



UNIVERSITAS INDONESIA

**MODEL SEPARABEL
UNTUK INTERAKSI NUKLEON - NUKLEON**

TESIS

**ENCU RUSMANA
0906576441**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM PASCASARJANA FISIKA MURNI DAN TERAPAN
DEPOK
*MEI 2012***



UNIVERSITAS INDONESIA

MODEL SEPARABEL
UNTUK INTERAKSI NUKLEON - NUKLEON

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

Encu Rusmana

0906576441

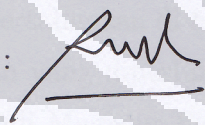
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM PASCASARJANA FISIKA MURNI DAN TERAPAN
KEKHUSUSAN FISIKA NUKLIR DAN PARTIKEL
DEPOK
Mei 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Encu Rusmana

NPM : 0906576441

Tanda Tangan : 

Tanggal : 25 Mei 2012



HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :
Nama : Encu Rusmana
NPM : 0906576441
Program Studi : Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan
Peminatan : Fisika Nuklir dan Partikel
Judul Tesis : Model Separabel untuk Interaksi Nukleon-Nukleon

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Agus Salam (.....)
Penguji : Prof. Dr. Terry Mart (.....)
Penguji : Dr. Imam Fachruddin (.....)
Penguji : Dr. Anto Sulaksono (.....)

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 25 Mei 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas segala berkat dan rahmat-Nya, dan setiap kekuatan yang diberikan oleh-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Magister Sains Program Studi Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis menyadari banyak mendapatkan bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Penyusunan tesis telah menyita perhatian dan waktu banyak orang di sekitar penulis. Untuk itu, Penulis bersungguh-sungguh mengucapkan terima kasih dari hati yang paling dalam kepada :

1. Dr. Agus Salam sebagai dosen pembimbing tesis yang telah banyak mencurahkan tenaga, waktu dan fikiran bagi penulis hingga tesis ini dapat diselesaikan.
2. Pemda Provinsi Jambi yang memberikan Penulis beasiswa selama menjalankan studi.
3. Prof. Dr. Terry Mart, Dr. Imam Fachruddin dan Dr. Anto Sulaksono selaku dewan penguji atas kritik dan saran untuk perbaikan tesis ini.
4. Dosen-dosen di departemen Fisika yang telah berbagi pengetahuan fisika dan nilai-nilai hidup mulia kepada penulis antara lain Pak Aziz, Pak Handoko, Pak Dedi, dan Pak Yunus

5. Emak saya tercinta yang selalu memberikan dukungan moril dan motivasi.
6. Istri dan anak-anakku (Putri, Kevin dan Vino) yang tercinta, dan adik-adik, atas segala doa, dukungan dan fasilitas yang diberikan. Kalian adalah keluarga terbaik yang diberikan Allah kepada saya.
7. Teman-teman S2 Fisika Murni dan Terapan (Syofie, Dina, Asmi, Khabid, Heri,, Mardona, Tukimin, dan kawan-kawan lainnya).
8. Syaefuddin Jaelani untuk dukungan, dan diskusi yang luar biasa dalam penulisan menggunakan latex dalam menyelesaikan tesis.
9. Pak Parman, Pak Lardi, para pegawai perpustakaan, dan semua staff Departemen Fisika maupun Dekanat MIPA untuk bantuannya kepada penulis terutama dalam mengurus administrasi.
10. Pemda Propinsi Jambi dan kolega yang memberi dukungan materi dan moril penulis untuk terus berkembang.

Penulis telah berusaha maksimal namun apabila dalam penyusunan atau penyajian tesis ini terdapat kekurangan, maka penulis berharap saran dan kritik yang membangun dari pembaca. Semoga fisika khususnya fisika nuklir partikel dapat lebih berkembang di Indonesia tercinta.

Depok, 25 Mei 2012

Encu Rusmana

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Encu Rusmana
NPM : 0906576441
Program Studi : Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan
Departemen : Fisika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Tesis

demikian demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

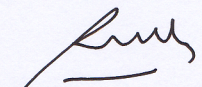
Model Separabel untuk Interaksi Nukleon-Nukleon

berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta. Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 25 Mei 2012

Yang menyatakan


(Encu Rusmana)

Abstrak

Nama : Encu Rusmana
Program Studi : Magister Fisika
Judul : Model Separabel untuk Interaksi Nukleon-Nukleon

Telah dilakukan perhitungan hamburan Nukleon-Nukleon dengan menggunakan interaksi separabel rank-1 dan rank-2. Parameter interaksi ditentukan melalui fitting dengan data pergeseran fase dari analisis SAID untuk gelombang parsial S , P , dan D dengan isospin 0 dan 1. Data yang digunakan berada dalam daerah energi lab 0-200 MeV.

Kata kunci : Nukleon, hamburan, pergeseran fase, interaksi separabel.
x+73 halaman : 8 gambar; 6 tabel
Daftar Pustaka : 16 (1970-2010)

Abstract

Name : Encu Rusmana
Program Study : Magister Fisika
Title : Separable Model for Nucleon-Nucleon Interaction

Nucleons scattering has been calculated by using the separable interaction of rank-1 and rank-2. Interaction parameters are determined by fitting to the phase shift data from SAID's analysis for partial waves S , P , and D with isospin 0 and 1. The data used in the fitting are data with lab energy between 0-200 MeV.

Keywords : Nucleon, scattering, phaseshift, separable interaction
x+73 pages : 8 pictures; 6 tables
Bibliography : 16 (1970-2010)

Daftar Isi

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI	vi
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	xi
1 Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Metode Penelitian	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
2 Teori Dasar Hamburan	5
2.1 Kinematika Proses Hamburan	6
2.2 Persamaan Lippmann-Schwinger	13
2.3 Amplitudo Transisi	15
2.4 Pergeseran Fase	16

3	Interaksi Nukleon - Nukleon (NN)	19
3.1	Nukleon - Nukleon (NN)	19
3.2	Pendekatan Separabel	20
3.2.1	Potensial Separabel Rank-1	21
3.2.2	Potensial Separabel Rank-2	24
3.3	Penetapan Parameter	31
4	Hasil Dan Diskusi	33
4.1	Proses Fitting	33
4.2	Hasil dan Diskusi	34
4.2.1	neutron-proton (np)	34
4.2.2	proton-proton (pp)	48
5	Kesimpulan dan Saran	56
	Lampiran	57
A	Integrasi dengan Metode Residu	58
A.1	Fungsi Kompleks	58
A.2	Teorema Residu	58
A.2.1	Deret Laurent	58
A.2.2	Residu	58
A.2.3	Integrasi Rank-1	59
A.2.4	Integrasi Rank-2	63
B	Diferensial	79
C	Notasi dan Unit	81

Daftar Tabel

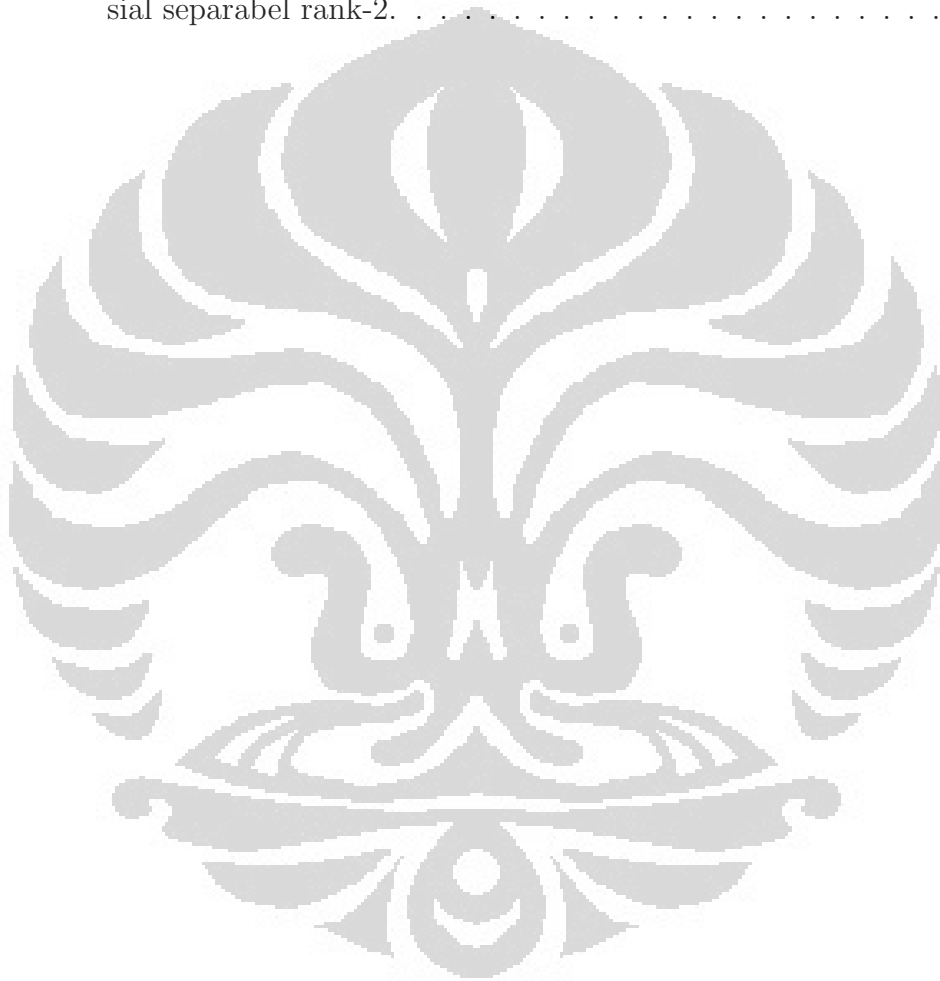
4.1	Keadaan pertama dari interaksi NN yang diperbolehkan prinsip Pauli	33
4.2	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3D_1 . .	34
4.3	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_0 . .	36
4.4	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3D_3 . .	37
4.5	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_2 . .	38
4.6	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3S_1 . .	39
4.7	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3S_1 dengan faktor pengali	40
4.8	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3D_2 . .	42
4.9	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_1 . .	43
4.10	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1D_2 . .	44
4.11	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1P_1 . .	45
4.12	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1S_0 . .	47
4.13	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1S_0 dengan faktor pengali	48
4.14	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_0 . .	49
4.15	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_2 . .	49
4.16	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_1 . .	52
4.17	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1D_2 . .	53
4.18	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1S_0 . .	54
4.19	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1S_0 dengan faktor pengali	55

Daftar Gambar

2.1	Proses kinematika tumbukan elastik dua benda	7
4.1	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3D_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.	35
4.2	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3P_0 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	36
4.3	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3D_3 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.	37
4.4	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3P_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.	38
4.5	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3S_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	39
4.6	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3S_1 setelah memakai faktor pengali. Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	40
4.7	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3D_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.	41

4.8	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3P_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	42
4.9	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1D_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.	43
4.10	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1P_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	44
4.11	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1S_0 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	46
4.12	Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1S_0 setelah memakai faktor pengali. Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	47
4.13	Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3P_0 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	48
4.14	Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3P_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.	50
4.15	Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3P_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	51
4.16	Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1D_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.	52

4.17 Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1S_0 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	53
4.18 Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1S_0 setelah memakai faktor pengali. Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.	54



Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Interaksi Nukleon-Nukleon (NN) merupakan proses dasar penting agar kita dapat mengerti dalam mempelajari struktur nuklir, reaksi nuklir, materi nuklir, bintang neutron dan lain-lain. Interaksi NN bisa interaksi antar proton dengan proton (pp), neutron dengan proton (np) atau neutron dengan neutron (nn). Untuk interaksi nn sukar terjadi, karena neutron di alam bebas sukar didapatkan.

Interaksi NN didominasi oleh interaksi kuat yang banyak dipelajari melalui hamburan NN . Meski banyak kerumitan dalam perhitungan, sampai sekarang interaksi kuat masih dikerjakan dalam bentuk interaksi NN karena banyaknya data eksperimen yang tersedia.

Interaksi np pada keadaan terikat menghasilkan inti baru yang disebut deutron. Deutron merupakan sistem yang hanya memiliki satu keadaan terikat. Deutron tak memiliki keadaan tereksitasi. Dalam interaksinya, proton dan neutron mengalami proses yang disebut pertukaran meson di antara mereka. Pertukaran meson diusulkan oleh Yukawa pada tahun 1935 yang dikenal sebagai Teori Medan Meson. Yukawa menyatakan bahwa terdapat partikel dengan parameter massa antara massa elektron dan massa nukleon yang bertanggung jawab atas adanya gaya inti. Partikel tersebut dikenal sebagai pion [1].

Bentuk interaksi kuat sampai sekarang masih diteliti. dikarenakan ketergantungan interaksi kuat terhadap spin amat rumit. Hingga saat ini hanya model-model interaksi NN dihasilkan. Model-model ini memiliki parameter yang nilainya ditentukan oleh suatu pencocokan (fitting) terhadap data eksperimen. Model-model mutakhir yang berfungsi sangat baik dapat dipakai

sebagai input untuk perhitungan nuklir, seperti dalam perhitungan hamburan nuklir. Model-model interaksi NN secara umum dikembangkan dalam dua pendekatan. Pertama berdasarkan teori pertukaran boson yang dikenal dengan OBEP (One Boson Exchange Potential). Model ini mengikuti ide Yukawa ketika menjelaskan interaksi kuat sebagai pertukaran pion. Dalam model ini, interaksi NN dilihat sebagai pertukaran satu meson (pion, rho-meson, dan lain-lain) antara dua nukleon. Beberapa model yang terkenal adalah potensial Bonn [2], potensial Paris [3], dan potensial Nijmegen [4]. Dalam perkembangannya dikenal juga TPEP (Two Pion Exchange Potential), yaitu dimungkinkannya pertukaran dua pion antara dua nukleon.

Kedua, pendekatan secara fenomenologis. Pengembangan model yang berdasarkan teori meson, dalam rangka mendapatkan bentuk interaksi nuklir yang sebenarnya, meski mengalami kemajuan namun juga berjalan alot, karena adanya kesulitan dalam perhitungan. Di tengah pengembangan model yang berdasarkan teori meson, model fenomenologis muncul sebagai sebuah ide yang bertujuan lebih praktis yaitu, sekedar menghasilkan suatu model interaksi NN agar bisa dijadikan input bagi perhitungan nuklir. Jika sebuah model fenomenologis yang baik sudah didapat (baik berarti bisa mereproduksi banyak data eksperimen), maka perhitungan dengan model fenomenologis ini dapat dipakai sebagai pengganti data yang ekonomis untuk memeriksa model yang berdasarkan teori meson. Model fenomenologis mulai dikembangkan di tahun 1950-an, cukup lama setelah mulai dikembangkannya model yang berdasarkan teori meson. Salah satu model fenomenologis yang terkenal adalah potensial Argonne [5]. Untuk level quark juga dikenal potensial Kyoto-Niigata [6].

Representasi separabel untuk interaksi antar partikel pertama kali digunakan oleh [7], karena itu representasi ini sering juga disebut interaksi atau potensial Yamaguchi. Sejauh ini digunakan orang untuk mempermudah persamaan Lippmann-Schwinger secara analitis, terutama pada kasus beberapa benda (*few-body problem*). Selain bentuknya yang nonlokal, usaha-usaha mempertemukan interaksi separabel dan OBEP telah dilakukan, diantaranya oleh [8],

Eksperimen hamburan pp dilakukan dengan menembakkan proton proyektil ke proton target karena sumber proton mudah didapat misalnya gas hidrogen. Sedangkan hamburan np dilakukan dengan menembakkan proton ke deuteron sebagai pengganti neutron karena ketiadaan sumber neutron bebas. Dari hamburan ini akan didapatkan hamburan pp atau np . Dalam [8] teori interaksi kuat yang dipelajari dalam teori QCD, teori tersebut dapat menjelaskan

pertukaran *boson gauge*. *Boson gauge* kuat dinamakan dengan *gluon*, karena gluon mengkomunikasikan gaya untuk partikel-partikel berinteraksi secara kuat terikat bersama-sama, seperti lem “*glue*“. Teori QCD bisa digunakan pada sistem hamburan energi tinggi (*high energy physics*). Untuk energi rendah dan menengah (*low and medium energy physics*) aplikasi teori ini sulit untuk diterapkan karena terkendala oleh kerumitan matematisnya, di samping tuntutan untuk memperhitungkan lebih banyak lagi proses (diagram) yang mungkin. Untuk energi rendah dan menengah, penelitian dapat dilanjutkan dengan menggunakan baryon dan meson (hadron) sebagai pengganti quark dan gluon atau bisa juga dengan memprediksikan bentuk interaksi secara fenomenologis. Untuk keperluan yang bersifat praktis, interaksi kuat dapat diasumsikan berbentuk separabel. Interaksi beberapa benda yang menggunakan bentuk separabel digunakan untuk mempermudah penyelesaian persamaan Lippmann-Schwinger secara analitis.

Setelah diperoleh solusi persamaan Lippmann-Schwinger secara analitis, dan dilanjutkan menghitung nilai pergeseran fase hamburan NN maka kita dapat mengetahui gaya interaktif yang terjadi pada hamburan NN , cara ini cukup berhasil dilakukan oleh [9]. Dan [8] telah melakukan usaha-usaha mempertemukan interaksi separabel dan OBEP dengan bentuknya yang nonlokal. Untuk itu penulis mencoba melakukan penelitian membuat model seperabel untuk interaksi NN yang disertai faktor bentuk yang lebih kompleks.

1.2 Perumusan Masalah

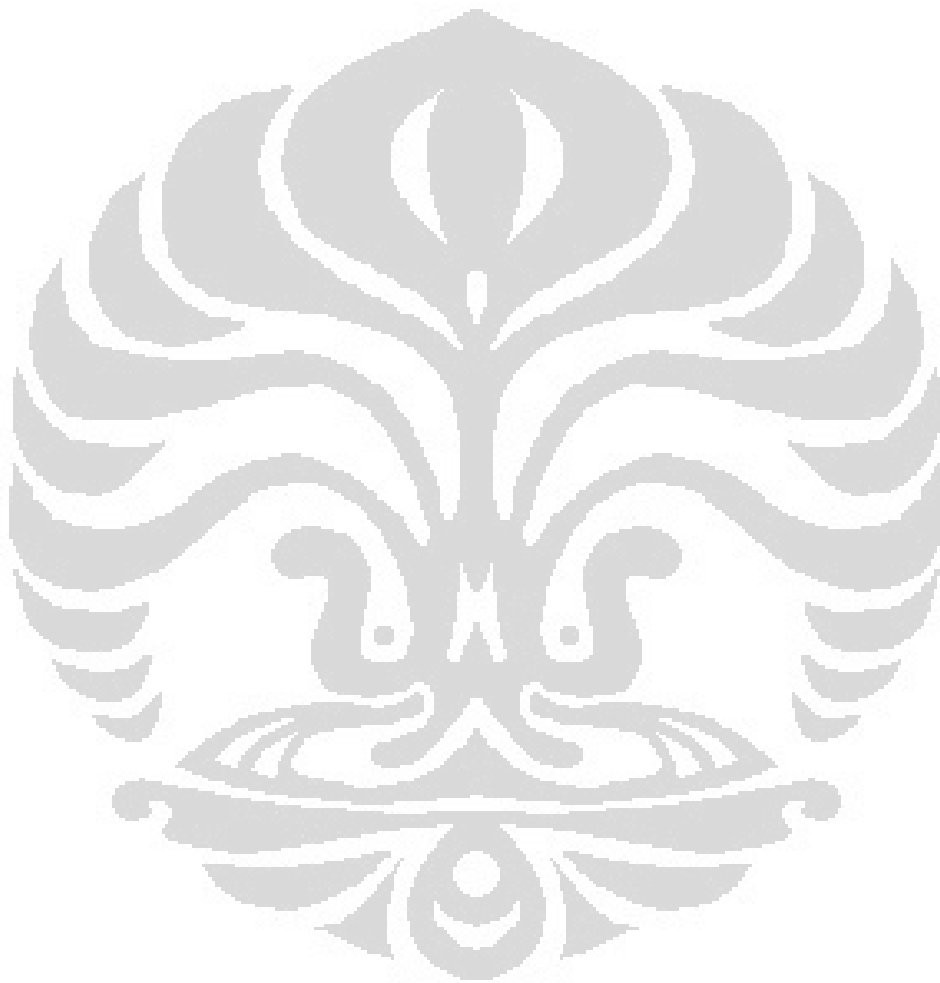
Rumusan masalahnya difokuskan pada menemukan model interaksi Nukleon-Nukleon (NN) yang sederhana tetapi dapat menjelaskan observable dengan baik. Melakukan perhitungan pergeseran fase hamburan NN untuk gelombang parsial S , P dan D , dengan fitting energi lab. antara 0-200 MeV, karena pada energi tersebut masih dalam ranah tumbukkan elastis.

1.3 Metode Penelitian

Dilakukan dengan menurunkan persamaan Lipmann-Schwinger sehingga didapat elemen matriks T . Dari elemen matriks T kita dapat menentukan pergeseran fase hamburan, untuk mencari parameter potensial dilakukan *fitting* dengan membandingkan pergeseran fase hasil perhitungan dan data. Proses *fitting* dikerjakan dengan menggunakan *routine fitting minuit* dari CERN.

1.4 Tujuan Penelitian

Membuat model seperabel untuk interaksi NN menggunakan faktor bentuk tertentu untuk menghitung pergeseran fase hamburan NN .



Bab 2

Teori Dasar Hamburan

Hamburan terjadi jika suatu partikel proyektil ditembakkan pada partikel yang dianggap sebagai target sehingga akan terjadi interaksi antar partikel itu. Pada umumnya hamburan merupakan proses dari objek yang saling mendekat dan pada jarak tertentu objek ini akan berinteraksi kemudian objek ini akan berpisah kembali. Menurut [10] banyak yang dapat kita dapatkan dari percobaan hamburan, seperti kekuatan dan interaksi dalam atom dan inti, biasanya kita tahu sifat dari partikel yang digunakan sebagai proyektil, yaitu momentum dan polarisasi partikel. Partikel-partikel ini tersebar oleh atom-atom target dan selanjutnya dideteksi oleh alat yang dapat memberi kita intensitas sebagai fungsi dari sudut hamburan dan rentang interaksi berada dalam jarak yang amat kecil sehingga diluar jarak itu kedua objek praktis tidak berinteraksi satu sama lain. Dengan kata lain di luar jarak itu mereka diasumsikan dalam keadaan bebas.

Interaksi antar partikel dapat dipahami dengan mengkaji proses hamburan. Hamburan elastik terjadi jika tidak ada energi yang hilang sedangkan sebaliknya kita sebut sebagai hamburan inelastik. Teori hamburan klasik menyatakan jika suatu partikel pada pusat hamburan dengan energi datang E dan *impact parameter* b akan membentuk sudut hambur. Menurut [11] masalah penting pada hamburan klasik adalah *impact parameter* dan perhitungan sudut hambur. Biasanya semakin kecil *impact parameter* semakin besar sudut hambur. Menurut teori hamburan kuantum [11] bila kita membayangkan sebuah peristiwa gelombang berjalan searah sumbu $-z$, dimana bertemu dengan potensial hamburan menghasilkan gelombang spherical artinya kita mencari solusi persamaan umum Schrodinger. Penjelasan tentang hamburan dalam bab ini difokuskan pada interaksi dua objek dan hanya bersifat singkat sebagai dasar untuk membuat formulasi pada bab-bab selanjutnya.

2.1 Kinematika Proses Hamburan

Interaksi NN dikelompokkan dalam interaksi dua benda. Ini berarti hanya terdapat dua partikel pada keadaan awal dan akhir. Umumnya interaksi ini dapat dituliskan sebagai [12] :

$$A(\vec{p}_A) + B(\vec{p}_B) \rightarrow A(\vec{q}_A) + B(\vec{q}_B) \quad (2.1)$$

dimana \vec{p}_i adalah momentum awal dan \vec{q}_i adalah momentum akhir partikel i , dengan $i \in \{A, B\}$.

Untuk memudahkan menghitung proses hamburan dalam *Kinematika Non-Relativistik* maka kita menggunakan momentum relative (\vec{p}).

Didapatkan informasi bahwa posisi relatif partikel A terhadap partikel B adalah :

$$\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad (2.2)$$

Jika persamaan (2.2) diturunkan terhadap waktu kita dapatkan :

$$\vec{v} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \quad (2.3)$$

Karena persamaan umum momentum $\vec{p} = m\vec{v}$ maka persamaan (2.3) menjadi :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\vec{p}_A}{m_A} - \frac{\vec{p}_B}{m_B} \\ \vec{v} &= \frac{m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B}{m_A m_B} \\ m_A m_B \vec{v} &= m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B \end{aligned} \quad (2.4)$$

Persamaan (2.3) dikalikan dengan $\frac{1}{m_A + m_B}$ akan didapat :

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \vec{v} = \frac{m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B}{m_A + m_B} \quad (2.5)$$

Jika $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \mu$, maka persamaan (2.5) :

$$\mu \vec{v} = \frac{m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B}{m_A + m_B} \quad (2.6)$$

Karena $\vec{p} = \mu\vec{v}$ dengan μ adalah masa tereduksi, maka persamaan (2.6) menjadi :

$$\vec{p} = \frac{m_B\vec{p}_A - m_A\vec{p}_B}{m_A + m_B} \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) merupakan persamaan momentum relatif yang tidak bergantung pada kerangka acuan yang dipakai, dengan m_A menyatakan massa partikel A, m_B merupakan massa partikel B, \vec{p}_A adalah momentum partikel A dan \vec{p}_B momentum partikel B dengan momentum bersifat kekal dalam proses hamburan yaitu $|\vec{p}| = |\vec{q}|$, dengan \vec{q} adalah momentum relatif setelah hamburan.

Kerangka yang kita gunakan dalam pembahasan ini adalah kerangka laboratorium (lab.) dan kerangka pusat massa (c.m.). Melihat sistem dua partikel dimana m_A menyatakan massa partikel A yang merupakan proyektil, dan m_B massa partikel B yang merupakan target. Didalam kerangka lab. pada keadaan awal (sebelum mengalami hamburan) m_A dan m_B memiliki momentum masing masing $\vec{p}_A^{\text{lab.}}$ dan $\vec{p}_B^{\text{lab.}}$. Kemudian pada keadaan akhir (sesudah hamburan) momentum yang dimiliki m_A dan m_B adalah $\vec{q}_A^{\text{lab.}}$ dan $\vec{q}_B^{\text{lab.}}$. Pada kerangka acuan pusat massa momentum awal dan akhir bagi partikel proyektil (m_A) yaitu $\vec{p}_A^{\text{c.m.}}$ dan $\vec{q}_A^{\text{c.m.}}$, momentum awal dan akhir dari partikel target (m_B) adalah $\vec{p}_B^{\text{c.m.}}$ dan $\vec{q}_B^{\text{c.m.}}$.

Gambar sebelah kiri untuk kerangka lab., sebelah kanan untuk kerangka



Gambar 2.1: Proses kinematika tumbukan elastik dua benda

c.m.

Melihat partikel target yang ditembakkan berada dalam keadaan diam relatif terhadap kerangka lab, maka $\vec{p}_B^{\text{lab.}} = 0$. Sehingga $\vec{p}^{\text{lab.}}$ diperoleh dari persamaan (2.7) adalah :

$$\vec{p}^{\text{lab.}} = \frac{m_B\vec{p}_A^{\text{lab.}}}{m_A + m_B} \quad (2.8)$$

Untuk kerangka c.m., $\vec{p}_A^{\text{c.m.}} = -\vec{p}_B^{\text{c.m.}}$. jika disubsitusikan ke persamaan (2.7) diperoleh :

$$\vec{p}^{\text{c.m.}} = \vec{p}_A^{\text{c.m.}} \quad (2.9)$$

pada momentum relatif berlaku :

$$\vec{p}^{\text{c.m.}} = \vec{p}^{\text{lab.}} \quad (2.10)$$

substitusikan persamaan (2.8) dan (2.9) ke persamaan (2.10) :

$$\vec{p}_A^{\text{c.m.}} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{p}_A^{\text{lab.}} \quad (2.11)$$

persamaan (2.11) dikalikan dengan $\frac{m_A}{m_A}$:

$$\vec{p}_A^{\text{c.m.}} = \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B) m_A} \vec{p}_A^{\text{lab.}}$$

mengingat definisi massa tereduksi (μ) maka hubungan $\vec{p}^{\text{lab.}}$ dan $\vec{p}^{\text{c.m.}}$ adalah :

$$\vec{p}_A^{\text{c.m.}} = \frac{\mu}{m_A} \vec{p}_A^{\text{lab.}} \quad (2.12)$$

Pada suatu hamburan elastik, energi kinetik total bersifat kekal. Energi kinetik total dalam suatu kerangka acuan adalah penjumlahan dari energi kinetik masing-masing partikel. Sehingga besarnya energi total sebelum dan sesudah hamburan berlaku :

Kerangka Lab. :

$$E^{\text{lab.}} = E_A^{\text{lab.}} + E_B^{\text{lab.}} = E_A'^{\text{lab.}} + E_B'^{\text{lab.}} \quad (2.13)$$

$E_B^{\text{lab.}} = 0$ karena $\vec{p}_B^{\text{lab.}} = 0$, maka persamaan (2.13):

$$E^{\text{lab.}} = E_A^{\text{lab.}} = E_A'^{\text{lab.}} + E_B'^{\text{lab.}} \quad (2.14)$$

$$E^{\text{lab.}} = \frac{(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2}{2m_A} \quad (2.15)$$

Untuk kerangka c.m. prinsip hukum kekekalan juga sama dengan kerangka lab., tapi menggunakan $\vec{p}_A^{\text{c.m.}} = -\vec{p}_B^{\text{c.m.}}$, maka :

$$E^{\text{c.m.}} = E_A^{\text{c.m.}} + E_B^{\text{c.m.}} = E_A'^{\text{c.m.}} + E_B'^{\text{c.m.}} \quad (2.16)$$

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{(\vec{p}_A^{\text{c.m.}})^2}{2m_A} + \frac{(\vec{p}_B^{\text{c.m.}})^2}{2m_B} \quad (2.17)$$

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{(\vec{p}_A^{\text{c.m.}})^2}{2m_A} + \frac{(-\vec{p}_A^{\text{c.m.}})^2}{2m_B}$$

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{(\vec{p}_A^{\text{c.m.}})^2}{2m_A} + \frac{(\vec{p}_A^{\text{c.m.}})^2}{2m_B} \quad (2.18)$$

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{(\vec{p}_A^{\text{c.m.}})^2(m_A + m_B)}{2m_A m_B} \quad (2.19)$$

mengingat kembali definisi masa tereduksi, jadi :

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{(\vec{p}_A^{\text{c.m.}})^2}{2\mu} \quad (2.20)$$

substitusikan persamaan (2.12) ke persamaan (2.20), maka :

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{(\frac{\mu}{m_A} \vec{p}_A^{\text{lab.}})^2}{2\mu} \quad (2.21)$$

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{\mu^2}{2\mu m_A^2} (\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2 \quad (2.22)$$

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{\mu}{m_A} \frac{(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2}{2m_A}$$

berdasarkan persamaan (2.15), hubungan $E^{\text{c.m.}}$ dan $E^{\text{lab.}}$ dapat di tulis :

$$E^{\text{c.m.}} = \frac{\mu}{m_A} E^{\text{lab.}} \quad (2.23)$$

Gambar (2.1) menunjukkan proses terjadinya hamburan dimana proyektil datang pada arah sumbu-z dengan momentum awal $\vec{p}_A^{\text{lab.}}$ dan $\vec{p}_A^{\text{c.m.}}$. Hamburan terjadi pada bidang $\hat{x}-\hat{z}$, maka momentum akhir dalam kerangka c.m. adalah :

$$\vec{q}^{\text{c.m.}} = \vec{q}_{\hat{x}} + \vec{q}_{\hat{z}} = \vec{p}_A^{\text{c.m.}} \sin \theta^{\text{c.m.}} \hat{x} + \vec{p}_A^{\text{c.m.}} \sin \theta^{\text{c.m.}} \hat{z} \quad (2.24)$$

seperti persamaan (2.7), momentum relatif sesudah hamburan adalah :

$$\vec{q} = \frac{m_B \vec{q}_A - m_A \vec{q}_B}{m_A + m_B} \quad (2.25)$$

- Pada kerangka lab. persamaan dapat ditulis menjadi :

Sumbu- x

$$\vec{q}_{\hat{x}}^{\text{lab.}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \hat{x} - m_A \vec{q}_B^{\text{lab.}} \hat{x}}{m_A + m_B} \quad (2.26)$$

$$\vec{q}_{\hat{x}}^{\text{lab.}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}} - m_A \vec{q}_B^{\text{lab.}} \sin \beta^{\text{lab.}}}{m_A + m_B} \quad (2.27)$$

Sumbu- z

$$\vec{q}_{\hat{z}}^{\text{lab.}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \hat{z} - m_A \vec{q}_B^{\text{lab.}} \hat{z}}{m_A + m_B} \quad (2.28)$$

$$\vec{q}_{\hat{z}}^{\text{lab.}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} - m_A \vec{q}_B^{\text{lab.}} \cos \beta^{\text{lab.}}}{m_A + m_B} \quad (2.29)$$

Berdasarkan hukum kekekalan momentum yaitu besar momentum sebelum hamburan sama dengan besar momentum setelah hamburan, maka dapat ditulis :

$$\vec{p}_A^{\text{lab.}} + \vec{p}_B^{\text{lab.}} = \vec{q}_A^{\text{lab.}} + \vec{q}_B^{\text{lab.}} \quad (2.30)$$

karena $\vec{p}_B^{\text{lab.}} = 0$

$$\vec{p}_A^{\text{lab.}} = \vec{q}_A^{\text{lab.}} + \vec{q}_B^{\text{lab.}} \quad (2.31)$$

Sumbu- x

$$\vec{p}_A^{\text{lab.}} = \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}} + \vec{q}_B^{\text{lab.}} \sin \beta^{\text{lab.}} \quad (2.32)$$

Sumbu- z

$$\vec{p}_A^{\text{lab.}} = \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} + \vec{q}_B^{\text{lab.}} \cos \beta^{\text{lab.}} \quad (2.33)$$

$$\vec{q}_B^{\text{lab.}} \cos \beta^{\text{lab.}} = \vec{p}_A^{\text{lab.}} - \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} \quad (2.34)$$

pada sumbu- x nilai momentum akhirnya sama dengan 0 (nol) karena saling meniadakan, maka :

$$0 = \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}} + \vec{q}_B^{\text{lab.}} \sin \beta^{\text{lab.}} \quad (2.35)$$

tandanya menjadi negatif (-) karena saling berlawanan arah, maka :

$$0 = \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}} - \vec{q}_B^{\text{lab.}} \sin \beta^{\text{lab.}} \quad (2.36)$$

$$\vec{q}_B^{\text{lab.}} \sin \beta^{\text{lab.}} = \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}} \quad (2.37)$$

substitusikan persamaan (2.37) ke persamaan (2.27) diperoleh :

$$\vec{q}_{\hat{x}}^{\text{lab.}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}} - m_A \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}}}{m_A + m_B} \quad (2.38)$$

substitusikan persamaan (2.34) ke persamaan (2.29), sehingga :

$$\vec{q}_{\hat{z}}^{\text{lab.}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} - m_A (\vec{p}_A^{\text{lab.}} - \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}})}{m_A + m_B} \quad (2.39)$$

- Pada kerangka pusat massa

Berdasarkan persamaan (2.9), maka : $\vec{q}^{\text{c.m.}} = \vec{q}_A^{\text{c.m.}}$. Sehingga :

Sumbu- x

$$\vec{q}_{\hat{x}}^{\text{c.m.}} = \vec{q}_A^{\text{c.m.}} \sin \theta^{\text{c.m.}} \quad (2.40)$$

Sumbu- z

$$\vec{q}_{\hat{z}}^{\text{c.m.}} = \vec{q}_A^{\text{c.m.}} \cos \theta^{\text{c.m.}} \quad (2.41)$$

Hubungan kerangka lab. dan kerangka c.m. adalah :

kerangka c.m. = kerangka lab.

Sumbu- x

$$\vec{q}_{\hat{x}}^{\text{c.m.}} = \vec{q}_{\hat{x}}^{\text{lab.}} \quad (2.42)$$

$$\vec{q}_A^{\text{c.m.}} \sin \theta^{\text{c.m.}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}} - m_A \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}}}{m_A + m_B} \quad (2.43)$$

Sumbu- z

$$\vec{q}_{\hat{z}}^{\text{c.m.}} = \vec{q}_{\hat{z}}^{\text{lab.}} \quad (2.44)$$

$$\vec{q}_A^{\text{c.m.}} \cos \theta^{\text{c.m.}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} - m_A (\vec{p}_A^{\text{lab.}} - \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}})}{m_A + m_B} \quad (2.45)$$

Bila persamaan (2.43) dibagi dengan persamaan (2.45), maka :

$$\frac{\sin \theta^{\text{c.m.}}}{\cos \theta^{\text{c.m.}}} = \frac{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}} - m_A \vec{q}_A^{\text{lab.}} \sin \theta^{\text{lab.}}}{m_B \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} - m_A (\vec{p}_A^{\text{lab.}} - \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}})} \quad (2.46)$$

Jadi hubungan antara $\theta^{\text{c.m.}}$ dengan $\theta^{\text{lab.}}$ adalah :

$$\tan \theta^{\text{c.m.}} = \frac{(m_B - m_A) \sin \theta^{\text{lab.}}}{m_B \cos \theta^{\text{lab.}} - m_A \left(\frac{\vec{p}_A^{\text{lab.}}}{\vec{q}_A^{\text{lab.}}} - \cos \theta^{\text{lab.}} \right)} \quad (2.47)$$

Kemudian untuk menyederhanakan persamaan (2.47) kita mencari penyelesaian $\vec{q}_A^{\text{lab.}}$, dengan mengkuadratkan persamaan (2.34) dan (2.37), sehingga diperoleh :

$$(\vec{p}_A^{\text{lab.}} - \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}})^2 = (\vec{q}_B^{\text{lab.}})^2 \cos^2 \beta^{\text{lab.}} \quad (2.48)$$

$$(\vec{q}_B^{\text{lab.}})^2 \sin^2 \beta^{\text{lab.}} = (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 \sin^2 \theta^{\text{lab.}} \quad (2.49)$$

dari persamaan (2.48) :

$$(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2 - 2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} + (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 \cos^2 \theta^{\text{lab.}} = (\vec{q}_B^{\text{lab.}})^2 \cos^2 \beta^{\text{lab.}} \quad (2.50)$$

Jika $\cos^2 \beta^{\text{lab.}} = 1 - \sin^2 \beta^{\text{lab.}}$ dan mensubstitusikan persamaan (2.49) ke persamaan (2.50), sehingga diperoleh :

$$(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2 - 2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \cdot \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} + (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 \cos^2 \theta^{\text{lab.}} = (\vec{q}_B^{\text{lab.}})^2 - (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 \sin^2 \theta^{\text{lab.}} \quad (2.51)$$

Pada hamburan elastik hukum kekekalan energi dalam kerangka lab adalah :

$$\frac{(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2}{2m_A} = \frac{(\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2}{2m_A} + \frac{(\vec{q}_B^{\text{lab.}})^2}{2m_B} \quad (2.52)$$

dari persamaan (2.52) didapat :

$$(\vec{q}_B^{\text{lab.}})^2 = \frac{m_B}{m_A} (\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2 - \frac{m_B}{m_A} (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 \quad (2.53)$$

substitusikan persamaan (2.53) ke persamaan (2.51), maka :

$$(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2 - 2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \cdot \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} + (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 \cos^2 \theta^{\text{lab.}} = \left\{ \frac{m_B}{m_A} (\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2 - \frac{m_B}{m_A} (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 \right\} - (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 \sin^2 \theta^{\text{lab.}} \quad (2.54)$$

diketahui $\cos^2 \theta^{\text{lab.}} + \sin^2 \theta^{\text{lab.}} = 1$, sehingga persamaan (2.54) dapat disederhanakan menjadi :

$$\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right) (\vec{q}_A^{\text{lab.}})^2 - 2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \cdot \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} + \left(1 - \frac{m_B}{m_A}\right) (\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2 = 0 \quad (2.55)$$

dari persamaan kuadrat (2.55) diketahui :

$$a = 1 + \frac{m_B}{m_A}$$

$$b = -2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \cdot \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}}$$

$$c = \left(1 - \frac{m_B}{m_A}\right) (\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2$$

persamaan kuadrat (2.55) diselesaikan menggunakan rumus abc, yaitu :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.56)$$

$$\vec{q}_{A\pm}^{\text{lab.}} = \frac{2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \cdot \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} \pm \sqrt{(2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \cdot \vec{q}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}})^2 - 4\left\{1 + \frac{m_B}{m_A}\right\}\left\{\left(1 - \frac{m_B}{m_A}\right)(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2\right\}}}{2\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)} \quad (2.57)$$

setelah disederhanakan bagian yang didalam akar pada persamaan (2.57), diperoleh :

$$\sqrt{(2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}})^2 - 4\left\{1 + \frac{m_B}{m_A}\right\}\left\{\left(1 - \frac{m_B}{m_A}\right)(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2\right\}} = 4(\vec{p}_A^{\text{lab.}})^2 \left(\frac{m_B^2}{m_A^2} - \sin^2 \theta^{\text{lab.}}\right) \quad (2.58)$$

substitusikan persamaan (2.58) ke persamaan (2.57), kemudian disederhanakan maka akan diperoleh :

$$\vec{q}_{A\pm}^{\text{lab.}} = \frac{2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \cos \theta^{\text{lab.}} \pm 2\vec{p}_A^{\text{lab.}} \sqrt{\frac{m_B^2}{m_A^2} - \sin^2 \theta^{\text{lab.}}}}{2\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)} \quad (2.59)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.59) ke persamaan (2.47) akan didapat hubungan $\theta^{\text{c.m.}}$ dan $\theta^{\text{lab.}}$ yang lebih sederhana. Dimana $\theta^{\text{c.m.}}$ hanya merupakan fungsi dari momentum awal dan sudut hamburnya. Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(\theta^{\text{c.m.}}) = f(\vec{p}_A^{\text{lab.}}, \theta^{\text{lab.}}) \quad (2.60)$$

2.2 Persamaan Lippmann-Schwinger

Diketahui persamaan umum Schrodinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (2.61)$$

Persamaan (2.61) dikalikan dengan faktor $-\frac{2m}{\hbar^2}$, menjadi :

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2} E\psi(\vec{r}) \quad (2.62)$$

Jika :

$$U(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r})$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

Sehingga persamaan (2.62) dapat ditulis dengan :

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) - U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = -k^2 \psi(\vec{r}) \quad (2.63)$$

Bila disederhanakan (2.63) akan menjadi :

$$\{\nabla^2 + k^2\}\psi(\vec{r}) = U(\vec{r})\psi(\vec{r}) \quad (2.64)$$

Persamaan (2.64) merupakan representasi persamaan Schrodinger dalam ruang koordinat. Selanjutnya dengan memanfaatkan sifat delta Dirac yaitu :

$$\int d^3 r' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}') = f(\vec{r}) \quad (2.65)$$

maka suku kanan persamaan (2.64) berubah menjadi :

$$U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \int d^3 r' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.66)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.66) ke persamaan (2.64) diperoleh persamaan :

$$\{\nabla^2 + k^2\}\psi(\vec{r}) = \int d^3 r' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.67)$$

Diketahui fungsi Green seperti dibawah ini :

$$\{\nabla^2 + k^2\}G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.68)$$

maka persamaan (2.67) menjadi :

$$\{\nabla^2 + k^2\}\psi(\vec{r}) = \int d^3 r' \{\nabla^2 + k^2\}G(\vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.69)$$

$$\{\nabla^2 + k^2\}\psi(\vec{r}) = \{\nabla^2 + k^2\} \int d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.70)$$

$$\psi(\vec{r}) = \int d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.71)$$

Sehingga, solusi komplit jika ada interaksi :

$$\psi(\vec{r}) = \phi_i(\vec{r}) + \int d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.72)$$

Persamaan (2.72) adalah persamaan Lippmann - Schwinger didalam ruang koordinat. Jika interaksinya tidak ada ($U(\vec{r}') = 0$), maka :

$$\{\nabla^2 + k^2\}\phi_i(\vec{r}) = 0 \quad (2.73)$$

dengan $i = \text{initial}$ yang berarti sebagai fungsi gelombang awal.

2.3 Amplitudo Transisi

Setelah mengganti $U = \frac{2m}{\hbar^2}V$, maka persamaan (2.72) bisa dituliskan dalam notasi Dirac menjadi :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\phi_i\rangle + GU|\psi\rangle \\ &= |\phi_i\rangle + \frac{2m}{\hbar^2}GV|\psi\rangle \end{aligned} \quad (2.74)$$

dimana *subscript i* yang berarti awal dan *f* yang berarti akhir. Amplitudo transisi didenisikan sebagai [13] :

$$t_{fi} \equiv \langle \phi_f | T | \phi_i \rangle \equiv \langle \phi_f | V | \psi \rangle \quad (2.75)$$

Gunakan (2.74) dan relasi kelengkapan $\sum |\phi_m\rangle\langle\phi_m| = 1$ pada (2.75) diperoleh :

$$t_{fi} = V_{fi} + \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{m,n} V_{fm} \langle \phi_m | G | \phi_n \rangle t_{ni} \quad (2.76)$$

Misalkan ϕ adalah fungsi gelombang di ruang momentum \vec{p} , maka persamaan (2.76) menjadi :

$$t(\vec{p}_f, \vec{p}_i) = V(\vec{p}_f, \vec{p}_i) + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{p}_m \int d^3\vec{p}_n V(\vec{p}_f, \vec{p}_m) G(\vec{p}_m, \vec{p}_n) t(\vec{p}_n, \vec{p}_i) \quad (2.77)$$

Dengan menggunakan fungsi Green dalam ruang momentum yang diberikan oleh Charles [13] :

$$G(\vec{p}_m, \vec{p}_n) = \frac{\delta(\vec{p}_m - \vec{p}_n)}{p^2 - p_m^2} \quad (2.78)$$

maka persamaan (2.77) menjadi :

$$t(\vec{p}_f, \vec{p}_i) = V(\vec{p}_f, \vec{p}_i) + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{p}_n \frac{V(\vec{p}_f, \vec{p}_n) t(\vec{p}_n, \vec{p}_i)}{p^2 - p_n^2} \quad (2.79)$$

Selanjutnya \vec{p}_i kita sebut dengan p dan \vec{p}_f kita sebut dengan q . Matriks- T yang didapatkan sebagai solusi persamaan Lippman - Schwinger :

$$t_{fi}^{l'lj}(q, p) = V_{fi}^{l'lj}(q, p) + \sum_{n''} \int_0^\infty dk_n(k_n)^2 \frac{V_{fn}^{l''lj}(q, k_n) t_{ni}^{l''lj}(k_n, p)}{E - E_n'' + i\varepsilon} \quad (2.80)$$

dimana V adalah potensial interaksi antar partikel, E adalah energi internal sistem, dan E_n'' , k_n , l'' dan “ n ” adalah energi akhir, momentum relatif, momen-

tum angular orbital, dan kontribusi partikel pada keadaan intermediet. Pada pendekatan non-relativistik, energi pada keadaan intermediet adalah :

$$E_n'' = \frac{(k_n)^2}{2\mu_n} + M_n \quad (2.81)$$

dimana M_n dan μ_n adalah total dan massa reduksi sistem pada keadaan intermediet. Dengan pendekatan ini dan menganggap hamburan kanal tunggal dengan “n” = 1, maka :

$$t_{fi}''lj(q, p) = V_{fi}''lj(q, p) + \sum_{l''} 2\mu \int_0^{\infty} dk (k)^2 \frac{V_f''l''j(q, k) t_i''l''j(k, p)}{q^2 - k^2 + i\varepsilon} \quad (2.82)$$

2.4 Pergeseran Fase

Sebagai persiapan untuk definisi dari matriks hamburan, penting sebuah notasi sentral dalam teori medan kuantum, kita mengambil hamburan potensial atas dasar persamaan Schrodinger. Hal ini menyebabkan definisi dari matriks-T dan dengan cara yang sama akan menghasilkan hubungan antara matriks-T dan amplitudo hamburan [14]. Sedangkan menurut [9] amplitudo hamburan elastik NN sebagai t_{NN} , dimana t_{NN} merupakan solusi dari persamaan Lippmann-Schwinger. Matriks- S untuk amplitudo elastik dengan momentum angular total J dan parity P dalam semua kasus dari rank dan kanal-kanal sebagai berikut :

$$S = 1 - i2Np\mu(p)t_{NN} \quad (2.83)$$

dimana :

$$\frac{1}{\mu(p)} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + m_N^2}} + \frac{1}{m_N} \quad (2.84)$$

Selanjutnya hubungan pergeseran fase δ dan parameter absorpsi η dengan matriks- S menurut [9] adalah :

$$S = \eta e^{2i\delta} \quad (2.85)$$

Sifat-sifat interaksi yang muncul pada kanal-kanal gelombang parsial dapat dikenali dengan menganalisis pergeseran fase. Pergeseran fase menunjukkan sifat atraktif atau repulsif dari gaya nuklir. δ merupakan pergeseran fase yang menunjukkan bagaimana perubahan fase fungsi gelombang sebelum dan setelah hamburan [13]. Dari denisi pergeseran fase kita dapat melihat, bahwa nilai dari pergeseran fase berkaitan dengan sifat dari interaksi NN [15]. Pergeseran

fase dengan nilai negatif menunjukkan adanya gaya repulsif (saling tolak) sedangkan pergeseran fase dengan nilai positif menunjukkan gaya yang sifatnya atraktif (saling tarik) pada interaksi NN .

Dari definisi persamaan (2.83), (2.85) dan karena proses ini dalam tumbukan elastik maka $\eta = 1$, sehingga :

$$\begin{aligned} 1 - i2Np\mu(p)t_{NN} &= e^{2i\delta} \\ 1 - i2Np\mu(p)t_{NN} &= \cos(2\delta) + i \sin(2\delta) \end{aligned} \quad (2.86)$$

sebagai sebuah bilangan kompleks, $t_{NN} = Re[t_{NN}] + iIm[t_{NN}]$ maka :

$$\begin{aligned} 1 - i2Np\mu(p)(Re[t_{NN}] + iIm[t_{NN}]) &= \cos(2\delta) + i \sin(2\delta) \\ 1 - i2Np\mu(p)Re[t_{NN}] + 2Np\mu(p)Im[t_{NN}] &= \cos(2\delta) + i \sin(2\delta) \\ 1 + 2Np\mu(p)Im[t_{NN}] - i2Np\mu(p)Re[t_{NN}] &= \cos(2\delta) + i \sin(2\delta) \end{aligned} \quad (2.87)$$

ini juga dapat ditulis :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2\delta)}{\cos(2\delta)} &= \frac{-2Np\mu(p)Re[t_{NN}]}{1 + 2Np\mu(p)Im[t_{NN}]} \\ \tan(2\delta) &= \frac{-2Np\mu(p)Re[t_{NN}]}{1 + 2Np\mu(p)Im[t_{NN}]} \\ 2\delta &= \arctan \left[\frac{-2Np\mu(p)Re[t_{NN}]}{1 + 2Np\mu(p)Im[t_{NN}]} \right] \end{aligned} \quad (2.88)$$

jika :

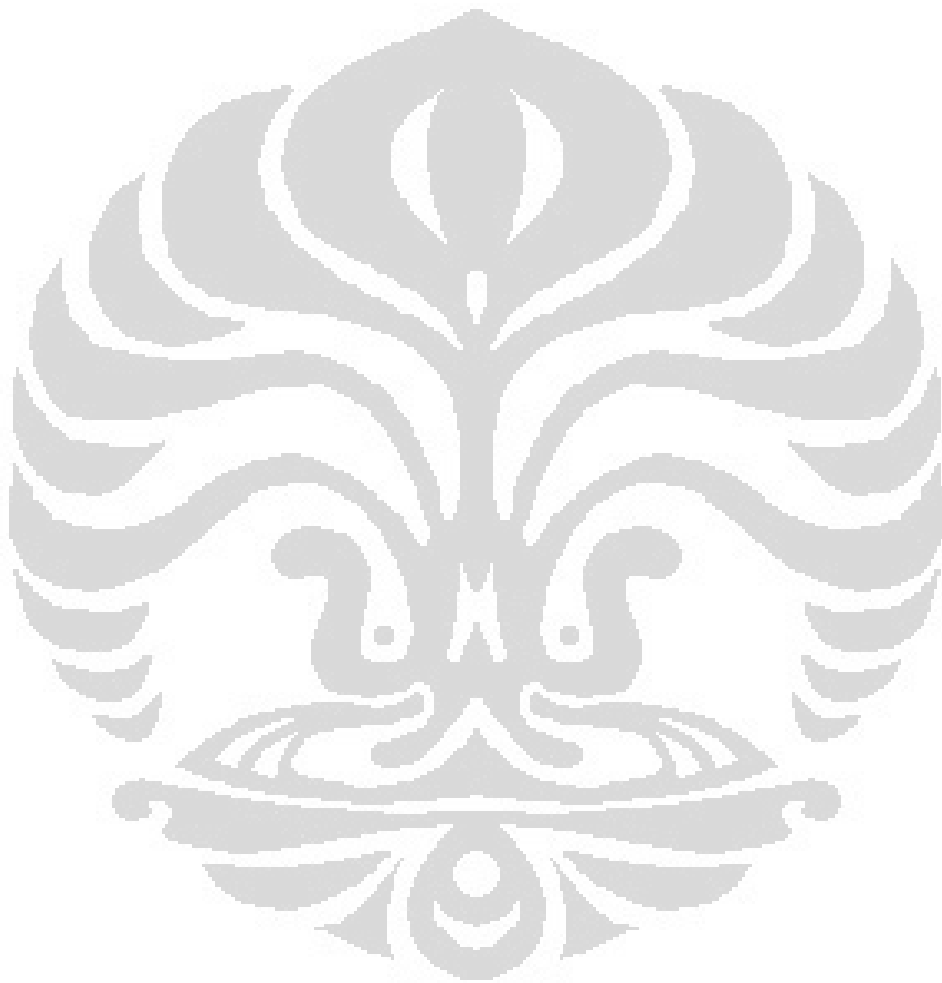
$$\chi = \frac{-2Np\mu(p)Re[t_{NN}]}{1 + 2Np\mu(p)Im[t_{NN}]} \quad (2.89)$$

maka, akan diperoleh hubungan antara pergeseran fase dengan matriks-T sebagai berikut :

$$\delta = \frac{1}{2} \arctan(\chi) \quad (2.90)$$

Dari memperoleh nilai pergeseran fase kita dapat memperoleh observable. Tapi untuk proses sebaliknya tidak semudah itu. Kita tidak dapat memperoleh pergeseran fase dari data observable hasil eksperimen melalui proses analitik langsung. Karenanya, prosedur yang biasa digunakan untuk memperoleh nilai pergeseran fase dari nilai observabel (hasil eksperimen) adalah dengan proses fitting. Kita memasukkan nilai pergeseran fase awal kemudian dilakukan iterasi terhadap nilai tersebut dengan membandingkan data observabel yang diperoleh dari pergeseran fase dengan data eksperimen. Untuk membentuk model potensial bagi interaksi NN , kami melakukan fitting dengan data pergeseran

fase yang diperoleh dari analisis SAID.



Bab 3

Interaksi Nukleon - Nukleon (NN)

3.1 Nukleon - Nukleon (NN)

Hamburan terjadi apabila ada interaksi dari partikel yaitu dari proyektil dan target. Semakin besar interaksi maka sudut hamburannya (θ) semakin besar. Dalam hal ini akan difokuskan pada interaksi NN , misal Nukleon A (N_A) diasumsikan dari proyektil dan Nukleon B (N_B) sebagai targetnya. Interaksi antara Nukleon (N) dan Nukleon (N) dikelompokkan dalam interaksi dua benda. Ini berarti hanya terdapat dua partikel pada keadaan awal dan akhir, salah satu bentuk interaksi yang mungkin adalah :

$$N(\vec{p}_N) + N(\vec{-p}_N) \rightarrow N(\vec{q}_N) + N(\vec{q}_N) \quad (3.1)$$

dimana \vec{p}_N adalah momentum awal dan \vec{q}_N adalah momentum akhir dari masing-masing partikel Nukleon.

Potensial separabel menurut [16] adalah potensial non lokal pada fungsi gelombang yang bergantung pada nilai fungsi dari seluruh ruang konfigurasi. Jika memilih potensial nonlokal tanpa deret yang panjang, kita dapat bergantung teori daerah efektif yang menjamin fitting data untuk energi rendah. Faktor bentuk yang digunakan dalam potensial separabel merupakan transformasi Fourier dari representasi ruang ke momentum. Dalam faktor bentuk tersebut terdapat berbagai nilai parameter, yang akan dicari dalam penelitian ini. Kami menggunakan data eksperimen dari analisis SAID dan melakukan fitting terhadapnya. Pada penelitian ini, kami memilih bentuk potensial separabel

yang didasarkan pada faktor bentuk potensial yang digunakan [9].

3.2 Pendekatan Separabel

Dengan memperhatikan hamburan NN dalam sistem pusat massa dimana momentum relatif awal dan momentum relatif akhir adalah \vec{p} dan \vec{q} , dan energi totalnya adalah w . Menurut [9] amplitudo transisi t untuk hamburan NN dapat dituliskan kembali dalam bentuk lain dari persamaan Lippmann - Schwinger, dimana persamaan tersebut sudah dituliskan dalam representasi gelombang parsial, yaitu sebagai berikut :

$$t(q, p; w) = v(q, p) + \int_0^{\infty} dk k^2 v(q, k) G_N(w; k) t(k, p; w) \quad (3.2)$$

dengan $v(q, p)$ adalah potensial dan $G_N(w; k)$ adalah fungsi Green bebas. Pada hamburan kanal tunggal fungsi Green-nya adalah :

$$G_N(w; k) = [w + i\epsilon - w_N(k)]^{-1} \quad (3.3)$$

dimana :

$$\begin{aligned} w_N(k) &= \frac{k^2}{2m_N} + m_N + \frac{k^2}{2m_N} + m_N \\ &= \frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{m_N} + \frac{1}{m_N} \right) + (m_N + m_N) \\ &= \frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{m_N} + \frac{1}{m_N} \right) + m_{NN} \\ &= \frac{k^2}{2\mu_{NN}} + m_{NN} \end{aligned} \quad (3.4)$$

dengan μ_{NN} adalah massa tereduksi untuk partikel N dan N , m_{NN} adalah massa total kedua partikel. Dengan cara yang sama akan didapatkan :

$$w = \frac{q^2}{2\mu_{NN}} + m_{NN} \quad (3.5)$$

bila disubstitusikan persamaan (3.4) dan persamaan (3.5) ke persamaan (3.3) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 G_N(w; k) &= \left[\left\{ \frac{q^2}{2\mu_{NN}} + m_{NN} \right\} + i\epsilon - \left\{ \frac{k^2}{2\mu_{NN}} + m_{NN} \right\} \right]^{-1} \\
 &= \left[\frac{q^2}{2\mu_{NN}} - \frac{k^2}{2\mu_{NN}} + i\epsilon \right]^{-1} \\
 &= \left[\frac{q^2}{2\mu_{NN}} - \frac{k^2}{2\mu_{NN}} + \frac{2\mu_{NN}i\epsilon}{2\mu_{NN}} \right]^{-1} \\
 &= \frac{2\mu_{NN}}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Model separabel pada interaksi NN akan dibahas dalam bentuk dua jenis potensial separabel yaitu :

3.2.1 Potensial Separabel Rank-1

Menurut [9] potensial separabel untuk bentuk rank-1 diasumsikan seperti :

$$v(q, p) = \lambda g(q)g(p) \tag{3.7}$$

dimana $\lambda = +1$ atau -1 adalah parameter fase yang menyatakan kasus repulsif dan atraktif, dengan $g(p)$ disebut sebagai faktor bentuk (*form factor*), maka dengan $v(q, k) = \lambda g(q)g(k)$ persamaan (3.2) dapat dituliskan kembali sebagai :

$$\begin{aligned}
 t(q, p; w) &= \lambda g(q)g(p) + \int_0^\infty dk k^2 \lambda g(q)g(k)G_N(w; k)t(k, p; w) \\
 &= g(q) \left[\lambda g(p) + \lambda \int_0^\infty dk k^2 g(k)G_N(w; k)t(k, p; w) \right] \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

misalkan :

$$t(q, p; w) = g(q)a(p, w) \tag{3.9}$$

selanjutnya mensubstitusikan persamaan (3.9) ke persamaan (3.8) dengan

$$t(k, p; w) = g(k)a(p, w)$$

$$g(q)a(p, w) = g(q) \left[\lambda g(p) + \lambda \int_0^\infty dk k^2 g(k)G_N(w; k)g(k)a(p, w) \right] \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
a(p, w) &= \lambda g(p) + \lambda \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k) a(p, w) \\
&= \lambda g(p) + \lambda a(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$a(p, w) - \lambda a(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k) = \lambda g(p) \quad (3.12)$$

$$a(p, w) \left\{ 1 - \lambda \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k) \right\} = \lambda g(p) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
a(p, w) &= \frac{\lambda g(p)}{1 - \lambda \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k)} \\
&= \frac{g(p)}{\frac{1}{\lambda} - \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k)} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

substitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.9) akan diperoleh :

$$t(q, p; w) = \frac{g(q)g(p)}{\frac{1}{\lambda} - \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k)} \quad (3.15)$$

jika :

$$\tau(w) = \left[\lambda^{-1} - \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k) \right]^{-1} \quad (3.16)$$

maka persamaan (3.15) menjadi :

$$t(q, p; w) = g(q)\tau(w)g(p) \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) ini merupakan solusi persamaan (3.2) untuk separabel potensial rank-1. Pada rank-1 untuk hamburan kanal tunggal dari potensial separabel pada energi lab. datang dengan menawarkan $g(k)$ dalam bentuk :

$$g(k) = k^\ell \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{k^2 + \beta_i^2} \quad (3.18)$$

selanjutnya akan kita sebut sebagai *form factor*, dengan ℓ adalah orde gelombang parsial dimana C dan β merupakan parameter yang mencirikan kekuatan dan daerah potensial. Memperhatikan salah satu suku pada persamaan (3.16) di misalkan sebagai :

$$I = \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) G_N(w; k) g(k) \quad (3.19)$$

substitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.19) :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} dk k^2 g(k) \left(\frac{2\mu_{NN}}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \right) g(k) \\ &= 2\mu_{NN} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g^2(k)}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.20)$$

persamaan (3.20) diselesaikan dengan teorema residu yang dijelaskan secara lengkap pada bagian lampiran A. Setelah menghitung integrasinya yang ditunjukkan pada lampiran A, maka dengan mensubstitusikan ke persamaan (3.17) :

Untuk *form factor* tidak campuran diperoleh :

pada $\ell = 0$ dan $\ell' = 0$ adalah :

$$t_{NN}^{00}(q, p) = \lambda \frac{C_0^2}{(q^2 + \beta_0^2)(p^2 + \beta_0^2)} \left[1 + \lambda \frac{N\mu_{NN}C_0^2}{\beta_0(\beta_0 - iq)^2} \right]^{-1} \quad (3.21)$$

pada $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$ adalah :

$$t_{NN}^{11}(q, p) = \lambda \frac{C_1^2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \left[1 + \lambda \frac{N\mu_{NN}C_1^2 [2iq^3 + 3\beta q^2 + \beta^3]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \right]^{-1} \quad (3.22)$$

dan pada $\ell = 2$ dan $\ell' = 2$ adalah :

$$t_{NN}^{22}(q, p) = \lambda \frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \left[1 + \lambda \frac{2N\mu_{NN}C_2^2 [2iq^5 - 3\beta^5 - 5\beta^3 q^2]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \right]^{-1} \quad (3.23)$$

dimana parameter dalam potensial tersebut akan didapatkan dengan melakukan fitting pada data eksperimen pergeseran fase.

Untuk *form factor* campuran yang dihitung diperoleh :

untuk $\ell = 0$ dan $\ell' = 1$ adalah :

$$t_{NN}^{01}(q, p) = \lambda \frac{C_0^2}{(q^2 + \beta_0^2)(p^2 + \beta_0^2)} \left[1 + \lambda \frac{N\mu_{NN}C_0^2}{\beta_0(\beta_0 - iq)^2} + \lambda \frac{N\mu_{NN}C_1^2[2iq^3 + 3\beta q^2 + \beta^3]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \right]^{-1} \quad (3.24)$$

untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 0$ adalah :

$$t_{NN}^{10}(q, p) = \lambda \frac{C_1^2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \left[1 + \lambda \frac{N\mu_{NN}C_1^2[2iq^3 + 3\beta q^2 + \beta^3]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} + \lambda \frac{N\mu_{NN}C_0^2}{\beta_0(\beta_0 - iq)^2} \right]^{-1} \quad (3.25)$$

untuk $\ell = 2$ dan $\ell' = 0$ adalah :

$$t_{NN}^{20}(q, p) = \lambda \frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \left[1 + \lambda \frac{2N\mu_{NN}C_2^2[2iq^5 - 3\beta^5 - 5\beta^3 q^2]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} + \lambda \frac{N\mu_{NN}C_0^2}{\beta_0(\beta_0 - iq)^2} \right]^{-1} \quad (3.26)$$

untuk $\ell = 2$ dan $\ell' = 1$ adalah :

$$t_{NN}^{21}(q, p) = \lambda \frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \left[1 + \lambda \frac{2N\mu_{NN}C_2^2[2iq^5 - 3\beta^5 - 5\beta^3 q^2]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} + \lambda \frac{N\mu_{NN}C_1^2[2iq^3 + 3\beta q^2 + \beta^3]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \right]^{-1} \quad (3.27)$$

3.2.2 Potensial Separabel Rank-2

Potensial separabel untuk bentuk rank-2 diasumsikan seperti [9] :

$$v(q, p) = \lambda_1 g_1(q)g_1(p) + \lambda_2 g_2(q)g_2(p) \quad (3.28)$$

jika persamaan (3.28) disubstitusikan ke persamaan (3.2) dengan

$$v(q, k) = \lambda_1 g_1(q)g_1(k) + \lambda_2 g_2(q)g_2(k)$$

didapat :

$$\begin{aligned}
 t(q, p; w) &= \{\lambda_1 g_1(q) g_1(p) + \lambda_2 g_2(q) g_2(p)\} + \int_0^{\infty} dk k^2 \{\lambda_1 g_1(q) g_1(k) \\
 &\quad + \lambda_2 g_2(q) g_2(k)\} G_N(w; k) t(k, p; w) \\
 &= \lambda_1 g_1(q) g_1(p) + \lambda_2 g_2(q) g_2(p) \\
 &\quad + \int_0^{\infty} dk k^2 \{\lambda_1 g_1(q) g_1(k) G_N(w; k) t(k, p; w) \\
 &\quad + \lambda_2 g_2(q) g_2(k) G_N(w; k) t(k, p; w)\} \\
 &= \lambda_1 g_1(q) g_1(p) + \int_0^{\infty} dk k^2 \lambda_1 g_1(q) g_1(k) G_N(w; k) t(k, p; w) \\
 &\quad + \lambda_2 g_2(q) g_2(p) + \int_0^{\infty} dk k^2 \lambda_2 g_2(q) g_2(k) G_N(w; k) t(k, p; w) \\
 &= g_1(q) \left(\lambda_1 g_1(p) + \lambda_1 \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) t(k, p; w) \right) \\
 &\quad + g_2(q) \left(\lambda_2 g_2(p) + \lambda_2 \int_0^{\infty} dk k^2 g_2(k) G_N(w; k) t(k, p; w) \right) \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

dengan memperhatikan persamaan (3.8) dan (3.9) tentang definisi dari $a(p, w)$, maka persamaan (3.29) menjadi :

$$t(q, p; w) = g_1(q) a_1(p, w) + g_2(q) a_2(p, w) \quad (3.30)$$

pada :

$$a_1(p, w) = \lambda_1 g_1(p) + \lambda_1 \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) t(k, p; w) \quad (3.31)$$

jika :

$$t(k, p; w) = g_1(k) a_1(p, w) + g_2(k) a_2(p, w) \quad (3.32)$$

sehingga persamaan (3.31) menjadi :

$$\begin{aligned}
 a_1(p, w) &= \lambda_1 g_1(p) + \lambda_1 \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) \\
 &\quad \{g_1(k) a_1(p, w) + g_2(k) a_2(p, w)\} \\
 &= \lambda_1 g_1(p) + \lambda_1 a_1(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_1(k) \\
 &\quad + \lambda_1 a_2(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_2(k) \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

pada persamaan (3.33) suku yang mengandung $a_1(p, w)$ diletakkan pada sebelah kiri tanda “sama dengan“ :

$$\begin{aligned}
 a_1(p, w) - \lambda_1 a_1(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_1(k) &= \\
 \lambda_1 g_1(p) + \lambda_1 a_2(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_2(k) \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1(p, w) \left\{ 1 - \lambda_1 \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_1(k) \right\} &= \\
 \lambda_1 g_1(p) + \lambda_1 a_2(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_2(k) \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

maka :

$$\begin{aligned}
 a_1(p, w) &= \frac{\lambda_1 g_1(p) + \lambda_1 a_2(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_2(k)}{1 - \lambda_1 \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_1(k)} \\
 &= \frac{g_1(p) + a_2(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_2(k)}{\lambda_1^{-1} - \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_1(k)} \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

dengan menggunakan cara yang sama mendapatkan $a_1(p, w)$, sehingga akan diperoleh :

$$a_2(p, w) = \frac{g_2(p) + a_1(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_2(k) G_N(w; k) g_1(k)}{\lambda_2^{-1} - \int_0^{\infty} dk k^2 g_2(k) G_N(w; k) g_2(k)} \quad (3.37)$$

misalkan :

$$X_{ij}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_i(k) G_N(w; k) g_j(k) \quad (3.38)$$

dari suku persamaan (3.36) dan (3.37) diperoleh :

$$X_{12}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_2(k) \quad (3.39)$$

$$X_{11}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) G_N(w; k) g_1(k) \quad (3.40)$$

$$X_{21}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_2(k) G_N(w; k) g_1(k) \quad (3.41)$$

$$X_{22}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_2(k) G_N(w; k) g_2(k) \quad (3.42)$$

dan jika :

$$N_{3-i,3-i}(w) = \lambda_i^{-1} - X_{ii}(w); (i = 1, 2); X_{12}(w) = X_{21}(w) = N_{12}(w) \quad (3.43)$$

sehingga :

$$N_{22}(w) = \lambda_1^{-1} - X_{11}(w) \quad (3.44)$$

$$N_{11}(w) = \lambda_2^{-1} - X_{22}(w) \quad (3.45)$$

maka persamaan (3.36) dan (3.37) dapat ditulis :

$$a_1(p, w) = \frac{g_1(p) + a_2(p, w) X_{12}}{\lambda_1^{-1} - X_{11}} \quad (3.46)$$

$$a_2(p, w) = \frac{g_2(p) + a_1(p, w)X_{21}}{\lambda_2^{-1} - X_{22}} \quad (3.47)$$

melihat definisi persamaan (3.43),(3.44) dan (3.45), menjadikan persamaan (3.46) dan (3.47) dapat dituliskan seperti :

$$a_1(p, w)N_{22}(w) = g_1(p) + a_2(p, w)N_{12}(w) \quad (3.48)$$

$$a_2(p, w)N_{11}(w) = g_2(p) + a_1(p, w)N_{12}(w) \quad (3.49)$$

dari persamaan (3.49) :

$$a_1(p, w) = \frac{a_2(p, w)N_{11}(w) - g_2(p)}{N_{12}(w)} \quad (3.50)$$

selanjutnya mensubstitusikan persamaan (3.50) ke persamaan (3.48) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} (a_2(p, w)N_{11}(w) - g_2(p)) N_{22}(w) &= g_1(p)N_{12}(w) + a_2(p, w)[N_{12}(w)]^2 \\ a_2(p, w)N_{11}(w)N_{22}(w) - g_2(p)N_{22}(w) &= g_1(p)N_{12}(w) + a_2(p, w)[N_{12}(w)]^2 \\ a_2(p, w)\{N_{11}(w)N_{22}(w) - [N_{12}(w)]^2\} &= g_1(p)N_{12}(w) + g_2(p)N_{22}(w) \end{aligned} \quad (3.51)$$

jadi :

$$a_2(p, w) = \frac{g_1(p)N_{12}(w) + g_2(p)N_{22}(w)}{N_{11}(w)N_{22}(w) - [N_{12}(w)]^2} \quad (3.52)$$

misalkan :

$$D(w) = N_{11}(w)N_{22}(w) - [N_{12}(w)]^2 \quad (3.53)$$

sehingga persamaan (3.52) dapat ditulis menjadi :

$$a_2(p, w) = \frac{g_1(p)N_{12}(w) + g_2(p)N_{22}(w)}{D(w)} \quad (3.54)$$

substitusikan persamaan (3.54), maka persamaan (3.50) menjadi :

$$\begin{aligned} a_1(p, w) &= \frac{\left[\frac{g_1(p)N_{12}(w) + g_2(p)N_{22}(w)}{D(w)} \right] N_{11}(w) - g_2(p)}{N_{12}(w)} \\ &= \frac{g_1(p)N_{12}(w)N_{11}(w)}{D(w)N_{12}(w)} + \frac{g_2(p)N_{22}(w)N_{11}(w)}{D(w)N_{12}(w)} - \frac{g_2(p)}{N_{12}(w)} \\ &= \frac{g_1(p)N_{11}(w)}{D(w)} + g_2(p) \left[\frac{N_{22}(w)N_{11}(w)}{D(w)N_{12}(w)} - \frac{1}{N_{12}(w)} \right] \\ &= \frac{g_1(p)N_{11}(w)}{D(w)} + g_2(p) \left[\frac{N_{22}(w)N_{11}(w) - D(w)}{D(w)N_{12}(w)} \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

kemudian substitusikan persamaan (3.53) ke persamaan (3.55) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 a_1(p, w) &= \frac{g_1(p)N_{11}(w)}{D(w)} + g_2(p) \left[\frac{N_{22}(w)N_{11}(w) - \{N_{11}(w)N_{22}(w) - [N_{12}(w)]^2\}}{D(w)N_{12}(w)} \right] \\
 &= \frac{g_1(p)N_{11}(w)}{D(w)} + g_2(p) \left[\frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\
 &= \frac{g_1(p)N_{11}(w)}{D(w)} + \frac{g_2(p)N_{12}(w)}{D(w)} \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

substitusikan persamaan (3.56) dan persamaan (3.54) ke persamaan (3.30) menjadi :

$$\begin{aligned}
 t(q, p; w) &= g_1(q) \left[\frac{g_1(p)N_{11}(w)}{D(w)} + \frac{g_2(p)N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\
 &\quad + g_2(q) \left[\frac{g_1(p)N_{12}(w)}{D(w)} + \frac{g_2(p)N_{22}(w)}{D(w)} \right] \\
 &= g_1(q) \frac{N_{11}(w)}{D(w)} g_1(p) + g_1(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_2(p) \\
 &\quad + g_2(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_1(p) + g_2(q) \frac{N_{22}(w)}{D(w)} g_2(p) \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

sehingga persamaan (3.57) dapat disederhanakan menjadi :

$$t(q, p; w) = \sum_{i,j=1,2} g_i(q) \frac{N_{ij}(w)}{D(w)} g_j(p) \tag{3.58}$$

persamaan (3.58) merupakan solusi persamaan (3.2) untuk separabel potensial rank-2. Pada rank-2 untuk hamburan *channel* tunggal dari potensial separabel pada energi lab. nukleon datang dengan menawarkan *form factor* $g_1(k)$ dan $g_2(k)$ sama dengan bentuk *form factor* pada rank-1, yaitu :

$$g_1(k) = k^\ell \frac{C_1}{k^2 + \beta_1^2} \tag{3.59}$$

$$g_2(k) = k^\ell \frac{C_2}{k^2 + \beta_2^2} \tag{3.60}$$

sehingga bila disubstitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.39), (3.40), (3.41), (3.42), maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned} X_{12} &= \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) g_2(k) \frac{2\mu_{NN}}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \\ &= 2\mu_{NN} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g_1(k) g_2(k)}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} X_{11} &= \int_0^{\infty} dk k^2 g_1(k) g_1(k) \frac{2\mu_{NN}}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \\ &= 2\mu_{NN} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g_1^2(k)}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} X_{21} &= \int_0^{\infty} dk k^2 g_2(k) g_1(k) \frac{2\mu_{NN}}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \\ &= 2\mu_{NN} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g_2(k) g_1(k)}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} X_{22} &= \int_0^{\infty} dk k^2 g_2(k) g_2(k) \frac{2\mu_{NN}}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \\ &= 2\mu_{NN} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g_2^2(k)}{q^2 - k^2 + 2\mu_{NN}i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.64)$$

persamaan (3.61), (3.62), (3.63) dan (3.64) diselesaikan dengan teorema residu yang dijelaskan secara lengkap pada bagian lampiran A. Setelah menghitung integrasinya yang ditunjukkan pada lampiran A, maka dengan mensubstitusikan ke persamaan (3.58) :

Untuk *form factor* diperoleh :

pada $\ell = 0$ dan $\ell' = 0$ adalah :

$$t_{NN}^{00}(q, p) = \left[\frac{C_1^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_1 C_2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ + \left[\frac{C_1 C_2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_2^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (3.65)$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.29), (A.30), (A.44) dan (A.46) masing-masing mengandung nilai $N_{11}(w)$, $N_{22}(w)$, $N_{12}(w)$, dan $D(w)$ pada persamaan (3.65).

pada $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$ adalah :

$$t_{NN}^{11}(q, p) = \left[\frac{C_1^2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_1 C_2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ + \left[\frac{C_1 C_2 qp}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_2^2 qp}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (3.66)$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.58), (A.59), (A.73) dan (A.74) masing-masing mengandung nilai $N_{11}(w)$, $N_{22}(w)$, $N_{12}(w)$, dan $D(w)$ pada persamaan (3.66).

dan pada $\ell = 2$ dan $\ell' = 2$ adalah :

$$t_{NN}^{22}(q, p) = \left[\frac{C_1^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ + \left[\frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (3.67)$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.86), (A.87), (A.101) dan (A.102) masing-masing mengandung nilai $N_{11}(w)$, $N_{22}(w)$, $N_{12}(w)$, dan $D(w)$ pada persamaan (3.67).

Dimana parameter dalam potensial tersebut akan didapatkan dengan melakukan fitting pada data eksperimen pergeseran fase.

3.3 Penetapan Parameter

Ada tiga parameter yang dicari yaitu λ_i , β_i dan C_i . Pada saat melakukan proses *fitting* salah satu yang diharapkan adalah mencari kombinasi parameter pada

potensial yang dapat menghasilkan nilai pergeseran fase yang mendekati nilai pergeseran fase pada data eksperimen. Dalam proses *fitting* terlebih dahulu menetapkan nilai awal parameter dan ukuran langkah yang digunakan untuk membatasi variasi nilai parameter, serta batas minimum dan maksimumnya.



Bab 4

Hasil Dan Diskusi

4.1 Proses Fitting

Proses *fitting* dilakukan dengan menggunakan *routine fitting* MINUIT dari CERN. Proses ini diawali dengan memilih parameter yang ada pada potensial secara acak, sehingga menghasilkan data berupa pergeseran fase. Parameter dipilih dengan cara menetapkan terlebih dahulu batas minimum dan maksimum, nilai awal dan ukuran langkah yang digunakan. Ini dilakukan dengan tujuan untuk membatasi variasi nilai parameter. Variabel lain yang dibatasi adalah nilai energi awal pada kerangka laboratorium (lab.) ($T_{lab.}$). $T_{lab.}$ dipilih untuk memfitting dengan energi antara 0-200 MeV. Kemudian dibandingkan nilai pergeseran fase hasil *fitting* dengan data eksperimen dari analisis SAID. Data eksperimen analisis SAID yang diambil disini untuk neutron-proton (np) adalah ${}^3D_1, {}^3P_0, {}^3D_3, {}^3P_2, {}^3S_1, {}^3P_1, {}^1D_2, {}^3D_2, {}^1P_1, {}^1S_0$. Dan untuk proton-proton (pp) ${}^3P_0, {}^3P_2, {}^3P_1, {}^1D_2$ serta 1S_0 . Seperti terlihat pada tabel (4.1)

Tabel 4.1: Keadaan pertama dari interaksi NN yang diperbolehkan prinsip Pauli

	$I=0$	$I=0$	$I=1$	$I=1$
J	$S=0$	$S=1$	$S=0$	$S=1$
0	-	-	1S_0	3P_0
1	1P_1	3S_1 3D_1	-	3P_1
2	-	3D_2	1D_2	3P_2 3F_2
3	1F_3	3D_3 3G_3	-	3F_3

Setelah proses *fitting* dilakukan program minuit maka akan diperoleh nilai - nilai parameter baru. Nilai yang diperoleh bisa mendekati ataupun berbeda jauh dengan nilai parameter yang dipilih secara acak diawal. Notasi yang digunakan adalah $^{2s+1}\ell_j$, dengan ℓ merupakan gelombang parsial, s merupakan spin dan j adalah momentum angular orbital. Notasi S, P, D digunakan untuk menggambarkan orde gelombang parsial pada $\ell = 0, \ell = 1$ dan $\ell = 2$. Untuk penulisan isospin dengan angka 1 dan 3 masing-masing melambangkan isospin 0 dan 1. Untuk memperjelas dalam notasi ini, sebagai contoh penulisan pada notasi 3S_1 mengandung arti “S” adalah orde gelombang parsial pada $\ell = 0$, angka “3” berarti spin 1 dan angka “1” adalah penulisan untuk momentum angular orbital.

4.2 Hasil dan Diskusi

4.2.1 neutron-proton (np)

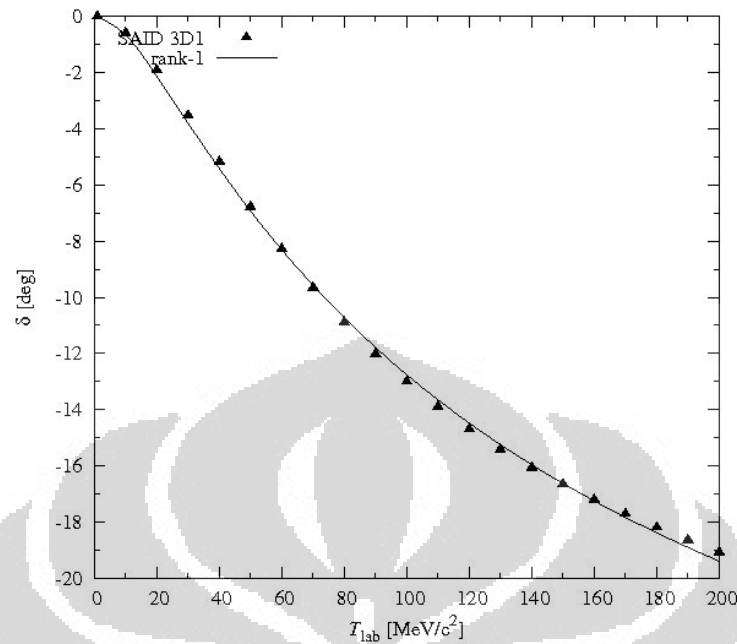
Pada gambar (4.1) terlihat hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3D_1 dari model separabel potensial rank-1. Dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV. Grafik di plot hanya menggunakan rank-1.

Memperhatikan grafik energi lab. 0-200 MeV hasil *fitting* untuk 3D_1 , pada rank-1 didapat nilai χ^2 sebesar 0,003865, karena nilainya kecil berarti plotnya cukup baik. Hal ini bisa dibuktikan dari plot grafiknya dimana hasil plotnya berimpit dengan data eksperimen. Maka untuk 3D_1 hanya menggunakan rank-1.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3D_1 setelah proses *fitting* dapat dilihat pada tabel (4.2).

Tabel 4.2: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3D_1

$T_{lab.}$ [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0 - 200	1	+1	—	0,0016	—	188,85	—

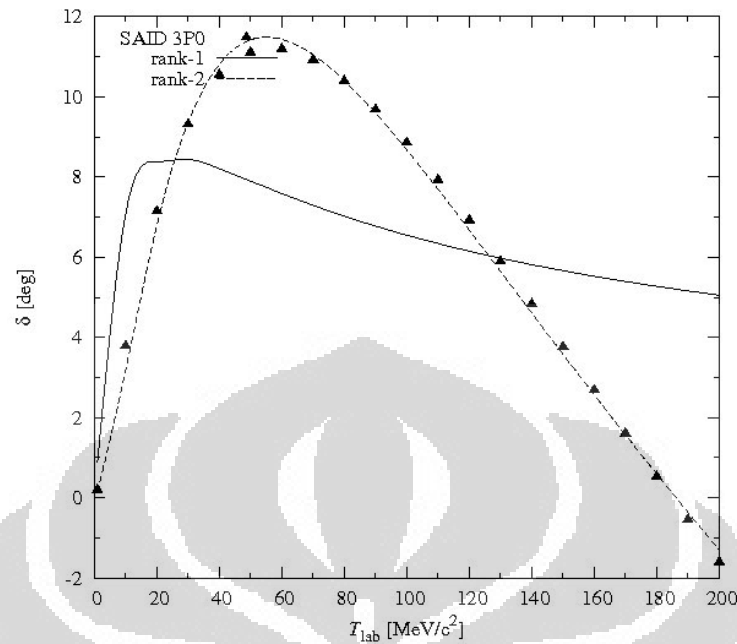


Gambar 4.1: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3D_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.

Pada gambar (4.2) terlihat hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3P_0 dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Dengan jangkauan energi yang sama antara 0-200 MeV. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar.

Dari gambar grafik dengan energi lab. 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* pada gelombang parsial 3P_0 . Untuk rank-1 hasilnya kurang baik tetapi telah mengikuti lengkung kurvanya sedangkan untuk rank-2 sudah cukup baik. Jika kita perhatikan hasil plot grafiknya, produksi kurva grafik yang diperoleh rank-2 jauh lebih baik dari pada rank-1. Hal ini dapat dilihat dari nilai χ^2 nya. Rank-1 memiliki nilai χ^2 sebesar 11.07818 sedangkan rank-2 nilai χ^2 nya didapatkan 0.06926. Jadi produksi kurva grafik yang diperoleh rank-2 lebih baik dari pada rank-1. Model potensial separabel ini sudah mampu untuk memproduksi kelengkungan kurva dari data eksperimen dengan penyimpangan yang kecil. Titik-titik ekstrim dari plot grafik data eksperimen sudah bisa diikuti oleh data pergeseran fase dari hasil *fitting*.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang



Gambar 4.2: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3P_0 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

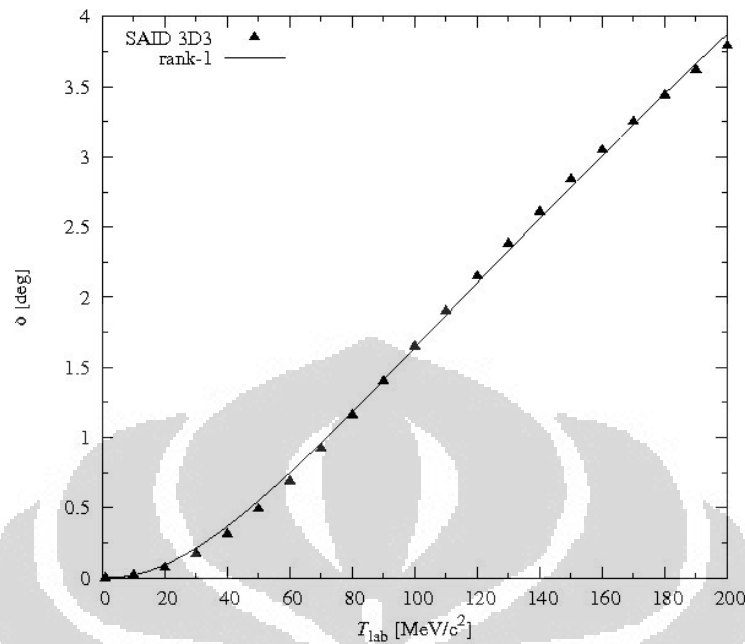
parsial 3P_0 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.3).

Tabel 4.3: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_0

T_{lab} . [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0 - 200	1	-1	—	0.37	—	110.20	—
	2	-1	-1	103.47	859.70	1.61	357.82

Pada gambar (4.3) terlihat hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3D_3 dari model separabel potensial rank-1, dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV. Grafik di plot hanya menggunakan rank-1.

Memperhatikan grafik energi lab. 0-200 MeV hasil *fitting* untuk 3D_3 , pada rank-1 hasil *fitting* cukup baik, dimana didapatkan nilai χ^2 sebesar 0.00205. Ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot grafik gambar (4.3), mampu untuk mengikuti grafik data eksperimen. Berarti model potensial separabel



Gambar 4.3: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3D_3 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.

yang dipilih mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan dapat mengikuti plot grafik data eksperimen.

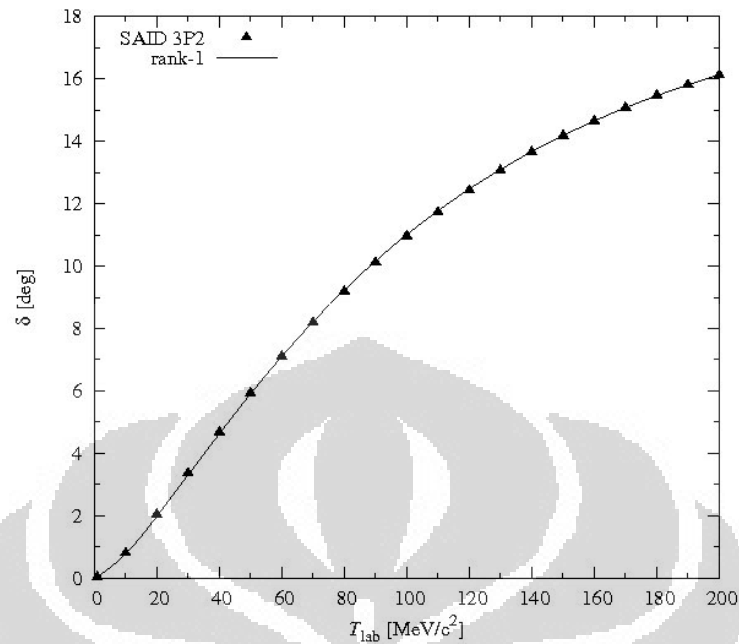
Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3D_3 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.4).

Tabel 4.4: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3D_3

T_{lab} . [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0 - 200	1	-1	—	0.00056	—	185.86	—

Pada gambar (4.4) terlihat hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3P_2 dari model separabel potensial rank-1. Dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV. Grafik di plot hanya menggunakan rank-1.

Memperhatikan gambar grafik 3P_2 dengan energi lab antara 0-200 MeV. Pada rank-1 didapatkan hasil *fitting* yang baik, dengan Nilai χ^2 yang dimiliki untuk rank-1 yaitu 0.00177. Pola dari plot grafiknya terlihat mengikuti plot dari data eksperimen. Ini berarti model potensial separabel yang dipilih



Gambar 4.4: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3P_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.

mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan mengikuti plot grafik data eksperimen.

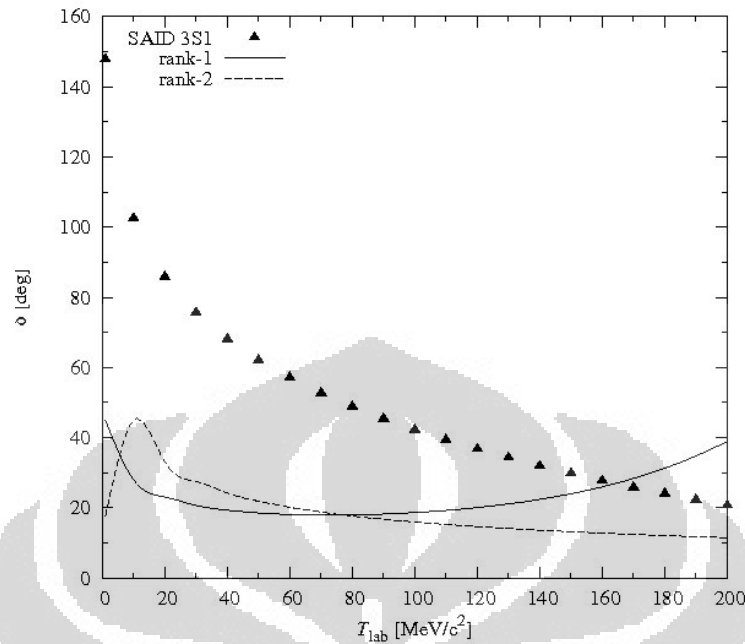
Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3P_2 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.5).

Tabel 4.5: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_2

$T_{lab}.$ [MeV/ c^2]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	-1	—	0.50	—	297.99	—

Pada gambar (4.5) terlihat hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3S_1 dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing-masing jangkauan energi.

Memperhatikan gambar grafik pada energi lab. 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* 3S_1 untuk rank-1 dan rank-2 mempunyai nilai χ^2 yang besar, maka



Gambar 4.5: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3S_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

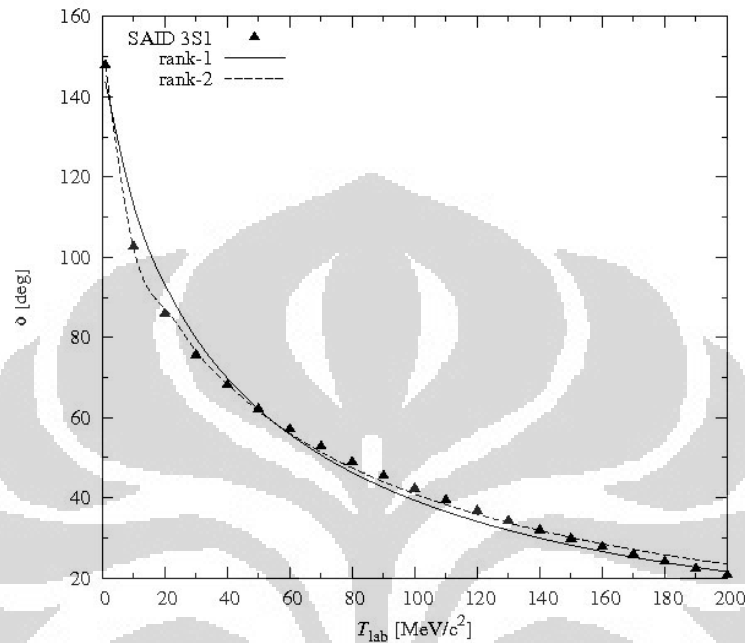
hasil plot grafik yang diperoleh tidak bagus . Model potensial separabel yang dipilih masih terlalu sederhana untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mendekati plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [8] dimana model potensial separabel tidak dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan. Untuk nilai Pergeseran fase hamburan (δ) yang sama atau lebih besar dari 45° hasil *fitting* sulit untuk mengikuti data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3S_1 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.6).

Tabel 4.6: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3S_1

T_{lab} . [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	+1	—	54.25	—	21.47	—
	2	-1	+1	8349.85	54.91	00.93	136.94

Karena pada gelombang parsial 3S_1 mencapai sudut 147° , maka dicoba untuk mendekati plot dipakai faktor pengali. Faktor pengali yang di pakai yaitu kali 4, sehingga terlihat seperti pada gambar (4.6)



Gambar 4.6: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3S_1 setelah memakai faktor pengali. Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

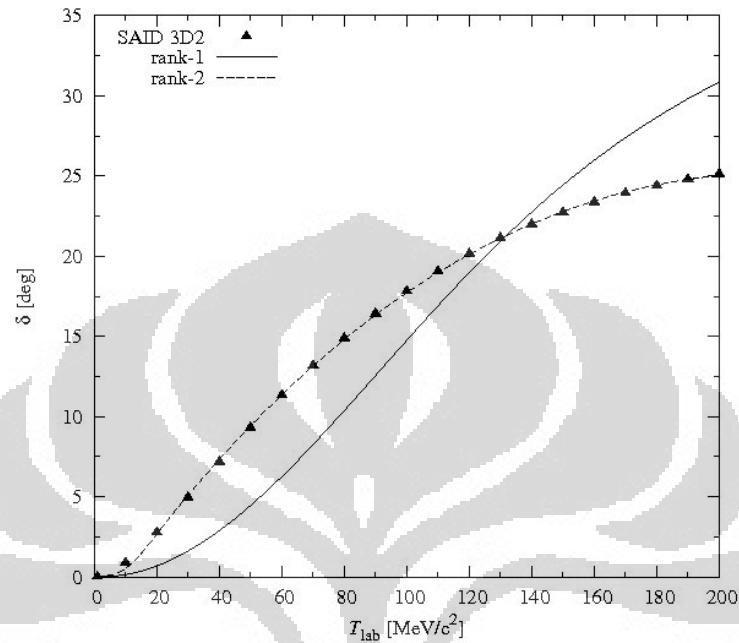
Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3S_1 dengan faktor pengali setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.7).

Tabel 4.7: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3S_1 dengan faktor pengali

T_{lab} [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	-1	—	61.15	—	178.66	—
	2	-1	-1	-14.63	10.97	65.41	197.82

Gambar (4.7) yang merupakan grafik hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3D_2 dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Dengan jangkauan energi yang sama antara 0-200

MeV. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar.



Gambar 4.7: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} untuk gelombang parsial 3D_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.

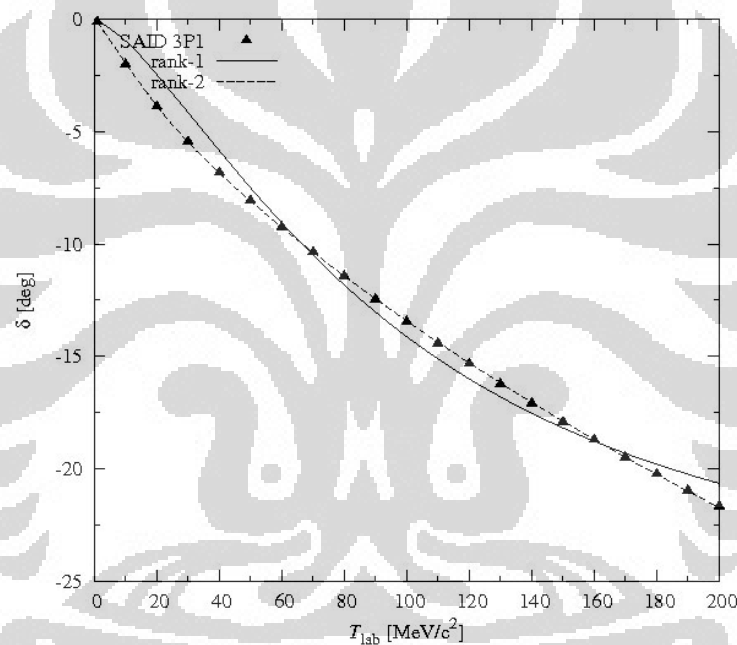
Gambar grafik memperlihatkan energi lab. 0-200 MeV terhadap hasil *fitting* pergeseran fase untuk gelombang parsial 3D_2 pada rank-1, hasilnya kurang baik. Hasil *fitting* rank-1 ini memiliki χ^2 bernilai 13.52666. Tetapi yang dihasilkan pada rank-2 dengan nilai $\chi^2 = 0.01473$, hasilnya lebih baik. Pada grafik terlihat Pola dari plot grafiknya dapat mengikuti plot dari data eksperimen. Jadi model separabel dapat digunakan walaupun modelnya sederhana. Kelengkungan titik-titik kurva data eksperimen bisa dicapai oleh data pergeseran fase hasil fitting ini.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3D_2 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.8).

Tabel 4.8: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3D_2

$T_{lab.}[\text{MeV}]$	Rank	λ_1	λ_2	$C_1[\text{MeV}]$	$C_2[\text{MeV}]$	$\beta_1[\text{MeV}]$	$\beta_2[\text{MeV}]$
0-200	1	-1	—	3928.52	—	173.19	—
	2	1	-1	92.06	-80.14	0.0050	-4.06

Gambar (4.8) merupakan grafik hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3P_1 dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Dengan jangkauan energi berkisar dari 0-200 MeV. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 diplot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing-masing jangkauan energi.



Gambar 4.8: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik $T_{lab.}$ untuk gelombang parsial 3P_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

Dengan memperhatikan grafik 3P_1 pada energi lab. 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* untuk rank-1 kurang baik, dimana nilai χ^2 yang di miliki adalah 0.54670. Kemudian setelah digunakan rank-2 hasil *fitting* yang diperoleh lebih baik lagi dari rank-1, karena rank-2 hanya mempunyai nilai χ^2 sebesar 0.00141. Ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot pada gambar (4.8). Berarti

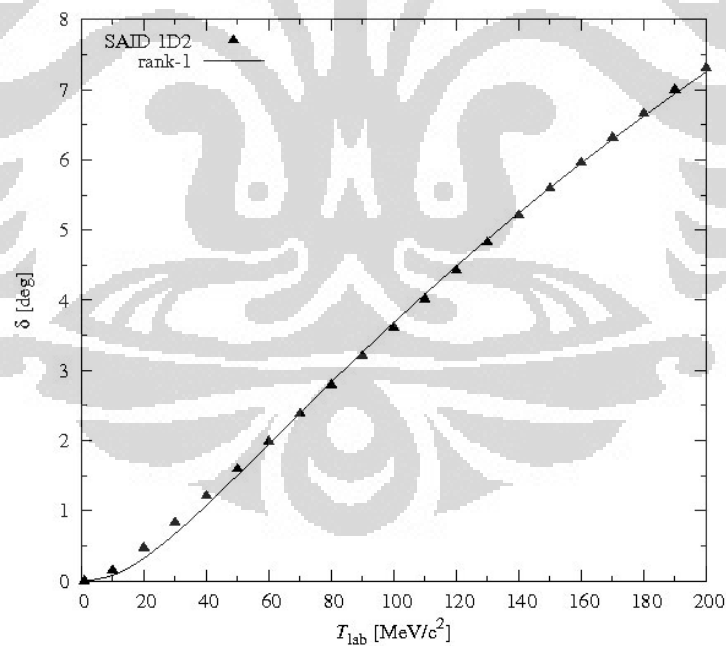
model potensial separabel yang dipilih mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan mengikuti plot grafik data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3P_1 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.9).

Tabel 4.9: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_1

$T_{lab.}$ [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	+1	—	0.63	—	319.61	—
	2	+1	+1	-98.03	643.98	0.49	220.56

Gambar (4.9) merupakan grafik hubungan antara energi lab. hamburan np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 1D_2 dari model separabel potensial rank-1 dengan jangkauan energi berkisar dari 0-200 MeV. Pada hamburan np untuk gelombang parsial 1D_2 dengan menggunakan rank-1 sudah cukup baik.



Gambar 4.9: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik $T_{lab.}$ untuk gelombang parsial 1D_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.

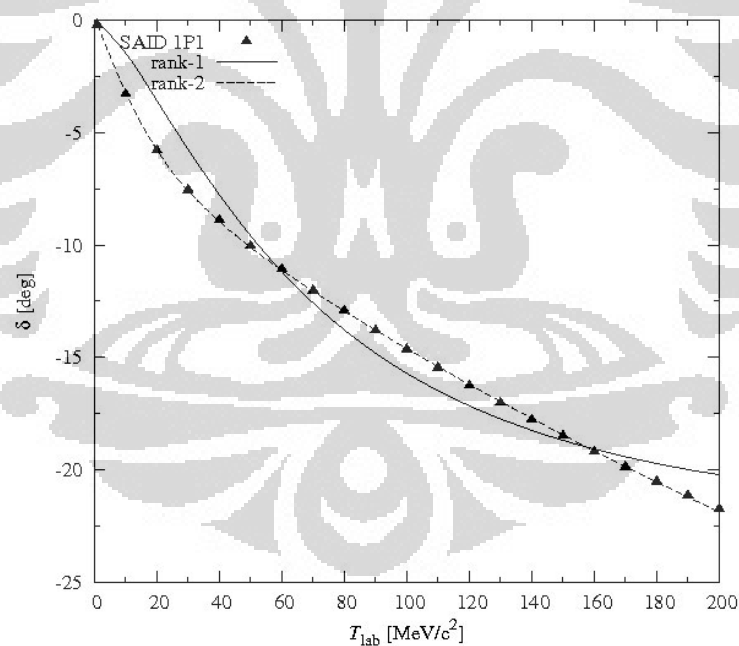
Pada grafik dengan energi lab 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* untuk 1D_2 cukup baik pada rank-1 dengan nilai χ^2 sebesar 0,00575. Grafik yang dihasilkan mendekati plot grafik data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 1D_2 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.10).

Tabel 4.10: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1D_2

T_{lab} [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	- 1	—	0,00099	—	247,89	—

Gambar (4.10) yang merupakan grafik hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 1P_1 dari model separabel potensial untuk rank-1 dan rank-2, dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan energi.



Gambar 4.10: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1P_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

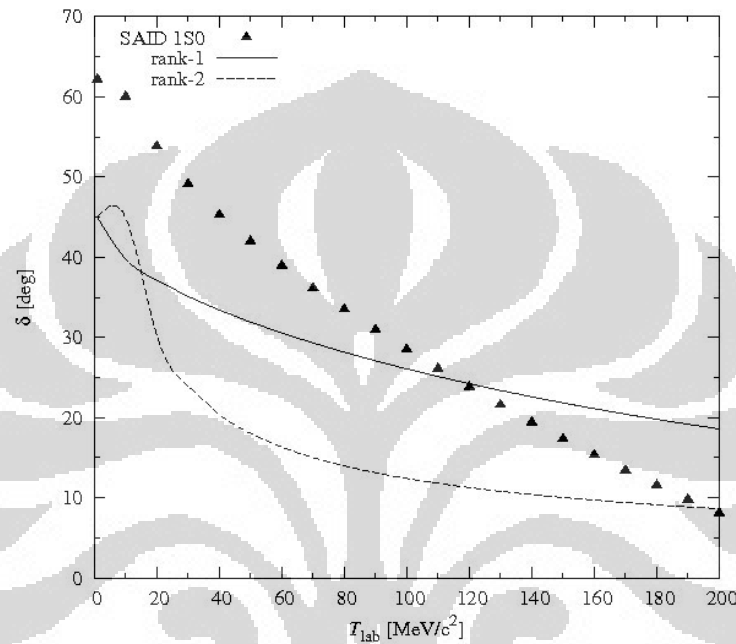
Gambar grafik dengan energi lab 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* yang cukup baik pada gelombang parsial 1P_1 . Untuk rank-1 masih kurang baik, dimana nilai χ^2 yang di miliki adalah 1.23663. Jika diperhatikan hasil plot grafiknya, produksi kurva grafik yang diperoleh rank-2 lebih baik dari pada rank-1. Rank-2 mempunyai nilai χ^2 lebih kecil dari rank-1 yaitu 0,00380. Maka jika diperhatikan hasil plot grafiknya, produksi kurva grafik yang diperoleh rank-2 terlihat lebih baik dari pada rank-1. Model potensial separabel ini sudah mampu untuk memproduksi kelengkungan kurva dari data eksperimen dengan penyimpangan yang kecil. Titik-titik ekstrim dari plot grafik data eksperimen sudah bisa diikuti oleh data pergeseran fase dari hasil *fitting*.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 1P_1 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.11).

Tabel 4.11: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1P_1

$T_{lab.}$ [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	+1	—	0.50	—	252.93	—
	2	+1	+1	-686.97	662.08	0.59	200.93

Pada gambar (4.11) terlihat hubungan antara energi lab. np dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 1S_0 dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 diplot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing-masing jangkauan energi.



Gambar 4.11: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 1S_0 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

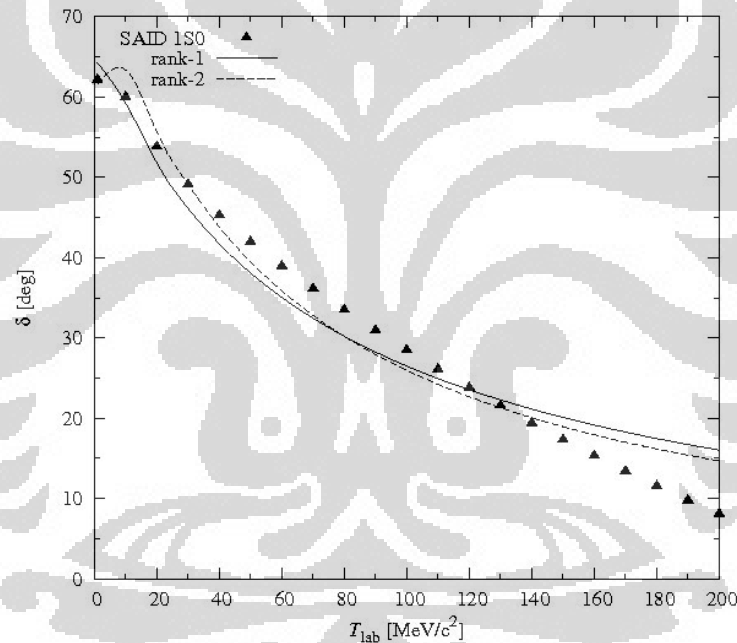
Memperhatikan gambar grafik pada energi lab. 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* 1S_0 untuk rank-1 dan rank-2 mempunyai nilai χ^2 yang besar, maka hasil plot grafik yang diperoleh tidak bagus. Model potensial separabel yang dipilih masih terlalu sederhana untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mendekati plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [8] dimana model potensial separabel tidak dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan. Jadi untuk nilai Pergeseran fase hamburan (δ) yang sama atau lebih besar dari 45° sulit untuk mengikuti data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 1S_0 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.12).

Tabel 4.12: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1S_0

$T_{lab.}$ [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	+1	—	1498.78	—	68.49	—
	2	-1	-1	-14999.99	39.63	159.69	61.26

Karena pada gelombang parsial 1S_0 mencapai sudut lebih dari 62° , maka dicoba untuk mendekati plot dipakai faktor pengali. Faktor pengali yang di pakai yaitu kali 2, sehingga terlihat seperti pada gambar (4.12)



Gambar 4.12: Pergeseran fase (δ) hamburan np sebagai fungsi energi kinetik $T_{lab.}$ untuk gelombang parsial 1S_0 setelah memakai faktor pengali. Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putu : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

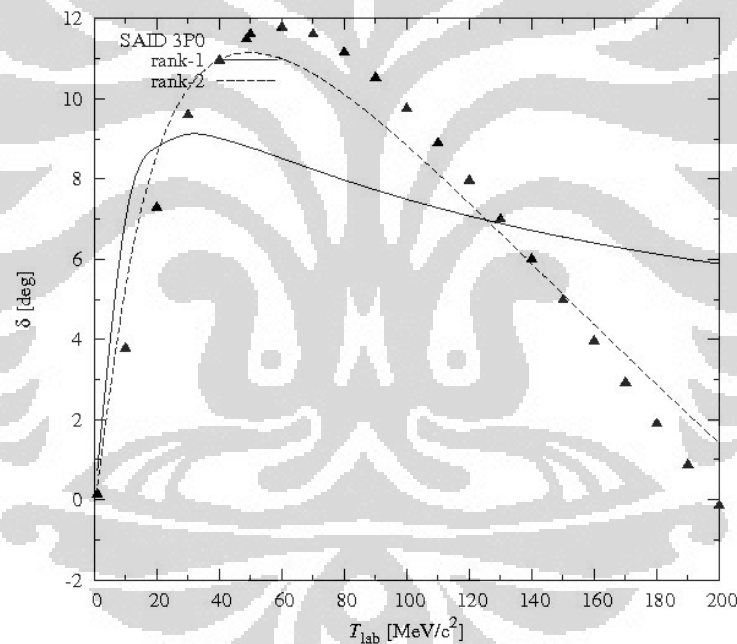
Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 1S_0 dengan faktor pengali setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.13).

Tabel 4.13: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1S_0 dengan faktor pengali

$T_{lab.}$ [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0- 200	1	-1	—	85.51	—	225.53	—
	2	+1	-1	-335.63	157.43	343.79	158.87

4.2.2 proton-proton (pp)

Pada gambar (4.13) terlihat hubungan antara energi lab. pp dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3P_0 dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV/. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing-masing jangkauan energi.



Gambar 4.13: Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik $T_{lab.}$ untuk gelombang parsial 3P_0 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

Dengan memperhatikan grafik 3P_0 pada energi lab 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* untuk rank-1 kurang baik, dimana nilai χ^2 yang di miliki adalah 9.17579.

Setelah digunakan rank-2 hasil *fitting* yang diperoleh lebih baik dari rank-1, karena rank-2 hanya mempunyai nilai χ^2 sebesar 0.94199. Hal ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot grafik pada gambar (4.11). Dari grafik kita dapatkan model potensial separabel yang dipilih mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi. Plot grafik yang dihasilkan mengikuti plot grafik data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3P_1 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.14).

Tabel 4.14: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_0

$T_{lab.}[\text{MeV}]$	Rank	λ_1	λ_2	$C_1[\text{MeV}]$	$C_2[\text{MeV}]$	$\beta_1[\text{MeV}]$	$\beta_2[\text{MeV}]$
0-200	1	-1	—	0.40	—	121.27	—
	2	+1	+1	998.73	-100.98	996.83	492.10

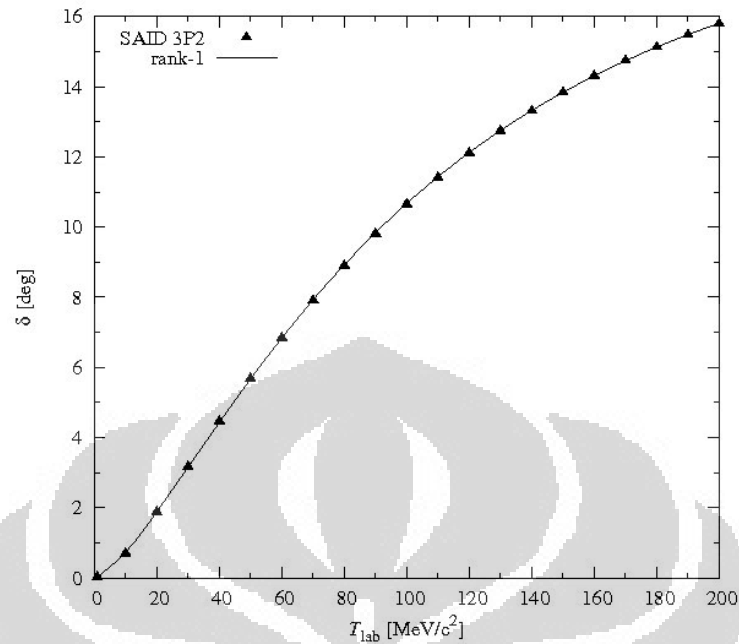
Pada gambar (4.14) terlihat hubungan antara energi lab. pp dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3P_2 dari model separabel potensial rank-1. Dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV. Grafik di plot hanya menggunakan rank-1.

Dengan memperhatikan gambar grafik 3P_2 pada energi lab. 0-200 MeV untuk rank-1 mempunyai hasil *fitting* yang baik, pola dari plot grafiknya terlihat mengikuti plot data eksperimen. Nilai χ^2 yang dimiliki untuk rank-1 adalah 0.00099. Ini berarti model potensial separabel yang dipilih mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan mengikuti plot grafik data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3P_2 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.15).

Tabel 4.15: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_2

$T_{lab.}[\text{MeV}]$	Rank	λ_1	λ_2	$C_1[\text{MeV}]$	$C_2[\text{MeV}]$	$\beta_1[\text{MeV}]$	$\beta_2[\text{MeV}]$
0-200	1	-1	—	0.50	—	301.92	—

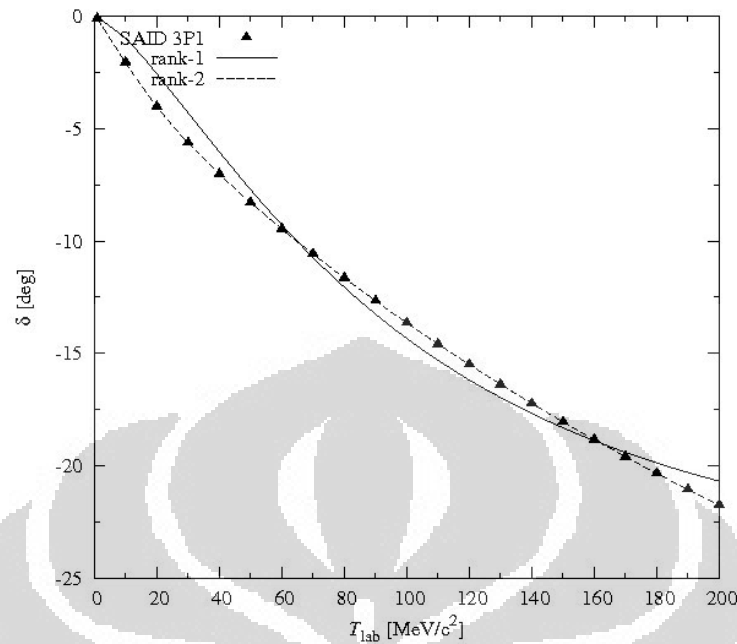


Gambar 4.14: Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3P_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.

Gambar (4.15) merupakan grafik hubungan antara energi lab. pp dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 3P_1 dari model separabel potensial untuk rank-1 dan rank-2. Dengan jangkauan energi berkisar dari 0-200 MeV. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing-masing jangkauan energi.

Dengan memperhatikan grafik 3P_1 pada energi lab 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* untuk rank-1 kurang baik, dimana nilai χ^2 yang di miliki adalah 0.57602. Kemudian setelah digunakan rank-2 hasil *fitting* yang diperoleh lebih baik dari rank-1, karena rank-2 mempunyai nilai χ^2 yang lebih kecil sebesar 0.00006. Ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot gambar (4.15). Dapat diartikan model potensial separabel yang dipilih mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan mengikuti plot grafik data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 3P_1 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.16).



Gambar 4.15: Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik T_{lab} . untuk gelombang parsial 3P_1 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

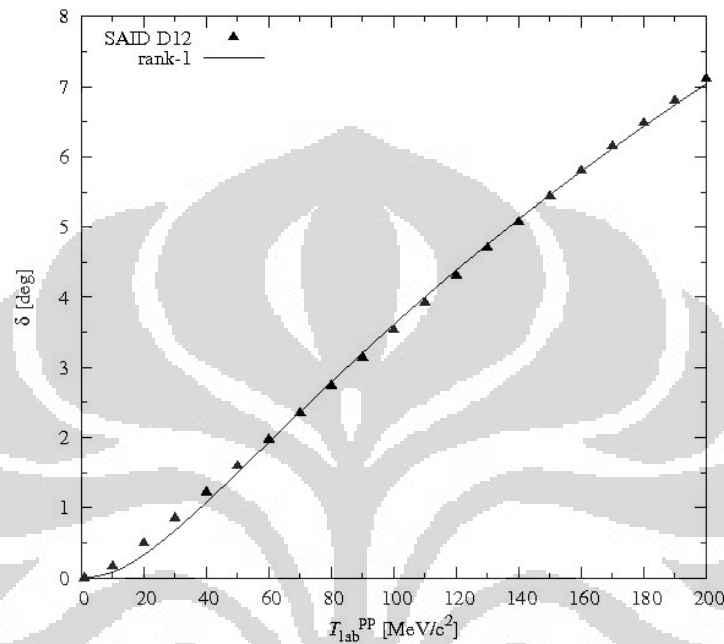
Gambar (4.16) merupakan grafik hubungan antara energi lab. pp dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 1D_2 dari model separabel potensial rank-1 dengan jangkauan energi berkisar dari 0-200 MeV. Karena pada hamburan pp untuk gelombang parsial 1D_2 dengan menggunakan rank-1 sudah cukup baik.

Memperhatikan (4.16) grafik energi lab 0-200 MeV hasil *fitting* pada 1D_2 , dengan rank-1 didapat nilai χ^2 sebesar 0.00670, karena nilainya kecil berarti plotnya cukup baik. Hal ini bisa dibuktikan dari plot grafiknya dimana hasil plotnya berimpit dengan data eksperimen. Maka untuk 1D_2 hanya menggunakan rank-1 karena grafik yang dihasilkan cukup baik.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 1D_2 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.17).

Tabel 4.16: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 3P_1

$T_{lab.}$ [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	+1	—	-1.61	—	544.80	—
	2	+1	+1	0.17	119.46	2.12	348.57



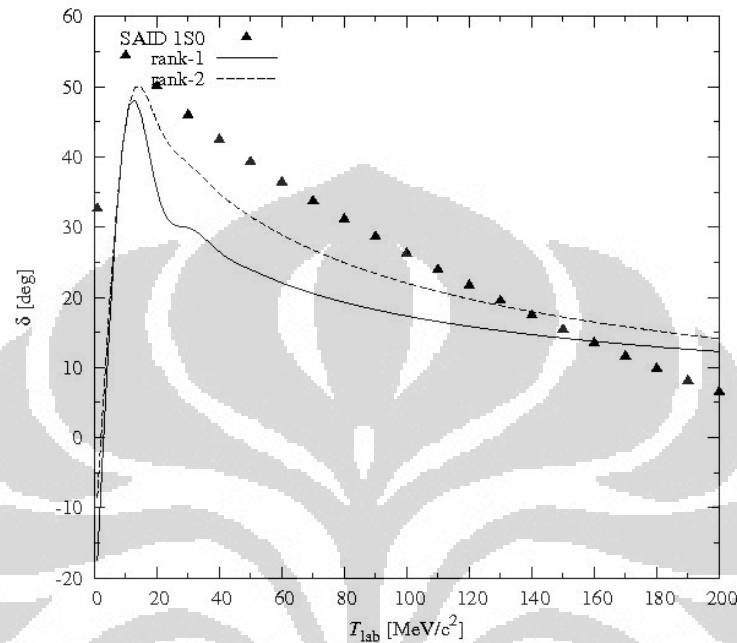
Gambar 4.16: Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik $T_{lab.}$ untuk gelombang parsial 1D_2 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1.

Pada gambar (4.17) terlihat hubungan antara energi lab. pp dengan pergeseran fase pada gelombang parsial 1S_0 dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Dengan jangkauan energi antara 0-200 MeV. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 diplot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing-masing jangkauan energi.

Memperhatikan gambar grafik pada energi lab. 0-200 MeV terlihat hasil *fitting* 1S_0 untuk rank-1 dan rank-2 mempunyai nilai χ^2 yang besar, maka hasil plot grafik yang diperoleh tidak bagus. Model potensial separabel yang dipilih masih terlalu sederhana untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mendekati plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [8] dimana model potensial separabel tidak

Tabel 4.17: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1D_2

$T_{lab.}$ [MeV]	Rank	λ_1	λ_2	C_1 [MeV]	C_2 [MeV]	β_1 [MeV]	β_2 [MeV]
0-200	1	-1	—	0.00065	—	134.69	—



Gambar 4.17: Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik $T_{lab.}$ untuk gelombang parsial 1S_0 . Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

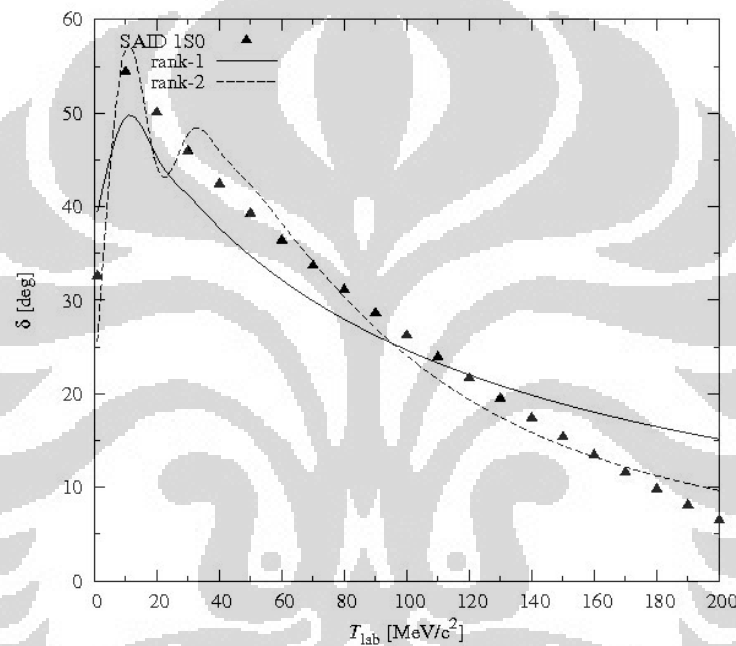
dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan. Jadi untuk nilai Pergeseran fase (δ) hamburan yang sama atau lebih besar dari 45° sulit untuk mengikuti data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 1S_0 setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.18).

Tabel 4.18: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1S_0

$T_{lab.}[\text{MeV}]$	Rank	λ_1	λ_2	$C_1[\text{MeV}]$	$C_2[\text{MeV}]$	$\beta_1[\text{MeV}]$	$\beta_2[\text{MeV}]$
0 - 200	1	-1	—	378.12	—	68.73	—
	2	+1	-1	1.91	1.18	144.00	106.02

Karena pada gelombang parsial 1S_0 mencapai sudut lebih dari 54° , maka dicoba untuk mendekati plot dipakai faktor pengali. Faktor pengali yang di pakai yaitu kali 2, sehingga terlihat seperti pada gambar (4.18)



Gambar 4.18: Pergeseran fase (δ) hamburan pp sebagai fungsi energi kinetik $T_{lab.}$ untuk gelombang parsial 1S_0 setelah memakai faktor pengali. Segitiga: Pergeseran fase dari analisis SAID; garis sambung: hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus-putus: hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial 1S_0 dengan faktor pengali setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.19).

Dari hasil perhitungan untuk semua kasus diatas, pada energi lab 0-200 MeV pergeseran fase yang dihasilkan oleh potensial separabel sangat baik digunakan untuk memfitting data eksperimen. Dapat dilihat bahwa untuk

Tabel 4.19: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial 1S_0 dengan faktor pengali

$T_{lab.}[\text{MeV}]$	Rank	λ_1	λ_2	$C_1[\text{MeV}]$	$C_2[\text{MeV}]$	$\beta_1[\text{MeV}]$	$\beta_2[\text{MeV}]$
0 - 200	1	-1	—	84.21	—	232.24	—
	2	+1	-1	2.42	1.42	40.77	-100.00

model potensial rank-1 mampu memfitting dengan baik pada data pergeseran fase hamburan np 1D_2 , 3D_1 , 3D_3 dan 3P_2 sedangkan hamburan pp 1D_2 dan 3P_2 . Sedangkan rank-2 pada energi lab. 0-200 MeV ternyata cukup baik mereproduksi ulang data pergeseran fase untuk hamburan np 1P_1 , 3P_0 , 3D_2 dan 3P_1 sedangkan hamburan pp 3P_0 dan 3P_1 . Tetapi untuk pergeseran fase orde S pada hamburan np dan pp tidak begitu baik, ada perbedaan yang besar dengan data pergeseran fase pembanding diambil dari data analisis SAID. Hasil pada energi lab. 0-200 MeV hampir untuk semua kanal sangat mirip sehingga hasilnya dapat diterima baik dengan menggunakan rank-1 ataupun rank-2. Akan tetapi untuk pergeseran fase orde S sulit untuk mengikuti plot data eksperimen, karena itu dicoba dengan faktor pengali. g

Bab 5

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan dari hasil penelitian ini kami telah berhasil membuat model potensial separabel untuk hamburan Nukleon-Nukleon (NN) pada bentuk rank-1 dan rank-2. Model potensial separabel ini cukup baik untuk digunakan pada energi 0-200 MeV. Dan data yang dihasilkan pada pergeseran fase rank-2 terlihat lebih baik dibandingkan dengan data pergeseran fase rank-1. Untuk pergeseran fase lebih dari sama dengan 45^0 maka akan terlihat penyimpangan hasil fitting data dengan data hasil eksperimen. Ini menunjukkan model potensial separabel yang digunakan belum mampu memberikan kecocokan dengan data pergeseran fase yang ada, sehingga dibutuhkan model potensial separabel yang lebih kompleks. Hasil fitting yang baik didapat untuk sub-kulit P dan D . Dan jika dibandingkan kembali hasil data pergeseran fase dari proses *fitting* dengan data analisis SAID maka akan terlihat juga rank-2 akan lebih baik dari rank-1.

Nilai parameter λ yang bernilai negatif pada model potensial separabel yang digunakan menunjukkan potensial pada penelitian ini memberikan deskripsi interaksi nuklir NN yang sifatnya atraktif. Sedangkan Nilai parameter λ yang bernilai positif pada model potensial separabel yang digunakan menunjukkan sifatnya repulsif. Hal yang tidak kalah pentingnya adalah faktor bentuk yang digunakan sangat menentukan ketepatan dalam menghasilkan nilai pergeseran fase yang sesuai dengan hasil eksperimen.

Pada penelitian ini pergeseran fase lebih dari sama dengan 45^0 plot grafiknya tidak dapat mengikuti sesuai data eksperimen, hal ini menurut penulis dikarenakan persamaan (2.90). Penulis menggunakan faktor pengali untuk mendekati plot, diharapkan ada penelitian lebih lanjut untuk itu agar didapatkan satu potensial yang lebih dari sekedar faktor pengali.

Berdasarkan hasil dari penelitian ini penulis sarankan untuk melakukan

penelitian lebih lanjut dengan model potensial separabel yang lebih kompleks dan yang mengandung lebih banyak parameter. Melakukan penelitian lebih lanjut untuk rank yang lebih tinggi, sehingga hasil yang diperoleh lebih baik lagi dalam menghasilkan data pergeseran fase yang sesuai dengan data eksperimen.



Lampiran A

Integrasi dengan Metode Residu

A.1 Fungsi Kompleks

Bentuk fungsi kompleks secara umum adalah :

$$f(z) = \mu(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{A.1})$$

dimana $\mu(x, y)$ disebut bagian real dan $iv(x, y)$ disebut bagian imajiner

A.2 Teorema Residu

A.2.1 Deret Laurent

Bentuk umum deret Laurent :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \\ + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{z - z_0}^2 + \dots \quad (\text{A.2})$$

A.2.2 Residu

Berdasarkan persamaan (A.2) Koefisien b_1 merupakan residu $f(z)$ di $z = z_0$. Residu juga dapat dihitung dengan rumus :

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} \\ = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z - z_0)^m \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \right\} \\ = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{\phi(z)\} \quad (\text{A.3})$$

Dan juga untuk $f(z)$ yang bisa dinyatakan dengan $\frac{g(z)}{h(z)}$ dimana $g(z_0)$ tidak sama dengan 0; $h(z_0) = 0$; $h'(z_0)$ tidak sama dengan 0, residu bisa dihitung dengan rumus :

$$b_1 = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (\text{A.4})$$

Hasil integral $f(z)$ dengan menggunakan teorema residu adalah [?] :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot (b_1 + b_2 + \dots) \quad (\text{A.5})$$

A.2.3 Integrasi Rank-1

Dalam ungkapan separabel matriks-t yang diberikan persamaan (3.20) di dalamnya terdapat bentuk integral :

$$I_\ell = \int_0^\infty dk \frac{k^2 g^2(k)}{q^2 - k^2 + 2\mu_{\pi N} i \epsilon} \quad (\text{A.6})$$

Dalam integral ini bentuk $g(k)$ adalah seperti yang terlihat pada persamaan (3.18) dimana C_i dan β_i adalah parameter potensial. Sebagai contoh menghitung integral untuk $\ell = 0$, dan agar lebih sederhana sembunyikan parameter C_i , sehingga faktor bentuk menjadi :

$$g(k) = \frac{1}{k^2 + \beta^2} \quad (\text{A.7})$$

substitusikan persamaan (A.7) ke persamaan (A.6) dengan nilai $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + \beta^2)^2 (q^2 - k^2)} \\ &= \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 (q - k)(q + k)} \\ &= \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 \{-(k - q)\}(q + k)} \\ &= \int_0^\infty dk \frac{k^2}{-(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 (k - q)(q + k)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Dari ungkapan terakhir, integral memiliki dua pole sederhana pada $k = q$ dan $k = -q$ serta pole orde kedua pada $k = -i\beta$ dan $k = +i\beta$. Untuk

memecahkannya, kita ambil dari bidang kompleks.

Pole Orde satu

Berdasarkan persamaan (A.8) pada titik singular $k = q$ residunya menjadi :

$$b_1 = -\frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q+k)} \quad (\text{A.9})$$

substitusikan nilai titik singular $k = q$ pada persamaan (A.9) :

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{q^2}{(q+i\beta)^2(q-i\beta)^2(q+q)} \\ &= -\frac{q^2}{(q+i\beta)^2(q-i\beta)^2 2q} \\ &= -\frac{q}{2(q^2+\beta^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Pole Orde dua

Berdasarkan persamaan (A.8) pada titik singular $k = i\beta$, dengan menggunakan persamaan (A.3), maka residunya menjadi :

$$\begin{aligned} b_2 &= \lim_{k \rightarrow k_0} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dk^{2-1}} \{(k-k_0)^2 f(k)\} \\ &= \lim_{k \rightarrow i\beta} \frac{d}{dk} \left\{ (k-i\beta)^2 \frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q-k)(q+k)} \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow i\beta} \frac{d}{dk} \frac{k^2}{(k+i\beta)^2(q-k)(q+k)} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

dari lampiran B persamaan (B.14), maka persamaan (A.11) menjadi :

$$\begin{aligned}
b_2 &= \lim_{k \rightarrow i\beta} \frac{2k^5 + 2i\beta k^4 + 2i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k}{(-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2)^2} \\
&= \frac{2(i\beta)^5 + 2(i\beta)^5 + 2(i\beta)^3 q^2 - 2\beta^2 (i\beta) q^2}{(- (i\beta)^4 - 2(i\beta)^4 + (q^2 + \beta^2)(i\beta)^2 + 2(i\beta)^2 q^2 - \beta^2 q^2)^2} \\
&= \frac{4(i\beta)^5 + 2(i\beta)^3 q^2 - 2\beta^2 (i\beta) q^2}{[-3(i\beta)^4 + (q^2 + \beta^2)(i\beta)^2 + 2(i\beta)^2 q^2 - \beta^2 q^2]^2} \\
&= \frac{4i\beta^5 - 2i\beta^3 q^2 - 2i\beta^3 q^2}{[-3\beta^4 - (q^2 + \beta^2)\beta^2 - 2\beta^2 q^2 - \beta^2 q^2]^2} \\
&= \frac{4i\beta^5 - 4i\beta^3 q^2}{[-3\beta^4 - \beta^2 q^2 - \beta^4 - 3\beta^2 q^2]^2} \\
&= \frac{4i\beta^3 (\beta^2 - q^2)}{[-4\beta^4 - 4\beta^2 q^2]^2} \\
&= \frac{4i\beta^3 (\beta^2 - q^2)}{[-4\beta^2 (q^2 + \beta^2)]^2} \\
&= \frac{4i\beta^3 (\beta^2 - q^2)}{16\beta^4 (q^2 + \beta^2)^2} \\
&= \frac{i(\beta^2 - q^2)}{4\beta (q^2 + \beta^2)^2} \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Hasil integral (A.8) yang menggunakan persamaan (A.5), (A.10) dan (A.12) adalah :

$$\begin{aligned}
I_0 &= \oint_C dk \frac{k^2}{(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 (q - k)(q + k)} \\
&= 2\pi i \cdot [b_1 + b_2] \\
&= 2\pi i \cdot \left[-\frac{q}{2(q^2 + \beta^2)^2} + \frac{i(\beta^2 - q^2)}{4\beta (q^2 + \beta^2)^2} \right] \\
&= \pi \left[\frac{-iq}{(q^2 + \beta^2)^2} - \frac{(\beta^2 - q^2)}{2\beta (q^2 + \beta^2)^2} \right] \\
&= \pi \left[\frac{-2\beta iq - \beta^2 + q^2}{2\beta (q^2 + \beta^2)^2} \right] \\
&= \pi \left[\frac{(-q + i\beta)^2}{2\beta (\beta - iq)^2 (\beta + iq)^2} \right] \\
&= \pi \left[\frac{[i(\beta + iq)]^2}{2\beta (\beta - iq)^2 (\beta + iq)^2} \right] \\
&= -\pi \left[\frac{(\beta + iq)^2}{2\beta (\beta - iq)^2 (\beta + iq)^2} \right] \\
&= -\frac{\pi}{2\beta (\beta - iq)^2} \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q-k)(q+k)} = -\frac{\pi}{2\beta(\beta-iq)^2} \quad (\text{A.14})$$

misalkan $\frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q-k)(q+k)} = A$ maka :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk A &= -\frac{\pi}{2\beta(\beta-iq)^2} \\ 2 \int_0^{\infty} dk A &= -\frac{\pi}{2\beta(\beta-iq)^2} \\ \int_0^{\infty} dk A &= -\frac{\pi}{4\beta(\beta-iq)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

maka :

$$\int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q-k)(q+k)} = -\frac{\pi}{4\beta(\beta-iq)^2} \quad (\text{A.16})$$

Melihat kembali persamaan (3.20), sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} I &= 2\mu_{\pi N} \cdot \left(-\frac{\pi}{4\beta(\beta-iq)^2}\right) \\ &= -\frac{\pi\mu_{\pi N}}{2\beta(\beta-iq)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

karena diawal perhitungan kita menyembunyikan parameter C , maka setelah dimunculkan persamaan (A.17) menjadi :

$$I = -\frac{\pi\mu_{\pi N}C^2}{2\beta(\beta-iq)^2} \quad (\text{A.18})$$

substitusikan persamaan (A.18) ke persamaan (3.16) :

$$\tau(w) = \left[\lambda^{-1} - \left(-\frac{\pi\mu_{\pi N}C^2}{2\beta(\beta-iq)^2}\right) \right]^{-1} \quad (\text{A.19})$$

substitusikan persamaan (A.19) ke persamaan (3.17) diperoleh :

$$t(q, p) = g(q)g(p) \left[\lambda^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C^2}{2\beta(\beta-iq)^2} \right]^{-1} \quad (\text{A.20})$$

berdasarkan persamaan (3.18), sehingga bentuk $g(q)$ dan $g(p)$ dapat ditulis :

$$g(q) = q^\ell \frac{C_i}{q^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.21})$$

$$g(p) = p^\ell \frac{C_i}{p^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.22})$$

substitusikan persamaan (A.21) dan (A.22) ke persamaan (A.20) :

$$t(q, p) = \frac{C^2}{(q^2 + \beta^2)(p^2 + \beta^2)} \left[\lambda^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C^2}{2\beta(\beta - iq)^2} \right]^{-1} \quad (\text{A.23})$$

bila disederhanakan lagi, persamaan (A.23) adalah :

$$t^0(q, p) = \lambda \frac{C_0^2}{(q^2 + \beta_0^2)(p^2 + \beta_0^2)} \left[1 + \lambda \frac{\pi\mu_{\pi N} C_0^2}{2\beta_0(\beta_0 - iq)^2} \right]^{-1} \quad (\text{A.24})$$

A.2.4 Integrasi Rank-2

pada $\ell = 0$

Dalam ungkapan separabel matriks-t yang diberikan persamaan (3.61), (3.62), (3.63) dan (3.64) didalamnya terdapat bentuk integral. Dalam integral ini bentuk $g_1(k)$ dan $g_2(k)$ adalah seperti yang terlihat pada persamaan (3.59) dan (3.60). Sebagai contoh menghitung integral untuk $\ell = 0$, dan agar lebih sederhana sembunyikan parameter C_1 dan C_2 , sehingga faktor bentuk menjadi :

$$g_1(k) = \frac{1}{k^2 + \beta_1^2} \quad (\text{A.25})$$

$$g_2(k) = \frac{1}{k^2 + \beta_2^2} \quad (\text{A.26})$$

substitusikan persamaan (A.25), (A.26) ke persamaan (3.61), (3.62), (3.63) dan (3.64) dengan nilai $\epsilon = 0$. Khusus proses substitusi ke persamaan (3.62) dan (3.64) sama dengan proses pada persamaan (3.20), maka akan kita peroleh hasil integral teorema residunya adalah :

$$X_{11} = -\frac{\pi\mu_{\pi N} C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \quad (\text{A.27})$$

$$X_{22} = -\frac{\pi\mu_{\pi N} C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \quad (\text{A.28})$$

kemudian substitusikan persamaan (A.27) dan (A.28) ke persamaan (3.45) dan (3.44) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} N_{22}(w) &= \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \\ &= \lambda_1 \left[1 + \lambda_1 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} N_{11}(w) &= \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \\ &= \lambda_2 \left[1 + \lambda_2 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

kemudian proses substitusi persamaan (A.25), (A.26) ke persamaan (3.61) dan (3.63) dengan nilai $\epsilon = 0$ adalah :

$$\begin{aligned} X_{12} &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)(q^2 - k^2)} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Dari ungkapan terakhir, integral memiliki titik singular pada $k = -i\beta_1$, $k = +i\beta_1$, $k = -i\beta_2$, $k = +i\beta_2$, $k = q$ dan $k = -q$. Untuk memecahkannya, kita ambil dari bidang kompleks.

a. Titik Singular pada $k = i\beta_1$

Berdasarkan persamaan (A.31) pada titik singular $k = i\beta_1$ residunya menjadi :

$$b_1 = \frac{k^2}{(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.32})$$

substitusikan nilai titik singular $k = i\beta_1$ pada persamaan (A.32) :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(i\beta_1)^2}{(i\beta_1 + i\beta_1)(i\beta_1 + i\beta_2)(i\beta_1 - i\beta_2)(q - i\beta_1)(q + i\beta_1)} \\ &= \frac{(i\beta_1)^2}{(2i\beta_1)(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \\ &= -\frac{\beta_1}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

b. Titik Singular pada $k = i\beta_2$

Berdasarkan persamaan (A.31) pada titik singular $k = i\beta_2$ residunya menjadi :

$$b_2 = \frac{k^2}{(k + i\beta_2)(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.34})$$

substitusikan nilai titik singular $k = i\beta_2$ pada persamaan (A.34) :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{(i\beta_2)^2}{(i\beta_2 + i\beta_2)(i\beta_2 + i\beta_1)(i\beta_2 - i\beta_1)(q - i\beta_2)(q + i\beta_2)} \\ &= \frac{(i\beta_2)^2}{(2i\beta_2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= \frac{\beta_2}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

c. Titik Singular pada $k = q$

Berdasarkan persamaan (A.31) pada titik singular $k = q$, untuk mendapatkan residunya yang pertama kali kita lakukan adalah merubah kedalam bentuk $z - z_0$ atau $z = z_0$, maka bentuk $(q - k)$ berubah menjadi $-(k - q)$ sehingga suku dalam integralnya bisa dituliskan seperti :

$$\frac{k^2}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(-(k - q))(q + k)} \quad (\text{A.36})$$

residunya menjadi :

$$b_3 = \frac{k^2}{-(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q + k)} \quad (\text{A.37})$$

substitusikan nilai titik singular $k = q$ pada persamaan (A.37) :

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{q^2}{-(q + i\beta_1)(q - i\beta_1)(q + i\beta_2)(q - i\beta_2)(q + q)} \\ &= \frac{q^2}{-2q(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= \frac{q}{-2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Hasil integral (A.31) yang menggunakan persamaan (A.5), (A.33), (A.35) dan

(A.38) adalah :

$$\begin{aligned}
X'_{12} &= 2\mu_{\pi N} \oint_C dk \frac{k^2}{(k+i\beta_1)(k-i\beta_1)(k+i\beta_2)(k-i\beta_2)(q-k)(q+k)} \\
&= 2\mu_{\pi N} \cdot 2\pi i \cdot [b_1 + b_2 + b_3] \\
&= 4\pi i \mu_{\pi N} \left[-\frac{\beta_1}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} - \frac{\beta_2}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{q}{2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= -2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.39}$$

karena integral diatas dalam range $-\infty$ s/d ∞ jadi dengan memisalkan $X'_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi$ maka :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dk \chi &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
2 \int_0^{\infty} dk \chi &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
\int_0^{\infty} dk \chi &= -\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.40}$$

maka :

$$X_{12} = -\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \tag{A.41}$$

karena diawal perhitungan kita menyembunyikan parameter C_1 dan C_2 , maka setelah dimunculkan persamaan (A.41) menjadi :

$$\begin{aligned}
X_{12} &= -\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= - \left[\frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.42}$$

dengan memperhatikan kembali persamaan (3.43), sehingga dapat disimpul-

kan :

$$X_{21} = - \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \quad (\text{A.43})$$

dan

$$\begin{aligned} N_{12}(w) &= - \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{\beta_1(q^2 + \beta_2^2) - \beta_2(q^2 + \beta_1^2) + iq(\beta_2^2 - \beta_1^2)}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{\beta_1q^2 + \beta_1\beta_2^2 - \beta_2q^2 - \beta_2\beta_1^2 + iq\beta_2^2 - iq\beta_1^2}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{-\beta_1q^2 - \beta_1\beta_2^2 + \beta_2q^2 + \beta_2\beta_1^2 - iq\beta_2^2 + iq\beta_1^2}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{q^2(\beta_2 - \beta_1) - \beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) - iq(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{q^2 - \beta_1\beta_2 - iq(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{-(iq)^2 - \beta_1\beta_2 - iq(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{(iq)^2 + \beta_1\beta_2 + iq(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{(\beta_1 + iq)(\beta_2 + iq)}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + iq)(\beta_1 - iq)(\beta_2 + iq)(\beta_2 - iq)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - iq)(\beta_2 - iq)} \right] \\ &= - \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - iq)(\beta_2 - iq)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

berdasarkan persamaan (3.53) dengan memasukkan persamaan (A.29), (A.30) dan (A.44) didapat :

$$\begin{aligned} D(w) &= \left(\lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \right) \left(\lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \right) \\ &\quad - \left(- \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - iq)(\beta_2 - iq)} \right] \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$$D(w) = \left(\lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \right) \left(\lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \right) - \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - iq)(\beta_2 - iq)} \right]^2 \quad (\text{A.46})$$

berdasarkan persamaan (3.59) dan (3.60) sehingga bentuk $g_i(q)$ dan $g_i(p)$ dapat ditulis :

$$g_i(q) = q^\ell \frac{C_i}{q^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.47})$$

$$g_i(p) = p^\ell \frac{C_i}{p^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.48})$$

substitusikan persamaan (A.47) dan (A.48) pada persamaan (3.57) sehingga untuk masing-masing sukunya dapat ditulis seperti :

$$g_1(q) \frac{N_{11}(w)}{D(w)} g_1(p) = \frac{C_1^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.49})$$

$$g_1(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_2(p) = \frac{C_1C_2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.50})$$

$$g_2(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_1(p) = \frac{C_1C_2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.51})$$

$$g_2(q) \frac{N_{22}(w)}{D(w)} g_2(p) = \frac{C_2^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.52})$$

memperhatikan persamaan (3.57) maka :

$$t^0(q, p) = \left[\frac{C_1^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_1C_2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_1C_2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_2^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (\text{A.53})$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.29), (A.30), (A.44) dan (A.46) masing - masing mengandung nilai $N_{11}(w)$, $N_{22}(w)$, $N_{12}(w)$, dan $D(w)$ pada persamaan (A.53).

pada $\ell = 1$

Dalam ungkapan separabel matriks-t yang diberikan persamaan (3.61), (3.62), (3.63) dan (3.64) didalamnya terdapat bentuk integral. Dalam integral ini bentuk $g_1(k)$ dan $g_2(k)$ adalah seperti yang terlihat pada persamaan (3.59) dan (3.60). Sebagai contoh menghitung integral untuk $\ell = 1$, dan agar lebih sederhana sembunyikan parameter C_1 dan C_2 , sehingga faktor bentuk menjadi :

$$g_1(k) = \frac{k}{k^2 + \beta_1^2} \quad (\text{A.54})$$

$$g_2(k) = \frac{k}{k^2 + \beta_2^2} \quad (\text{A.55})$$

substitusikan persamaan (A.54), (A.55) ke persamaan (3.61), (3.62), (3.63) dan (3.64) dengan nilai $\epsilon = 0$. Khusus proses substitusi ke persamaan (3.62) dan (3.64) sama dengan proses pada persamaan (3.20), maka akan kita peroleh hasil integral teorema residunya adalah :

$$X_{11} = -\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \quad (\text{A.56})$$

$$X_{22} = -\frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \quad (\text{A.57})$$

kemudian substitusikan persamaan (A.56) dan (A.57) ke persamaan (3.44) dan (3.45) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} N_{22}(w) &= \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \\ &= \lambda_1 \left[1 + \lambda_1 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} N_{11}(w) &= \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \\ &= \lambda_2 \left[1 + \lambda_2 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

kemudian proses substitusi persamaan (A.54), (A.55) ke persamaan (3.61) dan (3.63) dengan nilai $\epsilon = 0$ adalah :

$$\begin{aligned} X_{12} &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 k^2}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)(q^2 - k^2)} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^4}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Dari ungkapan terakhir, integral memiliki titik singular pada $k = -i\beta_1$, $k = +i\beta_1$, $k = -i\beta_2$, $k = +i\beta_2$, $k = q$ dan $k = -q$. Untuk memecahkannya, kita ambil dari bidang kompleks.

a. Titik Singular pada $k = i\beta_1$

Berdasarkan persamaan (A.60) pada titik singular $k = i\beta_1$ residunya menjadi :

$$b_1 = \frac{k^4}{(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.61})$$

substitusikan nilai titik singular $k = i\beta_1$ pada persamaan (A.61) :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(i\beta_1)^4}{(i\beta_1 + i\beta_1)(i\beta_1 + i\beta_2)(i\beta_1 - i\beta_2)(q - i\beta_1)(q + i\beta_1)} \\ &= \frac{(i\beta_1)^4}{(2i\beta_1)(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \\ &= \frac{\beta_1^3}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

b. Titik Singular pada $k = i\beta_2$

Berdasarkan persamaan (A.60) pada titik singular $k = i\beta_2$ residunya menjadi :

$$b_2 = \frac{k^4}{(k + i\beta_2)(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.63})$$

substitusikan nilai titik singular $k = i\beta_2$ pada persamaan (A.63) :

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{(i\beta_2)^4}{(i\beta_2 + i\beta_2)(i\beta_2 + i\beta_1)(i\beta_2 - i\beta_1)(q - i\beta_2)(q + i\beta_2)} \\
 &= \frac{(i\beta_2)^4}{(2i\beta_2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\
 &= \frac{\beta_2^3}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \tag{A.64}
 \end{aligned}$$

c. Titik Singular pada $k = q$

Berdasarkan persamaan (A.60) pada titik singular $k = q$, untuk mendapatkan residunya yang pertama kali kita lakukan adalah merubah kedalam bentuk $z - z_0$ atau $z = z_0$, maka bentuk $(q - k)$ berubah menjadi $-(k - q)$ sehingga suku dalam integralnya bisa dituliskan seperti :

$$\frac{k^4}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(-(k - q))(q + k)} \tag{A.65}$$

residunya menjadi :

$$b_3 = \frac{k^4}{-(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q + k)} \tag{A.66}$$

substitusikan nilai titik singular $k = q$ pada persamaan (A.66) :

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \frac{q^4}{-(q + i\beta_1)(q - i\beta_1)(q + i\beta_2)(q - i\beta_2)(q + q)} \\
 &= \frac{q^4}{-2q(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\
 &= \frac{q^3}{-2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \tag{A.67}
 \end{aligned}$$

Hasil integral (A.60) yang menggunakan persamaan (A.5), (A.62), (A.64) dan

(A.67) adalah :

$$\begin{aligned}
X'_{12} &= 2\mu_{\pi N} \oint_C dk \frac{k^4}{(k+i\beta_1)(k-i\beta_1)(k+i\beta_2)(k-i\beta_2)(q-k)(q+k)} \\
&= 2\mu_{\pi N} \cdot 2\pi i \cdot [b_1 + b_2 + b_3] \\
&= 4\pi i \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^3}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{q^3}{2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= 2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.68}$$

karena integral diatas dalam range $-\infty$ s/d ∞ jadi dengan memisalkan $X'_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi$ maka :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dk \chi &= 2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
2 \int_0^{\infty} dk \chi &= 2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
\int_0^{\infty} dk \chi &= \pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.69}$$

maka :

$$X_{12} = \pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \tag{A.70}$$

karena diawal perhitungan kita menyembunyikan parameter C_1 dan C_2 , maka setelah dimunculkan persamaan (A.70) menjadi :

$$\begin{aligned}
X_{12} &= \pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \left[\frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= \left[\frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.71}$$

dengan memperhatikan kembali persamaan (3.43), sehingga dapat disimpul-

kan :

$$X_{21} = \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \quad (\text{A.72})$$

dan

$$\begin{aligned} N_{12}(w) &= \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= - \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2[\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2)q^2 + i(\beta_1 + \beta_2)q^3]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

berdasarkan persamaan (3.53) dengan memasukkan persamaan (A.58), (A.59) dan (A.73) didapat :

$$\begin{aligned} D(w) &= \left[\left[\lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \left[\lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \right] \\ &\quad - \left[- \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2[\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2)q^2 + i(\beta_1 + \beta_2)q^3]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \right]^2 \\ &= \left[\left[\lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \left[\lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \right] \\ &\quad - \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2[\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2)q^2 + i(\beta_1 + \beta_2)q^3]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

berdasarkan persamaan (3.59) dan (3.60) sehingga bentuk $g_i(q)$ dan $g_i(p)$ dapat ditulis :

$$g_i(q) = q^\ell \frac{C_i}{q^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.75})$$

$$g_i(p) = p^\ell \frac{C_i}{p^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.76})$$

substitusikan persamaan (A.75) dan (A.76) pada persamaan (3.57) sehingga untuk masing - masing sukunya dapat ditulis seperti :

$$g_1(q) \frac{N_{11}(w)}{D(w)} g_1(p) = \frac{C_1^2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.77})$$

$$g_1(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_2(p) = \frac{C_1C_2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.78})$$

$$g_2(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_1(p) = \frac{C_1 C_2 q p}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.79})$$

$$g_2(q) \frac{N_{22}(w)}{D(w)} g_2(p) = \frac{C_2^2 q p}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.80})$$

memperhatikan persamaan (3.57) maka :

$$t^1(q, p) = \left[\frac{C_1^2 q p}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_1 C_2 q p}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ + \left[\frac{C_1 C_2 q p}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_2^2 q p}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (\text{A.81})$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.58), (A.59), (A.73) dan (A.74) masing - masing mengandung nilai $N_{11}(w)$, $N_{22}(w)$, $N_{12}(w)$, dan $D(w)$ pada persamaan (A.81).

pada $\ell = 2$

Dalam ungkapan separabel matriks-t yang diberikan persamaan (3.61), (3.62), (3.63) dan (3.64) didalamnya terdapat bentuk integral. Dalam integral ini bentuk $g_1(k)$ dan $g_2(k)$ adalah seperti yang terlihat pada persamaan (3.59) dan (3.60). Sebagai contoh menghitung integral untuk $\ell = 2$, dan agar lebih sederhana sembunyikan parameter C_1 dan C_2 , sehingga faktor bentuk menjadi :

$$g_1(k) = \frac{k^2}{k^2 + \beta_1^2} \quad (\text{A.82})$$

$$g_2(k) = \frac{k^2}{k^2 + \beta_2^2} \quad (\text{A.83})$$

substitusikan persamaan (A.82), (A.83) ke persamaan (3.61), (3.62), (3.63) dan (3.64) dengan nilai $\epsilon = 0$. Khusus proses substitusi ke persamaan (3.62) dan (3.64) sama dengan proses pada persamaan (3.20), maka akan kita peroleh hasil integral teorema residunya adalah :

$$X_{11} = -\frac{\pi \mu_{\pi N} C_1^2 [2i q^5 - 5\beta_1^3 q^2 - 3\beta_1^5]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \quad (\text{A.84})$$

$$X_{22} = -\frac{\pi \mu_{\pi N} C_2^2 [2i q^5 - 5\beta_2^3 q^2 - 3\beta_2^5]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \quad (\text{A.85})$$

kemudian substitusikan persamaan (A.84) dan (A.85) ke persamaan (3.44) dan (3.45) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} N_{22}(w) &= \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^5 - 5\beta_1^3q^2 - 3\beta_1^5]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \\ &= \lambda_1 \left[1 + \lambda_1 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^5 - 5\beta_1^3q^2 - 3\beta_1^5]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{aligned} N_{11}(w) &= \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^5 - 5\beta_2^3q^2 - 3\beta_2^5]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \\ &= \lambda_2 \left[1 + \lambda_2 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^5 - 5\beta_2^3q^2 - 3\beta_2^5]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

kemudian proses substitusi persamaan (A.82), (A.83) ke persamaan (3.61) dan (3.63) dengan nilai $\epsilon = 0$ adalah :

$$\begin{aligned} X_{12} &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^4 k^2}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)(q^2 - k^2)} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^6}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Dari ungkapan terakhir, integral memiliki titik singular pada $k = -i\beta_1$, $k = +i\beta_1$, $k = -i\beta_2$, $k = +i\beta_2$, $k = q$ dan $k = -q$. Untuk memecahkannya, kita ambil dari bidang kompleks.

a. Titik Singular pada $k = i\beta_1$

Berdasarkan persamaan (A.88) pada titik singular $k = i\beta_1$ residunya menjadi :

$$b_1 = \frac{k^6}{(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.89})$$

substitusikan nilai titik singular $k = i\beta_1$ pada persamaan (A.89) :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(i\beta_1)^6}{(i\beta_1 + i\beta_1)(i\beta_1 + i\beta_2)(i\beta_1 - i\beta_2)(q - i\beta_1)(q + i\beta_1)} \\ &= \frac{(i\beta_1)^6}{(2i\beta_1^2)(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \\ &= -\frac{\beta_1^5}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

b. Titik Singular pada $k = i\beta_2$

Berdasarkan persamaan (A.88) pada titik singular $k = i\beta_2$ residunya menjadi :

$$b_2 = \frac{k^6}{(k + i\beta_2)(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.91})$$

substitusikan nilai titik singular $k = i\beta_2$ pada persamaan (A.91) :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{(i\beta_2)^6}{(i\beta_2 + i\beta_2)(i\beta_2 + i\beta_1)(i\beta_2 - i\beta_1)(q - i\beta_2)(q + i\beta_2)} \\ &= \frac{(i\beta_2)^6}{(2i\beta_2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= \frac{\beta_2^5}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

c. Titik Singular pada $k = q$

Berdasarkan persamaan (A.88) pada titik singular $k = q$, untuk mendapatkan residunya yang pertama kali kita lakukan adalah merubah kedalam bentuk $z - z_0$ atau $z = z_0$, maka bentuk $(q - k)$ berubah menjadi $-(k - q)$ sehingga suku dalam integralnya bisa dituliskan seperti :

$$\frac{k^6}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(-(k - q))(q + k)} \quad (\text{A.93})$$

residunya menjadi :

$$b_3 = \frac{k^6}{-(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q + k)} \quad (\text{A.94})$$

substitusikan nilai titik singular $k = q$ pada persamaan (A.94) :

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{q^6}{-(q + i\beta_1)(q - i\beta_1)(q + i\beta_2)(q - i\beta_2)(q + q)} \\ &= \frac{q^6}{-2q(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= \frac{q^5}{2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Hasil integral (A.88) yang menggunakan persamaan (A.5), (A.90), (A.92) dan

(A.95) adalah :

$$\begin{aligned}
X'_{12} &= 2\mu_{\pi N} \oint_C dk \frac{k^6}{(k+i\beta_1)(k-i\beta_1)(k+i\beta_2)(k-i\beta_2)(q-k)(q+k)} \\
&= 2\mu_{\pi N} \cdot 2\pi i \cdot [b_1 + b_2 + b_3] \\
&= 4\pi i \mu_{\pi N} \left[-\frac{\beta_1^5}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} - \frac{\beta_2^5}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{q^5}{2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= -2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.96}$$

karena integral diatas dalam range $-\infty$ s/d ∞ jadi dengan memisalkan $X'_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi$ maka :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dk \chi &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
2 \int_0^{\infty} dk \chi &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
\int_0^{\infty} dk \chi &= -\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.97}$$

maka :

$$X_{12} = -\pi \mu_{\pi N} \left[\frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \tag{A.98}$$

karena diawal perhitungan kita menyembunyikan parameter C_1 dan C_2 , maka setelah dimunculkan persamaan (A.98) menjadi :

$$\begin{aligned}
X_{12} &= -\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \left[\frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= - \left[\frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.99}$$

dengan memperhatikan kembali persamaan (3.43), sehingga dapat disimpul-

kan :

$$X_{21} = - \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \quad (\text{A.100})$$

dan

$$\begin{aligned} N_{12}(w) &= - \left[\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{[(\beta_1^2 + \beta_1\beta_2\beta_2^2)\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^4 + \beta_1^3\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \beta_1\beta_2^3 + \beta_2^4)q^2 - i(\beta_1 + \beta_2)q^5]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

berdasarkan persamaan (3.53) dengan memasukkan persamaan (A.86), (A.87) dan (A.101) didapat :

$$\begin{aligned} D(w) &= \left[\lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^5 - 5\beta_2^3q^2 - 3\beta_2^5]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \left[\lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^5 - 5\beta_1^3q^2 - 3\beta_1^5]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \\ &- \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[\frac{[(\beta_1^2 + \beta_1\beta_2\beta_2^2)\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^4 + \beta_1^3\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \beta_1\beta_2^3 + \beta_2^4)q^2 - i(\beta_1 + \beta_2)q^5]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

berdasarkan persamaan (3.59) dan (3.60) sehingga bentuk $g_i(q)$ dan $g_i(p)$ dapat ditulis :

$$g_i(q) = q^\ell \frac{C_i}{q^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.103})$$

$$g_i(p) = p^\ell \frac{C_i}{p^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.104})$$

substitusikan persamaan (A.103) dan (A.104) pada persamaan (3.57) sehingga untuk masing - masing sukunya dapat ditulis seperti :

$$g_1(q) \frac{N_{11}(w)}{D(w)} g_1(p) = \frac{C_1^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.105})$$

$$g_1(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_2(p) = \frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.106})$$

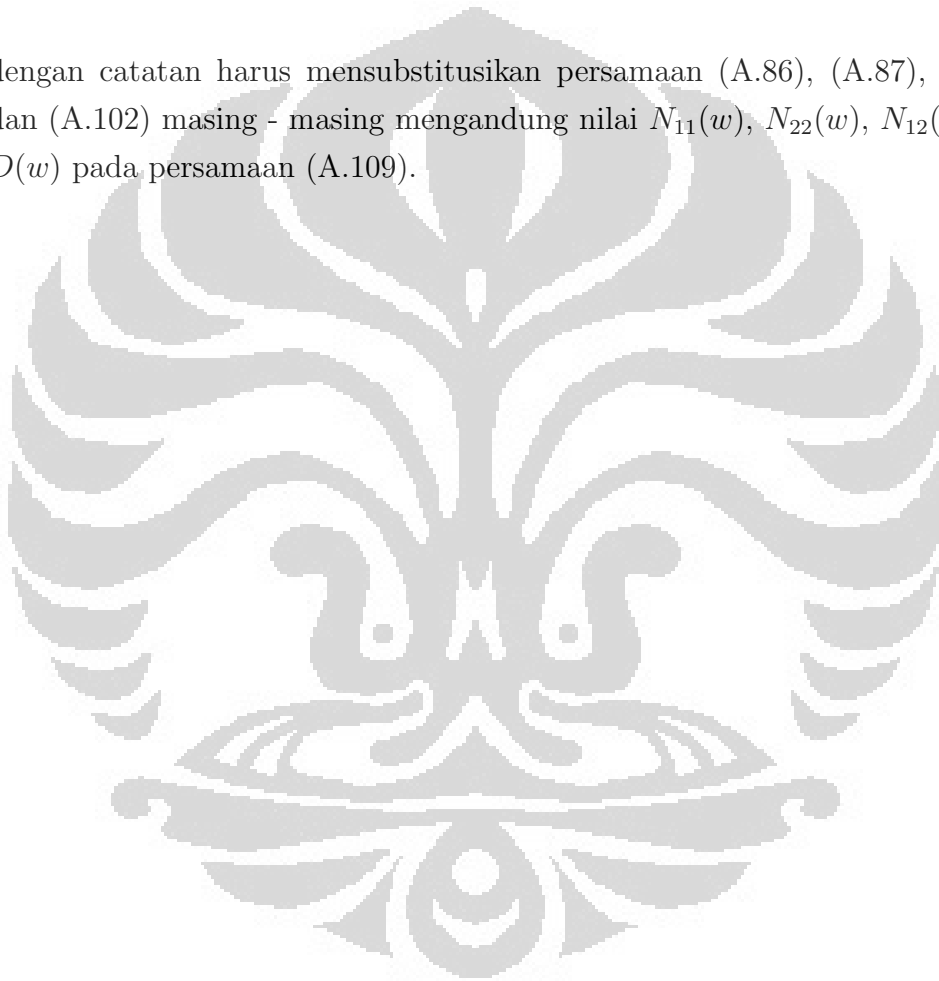
$$g_2(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_1(p) = \frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.107})$$

$$g_2(q) \frac{N_{22}(w)}{D(w)} g_2(p) = \frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.108})$$

memperhatikan persamaan (3.57) maka :

$$\begin{aligned} t^2(q, p) = & \left[\frac{C_1^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ & + \left[\frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[\frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.86), (A.87), (A.101) dan (A.102) masing - masing mengandung nilai $N_{11}(w)$, $N_{22}(w)$, $N_{12}(w)$, dan $D(w)$ pada persamaan (A.109).



Lampiran B

Diferensial

Menurut [17] persamaan diferensial untuk :

$$\frac{d}{dx} aX^n = (n \cdot a)X^{n-1} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d}{dx} UV = U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d}{dx} \frac{U}{V} = \frac{V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}}{V^2} \quad (\text{B.3})$$

Hasil diferensiasi persamaan (A.11) diperoleh dengan cara :

$$A = \frac{d}{dk} \frac{k^2}{(k + i\beta)^2(q - k)(q + k)} \quad (\text{B.4})$$

untuk suku :

$$\begin{aligned} (k + i\beta)^2(q - k)(q + k) &= (k + i\beta)^2(q^2 - k^2) \\ &= (k^2 + 2i\beta k - \beta^2)(q^2 - k^2) \\ &= q^2 k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2 - k^4 - 2i\beta k^3 + \beta^2 k^2 \\ &= -k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2 \end{aligned}$$

sehingga persamaan (B.4) :

$$A = \frac{d}{dk} \frac{k^2}{-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2} \quad (\text{B.5})$$

dari persamaan (B.5) diketahui :

$$U = k^2 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{dU}{dk} = 2k \quad (\text{B.7})$$

$$V = -k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2 \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{dV}{dk} = -4k^3 - 6i\beta k^2 + 2(q^2 + \beta^2)k + 2i\beta q^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} V \frac{dU}{dk} &= (-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2)(2k) \\ &= -2k^5 - 4i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 4i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} U \frac{dV}{dk} &= (k^2)(-4k^3 - 6i\beta k^2 + 2(q^2 + \beta^2)k + 2i\beta q^2) \\ &= -4k^5 - 6i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 2i\beta q^2 k^2 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$V^2 = (-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2)^2 \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} V \frac{dU}{dk} - U \frac{dV}{dk} &= (-2k^5 - 4i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 4i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k) \\ &\quad - (-4k^5 - 6i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 2i\beta q^2 k^2) \\ &= -2k^5 - 4i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 4i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k \\ &\quad + 4k^5 + 6i\beta k^4 - 2(q^2 + \beta^2)k^3 - 2i\beta q^2 k^2 \\ &= 2k^5 + 2i\beta k^4 + 2i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

maka :

$$\frac{dU}{dk} \frac{dU}{dV} = \frac{2k^5 + 2i\beta k^4 + 2i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k}{(-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2)^2} \quad (\text{B.14})$$

Lampiran C

Notasi dan Unit

Dalam sistem satuan natural semua konstanta \hbar dan c yang muncul bernilai satu, yaitu:

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{C.1})$$

Penggunaan sistem satuan natural ini sangat membantu kita dalam melakukan perhitungan. Konversi ke dalam satuan biasa dipakai dapat dilakukan diakhir perhitungan.

DAFTAR ACUAN

- [1] Weber, Axel dan Norbert E. Ligterink (2005). *Bound states in Yukawa theory*. Arxive: hep-ph/0506123v1.
- [2] Machleidt, R. , K. Holinde dan Ch. Elster (1987). *Phys. Rev.* 149,1.
- [3] Lacombe, M., B. Loiseau, J.M. Richard, R. Vinh Mau, J. Cote, P. Pires dan R. de Turreil (1980). *Phys. Rev. C.* 21,861.
- [4] Nagels, M.M., T.A. Rijken dan J.J. de Swart (1978). *Phys. Rev. D.* 17,768.
- [5] Wiringa, R.B., V.G.J. Stoks dan R. Schavilla (1995). *Accurate NN Potential with Charge Independence Breaking*. *Phys. Rev.C.*51.38-51.
- [6] Fujiwara, Y., C. Nakamoto dan Y. Suzuki (1996). *Effective Meson Exchange Potential in the SU_6 Quark Model for NN and YN interaction* .*Phys. Rev. C.* 54. 2180-2200.
- [7] Yamaguchi, Y. I. (1954). *Two nucleon Problem when the Potential is non Local but Sparable I*. *Phys. Rev.* 95. 1628.
- [8] Manabe, Y., A. Hosaka dan H. Toki (2005). *Relation Between the Separable and One-Boson-Exchange Potential for the Covariant Bethe-Salpeter Equation*. *J. Phys.* G31. 1183 - 1190.
- [9] Ueda,T. dan Y. Ikegami (1994). *Seperable Representation of πN Scattering Amplitudes*. *Progress of Theoretical Physics.* 91.
- [10] Merzbacher, Eugen. (1970). *Quantum Mechanics*. second edition. University of North Carolina.
- [11] Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics Second Edition*. Pearson Education International. United States of America.

- [12] Salam, Agus. (2002). *Rescattering Effect and Two-Step Process In Kaon Photoproduction On the Deuteron*. Dissertation. University of Mainz. Mainz, Germany.
- [13] Kusumawati, Ratu. (2010). *Pergeseran Fase Hamburan Pion-Nukleon dengan Interaksi Separabel*. Skripsi. Universitas Indonesia. Depok.
- [14] Scheck, Florian. (2007). *Quantum Physics*. Springer-Verlag. Berlin.
- [15] Hodgson, P. dan E. Gadioli (1997). *Introductory Nuclear Physics*. Oxford University Press. New York.
- [16] Joachain, C.J. (1975). *Quantum Collision Theory*. North-Holland Publishing Company. Amsterdam.
- [17] Spiegel, H., R. Murray dan Martono Koko. (1992). *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*. Edisi S1 (Metrik). Erlangga. Jakarta.

