



UNIVERSITAS INDONESIA

FUNGSI *SPHERICAL BESSEL* JENIS PERTAMA

SKRIPSI

**ASEP IQBAL TAUFIK
0305010122**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011**



UNIVERSITAS INDONESIA

FUNGSI *SPHERICAL BESSEL* JENIS PERTAMA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

**ASEP IQBAL TAUFIK
0305010122**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Asep Iqbal Taufik

NPM : 0305010122

Tanda Tangan : 

Tanggal : 14 Juni 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Asep Iqbal Taufik
NPM : 0305010122
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul Skripsi : Fungsi *Spherical Bessel* Jenis Pertama

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Rahmi Rusin, S.Si, M.ScTech.

Pembimbing II : Dr. Alhaji Akbar B., M.Sc.

Penguji : Dr. Sri Mardiyati, M.Kom.

Penguji : Arie Wibowo, M.Si.

Penguji : Dr. Hengki Tasman, M.Si.

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 14 Juni 2011

KATA PENGANTAR

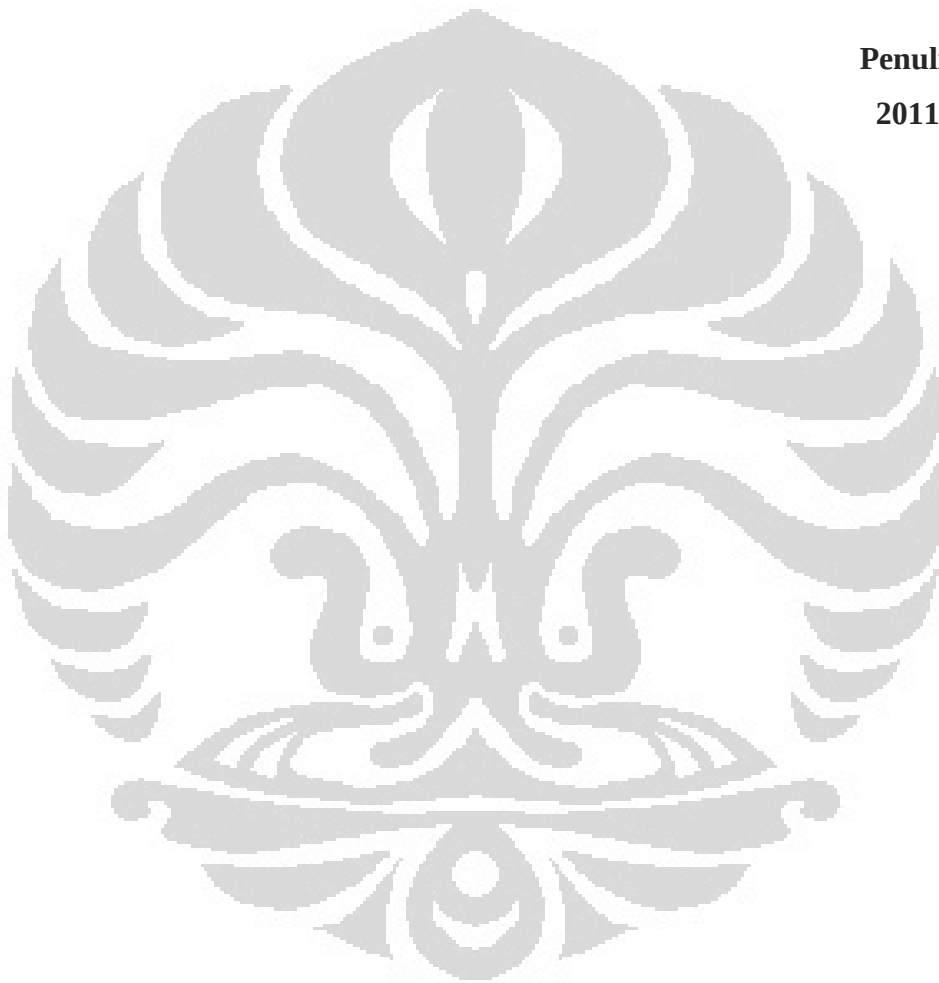
Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah melimpahkan berbagai nikmat dan karunia-Nya kepada saya serta karena rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Departemen Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya menyadari bahwa tanpa bantuan, bimbingan, dan dukungan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

- (1) Rahmi Rusin, S.Si, M. ScTech dan Dr. Alhaji Akbar B, M.Sc selaku pembimbing I dan II yang telah bersedia menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan saya dalam penyusunan skripsi ini;
- (2) Istri tercinta dan kedua anak saya yang telah memberikan bantuan dukungan moral selama ini;
- (3) Orang tua dan keluarga saya yang telah memberikan bantuan dukungan material dan moral;
- (4) Drs. Suryadi MT,M.T selaku Pembimbing Akademik yang selalu memberi nasihat dan arahan kepada saya selama kuliah di Departemen Matematika UI;
- (5) Anak-anak Alkarim: Tri, Kinta, Hari, Reza, Gughi, Tashdiq, Ma'ruf, Gebenk, Iyut, Sari, Ratu, Sisil, Janah, Ulfa, Ika dan teman Alkarim lainnya;
- (6) Anak-anak ABEL: Maulana, Oeoen, Rifkos, Ridwan, Aris, Dimas, Hairu, Udin, Trian, Hamdan, Chupz, dan Imba;
- (7) Semua teman-teman Matematika UI yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Akhir kata, saya berharap semoga Allah SWT membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Penulis
2011



HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Asep Iqbal Taufik
NPM : 0305010122
Program Studi : Sarjana Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Fungsi *Spherical Bessel* Jenis Pertama

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 14 Juni 2011
Yang menyatakan



(Asep Iqbal Taufik)

ABSTRAK

Nama : Asep Iqbal Taufik
Program Studi : Matematika
Judul : Fungsi *Spherical Bessel* Jenis Pertama

Fungsi *Spherical Bessel* merupakan solusi dari persamaan diferensial *Spherical Bessel* yang banyak digunakan dalam mekanika kuantum yang membahas gerak partikel di dalam bola dan pada masalah *geomagnetic field*. Beberapa perangkat lunak telah menyediakan program untuk menghitung nilai fungsi *Spherical Bessel*. Dalam skripsi ini akan diturunkan persamaan skalar Helmholtz dalam koordinat bola sehingga diperoleh persamaan diferensial *Spherical Bessel* dan solusinya berupa fungsi *Spherical Bessel*. Program komputer akan dibuat untuk menghitung nilai aproksimasi dari fungsi *Spherical Bessel* dan membandingkannya dengan nilai aproksimasi dari fungsi *Spherical Bessel* yang ada pada perangkat lunak.

Kata kunci : fungsi *Spherical Bessel*, Helmholtz.

xi+44 halaman ; 2 gambar + 1 tabel

Daftar Pustaka : 13 (1972-2009)

ABSTRACT

Name : Asep Iqbal Taufik
Study Program : Mathematics
Title : Spherical Bessel Function of Type 1

Spherical Bessel function is a solution of Spherical Bessel differential equation that is used to describe the motion of particles in a sphere and in geomagnetic field problems. Some software provide programs to calculate the value of the Spherical Bessel function. In this final report, the Spherical Bessel differential equation is derived from the scalar Helmholtz equation in spherical coordinates and the solution is called Spherical Bessel function. A program is also made to calculate the approximation of Spherical Bessel function and compare it with the approximation value of Spherical Bessel function existing in the software.

Keywords : Spherical Bessel function, Helmholtz.

xii+44 pages ; 2 figures + 1 table

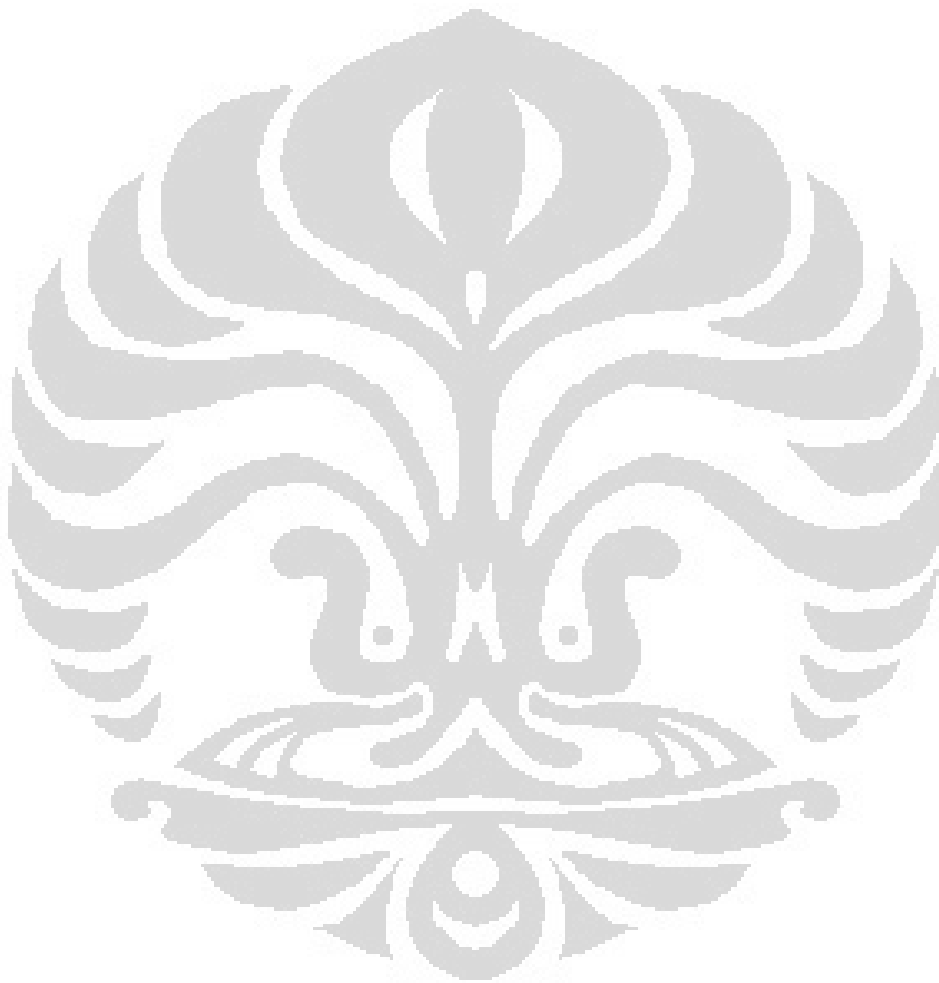
Bibliography : 13 (1972-2009)

DAFTAR ISI

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR	v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI.....	vii
ABSTRACT.....	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL.....	xii
1.PENDAHULUAN.....	Error! Bookmark not defined.
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Pembatasan Masalah.....	3
2.LANDASAN TEORI.....	4
2.1 Persamaan Diferensial	4
2.2 Persamaan Diferensial Bessel	5
2.3 Tipe-Tipe Syarat Batas	11
2.4 Metode Variabel Terpisah.....	12
2.5 Aturan Cramer	14
3.PERSAMAAN DIFERENSIAL SPHERICAL BESSEL	15
3.1 Penurunan Persamaan Skalar Helmholtz dalam Koordinat Bola	15
3.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial <i>Spherical Bessel</i> Menggunakan Metode Frobenius	27
3.3 Sifat <i>Recurrence Relations</i> dari Fungsi <i>Spherical Bessel</i>	33
3.4 Pembuktian Formula Rayleigh	36
3.5 Perhitungan Fungsi <i>Spherical Bessel</i>	38
4.PENUTUP.....	42
4.1 Kesimpulan	42
DAFTAR PUSTAKA	43

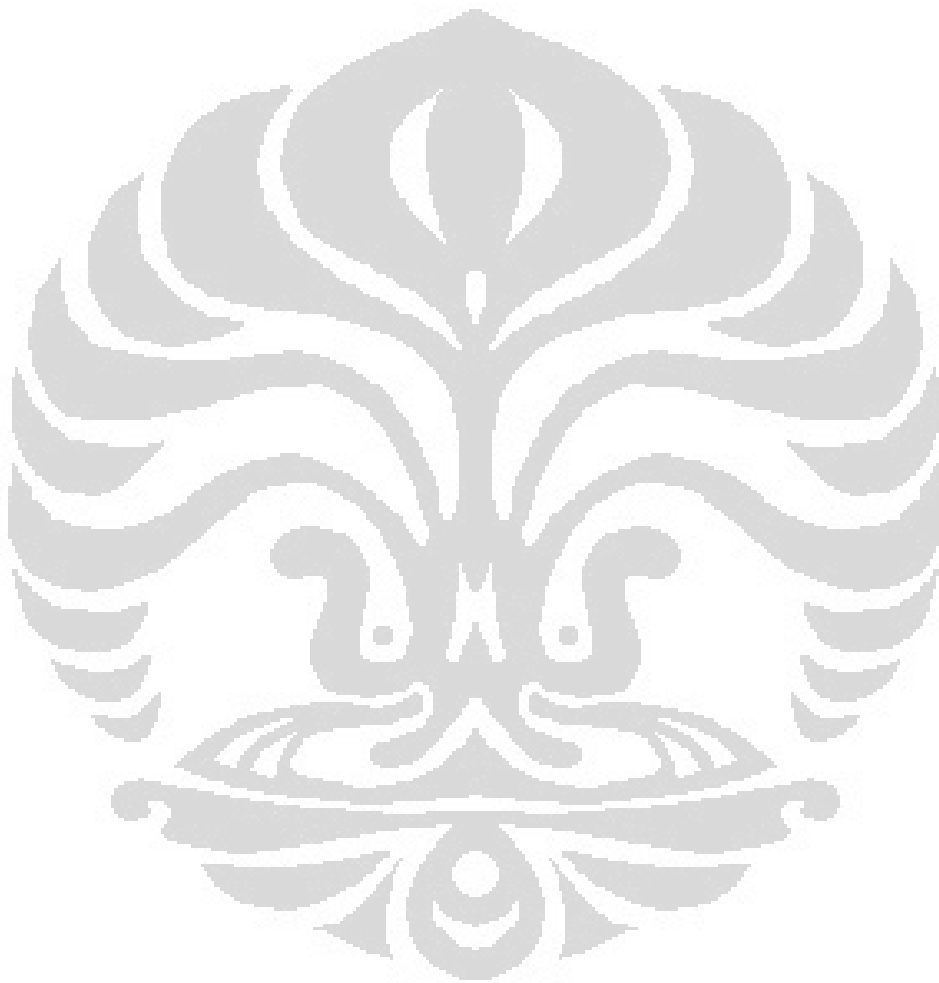
DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Koordinat Bola	16
Gambar 3.5. Grafik dari fungsi $j_l(x)$ dengan $l_1=3$ dan $l_2=5$	39



DAFTAR TABEL

Tabel 3.5.	Fungsi <i>Spherical Bessel</i> order 1 dengan $l_1=3$ dan $l_2=5$	39
------------	---	----



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, fenomena atau gejala alam yang terjadi di dunia ini tidak selalu tetap, tetapi sering kali berubah-ubah atau bersifat dinamis. Fenomena ini dapat dimodelkan secara matematis dan salah satu bentuknya dapat berupa persamaan diferensial. Persamaan diferensial banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah gejala alam seperti getaran, medan elektrostatik, medan magnet bumi, rambatan panas dan lain-lain karena persamaan diferensial dapat digunakan untuk menggambarkan perubahan atau evolusi yang terjadi pada suatu sistem.

Salah satu persamaan diferensial yang digunakan dalam masalah fisika adalah persamaan diferensial *Spherical Bessel*. Gambaran dari penggunaan fungsi *Spherical Bessel* dibicarakan dalam mekanika kuantum yang membahas gerak partikel di dalam bola (Arfken & Weber, 2005) dan pada masalah *geomagnetic field* (Bachtiar, 2009).

Persamaan diferensial *Spherical Bessel* diturunkan dari persamaan skalar Helmholtz dalam koordinat bola. Nama dari persamaan ini diambil dari Herman von Helmholtz (1821 – 1894), ilmuwan Jerman yang terkenal, yang berjasa di bidang akustik, hidrodinamik dan elektromagnetik. Persamaan skalar Helmholtz sendiri dapat juga diturunkan dari persamaan konduksi panas atau persamaan *Schrodinger*.

Persamaan diferensial *Spherical Bessel* mempunyai solusi umum berupa fungsi *Spherical Bessel* yang berbentuk deret. Terdapat dua jenis fungsi *Spherical Bessel* yaitu fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama dan fungsi *Spherical Bessel* jenis kedua. Dalam tugas akhir ini hanya akan dibahas fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama.

Pada tugas akhir ini, akan dikaji fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama dan salah satu sifatnya. Pertama, akan diturunkan persamaan skalar Helmholtz dalam koordinat bola sehingga diperoleh persamaan diferensial *Spherical Bessel*. Kemudian akan dicari solusi dari persamaan diferensial *Spherical Bessel* yang berupa fungsi *Spherical Bessel* dengan metode Frobenius. Fungsi *Spherical Bessel* merupakan solusi persamaan diferensial *Spherical Bessel* yang berbentuk deret. Setelah itu akan dibahas salah satu sifat dasar fungsi *Spherical Bessel* yaitu sifat *recurrence relation*. Selain itu terdapat juga solusi yang berbentuk fungsi trigonometri yang disebut formula Rayleigh yang akan dibuktikan dengan metode induksi matematik. Dan terakhir, akan dibuat suatu program komputer untuk menghitung nilai aproksimasi dari fungsi *Spherical Bessel* dan membandingkannya dengan nilai aproksimasi dari fungsi *Spherical Bessel* yang ada pada perangkat lunak.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, perumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah

1. Bagaimana memperoleh persamaan diferensial *Spherical Bessel* dari persamaan skalar Helmholtz dalam koordinat bola?
2. Bagaimana cara mencari solusi dari persamaan diferensial *Spherical Bessel* dan membuktikan sifat *recurrence relation* dari fungsi *Spherical Bessel*?
3. Bagaimana membuat program komputer untuk menghitung nilai dari fungsi *Spherical Bessel* dan membandingkannya dengan nilai aproksimasi dari fungsi *Spherical Bessel* yang ada pada perangkat lunak?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah

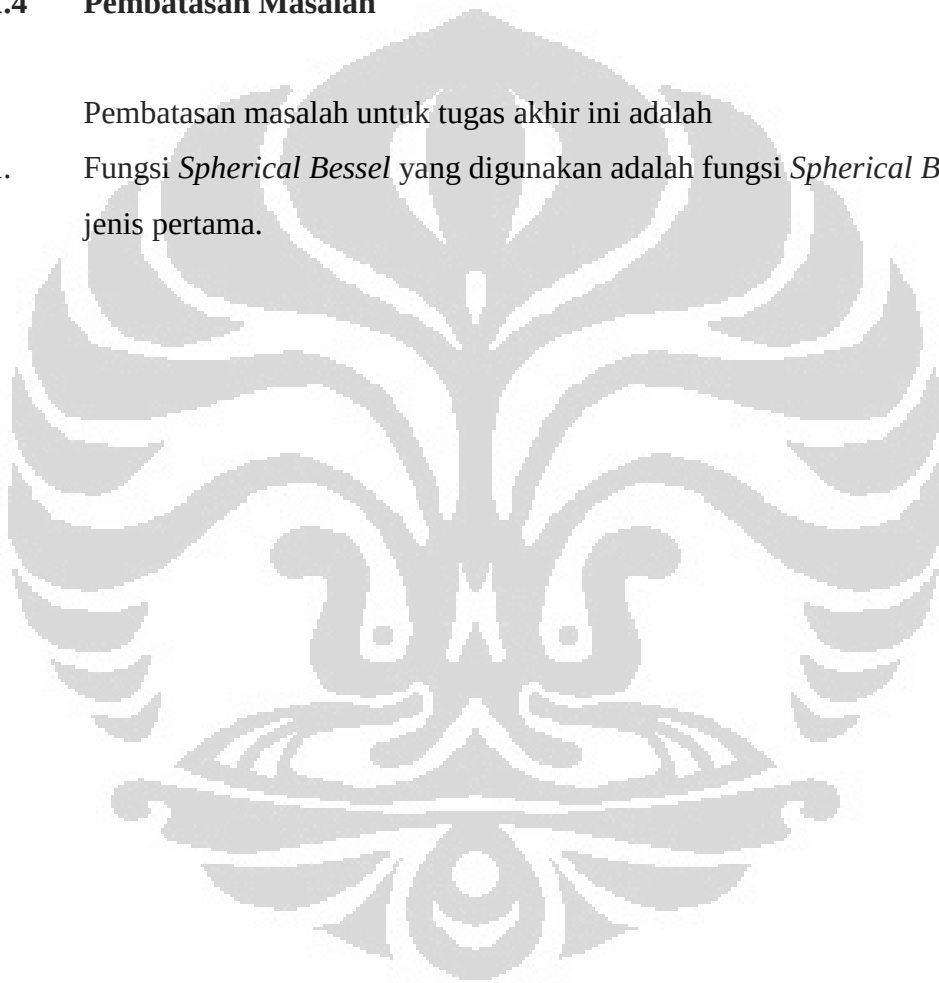
1. Menjelaskan penurunan persamaan skalar Helmholtz dalam koordinat bola agar diperoleh persamaan diferensial *Spherical Bessel*

2. Menjelaskan penyelesaian persamaan diferensial *Spherical Bessel* yang berupa fungsi *Spherical Bessel* dan salah satu sifat dasar fungsi *Spherical Bessel*
3. Membuat program komputer untuk menghitung nilai aproksimasi dari fungsi *Spherical Bessel* dan membandingkannya dengan nilai aproksimasi fungsi *Spherical Bessel* yang sudah terdapat pada perangkat lunak.

1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah untuk tugas akhir ini adalah

1. Fungsi *Spherical Bessel* yang digunakan adalah fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama.



BAB 2

LANDASAN TEORI

Dalam Bab 2 ini akan dijelaskan teori-teori dasar yang menjadi landasan dalam mencari solusi dari persamaan diferensial *Spherical Bessel*, seperti definisi dan teorema, serta metode yang akan digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial *Spherical Bessel*. Pembahasan dimulai dengan menerangkan definisi umum tentang persamaan diferensial.

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1

Persamaan diferensial (PD) adalah suatu persamaan yang mengandung turunan dari fungsi yang tidak diketahui. (Nagle, Saff, & Snider, 2004).

Definisi 2.1.2

Order dari suatu PD adalah order dari turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan tersebut. (Nagle, Saff, & Snider, 2004).

Definisi 2.1.3

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah suatu PD yang mengandung turunan dari suatu fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas. (Nagle, Saff, & Snider, 2004).

Bentuk umum dari PDP untuk suatu fungsi dua variabel $z = f(x, y)$ adalah

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = u(x, y)$$

Jika $u(x, y) = 0$, maka PDP tersebut merupakan PDP homogen. Jika $u(x, y) \neq 0$, maka PDP tersebut merupakan PDP nonhomogen.

Teorema 2.1.4

Jika $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ dan $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ kontinu pada himpunan terbuka S . Maka $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

pada setiap titik pada S . (Varberg & Purcell, 1997)

2.2 Persamaan Diferensial Bessel

Sebelum membahas PD *Spherical Bessel*, terlebih dahulu akan dijelaskan tentang PD Bessel. PD Bessel adalah persamaan diferensial biasa yang berbentuk

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad n \geq 0, \quad x \neq 0 \quad (2.2.1)$$

Persamaan (2.2.1) merupakan PD order dua dan berderajat satu. Persamaan tersebut dikenal sebagai PD Bessel. (Peter V, O'Neil, 2003).

Solusi umum dari PD (2.2.1) adalah

$$y = aJ_n(x) + bY_n(x) \quad (2.2.2)$$

dimana $J_n(x)$ disebut fungsi Bessel jenis pertama order n dan $Y_n(x)$ disebut fungsi Bessel jenis kedua order n , sedangkan a dan b adalah konstanta dengan $Y_n(x)$ merupakan fungsi yang bebas linier terhadap $J_n(x)$ untuk $x > 0$ (Peter V, O'Neil, 2003). Dengan mengambil $a = 1$ dan $b = 0$, maka fungsi Bessel jenis pertama $J_n(x)$ merupakan solusi dari PD Bessel (2.2.1).

Untuk mencari solusi analitik dari PD Bessel digunakan suatu metode yang dikenal dengan metode Frobenius. Metode Frobenius adalah metode penyelesaian suatu PD dengan memisalkan solusi berbentuk deret pangkat. Teorema 2.2.1 memberikan dukungan terhadap pernyataan di atas.

Teorema 2.2.1

Setiap bentuk PD

$$y'' + \frac{a(x)}{x} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0,$$

dimana fungsi $a(x)$ dan $b(x)$ analitik di $x = 0$, mempunyai paling sedikit satu solusi yang dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$y(x) = x^s (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_l x^l + \dots) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} \quad (2.2.3)$$

dimana s merupakan sembarang bilangan (riil atau kompleks) dan dipilih sedemikian sehingga $a_0 \neq 0$. (Kreyszig, 1979).

Definisi 2.2.2

Sebuah fungsi $f(x)$ dikatakan analitik pada titik $x = a$ jika dapat dinyatakan dalam deret pangkat dengan jari-jari konvergensi $R > 0$. (Kreyszig, 1979).

Definisi 2.2.3

Deret pangkat adalah deret tidak terhingga dalam bentuk

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots,$$

dimana x , a , dan koefisien-koefisien $c_0, c_1, c_2, \dots$ adalah bilangan riil. (Kreyszig, 1979).

Berikut akan dicari solusi dari PD Bessel pada persamaan (2.2.1) dengan menggunakan metode Frobenius. Misalkan solusi PD (2.2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk deret sebagai berikut

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} \quad (2.2.4)$$

Turunan pertama dan kedua terhadap x dari deret pada persamaan (2.2.4) adalah

$$y' = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l) x^{s+l-1}$$

dan

$$y'' = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l)(s+l-1) x^{s+l-2}$$

Sesuai dengan kebutuhan pada persamaan (2.2.1), dihitung juga

$$\begin{aligned} x^2 y'' &= x^2 \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l)(s+l-1) x^{s+l-2}, \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l)(s+l-1) x^{s+l}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned}
 xy' &= x \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l) x^{s+l-1} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l) x^{s+l}
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$$\begin{aligned}
 (x^2 - n^2)y &= x^2 y - n^2 y \\
 &= x^2 \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} - n^2 \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} x^2 a_l x^{s+l} - \sum_{l=0}^{\infty} n^2 a_l x^{s+l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l+2} - \sum_{l=0}^{\infty} n^2 a_l x^{s+l} \\
 &= \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} x^{s+(l-2)+2} - \sum_{l=0}^{\infty} n^2 a_l x^{s+l} \\
 &= \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} x^{s+l} - \sum_{l=0}^{\infty} n^2 a_l x^{s+l}
 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

jika (2.2.5), (2.2.6) dan (2.2.7) disubstitusikan ke persamaan (2.2.1) didapat

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l)(s+l-1) x^{s+l} + \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l) x^{s+l} + \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} x^{s+l} - \sum_{l=0}^{\infty} n^2 a_l x^{s+l} = 0 \tag{2.2.8}$$

Untuk $l = 0$, persamaan (2.2.8) akan menjadi

$$x^s (s(s-1)a_0 + sa_0 - n^2 a_0) = 0 \tag{2.2.9}$$

Karena $x \neq 0$, maka persamaan (2.2.9) akan terpenuhi jika

$$(s^2 - n^2)a_0 = 0 \tag{2.2.10}$$

Persamaan (2.2.10) dikenal sebagai *indicial equation* (Peter V, O'Neil, 2003)

Dari persamaan (2.2.10) dan dengan memisalkan $a_0 \neq 0$ maka haruslah

$$s^2 - n^2 = 0$$

$$s^2 = n^2$$

$$s = \pm n$$

Berikut hanya dibahas kasus $s = n$ untuk yang nantinya akan menghasilkan fungsi Bessel jenis pertama.

Untuk $l = 1$, persamaan (2.2.8) akan menjadi

$$x^{s+1} (s(s+1)a_1 + (s+1)a_1 - n^2 a_1) = 0$$

Karena $x \neq 0$ dan $s = n$, maka persamaan di atas akan terpenuhi jika

$$(2n+1)a_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

Untuk $l = 2, 3, 4, \dots$, persamaan (2.2.8) akan menjadi

$$\sum_{l=0}^{\infty} x^{s+l} \left((s+l)(s+l-1)a_l + (s+l)a_l + a_{l-2} - n^2 a_l \right) = 0$$

Karena $x \neq 0$, maka persamaan di atas akan terpenuhi jika

$$(s+l)(s+l-1)a_l + (s+l)a_l + a_{l-2} - n^2 a_l = 0$$

$$(s+l)a_l(s+l-1+1) + a_{l-2} - n^2 a_l = 0$$

$$\left((s+l)^2 - n^2 \right) a_l + a_{l-2} = 0 \quad (2.2.11)$$

Karena $s = n$, maka persamaan di atas akan terpenuhi jika

$$\left((n+l)^2 - (n)^2 \right) a_l + a_{l-2} = 0$$

$$(n^2 + 2nl + l^2 - n^2) a_l + a_{l-2} = 0$$

$$(2nl + l^2) a_l + a_{l-2} = 0$$

$$l(2n+l) a_l + a_{l-2} = 0$$

Dengan mengambil bilangan $l = 2, 3, 4, \dots$

Untuk $l = 2$

$$2(2n+2)a_2 + a_0 = 0$$

$$2(2n+2)a_2 = -a_0$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2n+2)}$$

Untuk $l = 3$

$$3(2n+3)a_3 + a_1 = 0$$

$$3(2n+3)a_3 + 0 = 0$$

$$3(2n+3)a_3 = 0$$

$$a_3 = 0$$

Untuk $l = 4$

$$\begin{aligned}4(2n+4)a_4 + a_2 &= 0 \\4(2n+4)a_4 &= -a_2 \\4(2n+4)a_4 &= \frac{a_0}{2(2n+2)} \\a_4 &= \frac{a_0}{2.4(2n+2)(2n+4)}\end{aligned}$$

Untuk $l = 5$

$$\begin{aligned}5(2n+5)a_5 + a_3 &= 0 \\5(2n+5)a_5 + 0 &= 0 \\5(2n+5)a_5 &= 0 \\a_5 &= 0\end{aligned}$$

dan seterusnya untuk $l \geq 6, l \in \mathbb{N}$

Secara umum, untuk nilai $k = 2m$, koefisien pada persamaan (2.2.4) mempunyai bentuk rekursif

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{2^2 m(n+m)}, \quad \text{untuk } m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.12)$$

dan

$$a_{2m+1} = 0, \quad \text{untuk } m = 1, 2, 3, \dots$$

Sehingga jika nilai untuk setiap a_l disubstitusikan ke persamaan (2.2.4) diperoleh

$$\begin{aligned}y &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{n+l} \\&= a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + a_3 x^{n+3} + a_4 x^{n+4} + \dots, \\&= a_0 x^n + a_2 x^{n+2} + a_4 x^{n+4} + \dots, \\&= a_0 x^n \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right) \quad (2.2.13)\end{aligned}$$

Berikut ini diberikan definisi dan sifat dari fungsi Gamma

Definisi 2.2.2

Fungsi Gamma $\Gamma(\alpha)$ didefinisikan oleh integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \alpha > 0 \quad (2.2.14)$$

(Robert V Hogg & Allen T. Craig, 1995)

Dengan menggunakan metode integral parsial, didapatkan

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} t^{\alpha} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-t} t^{\alpha} \Big|_0^b + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Bagian pertama di ruas kanan pada persamaan (2.2.15) bernilai nol, sedangkan integral di ruas kanan adalah $\Gamma(\alpha)$, sehingga diperoleh

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (2.2.16)$$

Karena $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$, maka berdasarkan persamaan (2.2.16) diperoleh

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$$

dan secara umum dapat ditulis

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.17)$$

Ambil $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$, dan dengan menggunakan relasi persamaan (2.2.12)

diperoleh

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-a_0}{2^2 \cdot 1(n+1)} = \frac{-1}{2^{2+n} \cdot 1! \Gamma(n+2)} \\ a_4 &= \frac{-a_2}{2^2 \cdot 2(n+2)} = \frac{1}{2^{4+n} \cdot 2! \Gamma(n+3)} \end{aligned}$$

dan secara umum diperoleh

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! \Gamma(n+m+1)}$$

Jika koefisien-koefisien a_{2m} disubstitusi ke persamaan (2.2.4) dan dengan memperhatikan bahwa $a_1 = 0, a_3 = 0, \dots$ diperoleh suatu solusi deret untuk PD Bessel yang dilambangkan dengan $J_n(x)$

$$y = J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{n+2m}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)}$$

atau sering ditulis sebagai

$$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l} \quad (2.2.18)$$

yang dikenal sebagai fungsi Bessel jenis pertama berorder n . (Peter V, O'Neil, 2003)

2.3 Tipe-Tipe Syarat Batas

Terdapat tiga jenis syarat batas yang sering digunakan dalam menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial dengan syarat batas, yaitu syarat batas Dirichlet, syarat batas Neumann, dan syarat batas gabungan (*mixed*). Misalkan $u(x,y)$ adalah solusi dari Persamaan Diferensial dengan syarat batas pada domain D , maka Syarat Batas Dirichlet adalah kondisi dimana $u(x,y)$ memenuhi persamaan

$$u(x,y) = f(x,y) \text{ pada } \partial D$$

dengan $f(x,y)$ adalah suatu fungsi tertentu yang didefinisikan pada batas ∂D .

Syarat Batas Neumann adalah kondisi dimana turunan berarah $\partial u / \partial n$ sepanjang vektor normal n dari batas harus memenuhi

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = g(x,y) \text{ pada } \partial D$$

dimana $g(x,y)$ adalah suatu fungsi tertentu yang didefinisikan pada ∂D

Sedangkan syarat batas gabungan (*mixed*) adalah syarat batas dimana solusi harus memenuhi Syarat Batas Dirichlet dan Syarat Batas Neumann. (Nagle, Saff, & Snider, 2004).

2.4 Metode Variabel Terpisah

Metode Variabel Terpisah adalah teknik klasik yang efektif dalam menyelesaikan beberapa tipe PDP. Pada Metode Variabel Terpisah, solusi $u(x,y)$ diasumsikan mempunyai bentuk

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.4.1)$$

(Boyce & Diprima, 1997).

Contoh 2.4.1:

Misalkan diberikan suatu masalah persamaan Laplace dalam daerah lingkaran dengan $r < a$ dengan syarat batas

$$u(a, \theta) = f(\theta) \quad (2.4.2)$$

dimana f adalah fungsi pada $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Dalam koordinat polar, persamaan Laplace mempunyai bentuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.4.3)$$

dengan u adalah fungsi periodik dalam θ dengan periode 2π dan $u(r, \theta)$ terbatas untuk $r \leq a$. (Boyce & Diprima, 1997).

Misalkan $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, dimana R adalah fungsi terhadap r saja, dan Θ adalah fungsi terhadap θ saja, maka persamaan (2.4.3) menjadi

$$\Theta(\theta) \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{\Theta(\theta)}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = 0, \quad (2.4.4)$$

Jika dikalikan dengan $\frac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$, menjadi

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = 0, \quad (2.4.5)$$

atau dapat ditulis

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = K \quad (2.4.6)$$

dimana K adalah konstanta pemisah. Maka dapat diperoleh dua persamaan diferensial biasa sebagai berikut

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} - KR(r) = 0, \quad (2.4.7)$$

dan

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + K\Theta(\theta) = 0. \quad (2.4.8)$$

Dalam masalah ini tidak ada syarat batas homogen. Solusi dari masalah ini harus terbatas dan juga periodik dalam θ dengan periode 2π . Akan dicari solusi nontrivial dengan melihat tiga kemungkinan nilai K yaitu sebagai berikut

a.) Untuk kasus $K = 0$

Jika $K = 0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (2.4.8), diperoleh

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = 0. \text{ Yang merupakan PD homogen order dua yang mempunyai solusi}$$

umum

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2 \theta \quad (2.4.9)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta riil. Untuk $\Theta(\theta)$ yang periodik hanya jika

$c_2 = 0$. Maka $\Theta(\theta) = c_1$, sehingga persamaan (2.4.7) menjadi

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} = 0. \quad (2.4.10)$$

Persamaan (2.4.10) mempunyai solusi

$$R(r) = k_1 + k_2 \ln r. \quad (2.4.11)$$

Ketika $r \rightarrow 0$, maka $R(r)$ tidak mungkin memuat suku logaritma, karenanya $k_2 = 0$.

Maka untuk $K = 0$, diperoleh solusi

$$u_0(r, \theta) = 1. \quad (2.4.12)$$

b.) Untuk kasus $K < 0$

Jika $K < 0$, misal $K = -\lambda^2$, dimana $\lambda > 0$. Maka persamaan (2.4.8)

menjadi $\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} - \lambda^2 \Theta(\theta) = 0$, sehingga solusinya menjadi

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\lambda \theta} + c_2 e^{-\lambda \theta} \quad (2.4.13)$$

Maka $\Theta(\theta)$ dapat menjadi periodik hanya jika $c_1 = c_2 = 0$. Dapat dilihat bahwa

untuk nilai $K < 0$ akan didapatkan solusi trivial, atau dengan kata lain, tidak ada solusi nontrivial untuk nilai $K < 0$.

c.) Untuk kasus $K > 0$

Jika $K < 0$, misal $K = -\lambda^2$, dimana $\lambda > 0$. Maka persamaan (2.4.7) dan (2.4.8) menjadi

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} - \lambda^2 R(r) = 0, \quad (2.4.14)$$

dan

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \lambda^2 \Theta(\theta) = 0. \quad (2.4.15)$$

Persamaan (2.4.14) mempunyai solusi

$$R(r) = k_1 r^\lambda + k_2 r^{-\lambda} \quad (2.4.16)$$

Sementara persamaan (2.4.15) mempunyai solusi

$$\Theta(\theta) = c_1 \sin \lambda \theta + c_2 \cos \lambda \theta \quad (2.4.17)$$

Karena $\Theta(\theta)$ periodik dengan periode 2π , maka, dengan n adalah bilangan bulat positif, solusi $r^{-\lambda}$ pada persamaan (2.4.16) harus dihilangkan karena menjadi tak terbatas ketika $r \rightarrow 0$. Akibatnya $k_2 = 0$, dan solusi dari persamaan (2.4.3) adalah

$$u_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta, \quad v_n(r, \theta) = r^n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.18)$$

Persamaan (2.4.18) bersama dengan $u_0(r, \theta) = 1$, membentuk himpunan solusi nontrivial dari masalah ini

2.5 Aturan Cramer

Jika A adalah matriks invertibel berukuran $n \times n$, maka solusi dari sistem persamaan

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dimana $\mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ dan $\mathbf{b}^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ adalah

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

dimana untuk setiap k , A_k adalah matriks yang diperoleh dari A dengan mengganti kolom k dengan $\mathbf{b}$. (Anton, 1994)

BAB 3

PERSAMAAN DIFERENSIAL *SPHERICAL BESSEL*

Pada Bab 2 telah dijelaskan teori yang berkaitan dengan fungsi *Spherical Bessel* dan beberapa metode penyelesaian PD yang akan digunakan pada Bab 3 ini. Pada bab ini akan dibahas tentang penyelesaian PD *Spherical Bessel*.

Lebih jelasnya pada Subbab 3.1 akan dibahas penurunan persamaan skalar Helmholtz dalam koordinat bola untuk mendapatkan PD *Spherical Bessel*, pada Subbab 3.2 akan dibahas solusi bentuk deret dari PD *Spherical Bessel* menggunakan metode Frobenius, pada Subbab 3.3 akan dibahas salah satu sifat dasar fungsi *Spherical Bessel* yaitu sifat *recurrence relation*, pada Subbab 3.4 akan dibahas pembuktian formula Rayleigh yang merupakan solusi PD *Spherical Bessel* yang berbentuk fungsi trigonometri dengan menggunakan metode induksi matematik dan Subbab 3.5 akan dibahas program untuk mencari nilai aproksimasi fungsi *Spherical Bessel* dan membandingkannya dengan nilai aproksimasi dari fungsi *Spherical Bessel* yang ada pada perangkat lunak.

3.1 Penurunan Persamaan Skalar Helmholtz dalam Koordinat Bola

Bentuk umum dari persamaan skalar Helmholtz adalah

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.1.1)$$

dimana $f(\mathbf{r})$ adalah fungsi skalar yang didefinisikan pada titik $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dan k adalah konstanta real atau kompleks (Nail & Ramani, 2004).

Akan dilakukan transformasi koordinat kartesius ke koordinat bola untuk mendapatkan PD *Spherical Bessel*. Transformasi dilakukan dengan pemisalan

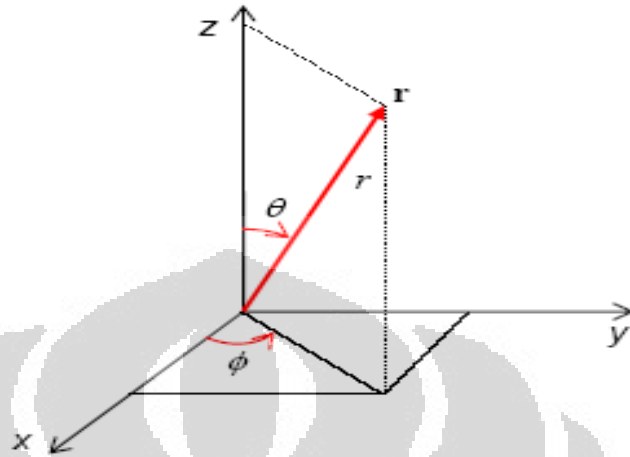
$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (3.1.2)$$

dengan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

dimana ϕ adalah sudut azimuth pada bidang xy dan dimulai dari sumbu- x positif dengan $0 \leq \phi \leq 2\pi$, θ adalah sudut polar dimulai dari sumbu- z positif dengan

$0 \leq \theta \leq \pi$, dan r adalah panjang jari-jari bola dari suatu titik ke titik asal dengan $0 \leq r < \infty$. Pada $r = 0$, θ dan ϕ tidak terdefinisi. (Arfken & Weber, 2005).



Gambar 2.1 Koordinat Bola

Dengan pemisalan variabel pada (3.1.2) akan dicari bentuk persamaan (3.1.1) dalam koordinat bola. Pandang Laplacian dari fungsi skalar f berikut

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.1.3)$$

turunan parsial x , y , dan z dari persamaan (3.1.2) terhadap r , ϕ , dan θ , masing-masing adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta \cos \phi & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \cos \phi & \frac{\partial x}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \cos \theta \sin \phi & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \sin \phi & \frac{\partial y}{\partial \phi} &= r \sin \theta \cos \phi \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= r \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \phi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Dengan menggunakan aturan rantai, didapat persamaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Persamaan (3.1.4) disubstitusikan ke persamaan (3.1.5), maka didapat

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} r \cos \theta \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta \sin \phi + \frac{\partial f}{\partial z} (-r \sin \theta) \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \sin \phi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \theta \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta \sin \phi) + \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta \cos \phi. \quad (3.1.8)$$

Jika diubah ke bentuk persamaan matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

dengan asumsi matriks koefisien di atas invertibel, maka didapat persamaan-persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} & -r^2 \sin^2 \theta \cos \phi & r \sin \phi \\ \frac{\partial f}{\partial r} & -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi & -r \cos \phi \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} & -r^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \theta \cos \phi & -r^2 \sin^2 \theta \cos \phi & r \sin \phi \\ -r \sin \theta \cos \theta \sin \phi & -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi & -r \cos \phi \\ r \sin^2 \theta & -r^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \theta \cos \phi & \frac{\partial f}{\partial \theta} & r \sin \phi \\ -r \sin \theta \cos \theta \sin \phi & \frac{\partial f}{\partial r} & -r \cos \phi \\ r \sin^2 \theta & \frac{\partial f}{\partial \phi} & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \theta \cos \phi & -r^2 \sin^2 \theta \cos \phi & r \sin \phi \\ -r \sin \theta \cos \theta \sin \phi & -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi & -r \cos \phi \\ r \sin^2 \theta & -r^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\det \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \theta \cos \phi & -r^2 \sin^2 \theta \cos \phi & \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ -r \sin \theta \cos \theta \sin \phi & -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi & \frac{\partial f}{\partial r} \\ r \sin^2 \theta & -r^2 \sin \theta \cos \theta & \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \theta \cos \phi & -r^2 \sin^2 \theta \cos \phi & r \sin \phi \\ -r \sin \theta \cos \theta \sin \phi & -r^2 \sin^2 \theta \sin \phi & -r \cos \phi \\ r \sin^2 \theta & -r^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix}}$$

sehingga, didapat persamaan-persamaan berikut

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (3.1.11)$$

Asumsikan bahwa $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \theta}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \theta}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \theta}$, dan $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial z}$ adalah

fungsi yang kontinu. Maka persamaan (3.1.6) diturunkan terhadap θ untuk

mendapatkan $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} r \cos \theta \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta \sin \phi - \frac{\partial f}{\partial z} r \sin \theta \right)$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial x} r \cos \theta \cos \phi - \frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta \cos \phi \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial y} r \cos \theta \sin \phi - \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta \sin \phi \\ &\quad - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial z} r \sin \theta - \frac{\partial f}{\partial z} r \cos \theta \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

persamaan (3.1.12) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} r \cos \theta \cos \phi - \frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta \cos \phi \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} r \cos \theta \sin \phi - \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta \sin \phi \\
&- \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} r \sin \theta - \frac{\partial f}{\partial z} r \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.1.4) ke persamaan (3.1.13) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi - \frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta \cos \phi \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi - \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta \sin \phi \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} r^2 \sin^2 \theta - \frac{\partial f}{\partial z} r \cos \theta.
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Persamaan (3.1.9) – (3.1.11) disubstitusikan ke persamaan (3.1.14) untuk memperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi - \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\
&\quad r \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi \\
&\quad - \left(\sin \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) r \sin \theta \sin \phi \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} r^2 \sin^2 \theta - \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) r \cos \theta \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi - r \sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial f}{\partial r} - \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} \\
&\quad + \sin \phi \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi - r \sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial f}{\partial r} \\
&\quad + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} - \sin \phi \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} r^2 \sin^2 \theta \\
&\quad - r \cos^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Persamaan (3.1.15) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} r^2 \sin^2 \theta - r \frac{\partial f}{\partial r}$$

atau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.1.16)$$

Asumsikan bahwa $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial r}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r}$, dan $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z}$ adalah

fungsi yang kontinu. Maka persamaan (3.1.7) diturunkan terhadap r untuk

mendapatkan $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \sin \phi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \theta \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial y} \sin \theta \sin \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} \cos \theta \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Persamaan (3.1.17) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \sin \theta \sin \phi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta \quad (3.1.18)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.1.4) ke persamaan (3.1.18) diperoleh

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cos^2 \theta \quad (3.1.19)$$

Asumsikan bahwa $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \phi}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \phi}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \phi}$, dan $\frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial z}$ adalah

fungsi yang kontinu. Maka persamaan (3.1.8) diturunkan terhadap ϕ untuk

mendapatkan $\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta \sin \phi) + \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta \cos \phi \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (-r \sin \theta) \sin \phi - \frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta \cos \phi \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) r \sin \theta \cos \phi - \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta \sin \phi \quad (3.1.20)$$

persamaan (3.1.20) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} (-r \sin \theta) \sin \phi - \frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta \cos \phi \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} r \sin \theta \cos \phi - \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.1.4) ke persamaan (3.1.21) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - \frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta \cos \phi \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Persamaan (3.1.9) – (3.1.11) disubstitusikan ke persamaan (3.1.22) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\ &r \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ &- \left(\sin \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) r \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - r \sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial f}{\partial r} - \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ &+ \sin \phi \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - r \sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial f}{\partial r} \\ &- \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi \frac{\partial f}{\partial \theta} - \sin \phi \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Persamaan (3.1.23) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - r \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

atau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + r \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \quad (3.1.24)$$

Persamaan (3.1.16), (3.1.19) dan (3.1.24) jika diubah ke bentuk persamaan matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + r \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi & r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \cos^2 \theta \\ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

dengan asumsi matriks koefisien di atas invertibel, maka didapat persamaan-persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} & r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} & \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \cos^2 \theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + r \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} & r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi & r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \cos^2 \theta \\ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi & 0 \end{pmatrix}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} & r^2 \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} & \cos^2 \theta \\ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + r \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi & r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \cos^2 \theta \\ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi & r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} \\ \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} \\ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + r \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi & r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \cos^2 \theta \\ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi & r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi & 0 \end{pmatrix}}$$

sehingga, didapat persamaan-persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = & \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial r} \\ & - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\sin^2 \phi}{r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\ & - \frac{\sin^2 \phi}{r (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\cos \theta \sin^2 \phi}{r^2 \sin \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = & - \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial r} \\ & + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \phi}{r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\ & + \frac{\cos^2 \phi}{r (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos^2 \phi}{r^2 \sin \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = & - \frac{\sin^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\sin^2 \theta}{r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial f}{\partial r} \\ & + \frac{\cos^2 \theta}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Kemudian, persamaan (3.1.25) – (3.1.27) disubstitusikan ke persamaan (3.1.3) untuk mendapatkan Laplacian sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f = & \left(\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right. \\
& + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial r} \\
& - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\sin^2 \phi}{r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\
& - \frac{\sin^2 \phi}{r (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\cos \theta \sin^2 \phi}{r^2 \sin \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big) \\
& + \left(- \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right. \\
& - \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial r} \\
& + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \phi}{r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\
& + \frac{\cos^2 \phi}{r (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos^2 \phi}{r^2 \sin \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big) \\
& + \left(- \frac{\sin^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\sin^2 \theta}{r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial f}{\partial r} \right. \\
& \left. + \frac{\cos^2 \theta}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \quad (3.1.28)
\end{aligned}$$

Persamaan (3.1.28) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f = & \frac{\cos^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial f}{\partial r} \\
& - \frac{\sin^2 \theta}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\
& - \frac{\sin^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\sin^2 \theta}{r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial f}{\partial r} \\
& + \frac{\cos^2 \theta}{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \quad (3.1.29)
\end{aligned}$$

Persamaan (3.1.29) dapat disederhanakan lagi dan akhirnya didapatkan Laplacian dalam koordinat bola

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (3.1.30)$$

Misalkan $f(r, \theta, \phi)$ adalah solusi dari persamaan skalar Helmholtz yang dapat diasumsikan dalam bentuk variabel terpisah dengan bentuk

$$f(r, \theta, \phi) = \Pi(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (3.1.31)$$

Kemudian, faktorisasi pada persamaan (3.1.31) disubstitusikan ke dalam persamaan skalar Helmholtz pada persamaan (3.1.1) dan menggunakan Laplacian dalam koordinat bola yang diberikan pada persamaan (3.1.30), akan diperoleh

$$\frac{d^2 \Pi(r)}{dr^2} \Theta(\theta) \Phi(\phi) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \Pi(r) \Phi(\phi) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} \Pi(r) \Theta(\theta) + \frac{2}{r} \frac{d\Pi(r)}{dr} \Theta(\theta) \Phi(\phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \Pi(r) \Phi(\phi) + k^2 \Pi(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) = 0$$

Jika dikalikan dengan $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Pi(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)}$, menjadi

$$\frac{2r \sin^2 \theta}{\Pi(r)} \frac{d\Pi(r)}{dr} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Pi(r)} \frac{d^2 \Pi(r)}{dr^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \cos \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (3.1.32)$$

Persamaan (3.1.32) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\sin^2 \theta}{\Pi(r)} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Pi(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 \Pi(r) \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} \quad (3.1.33)$$

Karena ruas kiri pada persamaan (3.1.33) tidak bergantung pada ϕ . Maka ruas kanan pada persamaan (3.1.33) juga harus tidak bergantung pada ϕ . Sehingga dapat diperoleh

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = \lambda_1 \Phi(\phi) \quad (3.1.34)$$

dimana λ_1 adalah konstanta pemisah. Karena $\Phi(\phi)$ periodik dalam 2π , maka konstanta pemisah ini mempunyai bentuk

$$\lambda_1 = -m^2, \quad -m^2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1.35)$$

dimana m adalah bilangan bulat. Dengan menggunakan persamaan (3.1.34) dan (3.1.35), persamaan (3.1.33) dapat diubah menjadi

$$\frac{\sin^2 \theta}{\Pi(r)} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Pi(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 \Pi(r) \right) = m^2 - \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) \quad (3.1.36)$$

Jika dibagi dengan $\sin^2 \theta$, persamaan (3.1.36) menjadi

$$\frac{1}{\Pi(r)} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Pi(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 \Pi(r) \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right)$$

Ruas sebelah kiri dari persamaan di atas adalah fungsi dari r saja, sementara ruas kanan hanya bergantung θ saja. Hal ini dapat terjadi hanya jika sisi kiri dan sisi kanannya adalah konstan. Seperti sebelumnya, misalkan λ_2 adalah konstanta pemisah. Sehingga menjadi

$$\frac{1}{\Pi(r)} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Pi(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 \Pi(r) \right) = \lambda_2 \quad (3.1.37)$$

dan

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = \lambda_2 \quad (3.1.38)$$

Persamaan (3.1.38) adalah persamaan yang bersesuaian dengan PD *Associated Legendre* dengan konstanta λ_2 menjadi $n(n+1)$ dan n adalah bilangan bulat non-negatif (Arfken & Weber, 2005). Sehingga persamaan (3.1.37), menjadi

$$\frac{1}{\Pi(r)} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Pi(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 \Pi(r) \right) = n(n+1)$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{r^2}{\Pi(r)} \frac{d^2 \Pi(r)}{dr^2} + \frac{2r}{\Pi(r)} \frac{d\Pi(r)}{dr} + k^2 r^2 = n(n+1)$$

kemudian dikalikan dengan $\Pi(r)$, sehingga menjadi

$$r^2 \frac{d^2 \Pi(r)}{dr^2} + 2r \frac{d\Pi(r)}{dr} + (k^2 r^2 - n(n+1)) \Pi(r) = 0 \quad (3.1.39)$$

Persamaan (3.1.39) merupakan PD *Spherical Bessel*, dengan $r \neq 0$.

Berikut ini akan dibahas mengenai solusi dari persamaan diferensial *Spherical Bessel*.

3.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial *Spherical Bessel* Menggunakan Metode Frobenius

Untuk mencari solusi persamaan diferensial *Spherical Bessel*. Persamaan diferensial *Spherical Bessel* akan diubah ke bentuk persamaan diferensial *Bessel* dengan cara ditransformasi menggunakan $x = kr$

$$r \frac{d\Pi(r)}{dr} = kr \frac{d\Pi\left(\frac{x}{k}\right)}{kdr} = kr \frac{d\Pi\left(\frac{x}{k}\right)}{d(kr)} = x \frac{d\bar{\Pi}(x)}{dx}$$

dan

$$r^2 \frac{d^2\Pi(r)}{dr^2} = x^2 \frac{d^2\bar{\Pi}(x)}{dx^2}$$

Persamaan (3.1.39) menjadi

$$x^2 \frac{d^2\bar{\Pi}(x)}{dx^2} + 2x \frac{d\bar{\Pi}(x)}{dx} + (x^2 - n(n+1))\bar{\Pi}(x) = 0 \quad (3.2.1)$$

Untuk mengubah ke bentuk persamaan diferensial *Bessel*, dapat digunakan transformasi

$$\bar{\Pi}(x) = Z(x).x^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.2)$$

$$\bar{\Pi}'(x) = Z'(x).x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}Z(x).x^{-\frac{3}{2}} \quad (3.2.3)$$

$$\bar{\Pi}''(x) = Z''(x).x^{-\frac{1}{2}} - Z'(x).x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}Z(x).x^{-\frac{5}{2}} \quad (3.2.4)$$

Persamaan (3.2.2), (3.2.3) dan (3.2.4) disubstitusikan ke persamaan (3.2.1), menjadi

$$\begin{aligned} & x^2 \left(Z''(x).x^{-\frac{1}{2}} - Z'(x).x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}Z(x).x^{-\frac{5}{2}} \right) + \\ & 2x \left(Z'(x).x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}Z(x).x^{-\frac{3}{2}} \right) + (x^2 - n(n+1)) \left(Z(x).x^{-\frac{1}{2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

kemudian persamaan (3.2.5) dibagi $x^{-\frac{1}{2}}$ menjadi

$$x^2 \left(Z''(x) - Z'(x) \cdot x^{-1} + \frac{3}{4} Z(x) \cdot x^{-2} \right) + 2x \left(Z'(x) - \frac{1}{2} Z(x) \cdot x^{-1} \right) + (x^2 - n(n+1)) Z(x) = 0$$

disederhanakan menjadi

$$x^2 Z''(x) + (-x + 2x) Z'(x) + \left(\frac{3}{4} - 1 + x^2 - n(n+1) \right) Z(x) = 0$$

lebih sederhana lagi menjadi

$$x^2 Z''(x) + x Z'(x) + \left(x^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) Z(x) = 0 \quad (3.2.6)$$

Persamaan di atas disebut PD Bessel orde setengah.

Untuk mencari solusi analitik dari PD *Spherical Bessel* digunakan suatu metode yang dikenal dengan metode Frobenius. Metode Frobenius adalah metode penyelesaian suatu PD dengan memisalkan solusi berbentuk deret pangkat yaitu

$$Z = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} \quad (3.2.7)$$

dengan s sembarang bilangan riil atau kompleks. (Santos, 2007).

Turunan pertama dan kedua dari deret pada persamaan (3.2.7) adalah

$$Z' = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l) x^{s+l-1}$$

dan

$$Z'' = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l)(s+l-1) x^{s+l-2}$$

Sesuai dengan kebutuhan pada persamaan (3.2.6), dihitung juga

$$\begin{aligned} x^2 Z'' &= x^2 \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l)(s+l-1) x^{s+l-2} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l)(s+l-1) x^{s+l} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$x Z' = x \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l) x^{s+l-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l) x^{s+l}$$

$$\left(x^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) z = x^2 z - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 z \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} &= x^2 \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^2 a_l x^{s+l} - \sum_{l=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 a_l x^{s+l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l+2} - \sum_{l=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 a_l x^{s+l} \\ &= \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} x^{s+(l-2)+2} - \sum_{l=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 a_l x^{s+l} \\ &= \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} x^{s+l} - \sum_{l=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 a_l x^{s+l} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

jika (3.2.8), (3.2.9) dan (3.2.10) disubstitusikan ke persamaan (3.2.6) didapat

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l)(s+l-1) x^{s+l} + \sum_{l=0}^{\infty} a_l (s+l) x^{s+l} + \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} x^{s+l} - \sum_{l=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 a_l x^{s+l} = 0 \quad (3.2.11)$$

Untuk $l = 0$, persamaan (3.2.11) akan menjadi

$$x^s \left(s(s-1)a_0 + sa_0 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 a_0 \right) = 0 \quad (3.2.12)$$

Karena $x \neq 0$, maka persamaan (3.2.12) akan terpenuhi jika

$$\left(s^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) a_0 = 0 \quad (3.2.13)$$

Persamaan (3.2.13) dikenal sebagai *indicial equation* (Peter V, O'Neil, 2003)

Dari persamaan (3.2.13) dan dengan memisalkan $a_0 \neq 0$ maka haruslah

$$s^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$s^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$s = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Berikut hanya dibahas kasus $s = n + \frac{1}{2}$ yang nantinya akan menghasilkan fungsi

Spherical Bessel jenis pertama.

Untuk $l = 1$, persamaan (3.2.11) akan menjadi

$$x^{s+1} \left(s(s+1)a_1 + (s+1)a_1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 a_1 \right) = 0$$

Karena $x \neq 0$ dan $s = n + \frac{1}{2}$, maka persamaan di atas akan terpenuhi jika

$$(2n+2)a_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

Untuk $l = 2, 3, 4, \dots$, persamaan (3.2.11) akan menjadi

$$\sum_{l=0}^{\infty} x^{s+l} \left((s+l)(s+l-1)a_l + (s+l)a_l + a_{l-2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 a_l \right) = 0$$

Karena $x \neq 0$, maka persamaan di atas akan terpenuhi jika

$$(s+l)(s+l-1)a_l + (s+l)a_l + a_{l-2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 a_l = 0$$

$$(s+l)a_l(s+l-1+1) + a_{l-2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 a_l = 0$$

$$\left((s+l)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right) a_l + a_{l-2} = 0 \quad (3.2.14)$$

Karena $s = n + \frac{1}{2}$, maka persamaan (3.2.14) akan terpenuhi jika

$$\begin{aligned} & \left(\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) + l \right)^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) a_l + a_{l-2} = 0 \\ & \left(\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{1}{2} \right) l + l^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) a_l + a_{l-2} = 0 \\ & (2nl + l + l^2) a_l + a_{l-2} = 0 \\ & l(2n+1+l) a_l + a_{l-2} = 0 \end{aligned}$$

Dengan mengambil bilangan $l = 2, 3, 4, \dots$

Untuk $l = 2$

$$2(2n+1+2) a_2 + a_0 = 0$$

$$2(2n+3) a_2 = -a_0$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2n+3)}$$

Untuk $l = 3$

$$3(2n+1+3) a_3 + a_1 = 0$$

$$3(2n+4) a_3 + 0 = 0$$

$$3(2n+4) a_3 = 0$$

$$a_3 = 0$$

Untuk $l = 4$

$$4(2n+1+4) a_4 + a_2 = 0$$

$$4(2n+5) a_4 = -a_2$$

$$4(2n+5) a_4 = \frac{a_0}{2(2n+3)}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)}$$

Untuk $l = 5$

$$5(2n+1+5) a_5 + a_3 = 0$$

$$5(2n+4) a_5 + 0 = 0$$

$$5(2n+4) a_5 = 0$$

$$a_5 = 0$$

dan seterusnya untuk $l \geq 5, l \in \mathbb{N}$

Secara umum, untuk nilai $k = 2m$, koefisien pada persamaan (3.2.7) mempunyai bentuk rekursif

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{2^2 m \left(n + m + \frac{1}{2} \right)}, m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.15)$$

dan $a_{2m+1} = 0, m = 1, 2, 3, \dots$

sehingga jika nilai untuk setiap a_l disubstitusikan ke persamaan (3.2.7) diperoleh

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{n+l} \\ &= a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + a_3 x^{n+3} + a_4 x^{n+4} + \dots, \\ &= a_0 x^n + a_2 x^{n+2} + a_4 x^{n+4} + \dots, \\ &= a_0 x^n \left(1 - \frac{x^2}{2[2n+3]} + \frac{x^4}{2.4[2n+3][2n+5]} - \dots \right) \end{aligned}$$

Ambil $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}$, dan dengan menggunakan relasi persamaan (3.2.15)

diperoleh

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-a_0}{2^2 \cdot 1 \left(n + \frac{3}{2} \right)} = \frac{-1}{2^{2+n} \cdot 1! \Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)} \\ a_4 &= \frac{-a_2}{2^2 \cdot 2 \left(n + \frac{5}{2} \right)} = \frac{1}{2^{4+n} \cdot 2! \Gamma\left(n + \frac{7}{2}\right)} \end{aligned}$$

dan secara umum diperoleh

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! \Gamma\left(n + m + \frac{3}{2}\right)}$$

Jika koefisien-koefisien a_{2m} disubstitusi ke persamaan (3.2.7) dan dengan memperhatikan bahwa $a_1 = 0, a_3 = 0, \dots$ diperoleh suatu solusi bagi persamaan diferensial *Spherical Bessel* yang dilambangkan dengan $j_n(x)$

$$j_n(x) = 2^n x^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l!(2l+2n+1)!} x^{2l} \quad (3.2.16)$$

yang dikenal sebagai fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama berorder n . (Peter V, O'Neil, 2003)

Setelah mengetahui solusi analitik persamaan diferensial *Spherical Bessel* berupa fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama yang berbentuk deret, berikutnya akan dijelaskan salah satu sifat fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama yaitu sifat *recurrence relation*.

3.3 Sifat *Recurrence Relations* dari Fungsi *Spherical Bessel*

Terdapat beberapa sifat *Recurrence Relations* yaitu sebagai berikut:

1. $\frac{(n+1)}{x} j_n(x) + j_n'(x) = j_{n-1}(x)$
2. $\frac{n}{x} j_n(x) - j_n'(x) = j_{n+1}(x)$
3. $j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{x} j_n(x)$
4. $n j_{n-1}(x) - (n+1) j_{n+1}(x) = (2n+1) j_n'(x)$

Bukti:

1. Pertama, akan dicari turunan pertama dari $x^{n+1} j_n(x)$ terhadap x , sebagai berikut

$$\frac{d}{dx} \{x^{n+1} j_n(x)\} = \frac{d}{dx} \left\{ x^{n+1} \left(2^n x^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l!(2l+2n+1)!} x^{2l} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \left\{ 2^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)!} x^{2l+2n+1} \right\} \\
&= 2^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)!} (2l+2n+1) x^{2l+2n} \\
&= 2^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)(2l+2n)!} (2l+2n+1) x^{2l} x^{2n} \\
&= 2^n x^{2n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)(l+n-1)!}{l! (2l+2n)(2l+2n-1)!} x^{2l} \\
&= x^{n+1} 2^n x^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)(l+n-1)!}{l! (2l+2n)(2l+2n-1)!} x^{2l} \\
&= x^{n+1} 2^{n-1} x^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n-1)!}{l! (2l+2n-1)!} x^{2l} \\
&= x^{n+1} j_{n-1}(x)
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Namun dengan aturan rantai, turunan $x^{n+1} j_n(x)$ adalah sebagai berikut

$$\frac{d}{dx} \{ x^{n+1} j_n(x) \} = (n+1) x^n j_n(x) + x^{n+1} j_n'(x) \tag{3.3.2}$$

Substitusikan persamaan (3.3.1) pada persamaan (3.3.2) menghasilkan

$$(n+1) x^n j_n(x) + x^{n+1} j_n'(x) = x^{n+1} j_{n-1}(x) \tag{3.3.3}$$

Kemudian persamaan (3.3.3) dibagi dengan x^{n+1} , menjadi

$$\frac{(n+1)}{x} j_n(x) + j_n'(x) = j_{n-1}(x) \tag{3.3.4}$$

2. Pertama, akan dicari turunan pertama dari $x^{-n} j_n(x)$ terhadap x , sebagai berikut

$$\frac{d}{dx} \{ x^{-n} j_n(x) \} = \frac{d}{dx} \left\{ x^{-n} \left(2^n x^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)!} x^{2l} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \left\{ 2^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)!} x^{2l} \right\} \\
&= 2^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)!} 2lx^{2l-1} \\
&= 0 + 2^n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)!} 2lx^{2l-1}
\end{aligned}$$

Substitusikan $m = l + 1$, sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
&= 2^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1) (m+1+n)!}{(m+1)! (2m+2n+3)!} 2(m+1)x^{2m+1} \\
&= x^{-n} 2^n x^n (-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1+n)!}{(m+1)m! (2m+2n+3)!} 2(m+1)x^{2m+1} \\
&= x^{-n} 2^n x^n (-1) 2x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1+n)!}{m! (2m+2n+3)!} x^{2m} \\
&= -x^{-n} 2^{n+1} x^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1+n)!}{m! (2m+2n+3)!} x^{2m} \\
&= -x^{-n} j_{n+1}(x)
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Namun dengan aturan rantai, turunan $x^{-n} j_n(x)$ adalah sebagai berikut

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} j_n(x)) = -nx^{-n-1} j_n(x) + x^{-n} j_n'(x) \tag{3.3.6}$$

Substitusikan persamaan (3.3.5) pada persamaan (3.3.6) menghasilkan

$$-nx^{-n-1} j_n(x) + x^{-n} j_n'(x) = -x^{-n} j_{n+1}(x)$$

Kemudian dibagi dengan $-x^{-n}$, menghasilkan

$$\frac{n}{x} j_n(x) - j_n'(x) = j_{n+1}(x) \tag{3.3.7}$$

3. Jika persamaan (3.3.7) dijumlahkan dengan persamaan (3.3.4) menghasilkan

$$\frac{(2n+1)}{x} j_n(x) = j_{n+1}(x) + j_{n-1}(x)$$

atau dapat ditulis

$$j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{x} j_n(x) \quad (3.3.8)$$

4. Jika persamaan (3.3.4) dikalikan dengan n akan menjadi

$$\frac{n(n+1)}{x} j_n(x) + n j_n'(x) = n j_{n-1}(x) \quad (3.3.9)$$

Jika persamaan (3.3.7) dikalikan $-(n+1)$ akan menjadi

$$-\frac{n(n+1)}{x} j_n(x) + (n+1) j_n'(x) = -(n+1) j_{n+1}(x) \quad (3.3.10)$$

Jika persamaan (3.3.9) dijumlahkan dengan persamaan (3.3.10) akan menghasilkan

$$(2n+1) j_n'(x) = n j_{n-1}(x) - (n+1) j_{n+1}(x)$$

atau dapat ditulis

$$n j_{n-1}(x) - (n+1) j_{n+1}(x) = (2n+1) j_n'(x) \quad (3.3.11)$$

berikutnya akan dijelaskan fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama dalam bentuk fungsi trigonometri yang sering disebut sebagai *formula Rayleigh*.

3.4 Pembuktian Formula Rayleigh

Formula Rayleigh merupakan bentuk fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama dalam bentuk fungsi trigonometri, yaitu

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^n \left(\frac{\sin x}{x} \right) \quad (3.4.1)$$

Notasi $\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^n$ menyatakan $\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^{n-1} \right]$. Sebagai contoh:

$$\begin{aligned} j_2(x) &= (-1)^2 x^2 \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right] \right] \\ &= x^2 \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \left[\frac{1}{x} \left[\left(\frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4} \right) - \left(\frac{x^3 \cos x - 3x^2 \sin x}{x^6} \right) \right] \right] \\
&= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x
\end{aligned}$$

Akan dibuktikan dengan metode induksi matematika, yaitu dengan diasumsikan hasil yang benar untuk $n = N$, kemudian dibuktikan benar untuk $n = N+1$.

Pertama, untuk $n = 0$, persamaan (3.2.16) menjadi

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= 2^0 x^0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l)!}{l!(2l+1)!} x^{2l} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} \\
&= \frac{1}{x} \sin x
\end{aligned}$$

Untuk $n = 0$, formula Rayleigh menjadi

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= (-1)^0 x^0 \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^0 \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\
&= \frac{1}{x} \sin x
\end{aligned}$$

Selanjutnya harus dibuktikan benar untuk semua bilangan bulat positif n .

Asumsikan hasil yang benar untuk $n = N$ sedemikian sehingga :

$$j_N(x) = (-1)^N x^N \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^N \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

Kemudian akan dibuktikan benar untuk nilai $n = N+1$, dengan menggunakan persamaan (3.3.5)

$$j_{N+1}(x) = -x^N \frac{d}{dx} \{ x^{-N} j_N(x) \}$$

$$\begin{aligned}
&= -x^N \frac{d}{dx} \left\{ x^{-N} (-1)^N x^N \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^N \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right\} \\
&= -(-1)^N x^N \frac{d}{dx} \left\{ \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^N \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right\} \\
&= (-1)^{N+1} x^{N+1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^N \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\
&= (-1)^{N+1} x^{N+1} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^{N+1} \left(\frac{\sin x}{x} \right)
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Dengan demikian pembuktian benar untuk nilai $n = N+1$. Karena itu, hasil di atas pasti benar untuk semua bilangan bulat positif n .

3.5 Perhitungan Fungsi *Spherical Bessel*

Pada Subbab 3.2 telah dijelaskan penyelesaian persamaan diferensial *Spherical Bessel* sehingga diperoleh fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama yang mempunyai bentuk sebagai berikut

$$j_n(x) = 2^n x^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)!} x^{2l}$$

dengan n menyatakan order dari fungsi *Spherical Bessel* dan l menyatakan banyaknya suku yang ada pada deret tersebut. Fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama berbentuk deret tak hingga yang mengandung tiga parameter yaitu n , x , dan l . Jika setiap parameter disubstitusikan suatu nilai tertentu, maka akan diperoleh hasil tertentu yang merupakan aproksimasi dari fungsi *Spherical Bessel*. Berikut ini adalah algoritma yang digunakan dalam menghitung fungsi *Spherical Bessel*.

Algoritma Fungsi *Spherical Bessel*

INPUT : l, a, b, n, m

OUTPUT : $Z1, Z2$

Mencari nilai fungsi *Spherical Bessel*

Langkah 1 tetapkan $x = a$; $h = (b - a)/m$; $j = 1$;

Langkah 2 untuk setiap $x \leq b$ lakukan langkah 3 - 9

Langkah 3 term = 0;

Langkah 4 untuk setiap $i = 0, \dots, l$

hitung newterm = $((-1)^i \cdot (\text{factorial}(1+i)) \cdot (x)^{(2*i)})$
 $/(\text{factorial}(i) \cdot \text{factorial}(2*n+2*i+1));$

term = term + newterm;

Langkah 5 hitung $Z1(j) = (2*x)^n \cdot \text{term};$

Mencari nilai fungsi Spherical Bessel yang ada pada Matlab

Langkah 6 hitung $Z2(j) = (\pi/(2*x))^{(1/2)} \cdot \text{besselj}(n+1/2, x);$

Mencari error

Langkah 7 hitung error = $\text{abs}(Z1(j) - Z2(j));$

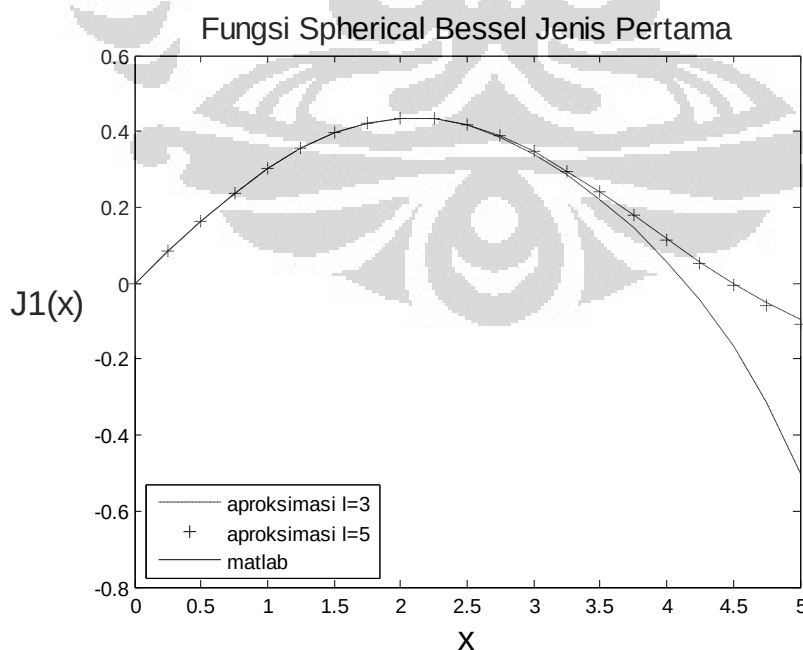
Langkah 8 hitung $j=j+1;$

hitung $x=x+h;$

Langkah 9 OUTPUT (Z1, Z2, error);

STOP

Untuk membandingkan hasil perhitungan nilai dari fungsi *Spherical Bessel* dengan nilai yang dihasilkan oleh Matlab, kita menggunakan *Absolute Error* yaitu $|Z_{\text{matlab}} - Z|$. Dibawah ini ditampilkan beberapa hasil dari perhitungan fungsi *Spherical Bessel*.

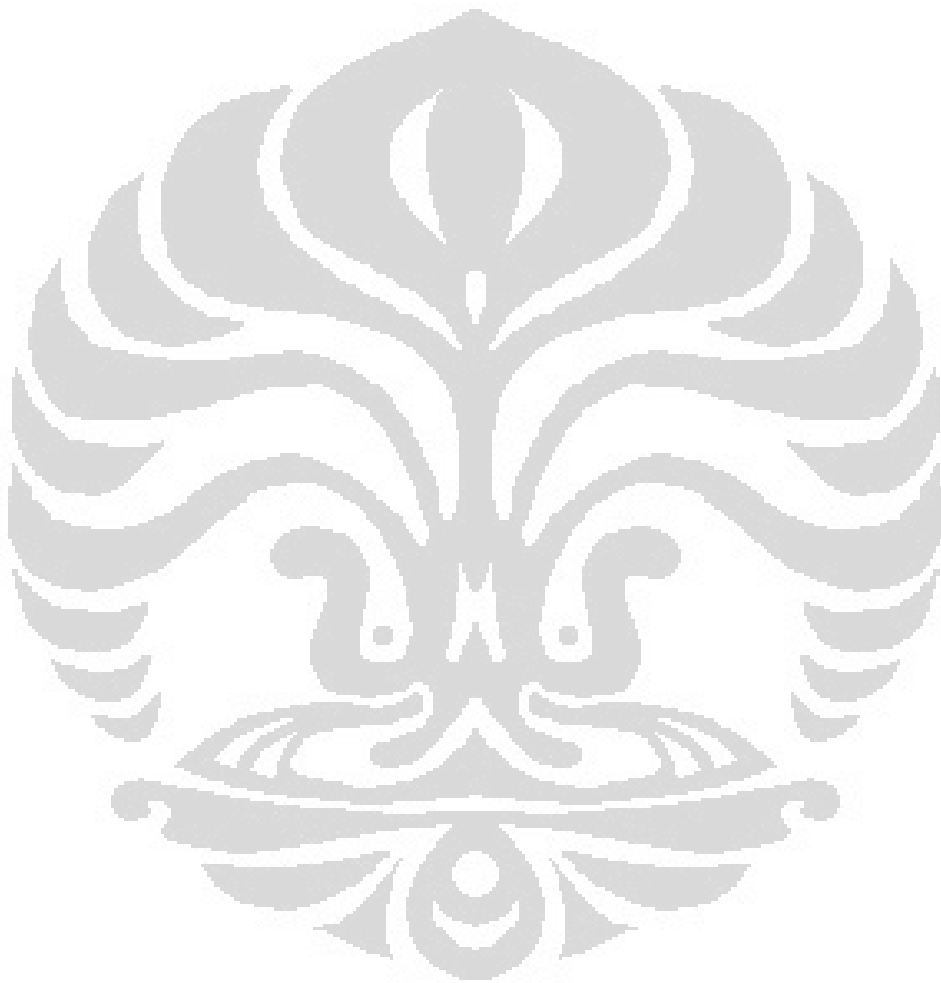


Gambar 3.5 Grafik $j_1(x)$, $l_1=3$, $l_2=5$

Tabel 3.5 Fungsi *Spherical Bessel* order 1 dengan $l = 3$ dan $l = 5$

x	$j_1(x)$	$Z1 : l = 3$	$Z2 : l = 5$	$ Z1-Z3 $	$ Z2-Z3 $
0.00	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.25	0.08281366	0.08281366	0.08281366	0.00000000	0.00000000
0.50	0.16253703	0.16253703	0.16253703	0.00000000	0.00000000
0.75	0.23621708	0.23621706	0.23621708	0.00000002	0.00000000
1.00	0.30116867	0.30116843	0.30116867	0.00000024	0.00000000
1.25	0.35509226	0.35509042	0.35509226	0.00000184	0.00000000
1.50	0.39617297	0.39616350	0.39617296	0.00000947	0.00000001
1.75	0.42315642	0.42311875	0.42315640	0.00003767	0.00000002
2.00	0.43539777	0.43527336	0.43539768	0.00012441	0.00000009
2.25	0.43288174	0.43252552	0.43288135	0.00035622	0.00000039
2.50	0.41621298	0.41530171	0.41621143	0.00091127	0.00000155
2.75	0.38657752	0.38444987	0.38657218	0.00212765	0.00000534
3.00	0.34567749	0.34107142	0.34566105	0.00460607	0.00001644
3.25	0.29564272	0.28628557	0.29559648	0.00935715	0.00004624
3.50	0.23892368	0.22091893	0.23880332	0.01800475	0.00012036
3.75	0.17817146	0.14511380	0.17787851	0.03305766	0.00029295
4.00	0.11611074	0.05784832	0.11543814	0.05826242	0.00067260
4.25	0.05541217	-0.04363841	0.05394519	0.09905058	0.00146698
4.50	-0.00142958	-0.16452287	-0.00448673	0.16309328	0.00305715
4.75	-0.05220622	-0.31318216	-0.05832355	0.26097594	0.00611733
5.00	-0.09508940	-0.50209435	-0.10689132	0.40700495	0.01180192

Gambar 3.5 dan Tabel 3.5 memperlihatkan grafik fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama order 1. Pada gambar tersebut terlihat bahwa untuk nilai l yang diperbesar sedangkan x tetap, maka hasil perhitungan mendekati nilai fungsi *Spherical Bessel* yang dihasilkan oleh Matlab.



BAB 4

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Beberapa kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut

1. Penurunan persamaan skalar Helmholtz dalam koordinat bola akan menghasilkan persamaan diferensial *Spherical Bessel* dengan bentuk

$$r^2 \frac{d^2 \Pi(r)}{dr^2} + 2r \frac{d\Pi(r)}{dr} + (k^2 r^2 - n(n+1)) \Pi(r) = 0$$

2. Penyelesaian persamaan diferensial *Spherical Bessel* dengan cara ditransformasi menggunakan $x = kr$ kemudian $\bar{\Pi}(x) = Z(x) \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ terlebih dahulu, akan menghasilkan fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama dengan bentuk

$$j_n(x) = 2^n x^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (l+n)!}{l! (2l+2n+1)!} x^{2l}$$

3. Bentuk lain dari fungsi *Spherical Bessel* jenis pertama yang berupa fungsi trigonometri sering disebut formula Rayleigh dengan bentuk

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^n \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

4. Dari hasil perhitungan aproksimasi fungsi *Spherical Bessel* dan aproksimasinya, kesimpulan yang dapat diambil adalah bahwa jika nilai l yang diperbesar sedangkan x tetap, maka hasil perhitungan mendekati nilai fungsi *Spherical Bessel* yang dihasilkan oleh Matlab.

DAFTAR PUSTAKA

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Function*. New York: Dover Publications, Inc.
- Anton, Howard. (1994). *Elementary Linier Algebra*. Canada
- Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2005). *Mathematical Methods for Physicists* (6th ed.). Elsevier Academic Press.
- Bachtiar, Al Haji A. (2009). *A Study of Planar Velocity Dynamos and Related Issues*. Sydney: University of Sydney.
- Bell, W. W. (2004). *Special Functions for Scientists and Engineers*. Courier Dover.
- Boyce, William E. & DiPrima, Richard C. (1977). *Elementary Differential Equations*. Canada.
- Kreyszig, Erwin. (1979). *Advanced Engineering Mathematics* (4th ed). Canada.
- Nagle, R. Kent, Saff, Edward B. & Snider, Arthur David. (2004). *Fundamentals of Differential Equation* (6th ed), Pearson Education, Inc.
- Nail A.Gumeror, & Ramani. (2004). *Fast Multipole Methods for The Helmholtz Equation in Three Dimensions*, Elsevier Ltd.
- O'Neil, Peter V. (2003). *Fourier Advanced Engineering Mathematics*, Unversity of Alabama at Birmingham, ch.15, pp. 785-787.
- Hogg, Robert V., Allen T. Craig. (1995). *Introduction to Mathematical Statistics*, USA, ch.3, pp.131.
- Santos, Marcio L. S. (2007). *Analytical and approximate methods in transport phenomena*. CRC Press.
- Varberg, D., & Purcell, E. J. (1997). *Calculus*. Prentice Hall International, Inc.

LAMPIRAN

Listing Program Fungsi Spherical Bessel

```
% program menghitung nilai fungsi Spherical Bessel
l1=input('Masukkan nilai l1 = ');
l2=input('Masukkan nilai l2 = ');
a=input('Masukkan batas bawah x = ');
b=input('Masukkan batas atas x = ');
n=input('Masukkan order n = ');
m=input('Masukkan jumlah partisi = ');
fprintf('    x        jn(x)      Z1:l1=%f      Z2:l2=%f      |Z1-Z3|
|Z2-Z3|' ,l1,l2);
h=(b-a)/m;
x=a;
Z1=zeros(1,m+1);
Z2=zeros(1,m+1);
Z3=zeros(1,m+1);
j=1;
while x<=b
    term1=0;
    term2=0;
    for i=0:l1
        newterm1=((1)^i*(factorial(1+i))*(x)^(2*i))
        /(factorial(i)*factorial(2*n+2*i+1));
        term1=term1 + newterm1;
    end
    for i=0:l2
        newterm2=((1)^i*(factorial(1+i))*(x)^(2*i))
        /(factorial(i)*factorial(2*n+2*i+1));
        term2=term2 + newterm2;
    end
    if(j==1)
        Z1(j)=(2*x)^n*term1;
        Z2(j)=(2*x)^n*term2;
        Z3(j)=0;
        fprintf('\n%6.4f %16.12f %16.12f %16.12f %16.12f
%16.12f',x,Z3(j),Z1(j),Z2(j),abs(Z1(j)-Z3(j)),
abs(Z2(j)-Z3(j)));
        j=j+1;
        x=x+h;
    else
        Z1(j)=(2*x)^n*term1;
        Z2(j)=(2*x)^n*term2;
        Z3(j)=(pi/(2*x))^(1/2)*besselj(n+1/2,x);
        fprintf('\n%6.4f %16.12f %16.12f %16.12f %16.12f%16.12f',
x,Z3(j),Z1(j),Z2(j),abs(Z1(j)-Z3(j)),abs(Z2(j)-Z3(j)));
        j=j+1;
        x=x+h;
    end
end
plot(a:h:b,Z1,'black--');hold on
plot(a:h:b,Z2,'black+')
plot(a:h:b,Z3,'black-');hold off
```



```
xlabel('x', 'FontSize', 16)  
ylabel('Jl(x)', 'Rotation', 0, 'FontSize',  
16, 'HorizontalAlignment', 'right')  
title('Fungsi Spherical Bessel Jenis Pertama', 'FontSize', 15)  
legend('aproksimasi l=3', 'aproksimasi l=5', 'matlab', 3)
```

