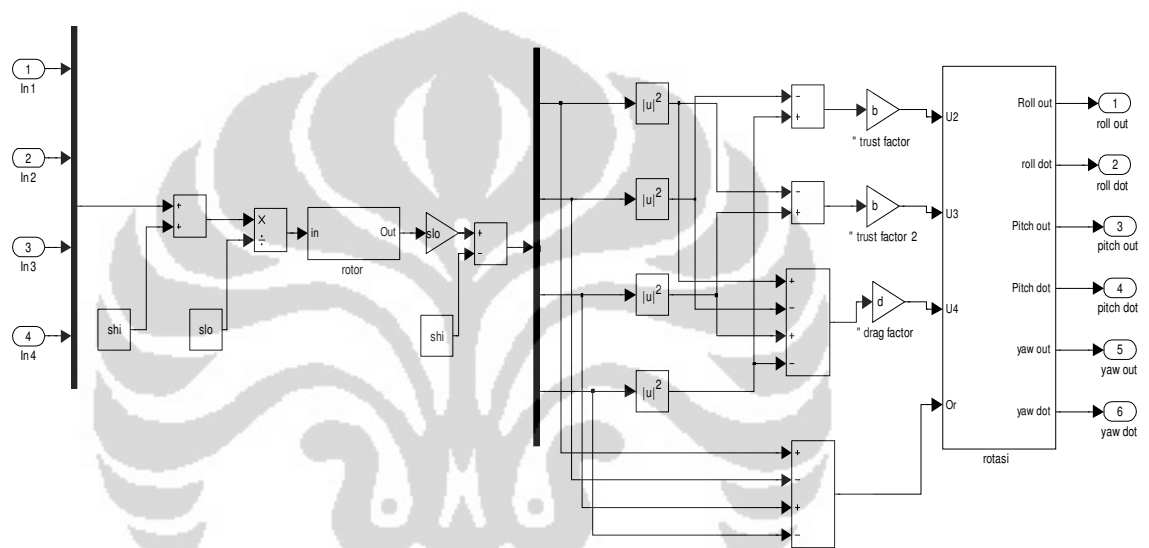


Gambar 3.2. Model rotor sebagai aktuator.



Gambar 3.3 Blok simulasi rotor yang menggunakan konversi satuan pada masukan dan keluarannya.

Model non linier gerak rotasi quadrotor yang akan dikendalikan dengan kendali LQG adalah model non linier gerak rotasi quadrotor yang dilengkapi dengan aktuator. Dalam model ini ada empat masukan yang berupa kecepatan putar  $\Omega$  dari masing-masing rotor (aktuator quadrotor) dan enam keluaran berupa sudut hasil gerak rotasi, yaitu sudut roll ( $\phi$ ), sudut pitch ( $\theta$ ), dan sudut yaw ( $\psi$ ) serta kecepatan sudut roll ( $\dot{\phi}$ ), kecepatan sudut pitch ( $\dot{\theta}$ ), dan kecepatan sudut yaw ( $\dot{\psi}$ ). Gambar 3.4 merupakan blok simulasi model non linier gerak rotasi quadrotor yang sudah dilengkapi dengan aktuator.



Gambar 3.4. Model simulasi non linier gerak rotasi quadrotor dengan model aktuator.

### 3.1.2 Model linier gerak rotasi quadrotor.

Linierisasi dilakukan untuk mendapatkan model linier yang dapat mewakili model non linier gerak rotasi quadrotor. Model linier hasil linierisasi ini kemudian yang akan dipakai dalam mendesain sistem kendali LQG. Dalam linierisasi ini model gerak rotasi dengan model aktuator digabung dalam satu model seperti pada Gambar 3.4. Linierisasi dilakukan dengan bantuan fasilitas yang ada dalam matlab/simulink pada titik kesetimbangan sistem gerak rotasi quadrotor, dengan variabel keadaannya adalah:

$$[\phi \quad \dot{\phi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4]^T$$

$r_{1234}$  : merupakan rotor 1, 2, 3 dan 4. Masukannya berupa kecepatan keempat rotor  $[\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4]^T$  dan keluarannya berupa sudut roll, kecepatan sudut roll, sudut pitch, kecepatan sudut pitch, sudut yaw dan kecepatan sudut yaw  $[\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$ . Hasil linierisasi dibuat dalam bentuk model ruang keadaan.

Titik kesetimbangan sistem gerak operasi dicari terlebih dahulu sebelum melinierisasi model non linier gerak rotasi quadrotor. Titik kesetimbangan sistem gerak rotasi didapat ketika quadrotor dalam posisi melayang stabil atau total gaya *trust* sama dengan gaya ke bawah atau massa quadrotor dikalikan kecepatan gravitasi ( $T_i = mg$ ). Gaya *trust* diasumsikan nilainya proposional terhadap kuadrat kecepatan rotor, sehingga kecepatan masing-masing rotor pada saat melayang stabil ( $\Omega_H$ ) dapat dicari dengan persamaan  $\Omega_H = \sqrt{(w/b)}$ , dengan  $w$  adalah gaya berat dibagi jumlah baling-baling ( $\frac{mg}{P}$ ), sedangkan  $b$  adalah faktor *trust*. Titik kesetimbangan masukan kecepatan rotor didapat ada pada 203.7425 rad/detik. Titik kesetimbangan masukan kecepatan yang didapat ini digunakan untuk mencari titik kesetimbangan variabel keadaan rotor 1, 2, 3 dan 4 ( $r_{1234}$ ) dengan menggunakan persamaan 3.2, dan didapat titik kesetimbangan variabel keadaan rotor  $r_{1234}$  ada pada 75.2921.

Titik kesetimbangan untuk variabel keadaan persamaan gerak rotasi quadrotor  $[\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$  ada pada:

$$\dot{X} = 0$$

atau:

$$\dot{x}_1 = 0; \quad \dot{x}_3 = 0; \quad \dot{x}_5 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0; \quad \dot{x}_4 = 0; \quad \dot{x}_6 = 0$$

dengan:

$$x_1 = \phi; \quad x_3 = \theta; \quad x_5 = \psi$$

$$x_2 = \dot{\phi}; \quad x_4 = \dot{\theta}; \quad x_6 = \dot{\psi}$$

Titik kesetimbangan  $x_1$ ,  $x_3$ , dan  $x_5$  tidak ditentukan oleh gerak rotasi quadrotor, tetapi ditentukan oleh kesetimbangan gerak translasi quadrotor. Titik

kesetimbangan  $x_1$  dan  $x_3$  didapat dari kesetimbangan gerak translasi quadrotor pada sumbu z ketika total gaya *trust* sama dengan gaya berat:

$$mg = (\cos x_1 \cos x_3) \sum_1^4 T_i \quad (3.3)$$

Karena pada keadaan melayang stabil  $mg = \sum_1^4 T_i$  maka;  $(\cos x_1 \cos x_3)$  sama dengan 1. Titik kesetimbangan  $x_1$  dan  $x_3$  ada pada  $2n\pi$  untuk  $n = 0, +1, +2, \dots$  dan pada  $(2n + 1)\pi$  ketika  $\cos x_1$  maupun  $\cos x_3$  nilainya sama pada -1, sedangkan titik kesetimbangan  $x_5$  dicari dengan memasukan titik kesetimbangan  $x_1$  dan  $x_3$  pada kesetimbangan gerak translasi searah sumbu x dan y, yaitu  $(\sin x_5 \sin x_1 + \cos x_5 \sin x_3 \cos x_1) \sum_1^4 T_i = 0$  dan  $(-\cos x_5 \sin x_1 + \sin x_5 \sin x_3 \cos x_1) \sum_1^4 T_i = 0$ . Titik kesetimbangan  $x_5$  ada pada sembarang nilai dengan syarat  $x_1$  dan  $x_3$  ada pada titik kesetimbangannya. Titik kesetimbangan gerak rotasi quadrotor untuk linierisasi adalah:

$$\begin{aligned} X_0 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 75.2921 \ 75.2921 \ 75.2921 \ 75.2921]^T \\ U_0 &= [203.7425 \ 203.7425 \ 203.7425 \ 203.7425]^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

Semua titik kesetimbangan yang didapat kemudian dipakai untuk melinierisasi model yang ada pada Gambar 3.4 dengan bantuan fasilitas yang ada pada simulink/matlab, dan hasilnya dalam bentuk umum model ruang keadaan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.5)$$

dimana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -90.78 & 0 & 90.78 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -90.78 & 0 & 90.78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.209 & -5.209 & 5.209 & -5.209 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.83 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.83 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.83 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3631 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3631 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3631 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3631 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = [\phi \quad \dot{\phi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4]^T$$

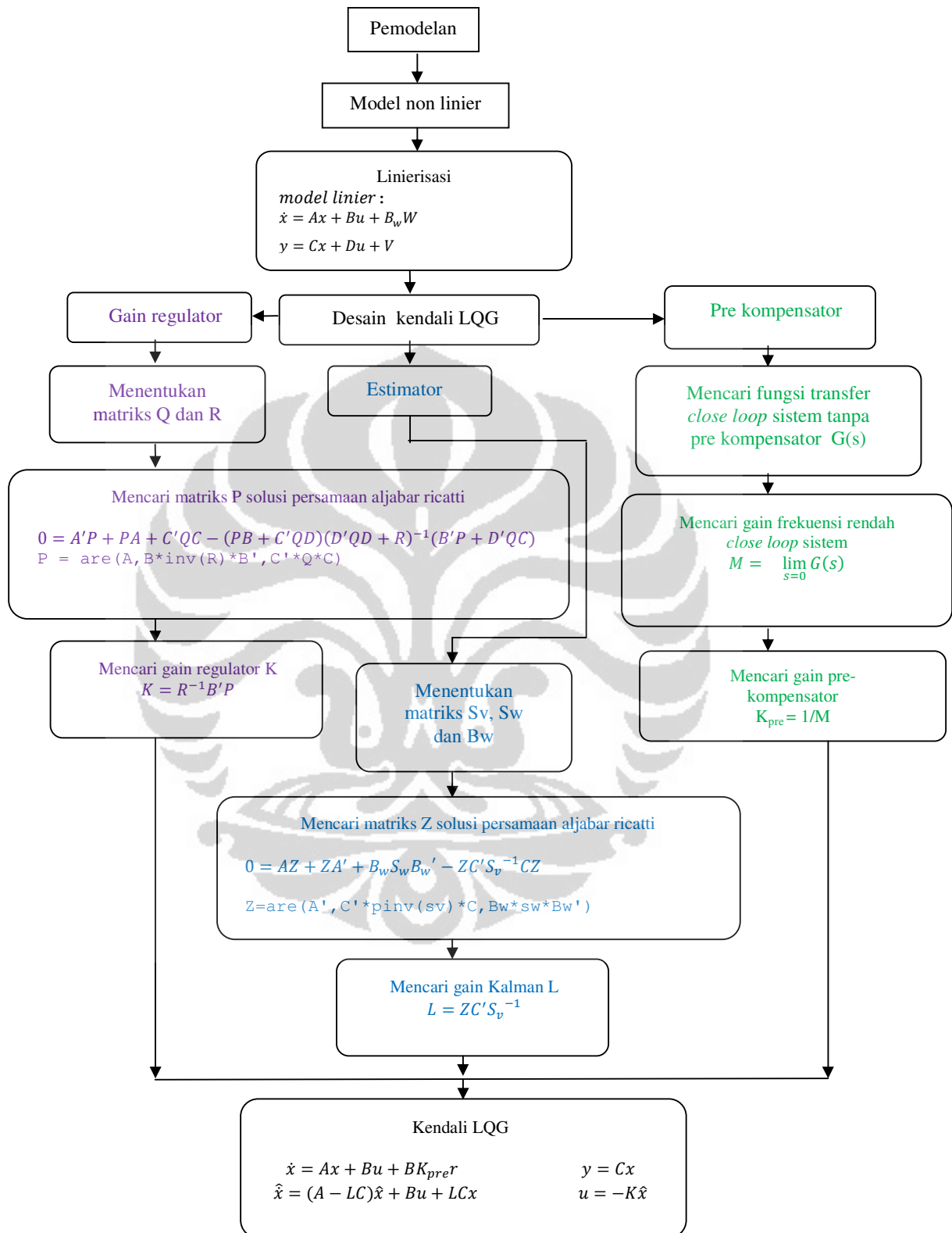
$$Y = [\phi \quad \dot{\phi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi}]^T$$

$$U = [\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3 \quad \Omega_4]^T$$

Kestabilan model gerak rotasi quadrotor dilihat dari nilai eigen matriks A. Nilai eigen dari matrik A adalah:  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -8.83 \ -8.83 \ -8.83 \ -8.83]^T$ .

### 3.2 Perancangan Kendali LQG Untuk Gerak Rotasi Quadrotor.

Kendali LQG gerak rotasi quadrotor didesain dari model linier gerak rotasi quadrotor pada persamaan 3.5. Dari matriks-matrik model linier gerak rotasi tersebut akan didesain kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor. Dalam perancangan kendali LQG ada tiga hal utama yang perlu didesain yaitu; gain *feedback* regulator, estimator/observer variabel keadaan dan pre-kompensator pada masukan referensi/*setpoint*. Gambar 3.5 merupakan diagram alir perancangan kendali LQG.



Gambar 3.5. Diagram alir perancangan kendali LQG.

Perancangan kendali LQG untuk gerak rotasi quadrotor diawali dengan mendesain gain *feedback* regulator (K), membuat estimator/observer variabel keadaan dan terakhir mendesain pre-kompensator agar keluaran (y) sesuai dengan masukan referensi/*setpoint* (r) yang diinginkan.

### 1. Gain *feedback* regulator (K) kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor.

Dalam mencari gain regulator (K), ditentukan terlebih dahulu besarnya matriks pembobot Q dan R, serta mencari nilai P yang merupakan solusi dari persamaan aljabar Riccati pada persamaan 2.31. Matriks Q dan R dicari dengan mencoba-coba nilai matrik Q dan R (*trial and error*) sampai didapat kinerja gain regulator (K) yang sesuai dengan yang diinginkan. Matriks pembobot Q dan R dalam perancangan kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor dalam tesis ini ditentukan sebesar:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.0000625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000625 \end{bmatrix}$$

Besarnya nilai matriks P dicari dengan bantuan perintah simulink/matlab untuk menyelesaikan persamaan aljabar Riccati pada persamaan 2.31. Perintah simulink/matlab yang bisa digunakan adalah:

$$P = \text{are}(A, B * \text{inv}(R) * B', C' * Q * C)$$

Matriks P yang didapat dari menyelesaikan persamaan aljabar Riccati dengan bantuan perintah simulink/matlab adalah:

$$P = \begin{bmatrix} 1.0185 & 0.0186 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0154 & 0.0000 & 0.0154 \\ 0.0186 & 0.0188 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0157 & -0.0000 & 0.0157 \\ -0.0000 & -0.0000 & 1.0185 & 0.0186 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0154 & 0.0000 & 0.0154 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0186 & 0.0188 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0157 & 0.0000 & 0.0157 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 71.5719 & 1.5896 & 0.0911 & -0.0911 & 0.0911 & -0.0911 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.5896 & 1.6078 & 0.0931 & -0.0931 & 0.0931 & -0.0931 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0154 & -0.0157 & 0.0911 & 0.0931 & 0.0337 & -0.0097 & -0.0142 & -0.0097 \\ -0.0154 & -0.0157 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0911 & -0.0931 & -0.0097 & 0.0337 & -0.0097 & -0.0142 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0154 & 0.0157 & 0.0911 & 0.0931 & -0.0142 & -0.0097 & 0.0337 & -0.0097 \\ 0.0154 & 0.0157 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0911 & -0.0931 & -0.0097 & -0.0142 & -0.0097 & 0.0337 \end{bmatrix}$$

Gain *feedback* regulator (K) didapat dengan memasukan nilai R, B dan P ke dalam persamaan 2.30. Perintah simulink/matlab yang bisa digunakan untuk mencari *gain feedback* regulator (K) adalah:

$$K = \text{inv}(R) * B' * P$$

Matriks gain *feedback* regulator (K) yang didapat adalah:

$$K = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0000 & -89.4427 & -91.0953 & 529.1503 & 541.0330 & 195.7564 & -56.5125 & -82.7315 & -56.5125 \\ -89.4427 & -91.0953 & -0.0000 & -0.0000 & -529.1503 & -541.0330 & -56.5125 & 195.7564 & -56.5125 & -82.7315 \\ 0.0000 & 0.0000 & 89.4427 & 91.0953 & 529.1503 & 541.0330 & -82.7315 & -56.5125 & 195.7564 & -56.5125 \\ 89.4427 & 91.0953 & -0.0000 & -0.0000 & -529.1503 & -4541.0330 & -56.5125 & -82.7315 & -56.5125 & 195.7564 \end{bmatrix}$$

## 2. Estimator/observer kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor.

Matriks gain estimator/gain kalman (L) adalah matriks yang perlu didesain dalam perancangan kendali LQG. Untuk mendapatkan gain estimator/gain kalman (L) sebelumnya harus ditentukan terlebih dahulu  $S_v$ ,  $S_w$  dan  $B_w$  agar solusi Z dari persamaan aljabar Ricatti pada persamaan 2.43 dapat dihitung. Penentuan matriks  $S_v$  dan  $S_w$  harus mempertimbangkan pengaruh besarnya matriks  $S_v$  dan  $S_w$  terhadap nilai dari matriks gain estimator/gain kalman (L) agar didapatkan variabel keadaan hasil estimasi ( $\hat{x}$ ) yang sama atau mendekati variabel keadaan yang sebenarnya ( $x$ ). Pada tesis ini *Spectral density* dari *noise*  $S_v$  untuk roll dan pitch ditentukan sebesar  $0.05 \text{ rad}^2/\text{Hz}$ , untuk kecepatan sudut roll dan pitch ditentukan sebesar  $0.05 (\text{rad}/\text{sec})^2 / \text{Hz}$ , sedangkan  $S_v$  untuk yaw sebesar  $0.0005 \text{ rad}^2/\text{Hz}$  dan kecepatan sudut yaw ditentukan sebesar  $0.0005 (\text{rad}/\text{sec})^2 / \text{Hz}$ . *Spectral density* dari semua *disturbance*  $S_w$  ditentukan sebesar  $1 \text{ rad}^2/\text{Hz}$ .



Matriks  $S_v$  dan  $S_w$  yang digunakan adalah:

$$S_v = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 \end{bmatrix}$$

$$S_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks *disturbance*  $B_w$  nilainya ditentukan sama dengan matriks B.

Dengan bantuan perintah simulink/matlab didapat solusi aljabar Ricatti Z pada persamaan 2.43. Perintah simulink/matlab yang bisa digunakan untuk mencari matriks Z adalah:

$$Z = \text{are}(A', C' * \text{pinv}(S_v) * C, B_w * S_w * B_w')$$

Matriks Z yang didapat dari menyelesaikan persamaan aljabar Riccati dengan bantuan perintah simulink/matlab adalah:

$$Z = \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0479 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0001 \\ 0.0479 & 0.6694 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0248 & 0.0001 & 0.0248 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0500 & 0.0479 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0479 & 0.6694 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0248 & -0.0000 & 0.0248 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0005 & 0.0058 & 0.0016 & -0.0016 & 0.0016 & -0.0016 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0248 & 0.0000 & 0.0016 & 0.0065 & 0.0003 & 0.0004 & 0.0003 \\ -0.0001 & -0.0248 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0016 & 0.0003 & 0.0065 & 0.0003 & 0.0004 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0248 & 0.0000 & 0.0016 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0065 & 0.0003 \\ 0.0001 & 0.0248 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0016 & 0.0003 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0065 \end{bmatrix}$$

Matriks gain estimator/gain kalman (L) didapat dengan memasukan nilai matriks C, Z dan  $S_v$  ke dalam persamaan 2.42. Perintah simulink/matlab yang bisa digunakan untuk mencari gain estimator/gain kalman (L) adalah:

$$L = Z * C' * \text{pinv}(S_v)$$

Matriks gain estimator/gain kalman (L) yang didapat adalah:

$$L = \begin{bmatrix} 0.9991 & 0.9576 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.9576 & 13.3875 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.9991 & 0.9576 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.9576 & 13.3875 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.9987 & 0.9484 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.9484 & 11.5406 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0021 & -0.4961 & 0.0169 & 3.2176 \\ -0.0021 & -0.4961 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0169 & -3.2176 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0021 & 0.4961 & 0.0169 & 3.2176 \\ 0.0021 & 0.4961 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0169 & -3.2176 \end{bmatrix}$$

### 3. Pre-kompensator ( $K_{pre}$ ) kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor.

Pre komensator didapat dengan memasukan nilai matriks A,B, C, K dan L ke dalam persamaan 2.46. Matriks pre-kompensator didapat dengan menghitung terlebih dahulu gain frekuensi rendah sistem loop tertutup ( $M$ ) kendali LQG, persamaan gain frekuensi rendah sistem loop tertutup pada persamaan 2.45 dicari dengan bantuan perintah simulink/matlab. Perintah simulink/matlab yang bisa digunakan untuk mencari matriks gain frekuensi rendah sistem loop tertutup ( $M$ ) adalah:

$$M = C * \text{inv}(-A + B * K * \text{inv}(-A + L * C + B * K) * L * C) * B$$

Matriks pre-kompensator ( $K_{pre}$ ) besarnya adalah  $1/M$  dan Perintah simulink/matlab yang bisa digunakan untuk mencari matriks pre-kompensator ( $K_{pre}$ ) adalah:

$$K_{pre} = \text{pinv}(M)$$

Matriks gain pre-kompensator untuk enam masukan referensi yang didapat adalah:

$$K_{pre} = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & -2.3859 & 0 & 16.5361 & 0 \\ -2.3859 & 0.0000 & -0.0000 & 0 & -16.5361 & 0 \\ 0.0000 & -0.0000 & -2.3859 & 0 & 16.5361 & 0 \\ 2.3859 & 0.0000 & -0.0000 & 0 & -16.5361 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena hanya tiga masukan referensi yang dipakai yaitu sudut roll, pitch dan yaw maka gain kompensator untuk enam masukan referensi yang didapat diubah dahulu dengan menggunakan perintah simulink matlab:

$$K_m = [K_{pre}(:,1) \quad K_{pre}(:,3) \quad K_{pre}(:,5)]$$

Matriks gain pre-kompensator untuk tiga masukan referensi ( $K_m$ ) adalah:

$$K_m = \begin{bmatrix} -0.0000 & -2.3859 & 16.5361 \\ -2.3859 & -0.0000 & -16.5361 \\ 0.0000 & -2.3859 & 16.5361 \\ 2.3859 & -0.0000 & -16.5361 \end{bmatrix}$$

### 3.3 Kestabilan Kendali LQG untuk Model Gerak Rotasi Quadrotor.

Kestabilan loop tertutup kendali LQG dapat diamati dengan mencari nilai eigen dari persamaan 2.56. Nilai eigen pada persamaan 2.56 merupakan gabungan dari nilai eigen dinamika *feedback* regulator ( $A - BK$ ) dan nilai eigen dari dinamika estimator ( $A - LC$ ). Nilai eigen dicari dengan bantuan perintah simulink/matlab, Perintah simulink/matlab yang bisa digunakan untuk mencari nilai eigen *feedback* regulator dan nilai eigen estimator adalah:

```
eigen_regulator = eig(A-B*K)
```

```
eigen_estimator = eig(A-L*C)
```

Nilai eigen yang didapat adalah:

$$\text{Nilai eigen regulator} = \begin{bmatrix} -54.4745 + 54.1201i \\ -54.4745 - 54.1201i \\ -44.9544 + 44.5243i \\ -44.9544 - 44.5243i \\ -54.4745 + 54.1201i \\ -54.4745 - 54.1201i \\ -8.8300 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nilai eigen estimator} = \begin{bmatrix} -8.8300 \\ -10.1840 + 8.0765i \\ -10.1840 - 8.0765i \\ -11.1079 + 9.2142i \\ -11.1079 - 9.2142i \\ -11.1079 + 9.2142i \\ -11.1079 - 9.2142i \\ -1.0014 \\ -1.0009 \\ -1.0009 \end{bmatrix}$$

## BAB 4

### SIMULASI DAN ANALISA HASIL SIMULASI KENDALI LQG

Bab empat merupakan bab simulasi untuk menguji kinerja kendali LQG yang telah dirancang pada bab tiga. Bab empat terdiri dari dua sub bab, yaitu sub bab simulasi kendali LQG untuk sistem gerak rotasi quadrotor tanpa masukan referensi (*setpoint*) dan sub bab simulasi dengan *setpoint*.

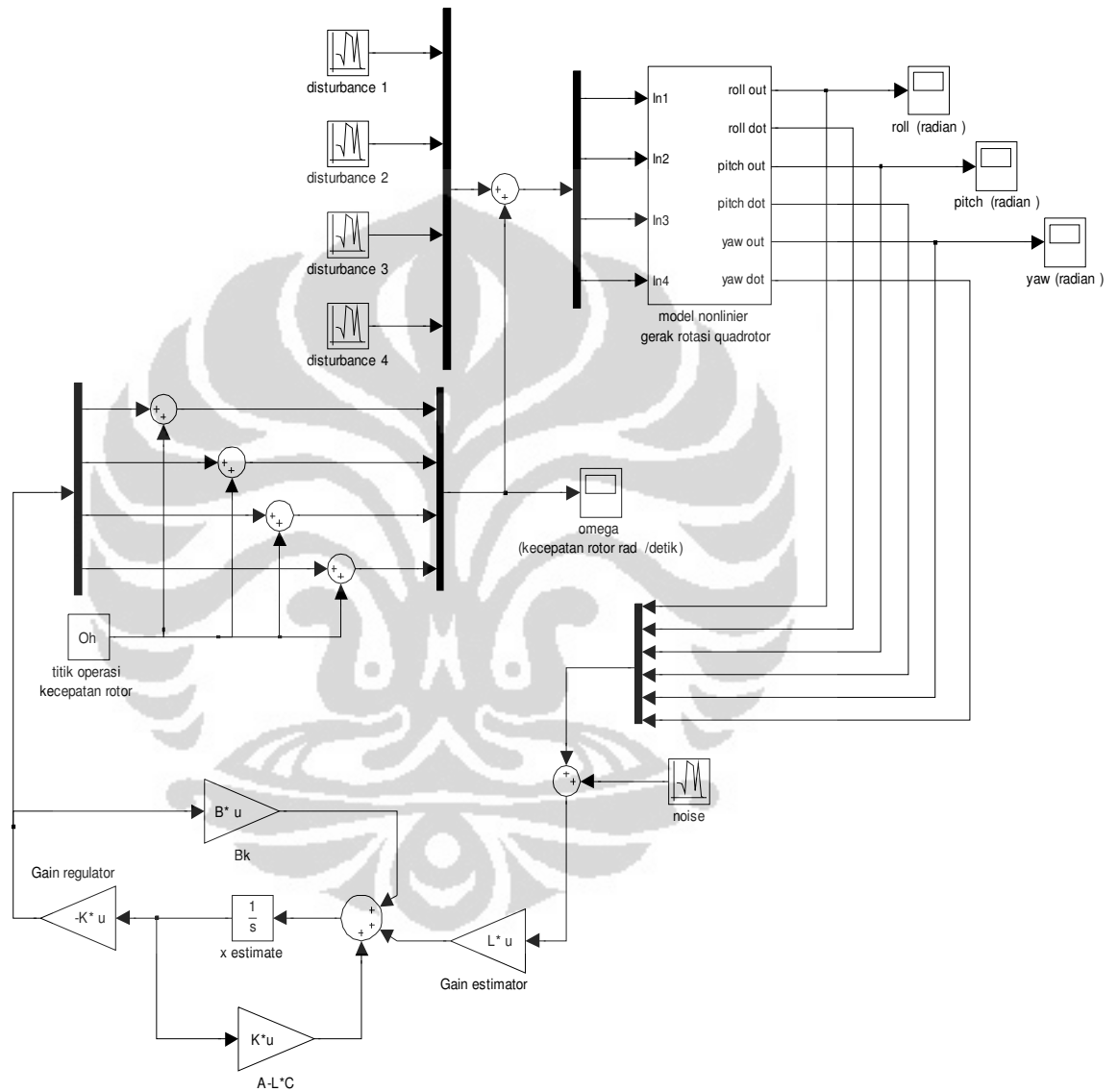
#### 4.1 Simulasi Kendali LQG Untuk Model Gerak Rotasi Quadrotor Tanpa *Setpoint*.

Dalam simulasi ini ada dua pengujian yaitu pengujian kinerja kendali LQG dalam menstabilkan sudut gerak rotasi quadrotor dan pengujian kinerja estimator kendali LQG dalam mengestimasi variabel keadaan dari keluaran sudut yang telah dipengaruhi *noise* dan *disturbance*.

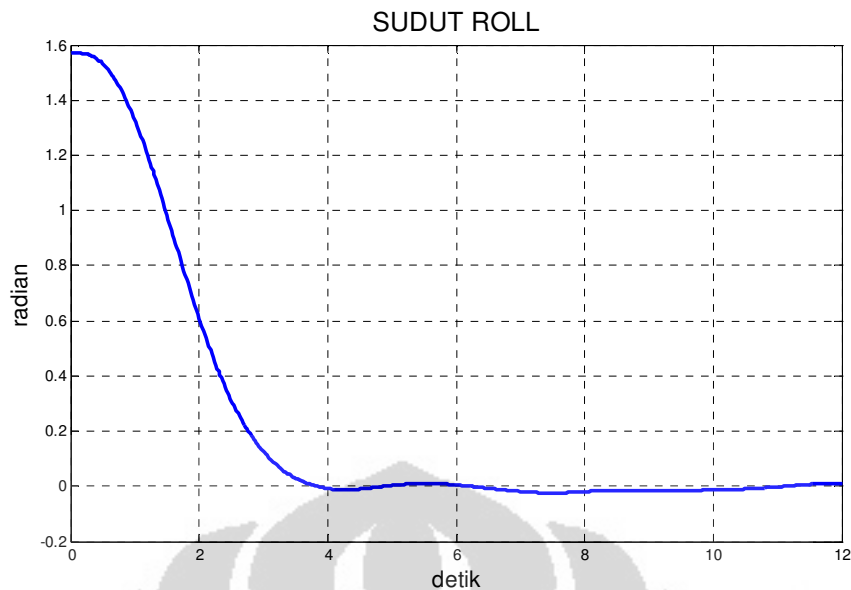
##### 4.1.1 Pengujian kinerja kendali LQG dalam menstabilkan sudut gerak rotasi quadrotor.

Pada pengujian ini digunakan hasil simulasi penstabilan sudut gerak rotasi quadrotor OS4 EPFL dengan kendali LQ metode Pearson [3] sebagai pembandingan kinerja kendali LQG yang telah dirancang pada bab tiga. Kondisi awal pada masing-masing sudut ditentukan sebesar  $\frac{\pi}{2}$  radian untuk sudut roll dan  $-\frac{\pi}{2}$  radian untuk sudut pitch dan yaw. Kondisi awal masing-masing sudut dibuat sama seperti kondisi awal pada simulasi pembandingan agar kedua kendali tersebut dapat dibandingkan kinerjanya dalam menstabilkan sudut gerak rotasi quadrotor. *Noise* yang diberikan pada sudut roll dan pitch kendali LQG berupa sinyal random dengan *variance* 0.05 radian, sedangkan *noise* untuk sudut yaw mempunyai *variance* sebesar 0.0005 radian. *Disturbance* yang diberikan pada kendali LQG berupa sinyal random dengan *variance* 1 radian/detik. Besarnya *noise* dan *disturbance* yang diberikan pada kendali LQG disesuaikan dengan matriks  $S_v$  dan  $S_w$  yang digunakan pada perancangan estimator. Gambar 4.1 merupakan gambar blok simulasi kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor tanpa masukan referensi (*setpoint*) yang akan digunakan dalam simulasi ini. Hasil simulasi

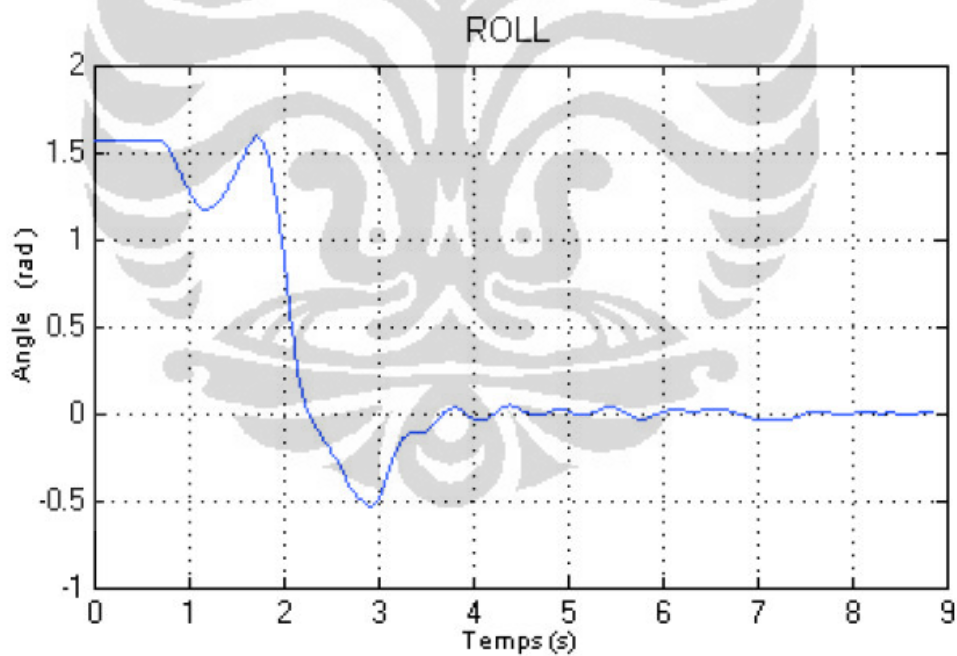
penstabilan sudut roll, pitch dan yaw masing-masing ditunjukkan pada gambar 4.2, gambar 4.4 dan gambar 4.6.



Gambar 4.1. Blok simulasi kendali LQG gerak rotasi quadrotor tanpa masukan referensi/setpoint.



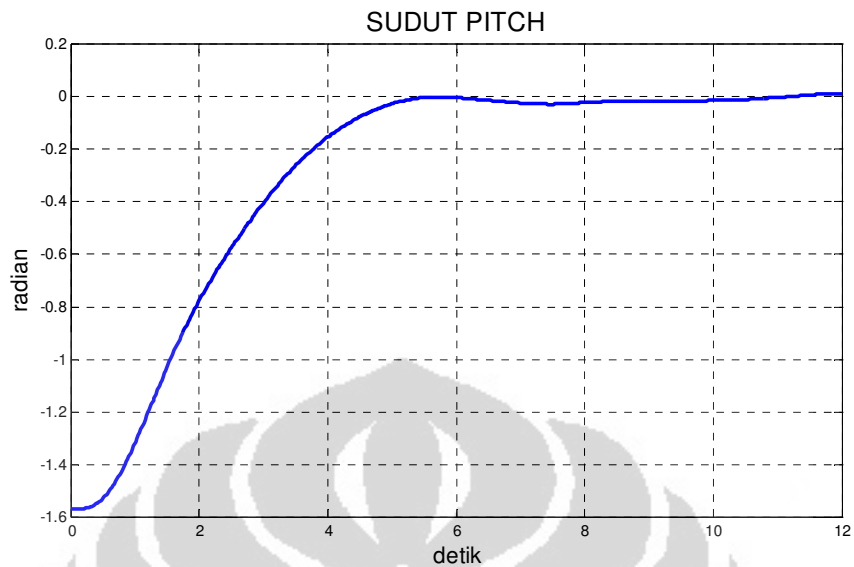
Gambar 4.2. Stabilisasi sudut roll hasil simulasi kendali LQG



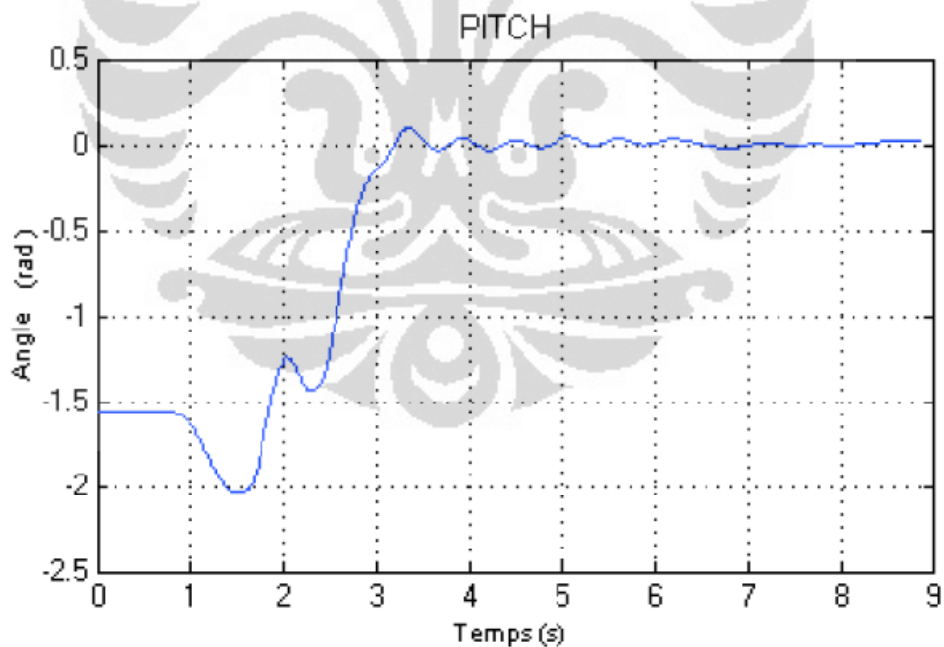
Gambar 4.3. Stabilisasi sudut roll hasil simulasi kendali LQ metode Pearson [3].

Hasil simulasi pada gambar 4.2 menunjukkan waktu yang dibutuhkan sudut roll untuk mencapai keadaan stabil sekitar 4 detik sama seperti hasil simulasi kendali LQ metode Pearson pada gambar 4.3. Hasil simulasi kendali LQG menunjukkan

*overshoot* yang terjadi sangat kecil jika dibandingkan dengan *overshoot* hasil simulasi kendali LQ metode Pearson.



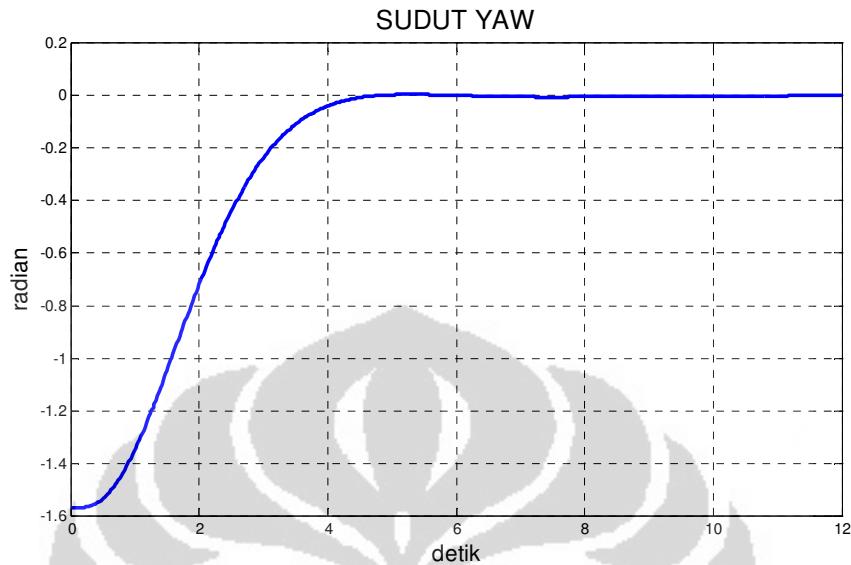
Gambar 4.4. Stabilisasi sudut pitch hasil simulasi kendali LQG.



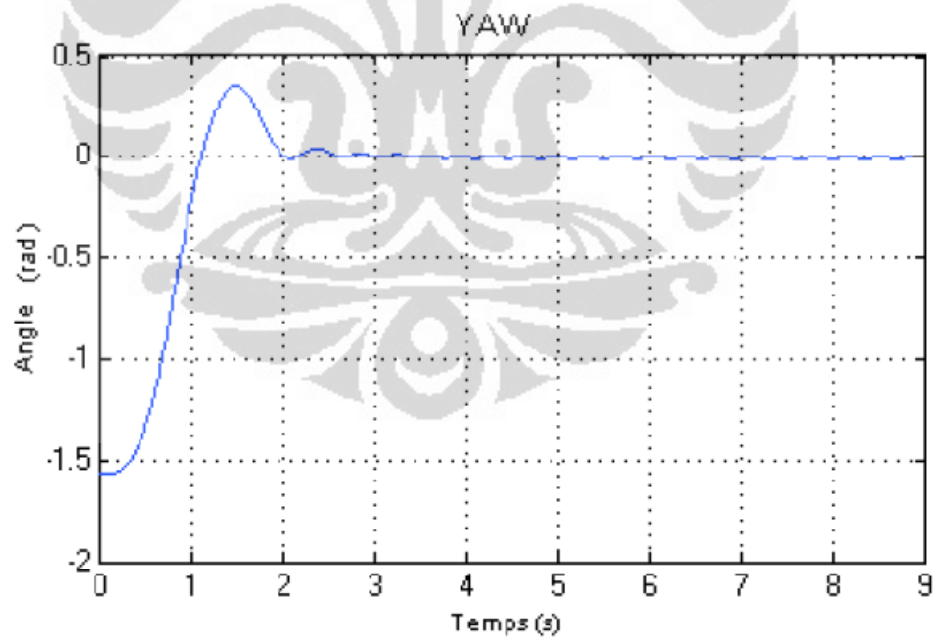
Gambar 4.5. Stabilisasi sudut pitch hasil simulasi kendali LQ metode Pearson [3].

Hasil simulasi pada gambar 4.4 menunjukkan kinerja kendali LQG dalam menstabilkan sudut pitch lebih lambat daripada kendali LQ metode Pearson pada

gambar 4.5. Waktu yang diperlukan kendali LQG sekitar 5 detik dalam menstabilkan sudut pitch sedangkan dengan kendali LQ metode Pearson sekitar 3 detik.



Gambar 4.6. Stabilisasi sudut yaw hasil simulasi kendali LQG



Gambar 4.7. Stabilisasi sudut yaw hasil simulasi kendali LQ metode Pearson [3].

Waktu yang diperlukan kendali LQG dalam menstabilkan sudut yaw sekitar 4 detik seperti terlihat pada gambar 4.6, lebih lambat dari kendali LQ metode



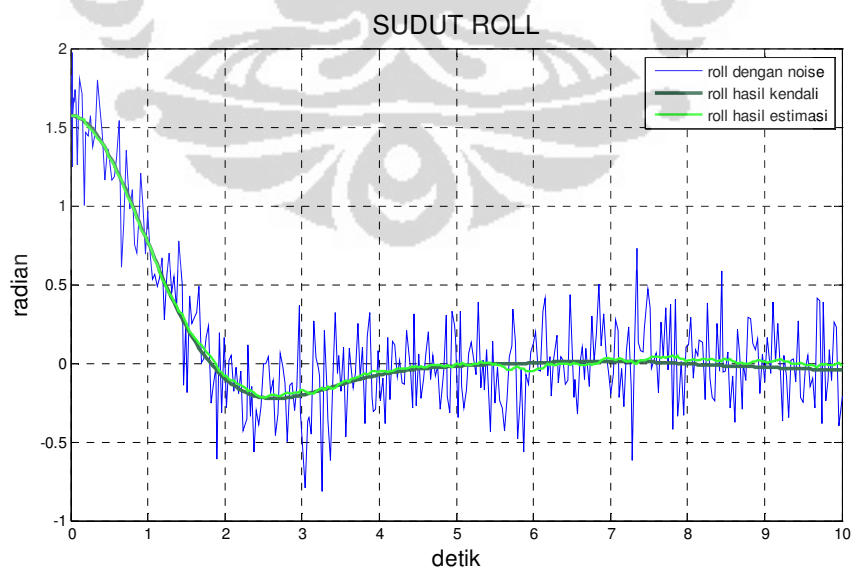
Pearson yang hanya membutuhkan waktu sekitar 2 detik, tetapi pada kendali LQG tidak ada *overshoot* yang terjadi.

#### 4.1.2 Pengujian kinerja estimator/observer dalam mengestimasi variabel keadaan dari keluaran yang dipengaruhi *noise* dan *disturbance*.

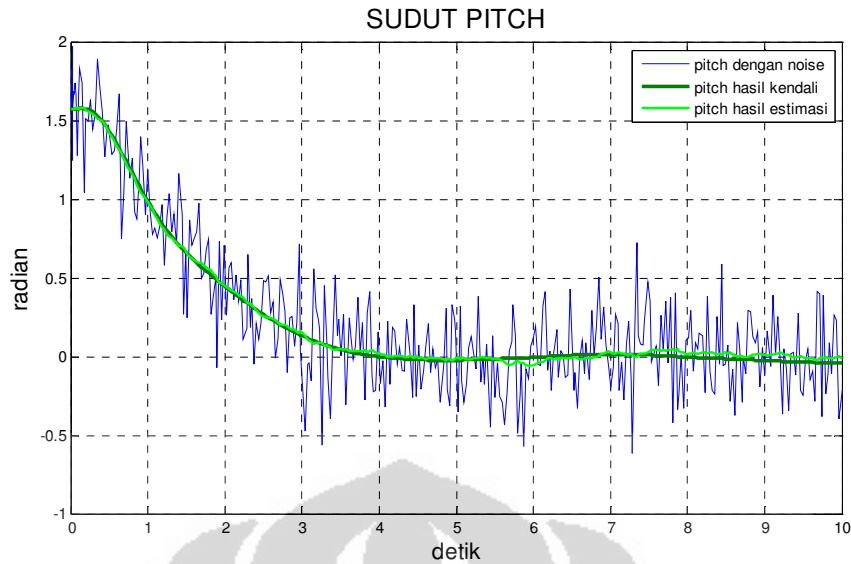
Pengujian ini dilakukan dengan memberikan *noise* dan *disturbance* pada sistem kendali LQG dengan nilai tertentu. Penambahan *noise* dilakukan pada keluaran sudut gerak rotasi quadrotor, sedangkan penambahan *disturbance* dilakukan pada masukan kecepatan rotor.

##### 1. Pengujian kinerja estimator terhadap *noise*

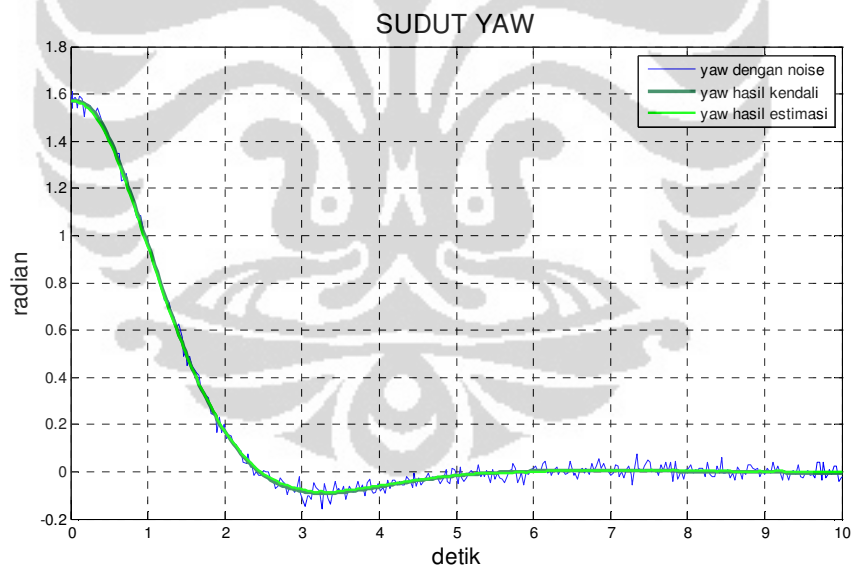
Pengujian ini dilakukan dengan memberikan *noise* pengukuran pada keluaran sudut gerak rotasi. *Noise* yang diberikan berupa sinyal random dengan *variance* sebesar 0.05 radian dan *mean* 0 radian pada sudut roll dan pitch sedangkan *noise* pada sudut yaw *noise* yang diberikan mempunyai *variance* sebesar 0.0005 radian dan *mean* 0 radian. Besarnya *noise* pada pengujian disesuaikan dengan matriks  $S_v$  pada perancangan estimator. Hasil simulasi sudut roll, pitch dan yaw ditunjukkan pada gambar 4.8, gambar 4.9 dan gambar 4.10.



Gambar 4.8. Sudut roll hasil simulasi dengan *noise* pengukuran.



Gambar 4.9. Sudut pitch hasil simulasi dengan *noise* pengukuran.

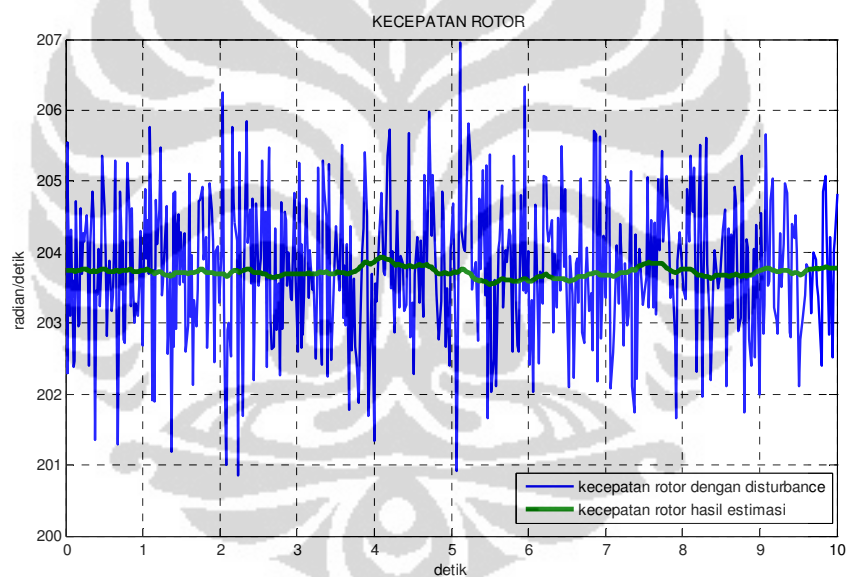


Gambar 4.10. Sudut yaw hasil simulasi dengan *noise* pengukuran.

Hasil simulasi menunjukkan estimator/observer mampu mengestimasi keluaran sudut yang dipengaruhi *noise* dengan baik, sudut hasil estimasi hampir mendekati sudut aktual yang belum dipengaruhi *noise*.

## 2. Pengujian kinerja estimator terhadap *disturbance*.

Pengujian ini dilakukan dengan memberikan *disturbance* pada kecepatan rotor masukan sistem gerak rotasi quadrotor. Pengujian dilakukan pada satu rotor yaitu rotor satu karena semua rotor mempunyai spesifikasi yang sama jadi kinerja estimator dalam mengestimasi kecepatan rotor satu yang dipengaruhi *disturbance* bisa mewakili kinerja estimator dalam mengestimasi kecepatan rotor yang dipengaruhi *disturbance* pada ketiga rotor yang lain. *Disturbance* yang diberikan berupa sinyal random dengan *variance* sebesar 1 radian/detik dan *mean* 0 radian/detik. Besarnya *disturbance* yang diberikan disesuaikan dengan matriks  $S_w$  pada perancangan estimator. Hasil simulasi pengujian ini ditunjukkan pada gambar 4.11.

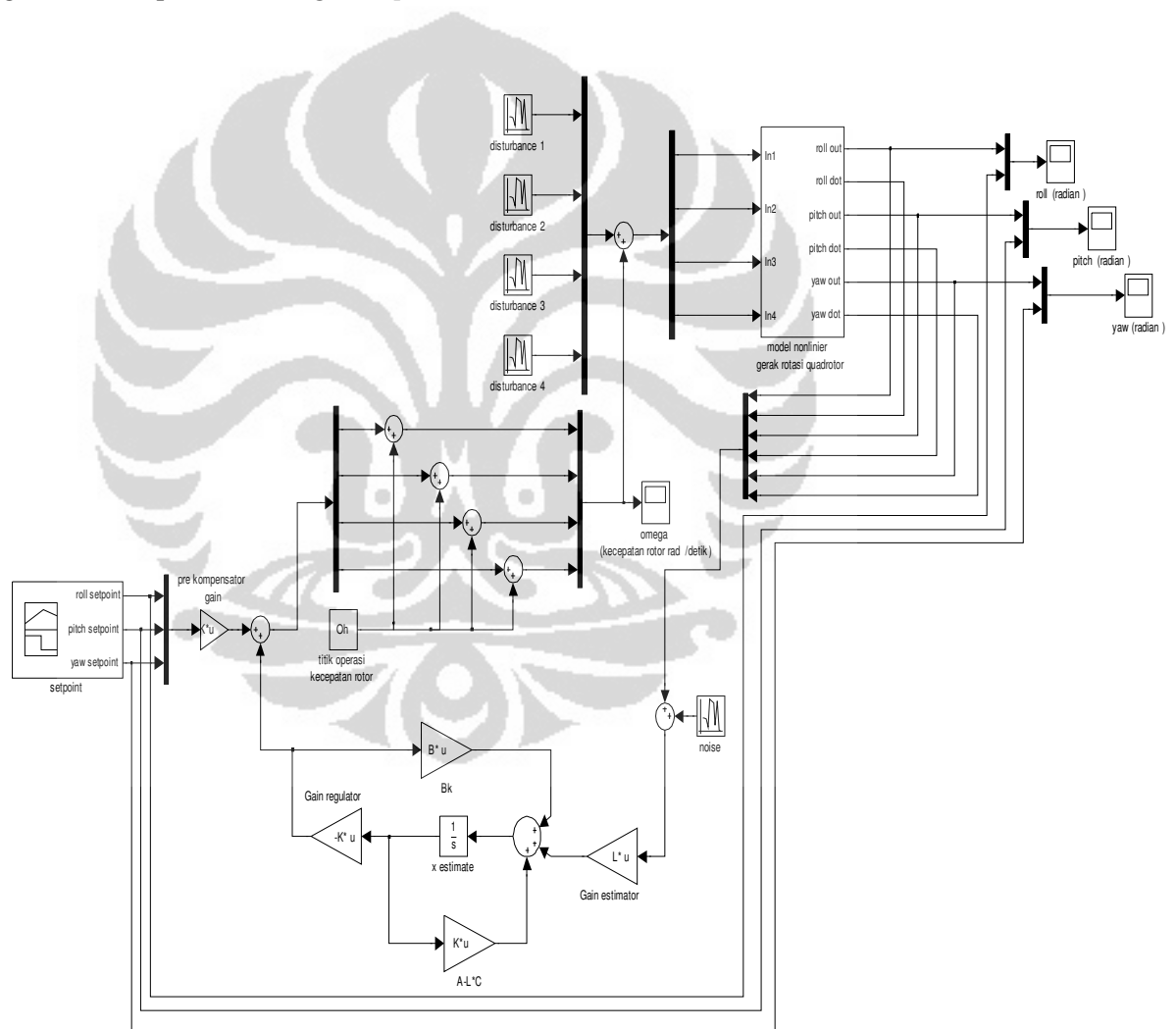


Gambar 4.11. Kecepatan rotor dengan *disturbance* hasil simulasi.

Hasil estimasi kecepatan rotor dari kecepatan rotor yang dipengaruhi *disturbance* menunjukkan hasil yang cukup baik, kecepatan rotor hasil estimasi masih disekitar titik operasi kecepatan rotor yaitu pada 203.7425 radian/detik.

## 4.2 Simulasi Kendali LQG Untuk Modek Gerak Rotasi Quadrotor Dengan *Setpoint*.

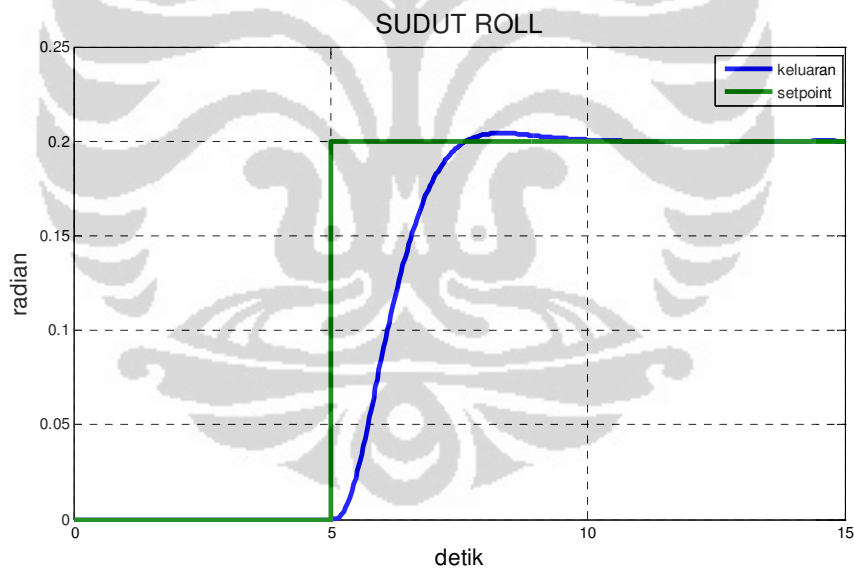
Pada simulasi kendali LQG dengan *setpoint* ini, dilakukan dua pengujian. Pengujian pertama bertujuan untuk menguji kinerja kendali LQG dalam merespon *setpoint* sudut gerak rotasi quadrotor yang diberikan, sedangkan pengujian kedua bertujuan untuk menguji kinerja respon kendali LQG terhadap pengaruh interaksi antar sudut gerak rotasi quadrotor. Simulasi ini menggunakan blok simulasi pada gambar 4.12 yaitu blok simulasi kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor dengan *setpoint*.



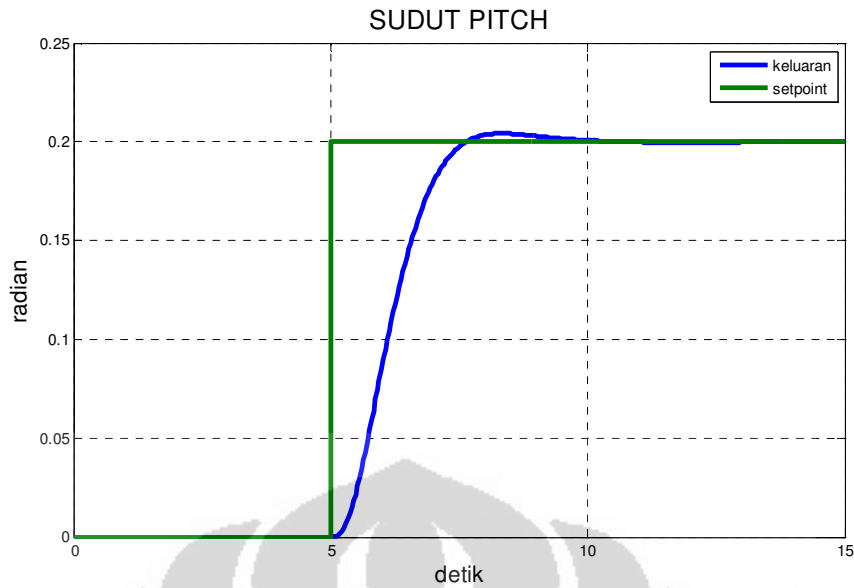
Gambar 4.12. Blok simulasi kendali LQG gerak rotasi quadrotor dengan masukan referensi/*setpoint*.

#### 4.2.1 Kinerja kendali LQG terhadap masukan referensi/setpoint yang diberikan.

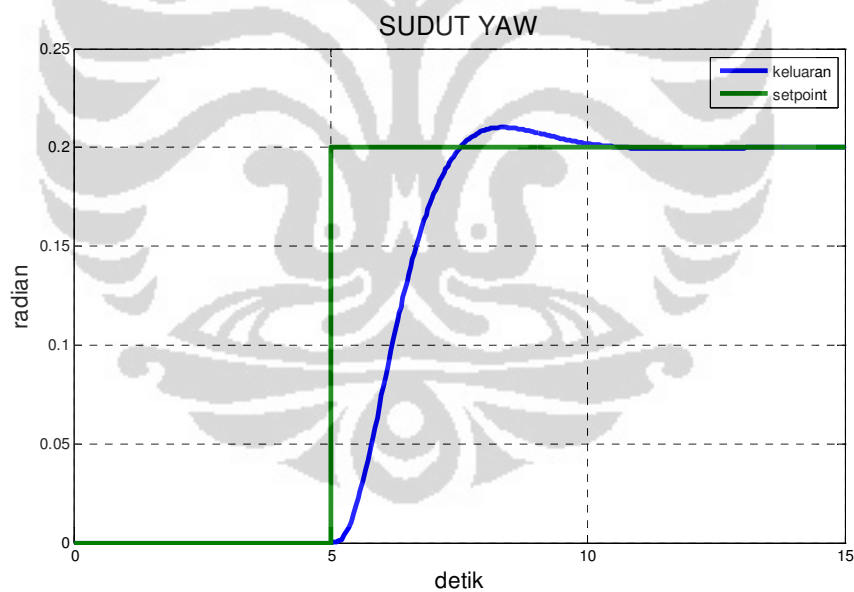
Pengujian kinerja kendali LQG pada simulasi ini dilakukan dengan memberikan *setpoint* berupa fungsi step sebesar 0,2 radian pada masing-masing sudut gerak rotasi quadrotor. Kinerja kendali LQG yang diamati dalam simulasi ini adalah *setling time* dan *maximum percent overshoot* tanpa pengaruh *noise* dan *disturbance* dari respon kendali LQG. Kriteria *setling time* yang dipakai adalah kriteria 5%, *setling time* respon kendali LQG didapat ketika selisih respon sudut dengan *setpoint* sudah mencapai  $\pm 5\%$  dari besarnya *setpoint*. Karena *setpoint* yang diberikan berupa fungsi step sebesar 0,2 radian maka *setling time* didapat ketika respon sudut gerak rotasi sudah mencapai 0,19 radian sampai 0,21 radian. Hasil simulasi sudut roll, pitch dan yaw hasil simulasi ini ditunjukkan pada gambar 4.13, gambar 4.14 dan gambar 4.15.



Gambar 4.13. Sudut roll hasil simulasi kendali LQG dengan setpoint.



Gambar 4.14. Sudut pitch hasil simulasi kendali LQG dengan setpoint.



Gambar 4.15. Sudut yaw hasil simulasi kendali LQG dengan setpoint.

Berdasarkan hasil simulasi sudut roll dan pitch pada gambar 4.13 dan gambar 4.14 didapat *setling time* sudut roll dan pitch sebesar 2,23 detik dan mempunyai *maximum percent overshoot* sebesar 2 % , sedangkan *setling time* untuk sudut

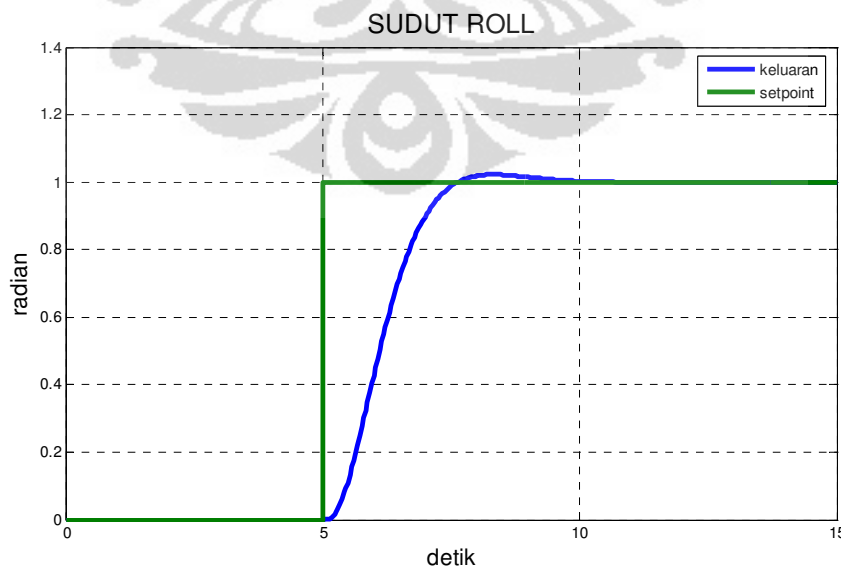
yaw sebesar 2,25 detik dan *maximum percent overshoot* sebesar 5 % seperti ditunjukkan pada gambar 4.15.

#### 4.2.2 Pengujian pengaruh interaksi antar sudut gerak rotasi quadrotor terhadap kinerja kendali LQG

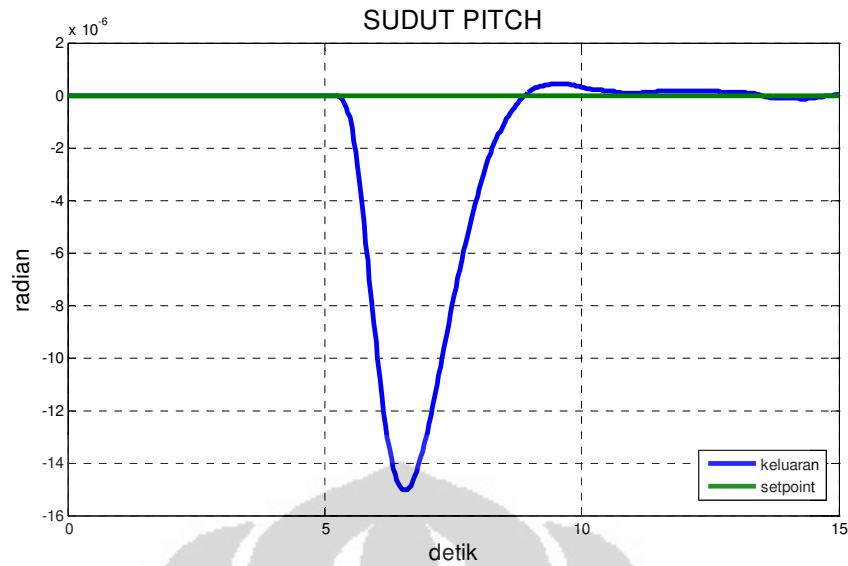
Pengaruh interaksi antar sudut gerak rotasi diamati dengan memberikan perubahan pada *setpoint* salah satu sudut sedangkan *setpoint* kedua sudut yang lain dibuat tetap atau tidak diberikan *setpoint* (*setpoint* 0 radian). Perubahan *setpoint* sudut dilakukan secara bergantian pada ketiga sudut gerak rotasi quadrotor. Simulasi ini dilakukan tanpa memberikan *noise* dan *disturbance* pada kendali LQG, agar interaksi antar sudut yang terjadi tidak dipengaruhi oleh *noise* maupun *disturbance*. Berikut ini tiga simulasi yang dilakukan dalam pengujian pengaruh interaksi antar sudut gerak rotasi terhadap kinerja kendali LQG:

##### 1. Pengaruh perubahan sudut roll terhadap sudut pitch dan yaw.

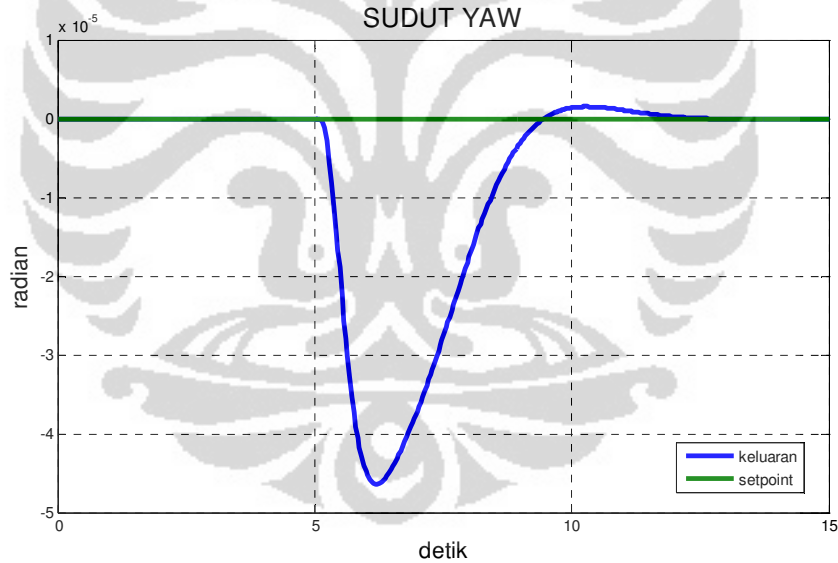
Perubahan sudut roll pada simulasi ini diubah dari 0 radian menuju 1 radian pada detik ke 5, sedangkan sudut pitch dan yaw dibuat tetap pada 0 radian. Perubahan sudut roll yang dilakukan ditunjukkan pada gambar 4.16, sedangkan pengaruh perubahan sudut roll terhadap sudut pitch dan yaw ditunjukkan pada gambar 4.17 dan gambar 4.18.



Gambar 4.16. Perubahan sudut roll dari 0 sampai 1 radian.



Gambar 4.17. Sudut pitch akibat perubahan sudut roll.



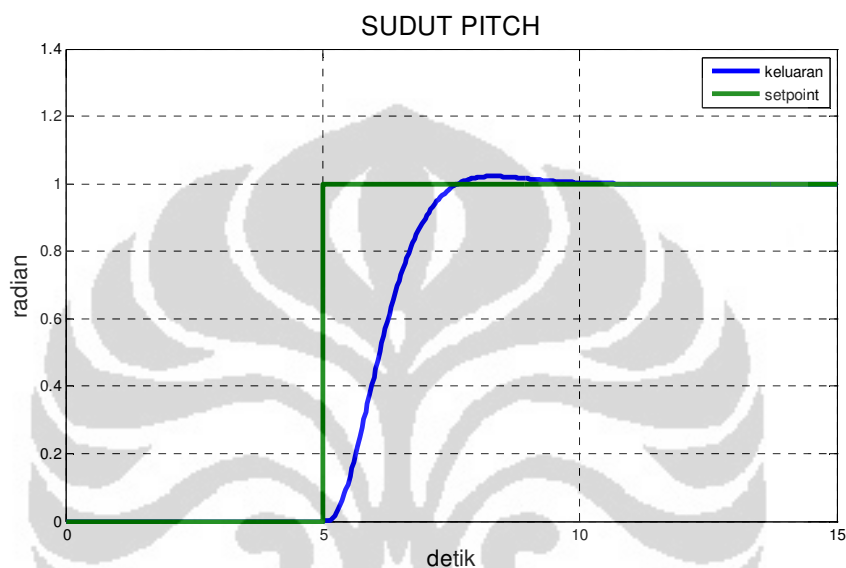
Gambar 4.18. Sudut yaw akibat perubahan sudut roll.

Perubahan sudut roll dari 0 sampai 1 radian mengakibatkan perubahan sudut pitch maksimal sebesar  $-15 \times 10^{-6}$  radian (berlawanan arah dengan sudut roll) seperti terlihat pada gambar 4.17, sedangkan perubahan sudut yaw yang terjadi maksimal sebesar  $-4,65 \times 10^{-5}$  radian (berlawanan arah dengan sudut roll) seperti terlihat pada gambar 4.18.

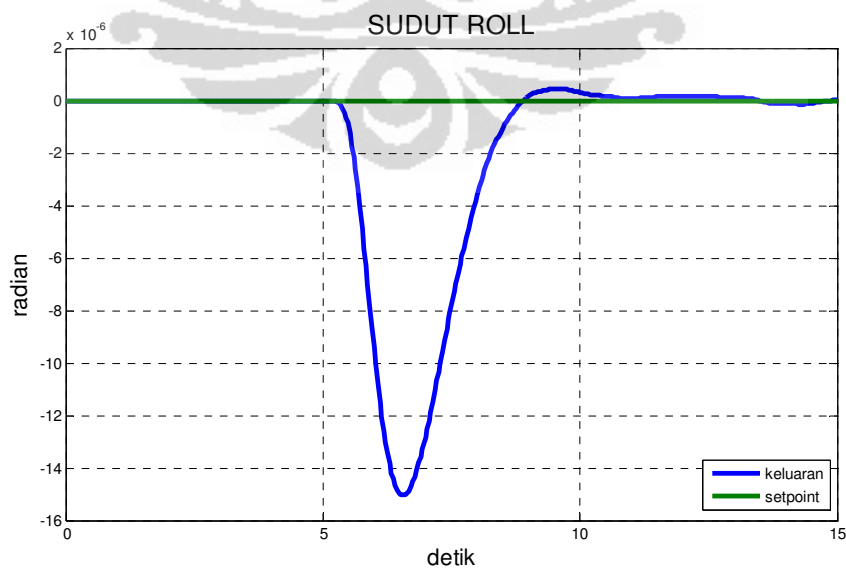


## 2. Pengaruh perubahan sudut pitch terhadap sudut roll dan yaw.

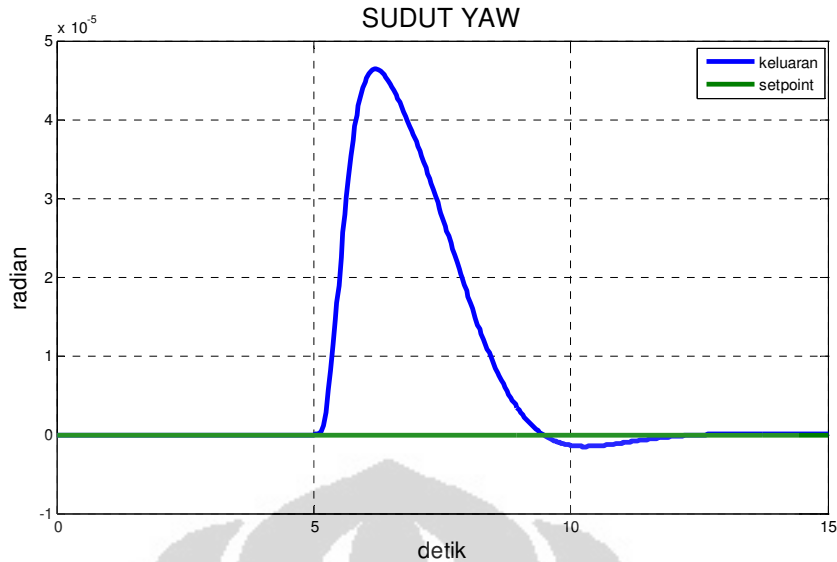
Besarnya perubahan sudut pitch yang dilakukan sama dengan besarnya perubahan sudut roll pada simulasi pengujian sebelumnya, yaitu dengan memberikan *setpoint* berupa fungsi step sebesar 1 radian. Gambar 4.19 merupakan perubahan sudut pitch yang dilakukan untuk pengujian, sedangkan gambar 4.20 dan gambar 4.21 merupakan pengaruh perubahan sudut pitch terhadap sudut roll dan sudut yaw.



Gambar 4.19. Perubahan sudut pitch dari 0 sampai 1 radian.



Gambar 4.20. Sudut roll akibat perubahan sudut pitch.

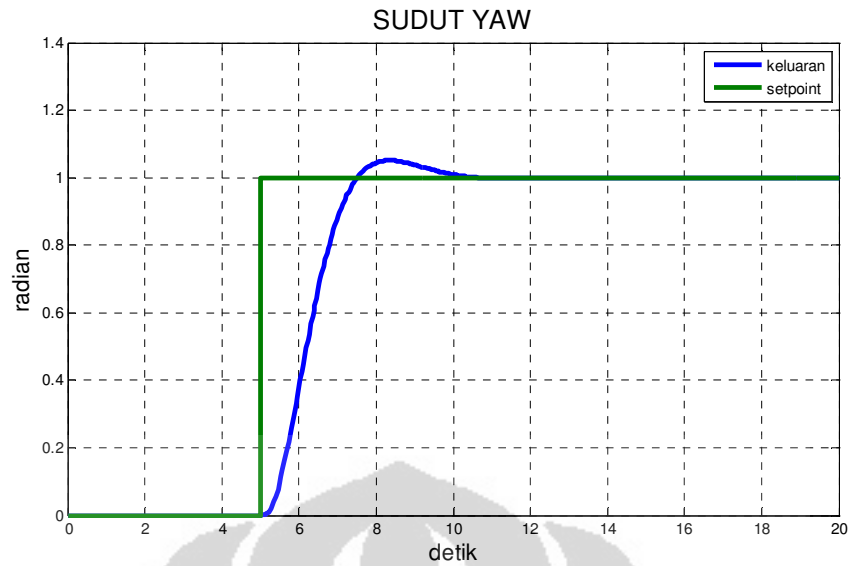


Gambar 4.21. Sudut yaw akibat perubahan sudut pitch.

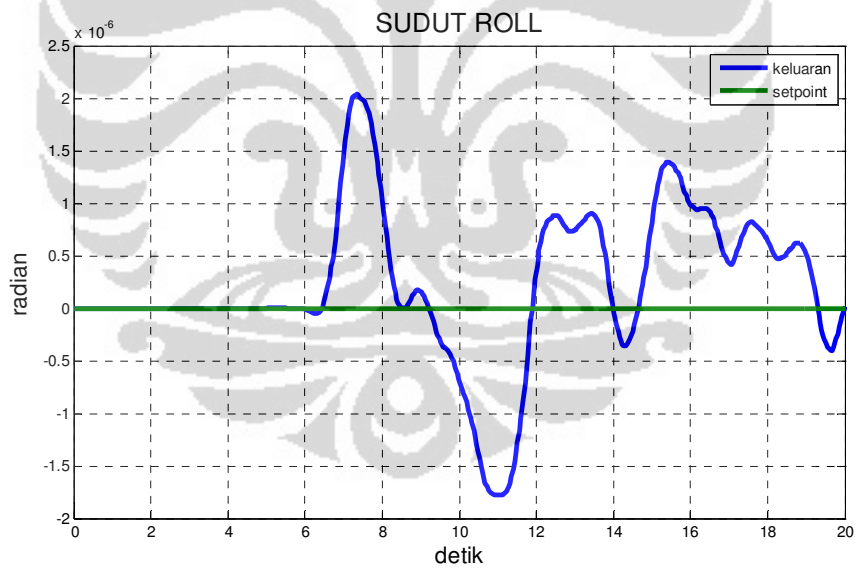
Perubahan sudut roll yang terjadi akibat pengaruh perubahan sudut pitch dari 0 sampai dengan 1 radian adalah maksimal sebesar  $-15 \times 10^{-6}$  radian (berlawanan arah dengan sudut roll) seperti terlihat pada gambar 4.20, sedangkan perubahan sudut yaw akibat pengaruh perubahan sudut pitch maksimal sebesar  $4,65 \times 10^{-5}$  radian (searah dengan sudut roll) seperti ditunjukkan pada gambar 4.21.

### 3. Pengaruh perubahan sudut yaw terhadap sudut roll dan pitch.

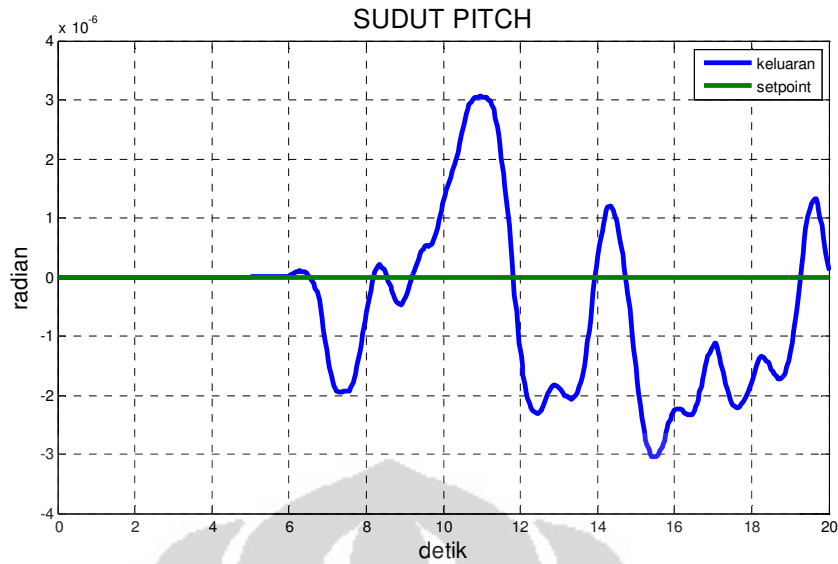
Sama seperti dua pengujian interaksi antar sudut sebelumnya, sudut yaw juga diberi *setpoint* berupa fungsi step sebesar 1 radian. Perubahan sudut yaw yang dilakukan ditunjukkan pada gambar 4.22, sedangkan pengaruh perubahan sudut yaw terhadap sudut roll dan sudut pitch ditunjukkan pada gambar 4.23 dan 4.24.



Gambar 4.22. Perubahan sudut yaw dari 0 sampai 1 radian.



Gambar 4.23. Sudut roll akibat perubahan sudut yaw.



Gambar 4.24. Sudut pitch akibat perubahan sudut yaw.

Perubahan sudut yaw dari 0 sampai dengan 1 radian mengakibatkan adanya osilasi pada sudut roll dan pitch. Sudut roll berosilasi pada titik  $\pm 2 \times 10^{-6}$  radian seperti ditunjukkan pada gambar 4.23, sedangkan sudut pitch berosilasi pada titik  $\pm 2 \times 10^{-6}$  radian seperti ditunjukkan pada gambar 4.24.

## BAB 5 KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan dalam bab-bab sebelumnya dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Telah dirancang kendali LQG untuk pengendalian gerak rotasi quadrotor. Kinerja pengendali telah dipastikan melalui simulasi model. Dalam perancangan kendali LQG, pemilihan matriks bobot Q dan R yang tepat menjadi kunci didapatkannya pengendali yang baik. Dalam penelitian ini, matriks Q dan R dalam kendali LQG sebesar:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.0000625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000625 \end{bmatrix}$$

Dengan matriks ini, kendali LQG yang dirancang mampu menstabilkan sudut roll, pitch dan yaw model gerak rotasi quadrotor dengan enam keluaran.

2. Hasil simulasi stabilisasi sudut gerak rotasi quadrotor kendali LQG yang telah dirancang menunjukkan hasil yang hampir sama dengan hasil simulasi stabilisasi sudut gerak rotasi quadrotor OS4 dengan kendali LQ metode Pearson pada paper; *PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor* yang dibuat oleh Samir Bouabdallah, Andre Noth dan Roland Siegwart [3]. Sudut roll hasil kendali LQG mencapai titik stabil memerlukan waktu sekitar 4 detik sama dengan sudut roll hasil kendali LQ metode Pearson, *overshoot* yang terjadi pada sudut roll hasil simulasi LQG jauh lebih kecil dibandingkan hasil simulasi LQ metode Pearson. Sudut pitch mencapai titik stabil sekitar 5 detik, lebih lambat dari hasil kendali LQ metode Pearson yang sekitar 3 detik, sedangkan sudut yaw mencapai titik stabil

sekitar 4 detik, lebih lambat dari hasil kendali LQ metode Pearson yang sekitar 2 detik, tetapi pada LQ metode Pearson terjadi *overshoot* yang cukup besar.

- Berdasarkan pengujian tanpa *noise* dan *disturbance* yang dilakukan, sistem kendali LQG untuk model gerak rotasi quadrotor yang dirancang mempunyai *setling time* sebesar 2,23 detik untuk sudut roll dan pitch, serta 2,25 detik untuk sudut yaw. *Maximum percent overshoot* sebesar 2 % untuk sudut roll dan pitch, serta 5% untuk sudut yaw.
- Estimator/observer variabel keadaan yang dirancang dengan matriks  $S_v$  dan  $S_w$  sebesar:

$$S_v = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 \end{bmatrix}$$

$$S_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mampu mengestimasi variabel keadaan dari keluaran *plant* yang dipengaruhi oleh *noise* dan *disturbance* yang diberikan dalam simulasi pengujian.

## DAFTAR REFERENSI

- [1] Bouabdallah, Samir, *design and control of quadrotors with application to autonomous flying*, École Polytechnique Federale de Lausanne (EPFL), Lausanne 2007.
- [2] Bouabdallah, S., Becker, M., De Perrots, V., dan Siegewart, R., *Toward Obstacle Avoidance on Quadrotors*, Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME 2007), Brazil, 26 Februari - 2 Maret, 2007.
- [3] Bouabdallah, S., Noth, A., dan Siegewart, R., *PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor*. Autonomous System Laboratory Swiss Federal Institute of Technology Lausanne, Switzerland.
- [4] H. Voos & B. Nourghassemi, *Nonlinear Control of Stabilized Flight and Landing for Quadrotor UAVs*, Mobile Robotics Lab, University of Applied Sciences Ravensburg-Weingarten, Germany.
- [5] Hoffmann, G., Rajnarayan, D. G., Waslander, S. L., Dostal, D., Jang, J. S., dan Tomlin, C. J., *The Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi Agent Control (STARMAC.)* Stanford University, Stanford, CA. 2004.
- [6] J.P. Hespanha, *Undergraduate Lecture Notes On LQG/LQR Controller Design*, April, 2007.
- [7] J.D. Ojong, *Kalman Filter + LQR = Linear Quadratic Gaussian (LQG)*, November, 2010. <http://akirajunto.wordpress.com/2010/11/23/kalman-filter-lqr-linear-quadratic-gaussian-lqg/>

## LAMPIRAN

```
%LQG GERAK ROTASI QUADROTOR 6 OUTPUT
%PARAMETER MODEL
m = 0.53; % massa quadrotor
g = 9.806; % percepatan gravitasi
P = 4; % jumlah rotor
Ix = 6.228e-3; % momen inersia pada sumbu x
Iy = 6.228e-3; % momen inersia pada sumbu y
Iz = 1.121e-2; % momen inersia pada sumbu z
Jr = 6.0100e-005; % momen inersia rotor
l = 0.232; % jarak horizontal pusat baling-baling
dengan pusat gravitasi quadrotor
b = 3.13E-5; % faktor trust saat quadrotor melayang
d = 7.5E-7; % faktor drag saat quadrotor melayang
slo = 2.7542; % konstanta slope dari kurva linier
omega=f(bin), kurva konversi dari
omega (rad/det) ke dalam bentuk
binari setpoint rotor
shi = 3.627; % konstanta shift dari kurva linier
omega=f(bin), kurva konversi dari
omega (rad/det) ke dalam bentuk
binari setpoint rotor

%titik operasi kecepatan rotor
w = (m/P)*g ; % gaya berat dibagi jumlah rotor
Oh = sqrt(w/b) % titik operasi

%titik operasi rotor (dalam binari)
t = (Oh+shi)/slo % titik operasi rotor dalam binari

%MODEL LINIER GERAK ROTASI QUADROTOR
A = [0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 -90.78 0 90.78;0 0 0 1 0 0
0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 -90.78 0 90.78 0;0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;0 0 0 0 0
0 5.209 -5.209 5.209 -5.209;0 0 0 0 0 0 -8.83 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0
-8.83 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 -8.83 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 -8.83];

B = [0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0; 0.3631 0 0
0;0 0.3631 0 0; 0 0 0.3631 0;0 0 0 0.3631];

C = [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 1 0 0 0 0];

D = [0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];

%MATRIKS PEMBOBOT Q & R
% matriks Q
Q = [1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 0 70
0;0 0 0 0 0 70];
% matriks R
R = [0.0000625 0 0 0;0 0.0000625 0 0;0 0 0.0000625 0;0 0 0
0.0000625];

%DESAIN GAIN FEEDBACK REGULATOR
```



```

P = are(A,B*inv(R)*B',C'*Q*C) % solusi persamaan aljabar riccati
0=A'P+PA+C'QC-(PB+C'QD)inv(D'QD+R) (B'P+D'QC)

K =inv(R)*B'*P % gain regulator

%DESAIN ESTIMATOR/OBSERVER
sv =[0.05 0 0 0 0 0;0 0.05 0 0 0 0;0 0 0.05 0 0 0;0 0 0 0.05 0 0;0
0 0 0 0.0005 0;0 0 0 0 0 0.0005]; % matriks spectral density dari
noise v

sw =[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]; % matriks spectral density
dari disturbance w

Bw =[0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0; 0.3631 0 0
0;0 0.3631 0 0; 0 0 0.3631 0;0 0 0 0.3631]; % matriks
disturbance

Z =are(A',C'*pinv(sv)*C,Bw*sw*Bw')% solusi persamaan aljabar
riccati 0=AZ+ZA'+Bw Sw Bw'-ZC'inv(Sv)CZ

L = Z*C'*pinv(sv) % gain estimator

%DESAIN PRE-KOMPENSATOR
M = C*inv(-A+B*K*inv(-A+L*C+B*K)*L*C)*B ; %gain close loop

Kpre = pinv(M) %pre kompensator

Km = [Kpre(:,1) Kpre(:,3) Kpre(:,5)] %pre kompensator hanya untuk
setpoint sudut roll, pitch dan yaw dari 6 setpoint.

%UJI KESTABILAN
G = [A-B*K6 B*K6;zeros(10,10) A-L*C]; % loop tertutup

Nilai_eigen= eig([A-B*K B*K;zeros(10,10) A-L*C]) % kestabilan
loop tertutup

eigen_regulator= eig(A-B*K) % kestabilan pada regulator feedback

eigen_estimator= eig(A-L*C) % kestabilan pada estimator

```