UNIVERSITAS INDONESIA

PERBANDINGAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DALAM ALJABAR KLASIK DAN ALJABAR *MAX-PLUS*

TESIS

MULYADI
NPM. 0906577362

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
Juli 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PERBANDINGAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DALAM ALJABAR KLASIK DAN ALJABAR MAX-PLUS

TESIS
diajukan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister Sains

MULYADI
NPM. 0906577362

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : MULYADI

NPM : 0906577362

Tanda Tangan :

Tanggal : 13 Juli 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama	:	Mulyadi
NPM	:	0906577362
Program Studi	:	Magister Matematika
Judul Tesis	:	Perbandingan Sistem Persamaan Linier dalam Aljabar Klasik dan Aljabar Max-Plus.

Telah berhasil dipertahankan dihadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi magister matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	:	Dr. Hengki Tasman, M.Si	( )
Pembimbing II	:	Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	:	Prof. Dr. Belawati H Widjaja	( )
Penguji	:	Dr.rer.nat. Hendri Murfi, M.Kom	( )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 13 Juli 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji hanya bagi Allah SWT, Rabb Yang Maha Kuasa, yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya sadar bahwa penyelesaian tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tesis ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Bapak Dr. Hengki Tasman, M.Si, selaku dosen pembimbing tesis yang teramat banyak memberikan nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini;
2. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami, selaku dosen pembimbing dan Ketua Program Studi Magister Matematika yang sekaligus dosen pembimbing akademik dan Bapak Dr. rer. nat Hendri Murfi, M.Kom selaku sekretaris Program Studi Magister Matematika yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama menyelesaikan masa studi;
3. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T, selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Ibu Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech, selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI;
4. Seluruh staf pengajar di Program Magister Matematika FMIPA UI, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;
5. Pemerintah Propinsi Jambi melalui Dinas Pendidikan Propinsi yang telah memberikan kesempatan dan dukungan melalui program beasiswa.
6. Ibunda tercinta (Waliyem dan Yamcik A.Ma.Pd) yang telah memberikan dukungan moral, materiil, serta doa yang tidak pernah berhenti;
7. Istriku tercinta Renny Marina dan anakku tersayang Annida Syahidah Maharani, Farwah Atikah Parameswari, atas segala dukungan, kesabaran, semangat, dan doa;

8. Keluarga besar saya (mas Sudadi, Mbak Mulyani, Dik Wahadi, Dik Eni Ernawaty) yang telah memberikan dukungan moral, materiil, serta doa yang tidak pernah berhenti;
9. Saudara iparku tercinta (Sih Parmini, Saudi, Arika Febriyani, Awal Rulizal, Rakhmat Juniadi, Lidia Atrika).
10. Mas Lismanto, Dhek Pahrin, Dhek Henang, Mbak Desi, Mas Susila, Mas Haryono, Akang Salim, Mbak Iik, Ibu Sri Samsiyah dan semua teman-teman S2 UI dari Jambi angkatan pertama yang telah berjuang bersama.
11. Kepada semua teman-teman yang telah memberi semangat terutama teman-teman megister angkatan 2009 di Matematika UI.
12. Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu, penulis ucapkan terima kasih.

Akhir kata, saya berharap kepada Tuhan Yang Maha Kuasa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini ;

Nama	:	Mulyadi
NPM	:	0906577362
Program Studi	:	Magister Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Tesis

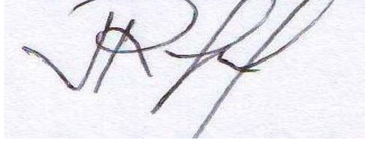
Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia, hak bebas biaya royalti noneksklusif (*Non-exclusive royalti-free right*) atas karya ilmiah saya berjudul :

" Perbandingan Sistem Persamaan linier dalam Aljabar Klasik dan Aljabar *Max-plus"*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan hak bebas biaya royalti non eksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk data (*data base*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai hak cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada Tanggal : 13 Juli 2011
Yang menyatakan



(Mulyadi)

ABSTRAK

Nama	:	Mulyadi
Program Studi	:	Magister Matematika
Judul Tesis	:	Perbandingan Sistem Persamaan linier dalam Aljabar Klasik dan Aljabar *Max-plus.*

Aljabar *Max-plus* mempunyai karakteristik yang berbeda dengan aljabar klasik. Dalam tesis ini dikaji struktur Aljabar *Max-plus* dan perbedaan sistem persamaan linier dalam Aljabar *Max-plus* dan aljabar klasik.

Kata kunci :
Aljabar *Max-Plus*, Sistem Persamaan Linier.

ABSTRACT

Name : Mulyadi
Study Program : Magister of Mathematics
Title : Comparison of linear equation systems in classical algebra and *Max-Plus* Algebra.

Max-Plus algebra has characteristics that are different from clasisical algebra. In this thesis, algebraic structure of Max-plus algebra studied. Differences of linear equation systems in Max-plus algebra and classical algebra are explored.

Key words:
Max-plus algebra, , linear equation system.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang mendasari semua disiplin ilmu yang ada, baik disiplin ilmu sosial, ilmu esakta, sains dan teknologi, sehingga menempatkan matematika sebagai *mother of sciences*. Salah satu cabang matematika adalah aljabar. Aljabar memegang peranan sangat penting dalam perkembangan disiplin ilmu – ilmu lain. Perkembangan aljabar sangat berkaitan erat dengan cabang – cabang ilmu matematika yang lain seperti Geometri, Teori Bilangan, Statistik, Ilmu Komputer, Logika, Ilmu Analisis bahkan Matematika Terapan dan lain- lain[6].

Aljabar *Max-plus* merupakan salah satu topik dalam ruang lingkup aljabar. Aljabar *Max-plus* didefinisikan sebagai himpunan $\mathcal{R} \cup \{-\infty\}$, dengan $\mathcal{R}$ adalah himpunan semua bilangan real, yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $\oplus$ dan $\otimes$. Operasi $\oplus$ menyatakan operasi maksimum, dan $\otimes$ adalah operasi jumlahan. Himpunan $\mathcal{R} \cup \{-\infty\}$ dinotasikan $\mathcal{R}_\varepsilon$ yang dilengkapi dua operasi biner ($\oplus\ dan\ \otimes$) dinotasikan $\mathcal{R}_{max}$. Aljabar *Max-plus* yang dinotasikan $\mathcal{R}_{max} = (\mathcal{R}_\varepsilon,\oplus,\otimes)$ merupakan salah satu struktur aljabar yang semilapangan komutatif idempoten [2, 5, 6, 10]. Elemen identitas pada operasi penjumlahan $\oplus$ (elemen nol) dan elemen identitas pada operasi perkalian $\otimes$ (elemen satu) berturut-turut adalah $\varepsilon = -\infty$, dan $e = 0$. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ didefinisikan sebagai berikut [2, 3, 5, 6, 10]:

$$\forall\, x, y \in \mathcal{R}_\varepsilon$$
$$x \oplus y = \max(x, y)$$
$$x \otimes y = x + y$$

Bentuk lain dari aljabar *Max-plus* adalah aljabar *Min-plus*, dengan $\oplus$ menyatakan minimum dan identitas jumlahannya adalah ∞. Operasi dasar pada aljabar *Max-plus* adalah maksimum dan penjumlahan, yang dalam operasi aljabar linier klasik (konvensional) adalah penjumlahan dan perkalian. Beberapa sifat dan konsep dalam aljabar linier, akan berlaku dalam aljabar *Max-plus* [2, 5, 6].

1.2 Permasalahan

Aljabar *Max-plus* merupakan salah satu topik dalam ruang lingkup aljabar. Untuk itu struktur aljabar *Max-plus* perlu dipelajari secara mendalam.

1.2.1 Masalah umum

Bagaimana konsep dasar aljabar *Max-plus* ?

1.2.2 Masalah khusus

Bagaimana perbedaan sistem persamaan linier dalam aljabar klasik dan aljabar *Max-plus* ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan permasalahan di atas, dalam tesis ini bertujuan untuk:

1.3.1 Menjelaskan konsep dasar aljabar *Max-plus*.

1.3.2 Menjelaskan perbedaan sistem persamaan linier dalam aljabar klasik dan aljabar *Max-plus*.

1.4 Manfaat Penelitian

Secara umum penelitian ini bermanfaat untuk memberikan wawasan yang relatif baru dalam bidang teori sistem linier.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan mempelajari karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, disertasi ataupun paper yang relevan dengan topik penelitian. Kemudian hasilnya dijabarkan dan disusun kembali secara rinci menjadi suatu karya tulis.

1.6 Sistematika Penulisan

Tesis ini terdiri dari empat bab, yaitu:

Bab I : Mengemukakan latar belakang, permasalahan, tujuan, manfaat, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II: Membahas konsep-konsep dasar tentang aljabar *Max-plus*, matriks dan graf

Bab III: Membahas fungsi linier dan fungsi afin, persamaan linier dan persamaan afin, sistem persamaan linier dalam aljabar *Max-plus,* dan beberapa perbandingan aljabar linier dan aljabar *Max-plus*.

Bab IV: Kesimpulan dari pembahasan dan saran.

Daftar Pustaka

BAB II

ALJABAR *MAX-PLUS*

Pada bab ini dibahas beberapa konsep dasar operasi dalam aljabar *Max-plus*. Pembahasan meliputi sifat–sifat aljabar *Max-plus* [2, 5, 10], matriks dan operasinya dalam aljabar *Max-plus* [3, 5, 10, 11], teori graf dalam aljabar *Max-plus* [2, 5, 6, 11,12].

2.1. Definisi Aljabar *Max-Plus*

Pada aljabar *Max-plus*, sifat- sifatnya dapat diketahui dari beberapa definisi dan sifat dalam aljabar klasik pada umumnya [2, 5,10]. Beberapa definisi yang berkaitan adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.1

Misalkan A adalah himpunan tak kosong. Operasi biner $\odot$ pada A adalah suatu fungsi $\odot$: A x A $\rightarrow$ A.

Definisi 2.1.2

Sistem matematika adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi oleh satu atau lebih operasi biner.

Definisi 2.1.3

Himpunan $\mathcal{K}$ bersama dua operasi biner $+$ dan $\times$ pada $\mathcal{K}$ dikatakan semilapangan jika:

A. Sistem matematika $(\mathcal{K}\ , +)$ memenuhi aksioma- aksioma berikut:

a. Bersifat asosiatif;

$$x + (y + z) = (x + y) + z\ , \forall x, y, z \in \mathcal{K}.$$

b. Bersifat komutatif;

$$x + y = y + x\ , \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

c. Terdapat elemen identias 0 (nol) di $\mathcal{K}$, sehingga $x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathcal{K}$.

B. Sistem matematika $(\mathcal{K} - \{0\}, \times)$ suatu grup, jika memenuhi;

a. Bersifat asosiatif;

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in \mathcal{K} - \{0\}.$$

b. Terdapat elemen identitas 1(satuan) di $\mathcal{K} - \{0\}$ yang bersifat;

$$x \times 1 = 1 \times x = x\ ,\ \forall x \in \mathcal{K} - \{0\}.$$

c. Menpunyai invers, $\forall\ x \in \mathcal{K} - \{0\}$ terdapat $x^{-1} \in \mathcal{K} - \{0\}$ yang bersifat: $x^{-1} \times x = (x \times x^{-1}) = 1$.

C. Bersifat distributif kanan ;

$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z), \forall x, y, z \in \mathcal{K} - \{0\}$.

D. Bersifat distributif kiri ;

$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z), \forall x, y, z \in \mathcal{K} - \{0\}$.

Definsi 2. 1.4

Himpunan $\mathcal{K}$ yang dilengkapi dua operasi biner $+$ dan $\times$ pada $\mathcal{K}$ dikatakan semilapangan yang komutatif dan idempoten jika:

A. Sistem matematika $(\mathcal{K}, +, \times)$ merupakan semilapangan;

B. Bersifat komutatif terhadap operasi $\times$, yaitu $x \times y = y \times x$, $\forall x, y \in \mathcal{K}$;

C. Bersifat idempoten terhadap operasi $+$, yaitu $x + x = x$, $\forall x \in \mathcal{K}$.

Teorema 2.1.5

Unsur nol (0) pada semilapangan $\mathcal{K}$ yang idempoten memenuhi $0 \times x = 0 = x \times 0$, $\forall x \in \mathcal{K} - \{0\}$.

Bukti:

Berdasarkan sifat idempoten, kita mempunyai:

$$
\begin{aligned}
1 \times 0 &= 0 = 0 \times 1 \\
0 \times 1 &= (0 + 0) \times 1 \\
0 \times 1 &= (0 \times 1 + 0 \times 1), \text{ kedua ruas ditambahkan } -(0 \times 1) \\
0 \times 1 + (-(0 \times 1)) &= (0 \times 1 + 0 \times 1) + (-(0 \times 1)) \\
0 \times 1 - (0 \times 1) &= 0 \times 1 + ((0 \times 1) + (-(0 \times 1)) \\
0 &= 0 \times 1 + ((0 \times 1) - (0 \times 1)) \\
0 &= 0 \times 1 + 0 \\
0 &= 0 \times 1
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, $\forall x, \in \mathcal{K} - \{0\}$ berlaku $0 = 0 \times 1$, dengan *Definisi* 2.1.3 B (c) $1 = x^{-1} \times x = x \times x^{-1}$, maka $0 = 0 \times 1 = 0 \times x^{-1} \times x = 0 \times (x^{-1} + 0) \times x = (0 \times x^{-1} \times x) + (0 \times 0 \times x) = 0 + (0^2 \times x) = 0^2 \times x = 0 \times x$.

Terbukti bahwa $0 = 0 \times x$.

Definisi 2.1.6

Diberikan himpunan bilangan real $\mathcal{R} \cup \{\varepsilon = -\infty\}$, dinotasikan sebagai $\mathcal{R}_\varepsilon$, bersama dengan dua operasi biner $\oplus$ *(dibaca o plus)* dan $\otimes$ *(dibaca o kali)*. Jika diberikan sembarang bilangan x dan y, maka $x \oplus y$ adalah nilai maksimum dari salah satu bilangan tersebut, dan $x \otimes y$ adalah penjumlahan dari kedua bilangan tersebut. Dengan demikian sistem matematika yang mempunyai operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang dimaknakan dengan nilai maksimum dan penjumlahan disebut aljabar *Max-plus* dinotasikan $\mathcal{R}_{max}$, dan didefinisikan:

$$x \oplus y = max\ (x, y),$$

$$x \otimes y = x + y,$$

untuk setiap $x, y \in \mathcal{R}_\varepsilon$.

Dari *Definisi* 2.1.6 operasi biner $\oplus$ pada $\mathcal{R}_{max}$ didefinisikan sebagai nilai maksimum dari dua bilangan. Hal ini berakibat $x \leq y$ jika dan hanya jika $x \oplus y = y$.

***Teorema* 2. 1.7**

$\mathcal{R}_{max}$ merupakan semilapangan yang komutatif dan idempoten.

Bukti:

I. $\mathcal{R}_{max}$ merupakan semilapangan.

1. Sistem matematika ($\mathcal{R}_\varepsilon, \oplus$) memenuhi aksioma- aksioma berikut:

a. Bersifat asosiatif;

$x \oplus (y \oplus z) = max\ (x, max(y, z)) = max(max\ (x, y)\ , z) = (\ x \oplus y) \oplus z$

$\forall x, y, z \in \mathcal{R}_\varepsilon$.

Jadi operasi $\oplus$ bersifat asosiatif di $\mathcal{R}_\varepsilon$.

b. Bersifat komutatif;

$x \oplus y = max\ (x, y) = max\ (y, x) = y \oplus x$, $\forall x, y \in \mathcal{R}_\varepsilon$.

Jadi operasi $\oplus$ bersifat komutatif di $\mathcal{R}_\varepsilon$.

c. Terdapat unsur nol $\varepsilon = -\infty$ di $\mathcal{R}_\varepsilon$;

$x \oplus \varepsilon = max(x, -\infty) = max(-\infty, x) = \varepsilon \oplus x$, $\forall x, \in \mathcal{R}_\varepsilon$.

Jadi $\varepsilon = -\infty$ adalah unsur nol di $\mathcal{R}_\varepsilon$ terhadap operasi $\oplus$.

2. Sistem matematika ($\mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}, \otimes)$ membentuk suatu grup.

   a. Bersifat asosiatif;

   $x \otimes (y \otimes z) = x + (y + z) = (x + y + z = (x \otimes y) \otimes z$, $\forall x, y, z \in \mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$.

   Jadi operasi $\otimes$ bersifat asosiatif di $\mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$.

   b. Terdapat unsur satuan $e = 0$ di $\mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$ yang bersifat;

   $x \otimes e = x + 0 = 0 + x = (e \otimes x) = x \ \forall x \in \mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$.

   Jadi $e = 0$ adalah unsur satuan di $\mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$ terhadap operasi $\otimes$.

   c. Untuk setiap $x \in \mathcal{R} - \{\varepsilon\}$, terdapat $x^{-1} = -x \in \mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$ yang bersifat:

   $x^{-1} \otimes x = (-x) + x = x + (-x) = (x \otimes x^{-1}) = e$.

   Jadi $-x$ adalah invers (balikan) dari $x \in \mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$terhadap operasi $\otimes$.

3. Operasi $\otimes$ bersifat distributif kanan terhadap $\oplus$.

   $x \otimes (y \oplus z) = x + max(y, z) = max(x + y, x + z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$,

   $\forall x, y, z \in \mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$.

   Jadi operasi $\otimes$ bersifat distributif kanan terhadap operasi $\oplus$ di $\mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$.

4. Operasi $\otimes$ bersifat distributif kiri terhadap $\oplus$.

   $(x \oplus y) \otimes z = max(x, y) + z = max(x + z, y + z) = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$,

   $\forall x, y, z \in \mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$.

   Jadi operasi $\otimes$ bersifat distributif kiri terhadap operasi $\oplus$ di $\mathcal{R}_\varepsilon - \{\varepsilon\}$.

Jadi berdasarkan 1 sampai 4 $\mathcal{R}_{max}$ merupakan suatu semilapangan.

II. Selanjutnya $\mathcal{R}_{max}$ semilapangan dikatakan komutatif dan idempoten, jika;

1. Terhadap operasi $\otimes$ bersifat komutatif;

   $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$, $\forall x, y \in \mathcal{R}_\mathcal{E}$.

   Jadi terhadap operasi $\otimes$ bersifat komutatif di $\mathcal{R}_{max}$.

2. Terhadap operasi $\oplus$ bersifat idempotent;

   $x \oplus x = max\ (x, x) = x$, $\forall x, \in \mathcal{R}_\mathcal{E}$.

   Jadi operasi $\oplus$ bersifat idempoten di $\mathcal{R}_{max}$.

Jadi berdasarkan (I) dan (II) $\mathcal{R}_{max}$ adalah semilapangan yang komutatif dan idempoten.

Operasi biner $\oplus$ pada $\mathcal{R}_\varepsilon$ yang merupakan operasi maksimum pada aljabar klasik, tidak mempunyai invers (balikan). Dengan demikian pada $\mathcal{R}_{max}$, $\forall x \in \mathcal{R}_\varepsilon$ tidak terdapat $y \in \mathcal{R}_\varepsilon$ yang bersifat $x \oplus y = \max(x, y) = \varepsilon$, karena $x \oplus y = \varepsilon$ jika dan hanya jika $x = \varepsilon$ atau $y = \varepsilon$. Jadi jelaslah bahwa $\forall x \in \mathcal{R}_\varepsilon$ tidak mempunyai invers terhadap operasi $\oplus$ dalam aljabar *Max-plus*.

Diberikan operasi biner ϕ (dibaca o bagi) pada $\mathcal{R}_{max}$ yang didefinisikan sebagai operasi pengurangan dalam aljabar klasik. Sesuai kaidah pengoperasian, pada aljabar *Max-plus* operasi biner $\otimes$ dan ϕ dilakukan operasi lebih dulu daripada operasi biner $\oplus$.

Contoh 2.1.9

Tabel 1. Pengoperasian dalam aljabar *Max- plus*

Operasi pada aljabar $\mathcal{R}_{max}$	**Operasi pada aljabar klasik**	**Hasil**
$5 \oplus 2$	$\max(5,2)$	5
$7 \oplus \varepsilon$	$\max(7, -\infty)$	7
$-\varepsilon \oplus 12$	$\max(\infty, 12)$	∞
$e \oplus \varepsilon$	$\max(0, -\infty)$	0
$8 \oplus e$	$\max(8,0)$	8
$7 \oplus 3 \oplus \varepsilon \oplus 18$	$\max(7, 3, \infty, 18)$	18
$4 \otimes 7$	$4 + 7$	11
$e \otimes 9$	$0 + 9$	9
$7 \otimes \varepsilon$	$7 + (-\infty)$	$-\infty$
$6 \phi 4$	$6 - 4$	2
$5 \oplus 12 \otimes 3 \phi 9$	$\max(5, 12 + 3 - 9) = \max(5, 6)$	6
$10 \otimes 4 \oplus 3 \phi 9$	$\max(10 + 4, 3 - 9) = \max(14, -6)$	14

Definisi 2.1.10

Diberikan $n \in \mathbb{N}$ dengan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli, dan $x \in \mathcal{R}_{\max}$. Pangkat $n \in \mathbb{N}$ dari elemen $x \in \mathcal{R}_{\max}$ dalam aljabar *Max-plus* dinotasikan dengan $x^{\otimes^n}$ didefinisikan sebagai berikut:

$x^{\otimes^n} = \underbrace{x \otimes x \otimes x. . .\otimes x}_{n} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n} = n \times x$, (operasi perkalian dalam bilangan real biasa).

Jika diperluas pangkat aljabar *Max-plus* secara umum diperoleh sebagai berikut:

a. Jika $x \neq \boldsymbol{\varepsilon}$, dan $n = 0$, maka $x^{\otimes^0} = e$

b. Jika $\alpha \in \mathcal{R}$, maka $x^{\otimes^\alpha} = \alpha x$.

c. Jika $n > 0$, maka $\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes^n} = \boldsymbol{\varepsilon}$ (untuk $n \leq 0$ tidak terdefinisi).

d. Jika $x, y \in \mathcal{R}$ dan $n \in \mathcal{R}$, maka $(x \oplus y)^{\otimes^n} = n. \max\ (x, y)$ = max $(n. x, n. y)$

Contoh 2.1.11

Tabel 2. Pengoperasian pangkat pada aljabar *Max-plus*

Operasi pada aljabar $\mathcal{R}_{max}$	**Operasi pada aljabar klasik**	**Hasil**
$5^{\otimes^0}$	0×5	e
$7^{\otimes^3}$	3×7	21
$8^{\otimes^{\frac{1}{4}}}$	$\frac{1}{4} \times 8$	2
$21^{\otimes^{\frac{1}{7}}}$	$\frac{1}{7} \times 21$	3
$12^{\otimes^{-\frac{1}{3}}}$	$-\frac{1}{3} \times 12$	-4
$4^{\otimes^{-1}}$	-1×4	-4
$\sqrt{10} = 10^{\otimes^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{2} \times 10$	5

Operasi pada aljabar $\mathcal{R}_{max}$	Operasi pada aljabar klasik	Hasil
$(4 \oplus e)^{\otimes^3}$	3. max (4, 0) = max (3 × 4, 3 × 0) = max (12, 0)	12
$(2 \oplus 5)^{\otimes^4}$	4. max (2, 5) = max (4 × 2, 4 × 5) = max (8,20)	20

Beberapa sifat dalam operasi bilangan pangkat pada aljabar *Max-plus* adalah sebagai berikut.

Lemma 2.1.12

Untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ dan $x, y \in \mathcal{R}_{\max}$ berlaku:

1. $x^{\otimes^m} \otimes x^{\otimes^n} = x^{\otimes^{(m \otimes n)}}$
2. $(x^{\otimes^m})^{\otimes^n} = x^{\otimes^{(m^{\otimes^n})}}$
3. $x^{\otimes^1} = x$
4. $x^{\otimes^m} \otimes y^{\otimes^m} = (x \otimes y)^{\otimes^m}$

Bukti:

1. $x^{\otimes^m} \otimes x^{\otimes^n} = (\underbrace{x \otimes x \otimes x \ldots \otimes x}_{m}) + (\underbrace{x \otimes x \otimes x \ldots \otimes x}_{n})$
$= (\underbrace{x + x + \cdots + x}_{m}) + (\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n})$
$= m.x + n.x = (n + m).x$
$= (m \otimes n).x$
$= x^{\otimes^{(m \otimes n)}}$
2. $(x^{\otimes^m})^{\otimes^n} = (\underbrace{x \otimes x \otimes x \ldots \otimes x}_{m})^{\otimes^n} = (\underbrace{x + x + \cdots + x}_{m})^{\otimes^n}$
$= (m.x)^{\otimes^n} = (\underbrace{m.x \otimes m.x \otimes m.x \ldots \otimes m.x}_{n})$
$= (\underbrace{m.x + m.x + \cdots + m.x}_{n}) = n.(m.x) = (n.m.x)$
$= x^{\otimes^{(m^{\otimes^n})}}$
3. $x^{\otimes^1} = 1.x = x$
4. $x^{\otimes^m} \otimes y^{\otimes^m} = (\underbrace{x \otimes x \otimes x \ldots \otimes x}_{m}) + (\underbrace{y \otimes y \otimes y \ldots \otimes y}_{m})$

$$= (\underbrace{x + x + \cdots + x}_{\mathrm{m}}) + (\underbrace{y + y + \cdots + y}_{\mathrm{m}})$$
$$= m.x + m.y = m.(x + y)$$
$$= m.(x \otimes y) = (x \otimes y)^{\otimes^m}$$

Dalam urutan pengoperasian pangkat pada aljabar *Max-plus* operasi biner $\otimes$ dilakukan terlebih dahulu daripada operasi biner $\oplus$.

Contoh: 2.1.13

Tabel 3. Pengoperasian pangkat pada aljabar *Max-plus*

Operasi pada aljabar $\mathcal{R}_{max}$	**Operasi pada aljabar klasik**	**Nilai**
$2^{\otimes^3} \otimes 2^{\otimes^4}$	$2 \times 3 + 4 \times 2$	14
$(4^{\otimes^2})^{\otimes^3}$	$3 \times 2 \times 4$	24
$3^{\otimes^1}$	3×1	3
$3^{\otimes^4} \otimes 5^{\otimes^4}$	$4 \times (3 + 5)$	32

2.2 MATRIKS DALAM ALJABAR *MAX- PLUS*

Pada subbab ini dibahas pengantar tentang matriks dalam aljabar *Max-plus*. Sebagai bahan rujukan dalam materi ini dapat ditemukan dalam [2,3, 5,10]. Pada subbab 2.1 telah dijelaskan bahwa aljabar *Max-plus* adalah semilapangan yang idempoten, selanjutnya diperkenalkan struktur baru yang disebut moduloid.

Definisi 2.2.1

Diberikan semilapangan yang idempoten $(K, +, \times)$ dengan elemen identitas 0 (nol) pada operasi $+$ dan elemen identitas 1(satu) pada operasi $\times$. Moduloid M atas K adalah himpunan M yang dilengkapi dengan:

1. Operasi biner $+: M \times M \to M$ dan elemen identitas 0;
2. Operasi biner $\cdot : K \times M \to M$;

dan memenuhi aksioma- aksioma berikut:

a. Bersifat asosiatif; $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\, x,y,z \in M$;
b. Bersifat komutatif; $x+y = y+x$, $\forall x,y \in M$;
c. $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$, $\forall\, x \in M$, setiap $\alpha,\beta \in K$;
d. $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y$, $\forall x,y \in M$, setiap $\alpha \in K$;
e. $\alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\cdot\beta)\cdot x$, $\forall\, x \in M$, setiap $\alpha,\beta \in K$;
f. $1\cdot x = x$, $\forall x \in M$;
g. $0\cdot x = 0$, $\forall\, x \in M$.

Definisi 2.2.2

Suatu himpunan matriks berordo $m\times n$ dengan $m,n \in \mathbb{N}$ pada aljabar *Max-plus* dinotasikan sebagai $\mathcal{R}_{max}^{m\times n}$. Secara lengkap ditulis matriks dalam $\mathcal{R}_{max}^{m\times n} := \{A = (a_{ij}) \big| a_{ij} \in \mathcal{R}_{max}$, untuk i menyatakan baris ke-i dengan $i = 1,2,3 \ldots m$ dan j menyatakan kolom ke-j dengan $j = 1,2,3,\ldots n$ dari elemen tersebut$\}$. Matriks $A \in \mathcal{R}_{max}^{m\times n}$ dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2.3

Diberikan $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ yang dilengkapi operasi biner $\oplus$ pada $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$. $A\oplus B = (a_{ij})\oplus(b_{ij}) = \max(a_{ij}, b_{ij})$, dengan $i,j = 1,2,3\ldots,n$, $\forall A,B \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$, dan operasi biner $\otimes$ dari $\mathcal{R}_{max}$ pada $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$. $\alpha\otimes A = \alpha\otimes(a_{ij})$, setiap $\alpha \in \mathcal{R}_{max}$, $\forall A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$. Maka $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ adalah merupakan moduloid atas $\mathcal{R}_{max}$.

Bukti:

$\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ adalah merupakan moduloid atas $\mathcal{R}_{max}$ jika :

a. Bersifat komutatif ;

$$A\oplus B = (a_{ij})\oplus(b_{ij}) = (b_{ij})\oplus(a_{ij}) = B\oplus A,\ \forall A,B \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n};$$

b. Bersifat asosiatif;

$$\begin{aligned}(A\oplus B)\oplus C &= \big((a_{ij})\oplus(b_{ij})\big)\oplus(c_{ij}) = \big((a_{ij})\oplus(b_{ij})\oplus(c_{ij})\big)\\ &= (a_{ij})\oplus\big((b_{ij})\oplus(c_{ij})\big) = A\oplus(B\oplus C), \forall A,B,C \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n};\end{aligned}$$

c. $(\alpha \oplus \beta)\otimes A \;= (\alpha \oplus \beta) \otimes\big(a_{ij}\big) = \alpha \otimes \big(a_{ij}\big) \oplus \beta \otimes \big(a_{ij}\big) = \alpha \otimes A \oplus \beta\otimes A,$

$\forall\alpha\ \beta \in \mathcal{R}_{max}$ dan $\forall A, B, C \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$;

d. $\alpha \otimes(A\oplus B) \;= \alpha \otimes \Big(\big(a_{ij}\big)\oplus \big(b_{ij}\big)\Big) = \alpha \otimes\big(a_{ij}\big)\oplus\alpha \otimes\big(b_{ij}\big) = (\alpha \otimes A\oplus \alpha \otimes B),$

$\forall\alpha \in \mathcal{R}_{max}$ dan $\forall A, B, C \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$;

e. $\alpha \otimes(\beta\otimes A) \;= \alpha \otimes \Big(\beta\otimes\big(a_{ij}\big)\Big) = \alpha\otimes \beta\otimes\big(a_{ij}\big) = (\alpha\otimes \beta)\otimes\big(a_{ij}\big)$

$= (\alpha\otimes \beta)\otimes A,\ \forall\alpha\ \beta \in \mathcal{R}_{max}$ dan $\forall A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$;

f. $e \otimes A \;= e \otimes\big(a_{ij}\big) = \big(a_{ij}\big) = A, \forall A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$;

g. $\varepsilon \otimes A \;= \varepsilon \otimes\big(a_{ij}\big) = \big(\varepsilon_{ij}\big) = \mathcal{E}^{n\times n}, \forall A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$.

Jadi berdasarkan aksioma dalam Definisi 2.2.1 $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan moduloid atas $\mathcal{R}_{max}$.

Definisi 2.2.4

Moduloid M dengan penambahan satu operasi biner $\times$ yang dinotasikan dengan $\times: M \times M \to M$ disebut aljabar idempoten, jika memenuhi aksioma – aksioma berikut:

a. Bersifat asosiatif; $(x \times y) \times z = x \times (y \times z), \forall x, y, z \in M$;
b. Terdapat elemen identitas 1 (satu) di M yang bersifat $1 \times x = x = x \times 1, \forall x \in M$;
c. Bersifat distributif kiri; $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z), \forall x, y, z \in M$;
d. Bersifat distributif kanan; $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z), \forall x, y, z \in M$.

Teorema 2.2.5

Moduloid $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ yang ditambah satu operasi biner $\otimes$ pada $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ yaitu: $A \otimes B = (A \otimes B)_{ij} = \oplus_{k=1}^{n} \big(a_{ik} \otimes b_{kj}\big) = \max_{k\in\{1,2,3,\dots,n\}}\big(a_{ik} + b_{kj}\big), \forall i, j = 1,2,3 \dots n$ adalah aljabar idempoten.

Bukti:

a. Bersifat asosiatif;

$(A \otimes B) \otimes C \;= ((A \otimes B) \otimes C)_{ij} = (\oplus_{k=1}^{n}(a_{ik} \otimes b_{kl}))\otimes c_{lj}$

$= \oplus_{l=1}^{n}(\oplus_{k=1}^{n}(a_{ik} \otimes b_{kl}))\otimes c_{lj} = \oplus_{l=1}^{n}\oplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kl} \otimes c_{lj}$

$=_{k=1}^{n} a_{ik}\ (\oplus_{l=1}^{n}\otimes b_{kl} \otimes c_{lj}) = (A \otimes (B \otimes C))_{ij} = A \otimes (B \otimes C),$

$\forall A, B, C \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$;

b. Terdapat unsur satuan $e^{n\times n}$ $(e = 0)$ yang merupakan matriks berukuran $n \times n$, dengan elemen – elemen diagonal utama sama dengan e dan elemen-elemen yang lain sama dengan ε. Matriks $e^{n\times n}$ bersifat $e^{n\times n} \otimes x = x = x \otimes e^{n\times n}$, $\forall x \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$.

Matriks $e^{n\times n}$ disebut matriks identitas. Dibuktikan $e^{n\times n}\otimes x = x = x\otimes e^{n\times n}$, $\forall x\in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ sebagai berikut:

(i). $(e^{n\times n}\otimes x)_{ij} = e_{i1}^{n\times n}\otimes x_{1j}\oplus e_{i2}^{n\times n}\otimes x_{2j}\oplus \dots \oplus e_{in}^{n\times n}\otimes x_{nj}$, untuk $i,j = 1,2,\dots,n$. Dengan $e^{n\times n} = \varepsilon$, untuk $i\neq j$ dan $e^{n\times n} = e$, untuk $i = j$ sehingga $(e^{n\times n}\otimes x)_{ij}$ dituliskan menjadi;

Untuk i = 1, j = 1 $\rightarrow (e^{n\times n}\otimes x)_{11} = e_{11}^{n\times n}\otimes x_{11}\oplus e_{12}^{n\times n}\otimes x_{21}\oplus \dots \oplus e_{1n}^{n\times n}\otimes x_{n1}$

$= e\otimes x_{11}\oplus \varepsilon\oplus \dots \oplus \varepsilon$

$= x_{11}$

j = 2 $\rightarrow (e^{n\times n}\otimes x)_{12} = e_{11}^{n\times n}\otimes x_{12}\oplus e_{12}^{n\times n}\otimes x_{22}\oplus \dots \oplus e_{1n}^{n\times n}\otimes x_{n2}$

$= e\otimes x_{12}\oplus \varepsilon\oplus \dots \oplus \varepsilon$

$= x_{12}$

Dan demikian seterusnya, hingga sampai i = j = n, sehingga diperoleh:

$(e^{n\times n}\otimes x)_{ij} = x_{ij}$.

(ii). $(x\otimes e^{n\times n})_{ij} = x_{i1}\otimes e_{1j}^{n\times n}\oplus x_{i2}\otimes e_{2j}^{n\times n}\oplus \dots \oplus x_{in}\otimes e_{nj}^{n\times n}$, untuk $i,j = 1,2,\dots,n$. Dengan $e^{n\times n} = \varepsilon$, untuk $i\neq j$ dan $e^{n\times n} = e$, untuk $i = j$ sehingga $(x\otimes e^{n\times n})_{ij}$ dituliskan menjadi :

Untuk i = 1, j = 1 $\rightarrow (x\otimes e^{n\times n})_{11} = x_{11}\otimes e_{11}^{n\times n}\oplus x_{12}\otimes e_{21}^{n\times n}\oplus \dots \oplus x_{1n}\otimes e_{n1}^{n\times n}$

$= x_{11}\otimes e\oplus \varepsilon\oplus \dots \oplus \varepsilon$

$= x_{11}$

j = 2 $\rightarrow (x\otimes e^{n\times n})_{12} = x_{11}\otimes e_{12}^{n\times n}\oplus x_{12}\otimes e_{22}^{n\times n}\oplus \dots \oplus x_{1n}\otimes e_{n2}^{n\times n}$

$= \varepsilon\oplus x_{12}\otimes e\oplus \varepsilon\oplus \dots \oplus \varepsilon$

$= x_{12}$

Dan demikian seterusnya, hingga sampai i = j = n, sehingga diperoleh:

$(x\otimes e^{n\times n})_{ij} = x_{ij}$.

Dengan demikian dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $e^{n\times n}\otimes x = x = x\otimes e^{n\times n}$, $\forall x\in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$.

c. Bersifat distributif kiri;

$(A\oplus B)\otimes C = \left((a_{ik})\oplus (b_{ik})\right)\oplus \left(c_{kj}\right) = \otimes_{k=1}^{n}(a_{ik}\oplus b_{ik})\otimes \left(c_{kj}\right)$

$$= \otimes_{k=1}^{n} \left((a_{ik}) \otimes (c_{kj}) \oplus (b_{ik}) \otimes (c_{kj}) \right)$$

$$= \left(\otimes_{k=1}^{n} \left((a_{ik}) \otimes (c_{kj}) \right) \right) \oplus \left(\otimes_{k=1}^{n} \left((b_{ik}) \otimes (c_{kj}) \right) \right)$$

$$= \left((a_{ik}) \otimes (c_{kj}) \right) \oplus \left((b_{ik}) \otimes (c_{kj}) \right)$$

$$= (A \otimes C) \oplus (B \otimes C), \forall A, B, C \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}.$$

d. Bersifat distributif kanan;

$$A \otimes (B \oplus C) = (a_{ik}) \otimes \left((b_{kj}) \oplus (c_{kj}) \right) = \otimes_{k=1}^{n} (a_{ik}) \otimes \left((b_{kj}) \oplus (c_{kj}) \right)$$

$$= \otimes_{k=1}^{n} \left((a_{ik}) \otimes (b_{kj}) \oplus (a_{ik}) \otimes (c_{kj}) \right)$$

$$= \left(\otimes_{k=1}^{n} \left((a_{ik}) \otimes (b_{kj}) \right) \right) \oplus \left(\otimes_{k=1}^{n} \left((a_{ik}) \otimes (c_{kj}) \right) \right)$$

$$= \left((a_{ik}) \otimes (b_{kj}) \right) \oplus \left((a_{ik}) \otimes (c_{kj}) \right)$$

$$= (A \otimes B) \oplus (A \otimes C), \forall A, B, C \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}.$$

Dengan demikian dari (a), (b), (c) dan (d) terbukti bahwa $\mathcal{R}_{max}^{n \times n}$ adalah aljabar idempoten.

Definisi 2.2.6

1. Diberikan $A \in \mathcal{R}_{max}^{m \times n}$, maka transpose dari matriks $A \in \mathcal{R}_{max}^{m \times n}$ dinotasikan dengan A^T, didefinisikan sebagai:

$$(a_{ij})^T = (a_{ji}).$$

2. Diberikan $\mathcal{E} \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}$, dengan$(\boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = \mathcal{E}$, untuk setiap i dan j. Matriks $\mathcal{E}$ disebut matriks nol *Max-plus*.
3. Diberikan $A \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}$ dan diberikan $n > 0, n \in$ bilangan bulat, pangkat $ke\ n$ dari matriks $A \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}$ dinotasikan dengan $A^{\otimes n}$, didefinisikan sebagai:

$$A^{\otimes n} = \underbrace{A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{\text{n}} = A \otimes A^{n-1}.$$

Untuk $n = 0$, $A^{\otimes 0} = e^{n \times n}$ adalah sebuah matriks identitas. Lebih lanjut dapat di-perjelas untuk pangkat pada matriks sebagai berikut [4, 9, 10, 12]:

Untuk unsur $ke - st$ pada matriks $A^{\otimes 2}$ adalah:

$$(A^{\otimes 2})_{st} = \bigoplus_{i_1=1}^{k} (A_{s,i_1} \otimes A_{i_1,t}) = max_{1 \le i_1 \le k} (A_{s,i_1} + A_{i_1,t}).$$

Untuk unsur $ke - st$ pada matriks $A^{\otimes 3}$ adalah:

$$(A^{\otimes 3})_{st} = \bigoplus_{i_2=1}^{k}(A_{s,i_2}(\bigoplus_{i_1=1}^{k}(A_{i_2,i_1} \otimes A_{i_1,t}))) = \bigoplus_{i_2=1}^{k}(\bigoplus_{i_1=1}^{k}(A_{s,i_2} \otimes A_{i_2,i_1} \otimes A_{i_1,t}))$$

$$= max_{1 \le i_1, i_2 \le k}(A_{s,i_2} + A_{i_2,i_1} + A_{i_1,t}).$$

Dari ilustrasi di atas, maka secara umum unsur $ke - st$ pangkat matriks dalam aljabar *Max-plus* dapat disimpulkan sebagai berikut:

$$(A^{\otimes n})_{st} = \bigoplus_{i_{n-1}=1}^{k}(A_{s,i_{k-1}} \dots (\bigoplus_{i_1=1}^{k}(A_{i_2,i_1} \otimes A_{i_1,t}))) = \bigoplus_{i_2=1}^{k} \dots \bigoplus_{i_1=1}^{k}(A_{s,i_{l-2}} \otimes \dots \otimes A_{i_2,i_1} \otimes A_{i_1,t}))$$

$$= max_{1 \le i_1, i_2 \dots, i_{l-1} \le k}(A_{s,i_{l-1}} + \dots + A_{i_2,i_1} + A_{i_1,t}).$$

Selanjutnya jika diberikan $A \in \mathcal{R}_{max}^{nxn}$ dan diberikan sebarang skalar $\alpha \in \mathcal{R}_{max}$, $n > 0, n \in \mathbb{Z}, n$ adalah pangkat, maka unsur $ke - st$ matriks $(\alpha \otimes A)^{\otimes n}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$((\alpha \otimes A)^{\otimes n})_{st} = max_{1 \le i_1, i_2 \dots, i_{l-1} \le k}((\alpha + A_{s,i_{l-1}}) + \dots + (\alpha + A_{i_2,i_1}) + (\alpha + A_{i_1,t}))$$

$$= (\underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{n}) + max_{1 \le i_1, i_2 \dots, i_{l-1} \le k}(A_{s,i_{l-1}} + \dots + A_{i_2,i_1} + A_{i_1,t})$$

$$= \alpha^{\otimes n} \otimes (A^{\otimes n})_{st} \text{, untuk } n = 1, 2, \dots$$

Jadi untuk sebarang $\alpha \in \mathcal{R}_{max}$ dan $A \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}$, $n > 0, n \in \mathbb{Z}$, maka berlaku:

$$(\alpha \otimes A)^{\otimes n} = \alpha^{\otimes n} \otimes A^{\otimes n}\text{, untuk } n = 1, 2, \dots$$

Jika diberikan sebarang $A \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}$, maka $trace\ (A) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Contoh 2.2.7

1. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 5 \\ 1 & 4 & \varepsilon \end{pmatrix}$

   Tentukan:

   a. $A \oplus B$
   $$= \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \oplus (-3) & \varepsilon \oplus 2 \\ 3 \oplus 5 & (-4) \oplus \varepsilon \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} max(2, (-3)) & max\ (\varepsilon, 2) \\ max(3, 5) & max((-4), \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

   b. $5 \otimes A$
   $$= 5 \otimes \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \otimes 2 & 5 \otimes \varepsilon \\ 5 \otimes 3 & 5 \otimes (-4) \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 5 + 2 & 5 + \varepsilon \\ 5 + 3 & 5 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \varepsilon \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. $B \otimes C$ $= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 5 \\ 1 & 4 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (-3) \otimes 2 \oplus 2 \otimes 1 & (-3) \otimes \varepsilon \oplus 2 \otimes 4 & (-3) \otimes 5 \oplus 2 \otimes \varepsilon \\ 5 \otimes 2 \oplus \varepsilon \otimes 1 & 5 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes 4 & 5 \otimes 5 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \max(-1\,, 3) & \max(\,\varepsilon\,, 6) & \max(2, \varepsilon\,) \\ \max(7\,, \varepsilon\,) & \max(\,\varepsilon\,, \varepsilon\,) & \max(10, \varepsilon) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 7 & \varepsilon & 10 \end{pmatrix}.$

d. $B^{\otimes 3}$ $= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix}^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} (-3) \otimes (-3) \oplus 2 \otimes 5 & (-3) \otimes 2 \oplus 2 \otimes \varepsilon \\ 5 \otimes (-3) \oplus \varepsilon \otimes 5 & 5 \otimes 2 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \max\,(-6\,, 7) & \max\,(-1, \varepsilon) \\ \max\,(2, \varepsilon\,) & \max\,(\,7, \varepsilon\,) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (-3)\; \otimes 7 \oplus 2 \otimes 2 & (-3)\; \otimes (-1) \oplus 2 \otimes 7 \\ 5 \otimes 7 \oplus \varepsilon \otimes 2 & 5 \otimes (-1) \oplus \varepsilon \otimes 7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \max\,(4\,, 4) & \max\,(-4,\; 9) \\ \max\,(12,\; \varepsilon\,) & \max\,(\,4, \varepsilon\,) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$

e. $(4 \otimes B)^{\otimes 3}$ $= 4^{\otimes 3} \otimes B^{\otimes 3} = (4 + 4 + 4) \otimes \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

$= 12 \otimes \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \otimes 4 & 12 \otimes 9 \\ 12 \otimes 12 & 12 \otimes 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}.$

2.3 TEORI GRAF DAN ALJABAR *MAX-PLUS*

Secara khusus teori graf mempunyai peranan penting dalam masalah sistem persamaan linier. Sebagai bahan rujukan terdapat pada [2,5,6,11,12]

Definisi 2.3.1

Sebuah graf berarah G adalah pasangan V dan E, dinotasikan sebagai $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan simpul – simpul dan $E \subset V \times V$ adalah himpunan busur – busur. Sebuah busur tertentu $(i, j) \in E$ dengan $i, j \in V$ adalah busur berarah yang arah-nya dari $i\ ke\ j$.

Definisi 2.3.2

Diberikan matriks $A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$, graf terhubung dari matriks A adalah graf $G(A) = (V, E)$ dengan simpul $V = \{1,2,\dots,n\}$ dan busur $E = \{(j,i) \mid a_{ij} \neq \varepsilon\}$. Graf berarah $G(A) = (V, E)$ dikatakan berbobot, jika untuk setiap busur $(i,j) \in E$ dipasangkan dengan bilangan real a_{ij}. Bilangan real a_{ij} disebut bobot busur (j,i), yang dinotasikan $w(i,j)$.

Contoh 2.3.3

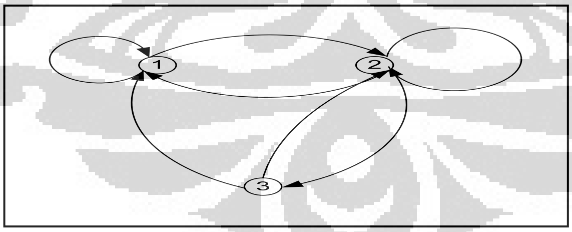
Diberikan matriks $= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, maka graf $G(A)$ mempunyai simpul $V = \{1,2\}$ dan busur $E = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ dengan bobot masing – masing busur adalah : 1, -2, 4, dan 3.

Definisi 2.3.4

Diberikan suatu graf berarah $G = (V, E)$. Sebuah lintasan *(path)* ρ dari i ke j dalam graf berarah G adalah barisan berhingga dari busur $\rho = (i_1, i_2, \dots, i_{s+1})$ dengan $i_1 = i$, $i_{s+1} = j$, sedemikian hingga setiap (i_k, i_{k+1}) adalah busur dari graf berarah $G(V, E)$. Suatu lintasan ρ yang mempunyai panjang k dinotasikan dengan $k = |\rho|_l$. Himpunan lintasan dari i ke j yang panjangnya k dinotasikan dengan $P\{(i,j) : k\}$.

Contoh 2.3.5

Diberikan graf seperti berikut:



Gambar 1. Graf $G = (V, E)$

Dari Gambar 1 barisan busur (3, 2),(2, 2), (2, 1), (1, 1), (1,2) merupakan suatu lintasan dalam graf $G = (V, E)$ yang dapat direpresentasikan dengan 3→2→2→ 1 →1 → 2, dengan panjang 5, karena tersusun atas 5 busur, yang dinotasikan dengan $P\{(3,2) : 5\}$. Lintasan 1→2→ 2 →3 →2 mempunyai panjang 4, karena terdiri atas 4 busur dan ditulis $P\{(1,2) : 4\}$.

Definisi 2.3.6

Sebuah simpul j dapat dicapai dari simpul i diartikan ada sebuah lintasan dari $i\ ke\ j$. Sebuah graf berarah $G = (V, E)$ terhubung kuat jika setiap simpul dapat dicapai dari setiap simpul yang lain.

Definisi 2.3.7

Diberikan graf berarah $G(A) = (V, E)$. Sebuah sirkuit adalah suatu lintasan tertutup atau dengan kata lain simpul awal dan simpul akhir sama, sedemikian hingga $i_1 = i_{s+1}$. Selanjutnya sebuah sirkuit yang terdiri atas satu busur disebut sebuah *loop*. Sebuah s*irkuit elementer* adalah sirkuit yang simpul-simpulnya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali simpul awal yang muncul tepat dua kali. Panjang lintasan terpendek yang dilalui dari simpul i_1 ke i_s adalah jarak. Lintasan dan sirkuit dari $G(A)$ mempunyai bobot, bobotnya adalah ditentukan dari elemen-elemen matriks $A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$.

Contoh 2.3.8

Pada graf berarah dalam contoh 2.3.5 lintasan $1\rightarrow 2\rightarrow 3 \rightarrow 1$ dan $1\rightarrow 2\rightarrow 1$ merupakan suatu sirkuit elementer dengan panjang 3 dan panjang 2. Lintasan $1\rightarrow 1$ dan $1\rightarrow 2$ merupakan suatu *loop*, karena hanya ada satu busur. Lintasan $1\rightarrow 2\rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2\rightarrow 1$ dan $3\rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2\rightarrow 3$ merupakan sirkuit dengan panjang 5.

Definisi 2.3.9

Diberikan suatu graf berarah berbobot $G(A) = (V, E)$ dengan $V = \{1,2, \dots, n\}$. Bobot suatu lintasan ρ dari simpul i_1 ke i_{s+1} dengan panjang $\mathcal{S}$ dinotasikan dengan $|\rho|_w = \otimes_{k=1}^{s} a_{i_{k+1},\, i_k}$. Bobot rata-rata lintasan $\widehat{|\rho|} = \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$ (perhitungannya dalam aljabar klasik).

Contoh 2.3.10

Graf $G(A)$ pada contoh 2.3.3 mempunyai lintasan $\rho = 1\rightarrow 2\rightarrow 2 \rightarrow 1$, dengan $|\rho|_l = 3$ dan $|\rho|_w = \otimes_{k=1}^{s} a_{i_{k+1},\, i_k} = \otimes_{k=1}^{3} a_{i_{k+1},\, i_k} = a_{i_2,\, i_1} \otimes a_{i_3,\, i_2} \otimes a_{i_4,\, i_3} = w(2,1) \otimes w(2,2) \otimes w(1,2) = a_{21} \otimes a_{22} \otimes a_{12} = -2 \otimes 3 \otimes 4 = -2 + 3 + 4 = 5$.

Bobot rata-rata lintasan ρ adalah $\widehat{|\rho|} = \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = \frac{5}{3}$.

Berikut ini adalah interpretasi dalam teori graf untuk pangkat k pada matriks $A \in \mathcal{R}_{max}^{nxn}$, graf terhubung dari A adalah graf $G(A)$. Jika $A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ dengan $k \in \mathbb{N}$ maka elemen ke-ij dalam $A^{\otimes k} \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ adalah :

$$(A^{\otimes k})_{ji} = \max_{1\leq i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\leq n} (A_{i,i_{k-1}} + \ldots + A_{i_2,i_1} + A_{i_1,j})$$

$$= \max_{1\leq i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\leq n} (A_{i_1,j} + A_{i_2,i_1} + \ldots + A_{i,i_{k-1}}) \text{ , untuk setiap } i, j$$

Karena $\max_{1\leq i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\leq n} (A_{i_1,j} + A_{i_2,i_1} + \ldots + A_{i,i_{k-1}})$ merupakan bobot lintasan dengan panjang k dari simpul i (sebagai simpul awal) ke simpul j (sebagai simpul akhir) dalam graf $G(A)$. Dengan demikian $(A^{\otimes k})_{ji}$ merupakan bobot maksimum semua lintasan dalam graf $G(A)$ dengan panjang k dari simpul i ke simpul j. Jika dalam graf $G(A)$ tidak ada lintasan dengan panjang k dari simpul i ke simpul j, maka bobot maksimum didefinisikan dengan ε.

Contoh 2.3.11

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & e & 1 \\ -1 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, bobot maksimum semua lintasan dalam $G(A)$ dengan panjang k yang ditentukan dari elemen-elemen di $A^{\otimes k}$. Misalkan diberikan $k = 2, 3, 4$ berikut:

$A^{\otimes 2}$=$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & e \\ e & 4 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $A^{\otimes 3}$=$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 5 & 9 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{\otimes 4}$=$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 8 & 12 & 6 \\ 6 & 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Diperhatikan bahwa $(A^{\otimes 2})_{31}$= e , maka bobot maksimum semua lintasan di $G(A)$ dengan panjang 2 yang berawal dari simpul 1 dan berakhir di simpul 3 adalah e . Lintasan tersebut adalah 1→2→ 3, dan bobot lintasan adalah $|\rho|_w = w(2,1) \otimes w(3,2)$ = $a_{21} \otimes a_{32}$ $=-1 \otimes 1 = e$. Dimana lintasan dengan panjang 2 yang berawal dari simpul 2 dan berakhir di simpul 3 hanya ada satu lintasan. $(A^{\otimes 2})_{32}$= 4 artinya adalah bobot maksimum semua lintasan di $G(A)$ dengan panjang 2 yang berawal dari simpul 2 dan berakhir di simpul 3 adalah 4. Lintasan tersebut adalah 2→2→ 3 = $w(2,2)\otimes w(3,2)$ = $a_{22} \otimes a_{32} = 3 \otimes 1 = 4$. Demikian halnya dengan $(A^{\otimes 3})_{12}$= 6 yaitu bobot maksimum semua lintasan di $G(A)$ dengan panjang 3 yang berawal dari simpul 2 dan berakhir di simpul 1 adalah 6. Lintasan di $G(A)$ dengan panjang 3 ada 4 yaitu

(1). $2 \to 2 \to 3 \to 1 = w(2,2) \otimes w(3,2) \otimes w(1,3) = a_{22} \otimes a_{32} \otimes a_{13} = 3 \otimes 1 \otimes 1 = 5$,

(2). $2 \to 2 \to 1 \to 1 = w(2,2) \otimes w(1,2) \otimes w(1,1) = a_{22} \otimes a_{12} \otimes a_{11} = 3 \otimes e \otimes 2 = 5$,

(3). $2 \to 3 \to 2 \to 1 = w(3,2) \otimes w(2,3) \otimes w(1,2) = a_{32} \otimes a_{23} \otimes a_{12} = 1 \otimes \varepsilon \otimes e = \varepsilon$,

(4). $2 \to 2 \to 2 \to 1 = w(2,2) + w(2,2) + w(1,2) = a_{22} \otimes a_{22} \otimes a_{12} = 3 \otimes 3 \otimes e = 6$.

Berdasarkan ke- 4 lintasan di atas, diperoleh bobot maksimum dari lintasan $(A^{\otimes 3})_{12}$ = $\max(5, 5, \varepsilon, 6) = 6$. Demikian juga untuk $(A^{\otimes 3})_{33}$= 1 yaitu bobot maksimum sirkuit dalam $G(A)$dengan panjang 3 yang berawal dan berakhir di simpul 3 adalah 1. Untuk $(A^{\otimes 4})_{13}$ = 7 artinya bobot maksimum dari lintasan dalam $G(A)$ dengan panjang 4 yang berawal dari simpul 3 dan berakhir di simpul 1 adalah 7.

BAB III

BEBERAPA PERBANDINGAN DALAM ALJABAR KLASIK DAN ALJABAR *MAX-PLUS*

Pada bab ini dibahas beberapa konsep yang meliputi fungsi linier, fungsi afin, sistem persamaan linier dalam aljabar klasik dan aljabar *Max-plus*.

3.1 FUNGSI LINIER

Pada subbab ini dibahas tentang fungsi linier pada aljabar klasik dan aljabar *max-plus* [2, 5, 6, 10].

3.1.1 Fungsi linier dalam aljabar klasik

Definisi 3.1.1.1

Fungsi $f: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n$ dikatakan fungsi linier, jika memenuhi;

Untuk sebarang a dan $b \in \mathcal{R}^m$ berlaku :

$$f(a+b) = f(a) + f(b). \quad (1)$$

Untuk sebarang $a \in \mathcal{R}^m$ dan skalar $\alpha \in \mathcal{R}$ berlaku :

$$f(\alpha a) = \alpha f(a). \quad (2)$$

Contoh 3.1.1.2

Tunjukan $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, dengan $f(x) = 3x$, untuk setiap $x \in \mathcal{R}$ adalah fungsi linier

Penyelesaian:

Ambil sebarang x_1 dan $x_2 \in \mathcal{R}$, maka :

$$f(x_1 + x_2) = 3(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 = f(x_1) + f(x_2). \quad (3)$$

dan untuk sebarang $x \in \mathcal{R}$ dan skalar α berlaku:

$$f(\alpha x) = 3\alpha x = \alpha 3x = \alpha f(x). \quad (4)$$

Dari (3) dan (4) terbukti bahwa $f(x) = 3x$ adalah fungsi linier.

3.1.2 Fungsi linier dalam aljabar *Max-plus*

Definsi 3.1.2.1

Fungsi $f: \mathcal{R}_{max} \rightarrow \mathcal{R}_{max}$ dikatakan fungsi linier dalam aljabar *Max –plus*, jika memenuhi:

Untuk setiap $x \in \mathcal{R}_{max}$, berlaku $f(x) = x \otimes f(e)$.

Dengan memisalkan $a = f(e)$ didapat $y = f(x) = a \otimes x$. Akibatnya diperoleh kemiringan fungsi linier (garis) tersebut $y' = f'(x)$ = 1. Jadi kemiringan semua fungsi linier dalam aljabar *Max-plus* bentuk di atas adalah selalu 1.

Fungsi linier $y = f(x) = a \otimes x$, mempunyai titik potong terhadap sumbu x yang diperoleh dengan mensubtitusikan titik (x, e) ke dalam fungsi $y = f(x) = a \otimes x$, sebagai berikut :

$y = f(x) = a \otimes x = a + x = e$

$\leftrightarrow a \otimes x = a + x = e$

$\leftrightarrow a + x = e$ (kedua ruas ditambah dengan (-a))

$\leftrightarrow a + (-a) + x = e + (-a)$

$\leftrightarrow e + x = e - a$

$\leftrightarrow x = -a$

Jadi titik potong fungsi $y = f(x) = a \otimes x$ terhadap sumbu x adalah titik $(-a, e)$. Selanjutnya untuk menentukan titik potong fungsi linier aljabar *Max-plus* $y = f(x) = a \otimes x$, terhadap sumbu y yang diperoleh dengan mensubtitusikan titik (e, y) ke dalam fungsi $y = f(x) = a \otimes x$, sebagai berikut:

$y = f(e) = a \otimes e = a + e$

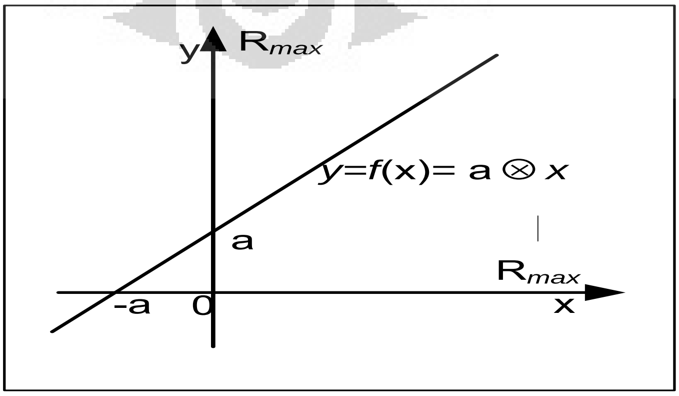
$\leftrightarrow y = a \otimes e = a + e$

$\leftrightarrow y = a + e$

$\leftrightarrow y = a$.

Jadi titik potong fungsi $y = f(x) = a \otimes x$ terhadap sumbu y adalah titik (e, a).

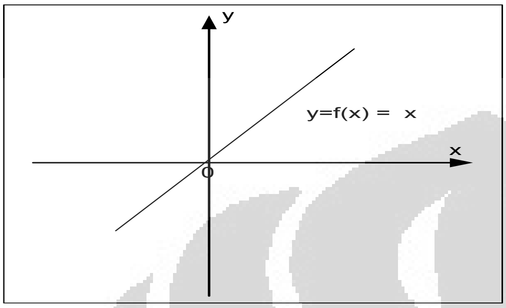
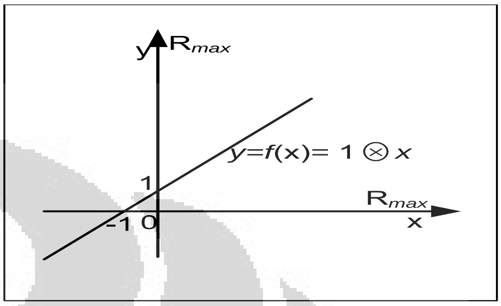
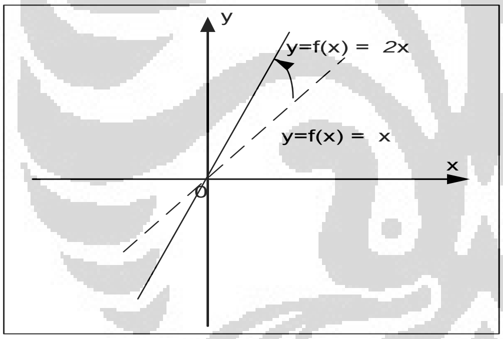
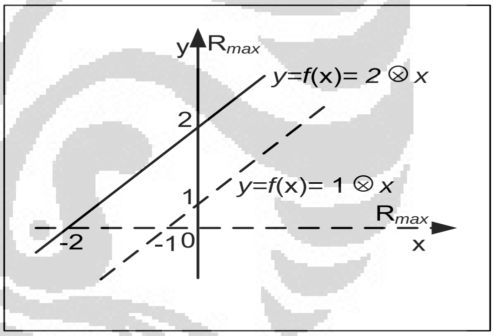
Grafik fungsi linier $y = f(x) = a \otimes x$, aljabar *Max-plus* sebagai berikut:



Gambar 2. Grafik fungsi linier $y = f(x) = a \otimes x$

Contoh 3.1.2.2

Tabel 4. Perbandingan fungsi linier aljabar klasik dan aljabar *Max-plus*

No	**Operasi pada aljabar klasik**	**Operasi pada aljabar *Max-plus***
1.	a. $f(x) = 1 \times x$  **Gambar 3**. Grafik fungsi linier $y = f(x) = 1 \times x$	a. $f(c) = 1 \otimes x$  **Gambar 4**. Grafik fungsi linier $f(x) = 1 \otimes x$
2.	b. $f(x) = 2x$  **Gambar 5.** Grafik fungsi linier $y = f(x) = 2x$	b. $f(x) = 2 \otimes x$  **Gambar 6**. Grafik fungsi linier $f(x) = 2 \otimes x$

Diperhatikan grafik fungsi linier Tabel 4 di atas, diketahui bahwa grafik fungsi linier aljabar klasik $y = mx$ diperoleh dengan merotasikan fungsi linier $y = x$ sebesar $\theta = arctg\, m - 45^0$. Pada fungsi linier aljabar *Max-plus* $f(x) = a \otimes x$ diperoleh dengan menggeser sejajar dengan $f(x) = 1 \otimes x$ sejauh a satuan.

3.2 Fungsi Afin

Pada subbab ini dibahas tentang fungsi afin dalam aljabar klasik dan aljabar *Max-plus* [2, 5, 6, 10].

3.2.1 Fungsi afin aljabar klasik

Definisi 3.2.1.1

Fungsi $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ dikatakan fungsi afin dalam aljabar klasik, jika untuk setiap $x \in \mathcal{R}$ dan ada m , n $\in \mathcal{R}$ berlaku $f(x) = mx + n$.

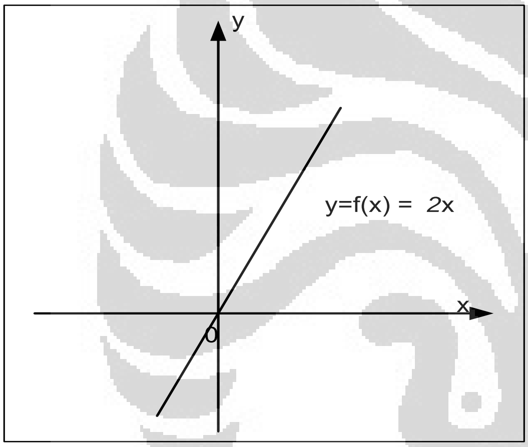
Langkah – langkah untuk menggambar grafik fungsi afin klasik sebagai berikut :

1. Menggambarkan grafik fungsi linier untuk $f(x) = mx$;
2. Mengeser fungsi linier $f(x) = mx$ sebesar n satuan searah sumbu y.

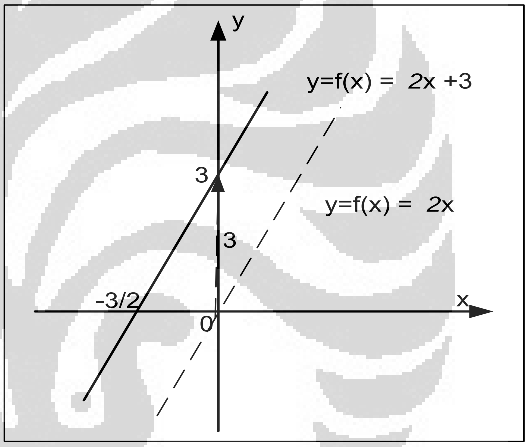
Contoh 3.2.1.2

Tentukan grafik fungsi afin $f(x) = 2x + 3$.

Selesaian:



Gambar 7. Grafik fungsi afin $f(x) = 2x$



Gambar 8. Grafik fungsi afin $f(x) = 2x + 3$

3.2.2 Fungsi afin aljabar *Max-plus*

Definisi 3.2.2.1

Fungsi $f: \mathcal{R}_{max} \rightarrow \mathcal{R}_{max}$ dikatakan fungsi afin dalam aljabar *Max –plus*, jika memenuhi:

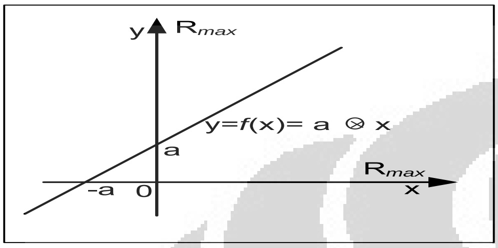
Untuk setiap $x \in \mathcal{R}_{max}$, dan ada $a, b \in \mathcal{R}_{max}$, berlaku $f(x) = (a \otimes x) \oplus b$.

Dalam aljabar klasik nilai afin, pada titik x dituliskan $f(x) = (a \otimes x) \oplus b = max\ (a + x,\ b)$. Langkah – langkah untuk menggambar grafik fungsi afin aljabar *Max-plus* sebagai berikut :

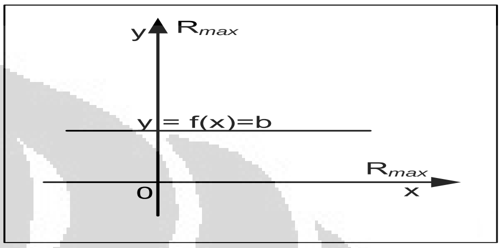
1. Menggambarkan grafik fungsi linier untuk $f(x) = a \otimes x$.
2. Menggambarkan grafik fungsi linier $f(x) = b$.

3. Menggabungkan langkah 1 dan langkah 2, kemudian dipilih nilai maksimum dari kedua fungsi, untuk setiap $x \in \mathcal{R}_{max}$.

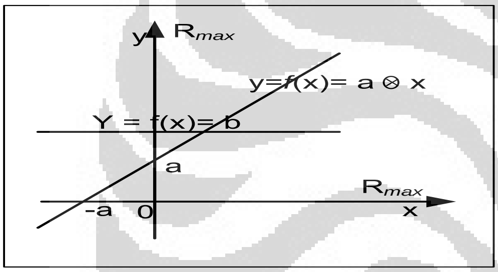
Untuk memperjelas, diberikan gambar fungsi afin aljabar *Max-plus* $f(x) = (a \otimes x) \oplus b = max\ (a + x,\ b)$ sesuai urutan langkah langkah di atas, sebagai berikut:



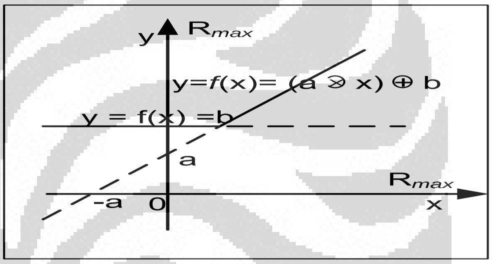
Gambar 9. Fungsi linier $y = f(x) = a \otimes x$



Gambar 10. Fungsi linier $y = f(x) = b$



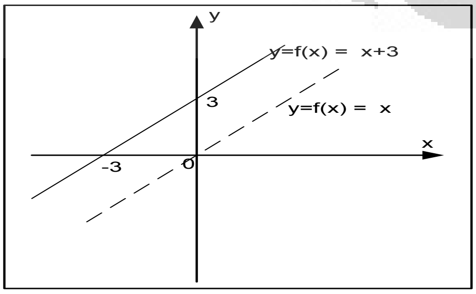
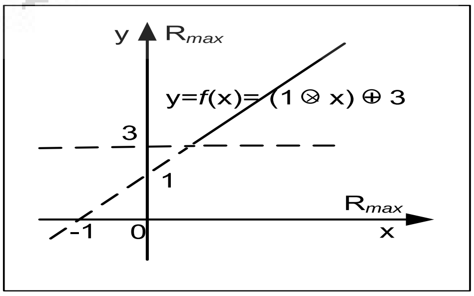
Gambar 11. Fungsi linier
$y = f(x) = a \otimes x$ dan $y = f(x) = b$



Gambar 12. Fungsi afin
$y = f(x) = (a \otimes x) \oplus b$

Contoh 3.2.2.2

Tabel 5. Perbandingan fungsi afin pada aljabar klasik dan aljabar *Max-plus*

No	Operasi pada aljabar klasik	Operasi pada aljabar *Max-plus*
1.	Tentukan grafik fungsi afin $y = f(x) = x + 3$ Selesaian:  **Gambar 13.** Grafik $y = f(x) = x + 3$	Tentukan grafik fungsi afin $y = f(c) = (1 \otimes x) \oplus 3$ Selesaian:  **Gambar 14.** Grafik $y = f(x) = (1 \otimes x) \oplus 3$

Diperhatikan dalam fungsi afin Tabel 5 di atas, diketahui bahwa grafik fungsi linier aljabar klasik diperoleh dengan menggeser fungsi linier $y = mx$ sejauh n satuan searah sumbu y. Pada fungsi afin aljabar *Max-plus* diperoleh dengan menggabungkan fungsi linier $f(x) = a \otimes x$ dan $f(x) = b$ sehingga diperoleh $f(x) = a \otimes x \oplus b$ dan dipilih dari gabungan keduanya yang maksimum.

3.3 Persamaan Afin

Pada subbab ini dibahas tentang persamaan afin dalam aljabar klasik dan aljabar *Max-plus* [2, 5, 6, 10].

3.3.1. Persamaan linier (Afin) pada aljabar klasik

Dari bentuk fungsi afin $y = f(x) = mx + n$, dengan m, n konstanta dan $m \neq 0$, maka pembuat nol fungsi afin tersebut adalah $y = f(x) = 0$, akibatnya $mx + n = 0$. Sedemikian hingga, $mx + n = 0$ adalah merupakan bentuk umum persamaan linier dengan satu peubah. Langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan linier satu peubah sebagai berikut:

1. Kedua ruas persamaan ditambah atau dikurangi dengan bilangan sebesar n.
2. Kedua ruas persamaan dikalikan dengan bilangan sebesar $\frac{1}{m}$ atau dibagi dengan bilangan sebesar m.

Contoh 3.3.1.1
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan linier $3x + 6 = 0$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
& 3x + 6 && = 0 \\
\leftrightarrow\ & 3x + 6 + (-6) && = 0 + (-6) \quad \text{(kedua ruas ditambah dengan -6)} \\
\leftrightarrow\ & 3x + 6 - 6 && = 0 - 6 \\
\leftrightarrow\ & 3x + 0 && = -6 \\
\leftrightarrow\ & 3x && = -6 \\
\leftrightarrow\ & 3x \times \tfrac{1}{3} && = -6 \times \tfrac{1}{3} \text{ (kedua ruas dikalikan } \tfrac{1}{3}\text{)} \\
\leftrightarrow\ & \frac{3}{3}x && = \frac{-6}{3} \\
\leftrightarrow\ & x && = -2.
\end{aligned}
$$

3.3.2. Pertidaksamaan linier (Afin) pada aljabar klasik

Dari bentuk fungsi afin $y = f(x) = mx + n$, dengan m, n konstanta dan $m \neq 0$, maka pembuat tak nol persamaan fungsi afin adalah $y = f(x) \neq 0$, akibatnya $mx + n \neq 0$. Sedemikian hingga pertidaksamaan tersebut yang mungkin adalah menggunakan salah tanda relasi "$<, \leq, >, \geq$". Misalkan $y = f(x) \leq 0$ akibatnya $mx + n \leq 0$, sedemikian hingga $mx + n \leq 0$ merupakan salah satu bentuk pertidaksamaan linier dengan satu peubah. Langkah-langkah dalam menyelesaikan pertidaksamaan linier satu peubah sebagai berikut:

1. Kedua ruas pertidaksamaan ditambah atau dikurangi dengan bilangan sebesar n
2. Kedua ruas pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan sebesar $\frac{1}{m}$ atau dibagi dengan bilangan sebesar m
3. Jika kedua ruas pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan sebesar $-\frac{1}{m}$ atau dibagi dengan bilangan sebesar $-m$, maka tanda pertidaksamaan harus dibalik.

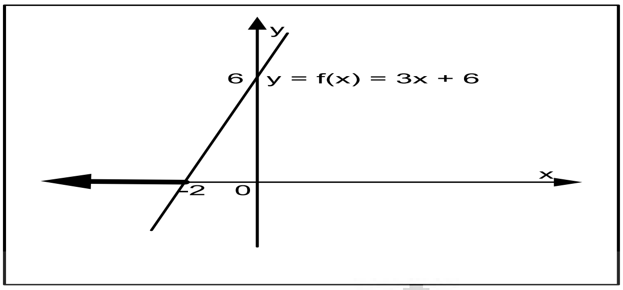
Contoh 3.3.2.1

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidakasamaan linier $3x + 6 \leq 0$

Penyelesaian:

$$
\begin{array}{ll}
3x + 6 & \leq 0 \\
\leftrightarrow 3x + 6 + (-6) & \leq 0 + (-6) \quad \text{(kedua ruas ditambah dengan -6)} \\
\leftrightarrow 3x + 6 - 6 & \leq 0 - 6 \\
\leftrightarrow 3x + 0 & \leq -6 \\
\leftrightarrow 3x & \leq -6 \\
\leftrightarrow 3x \times \frac{1}{3} & \leq -6 \times \frac{1}{3} \text{ (kedua ruas dikalikan } \frac{1}{3}\text{)} \\
\leftrightarrow \dfrac{3}{3}x & \leq \dfrac{-6}{3} \\
\leftrightarrow x & \leq -2.
\end{array}
$$

Dalam gambar grafik fungsi linier diperoleh :



Gambar 15. Grafik pertidaksamaan $3x + 6 \leq 0$

3.3.3. Persamaan afin aljabar *Max-plus*

Definisi 3.3.3.1

Bentuk umum persamaan afin aljabar *Max-plus* adalah :

$a \otimes x \oplus b = a' \otimes x \oplus b'$, untuk setiap $a, a', b, b' \in \mathcal{R}_{max}$ (1)

$a, a', b, b' \in \mathcal{R}_{max}$ terhadap operasi biner $\oplus$ tidak mempunyai invers, sehingga (1) tidak dapat dinyatakan menjadi bentuk $a \otimes x \oplus b = \varepsilon$. Maka untuk menyelesaikan persamaan afin aljabar *Max-plus* kita perlukan teorema berikut.

Teorema 3.3.3.2 [2, 6]

Secara umum selesaian persamaan afin aljabar *Max-plus* (1) adalah sebagai berikut:

a. Jika $\big((a' < a)$ dan $(b < b')\big)$ atau $\big((a < a')$ dan $(b' < b)\big)$, maka (1) mempunyai selesaian unik yaitu: $x = (b \oplus b')\ \phi\ (a \oplus a')$.

b. Jika $a \neq a'$dan $b \neq b'$, dan $\big((a' < a)$ dan $(b < b')\big)$ atau $((a < a'$ dan $b' < b))$ tidak terpenuhi, maka persamaan (1) tidak mempunyai selesaian.

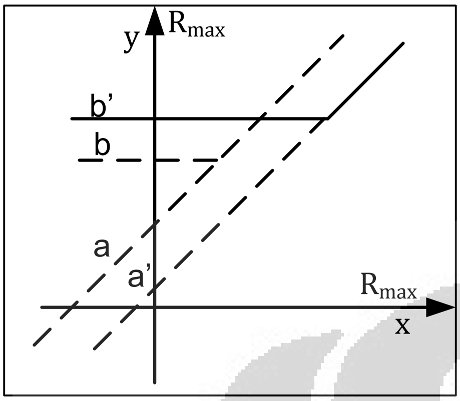
c. Jika $a = a'$ dan $b \neq b'$, maka persamaan (1) mempunyai selesaian $x \geq (b \oplus b')\ \phi\ a)$ dan selesaian tidak unik.

d. Jika $a \neq a'$ dan $b = b'$, maka persamaan (1) mempunyai selesaian $x \leq b\ \phi\ (a \oplus a')$ dan selesaian tidak unik.

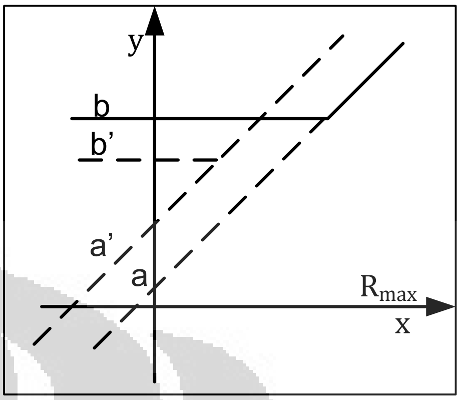
e. Jika $a = a'$ dan $b = b'$, maka persamaan (1) mempunyai selesaian untuk semua $x \in \mathcal{R}$.

Bukti:

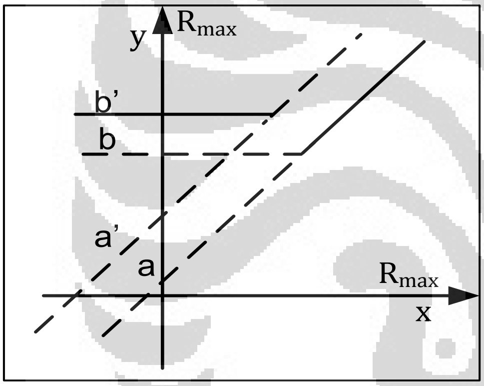
1. Pembuktian selesaian persamaan afin secara geometris:



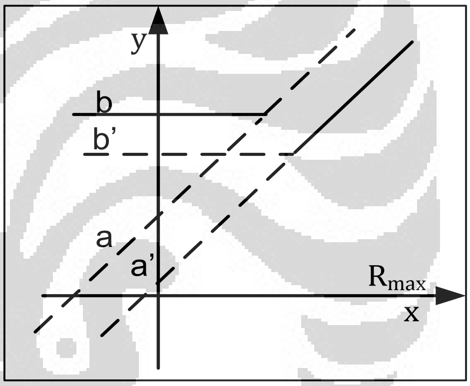
Gambar 16. Teorema 3.3.3.2 (a.1)
Persamaan afin $(a' < a)$dan $(b < b')$



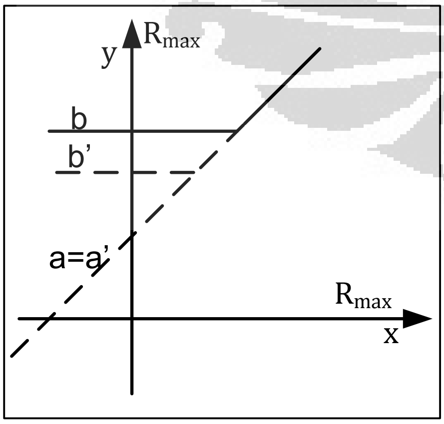
Gambar 17. Teorema 3.3.3.2 (a.2)
Persamaan afin $(a < a')$dan $(b' < b)$



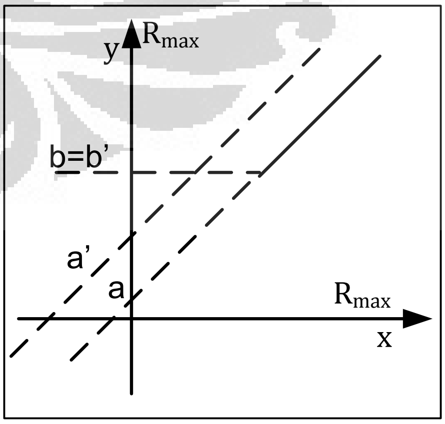
Gambar 18. Teorema 3.3.3.2 (b.1)
Persamaan afin $(a' > a)$dan $(b < b')$



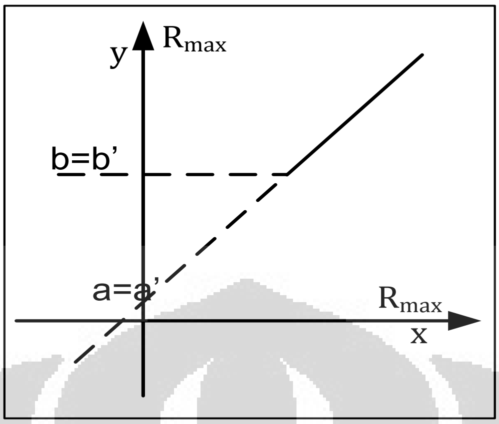
Gambar 19. Teorema 3.3.3.2 (b.2)
Persamaan afin $(a > a')$dan $(b' < b)$



Gambar 20. Teorema 3.3.3.2 (c)
Persamaan afin $(a = a')$dan $(b \neq b')$



Gambar 21. Teorema 3.3.3.2 (d)
Persamaan afin $(a \neq a')$dan $(b = b')$



Gambar 22. Teorema 3.3.3.2 (e)

Persamaan afin $(a = a')$dan $(b = b')$

2. Pembuktian selesaian dari persamaan afin:

a. Jika $(a' < a)$dan $(b < b')$, maka selesaian persamaan (1) adalah unik yaitu $x = (b \oplus b')\ \phi\ (a \oplus a')$. Untuk memperolehnya akan kita tinjau 2 kasus yaitu:

a.1.Kasus pertama persamaan $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x$:

Untuk menyelesaikan persamaan $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x$, terdapat dua subkasus selesaian yaitu:

a.1.1. Selesaian untuk persamaan $a \otimes x = a' \otimes x$. Subkasus ini tidak mempunyai selesaian karena $a' < a$.

a.1.2. Selesaian untuk persamaaan $b = a' \otimes x$. Subkasus ini mempunyai selesaian $x = b \emptyset a'$. (2)

a.2. Kasus kedua persamaan $a \otimes x \oplus b = b'$:

Untuk menyelesaian persamaan $a \otimes x \oplus b = b'$, terdapat dua subkasus yaitu:

a.2.1. Selesaian untuk persamaaan $a \otimes x = b'$. Subkasus ini mempunyai selesaian $x = b' \emptyset a$. (3)

a.2.2. Selesaian untuk persamaaan $b = b'$. Subkasus ini tidak mempunyai selesaian karena $b < b'$.

Selanjutnya, diperhatikan persamaan (2) dan (3). Jika persamaan (2) kita substitusikan ke dalam persamaan (1) maka diperoleh :

i) Ruas kiri :

Diperhatikan persamaan (1) ruas kiri yaitu; $a \otimes x \oplus b$ dan persamaan (2) yaitu ; $x = b \emptyset a$. Jika (2) disubstitusi ke dalam (1) akan diperoleh :

$(a \otimes b \emptyset a') \oplus b = max\ (a + b - a', b) = max\ (a - a' + b, b)$.

ii) Ruas kanan :

Diperhatikan persamaan (1) ruas kanan yaitu; $a' \otimes x \oplus b'$ dan bentuk (2) yaitu; $x = b \emptyset a'$. Jika (2) disubstitusi ke dalam (1) akan diperoleh :

$(a' \otimes b \emptyset a') \oplus b' = max\ (a' + b - a', b') = max\ (b\ ,\ b') = b'$. Dimana bahwa dalam (1) diketahui $b < b'$, maka hasil ruas kiri akan memberikan selesaian yang sama dengan ruas kanan yaitu: $max\ (a - a' + b, b) = b'$. Dengan kata lain $max\ (a - a' + b, b) = max\ (a - a' + b, b) = b'$. Akan tetapi, karena $a' < a,\ \forall\ a, a' \in \mathcal{R}_{max}$ maka $max\ (a - a' + b, b)$ belum tentu selesaiannya selalu sama dengan b', hal ini dikarenakan tidak ada syarat yang menjamin bahwa nilai (a dan a') $< b$. Jadi persamaan (2) yaitu; $x = b \emptyset a'$ bukan merupakan selesaian dari persamaan (1) yaitu; $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x \oplus b'$.

Selanjutnya, jika persamaan (3) kita substitusikan ke dalam persamaan (1) yaitu $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x \oplus b'$, maka diperoleh:

i) Ruas kiri :

Diperhatikan persamaaan (1) ruas kiri yaitu; $a \otimes x \oplus b$ dan persamaan (3) yaitu; $x = b' \emptyset a$. Jika (3) disubstitusi ke dalam (1) ruas kiri diperoleh :

$(a \otimes b' \emptyset a) \oplus b = max\ (a + b' - a, b) = max\ (a - a + b', b) = max\ (b', b) = b'$.

ii) Ruas kanan :

Diperhatikan persamaan (1) ruas kanan yaitu; $a'x \oplus b'$ dan persamaan (3) yaitu; $x = b' \emptyset a$. Jika (3) disubstitusi ke dalam (1) ruas kiri diperoleh :

$(a' \otimes b' \emptyset a) \oplus b' = max\ (a' + b' - a, b') = max\ (a' - a + b\ ,\ b') = b'$, karena dalam (1) diketahui bahwa $b < b'$. Maka hasil ruas kiri dan ruas kanan memberikan selesaian yang sama yaitu: b'. Dengan kata lain $max\ (a - a + b', b) = max\ (a' - a + b, b') = b'$. Jadi $x = b' \emptyset a = b \oplus b' \emptyset a \oplus a'$, merupakan selesaian dari persamaan (1) yaitu: $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x \oplus b'$, dengan $a' < a$ dan $b < b'$.

Sedangkan untuk pembuktian dengan $a < a'$ dan $b' < b$ pada persamaan (1) yaitu; $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x \oplus b'$ akan memberikan selesaian unik yaitu ; $x = b' \emptyset a$ = $(b \oplus b')\emptyset$ $(a \oplus a'$) dengan langkah – langkah yang sama dengan syarat $a' < a$ dan $b < b'$ di atas.

b. Jika $\neq a', b \neq b'$, dan $\big((a' < a)$ dan $(b < b')\big)$ atau $\big((a < a')$ dan $(b' < b)\big)$ tidak terpenuhi, maka persamaan (1) tidak mempunyai selesaian.

c. Jika $a = a'$ dan $b \neq b'$, maka persamaan (1) mempunyai selesaian $x \geq (b \oplus b)\ \phi\ a)$ dan selesaian tidak unik. Dalam memperoleh selesian (1) kita tinjau 2 kasus yaitu :

c.1. Kasus pertama persamaan $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x$:

Untuk menyelesaikan persamaan $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x$, dengan syarat $a' \otimes x \geq b'$ atau $x \geq b' \phi\ a'$, terdapat dua subkasus selesaian yaitu:

c.1.1. Selesaian untuk persamaan $a \otimes x = a' \otimes x$, dengan syarat $a \otimes x \geq b$ atau $x \geq b\ \phi\ a$ dengan $a' = a$. Karena $a' = a$ subkasus pertama mempunyai selesaian yang merupakan irisan dari x dengan $x \geq b\ \phi\ a$, untuk setiap $x \in \mathcal{R}_{max}$ yaitu daerah yang dibatasi oleh $x \geq b\ \phi\ a$.

c.1.2. Selesaian untuk persamaaan $b = a' \otimes x$, pada subkasus kedua mempunyai selesaian dengan $x = b \emptyset a'$. (4)

Selanjutnya, bila persamaan (4) yaitu; $x = b \emptyset a'$ disubstitusikan ke dalam persamaan (1) yaitu; $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x \oplus b'$, akan diperoleh:

i) Ruas kiri:

Diperhatikan persamaan (1) ruas kiri yaitu; $a \otimes x \oplus b$ dan persamaan (4) yaitu; $x = b \emptyset a'$. Jika (4) disubstitusi ke dalam (1) maka diperoleh :

$(a \otimes b \emptyset a') \oplus b =\ max\ (a + b - a', b)= max\ (a - a' + b, b) =\ b.$

ii) Ruas kanan :

Diperhatikan persamaan (1) ruas kanan yaitu; $a' \otimes x \oplus b'$ dan persamaan (4) yaitu; $x = b \emptyset a'$. Jika (4) disubstitusi ke dalam (1), maka diperoleh :

$(a'\otimes b \emptyset a') \oplus b' = max\ (a' + b - a', b') = max\ (b, b') = b'$, karena dalam (1) diketahui bahwa $b < b'$. Maka diperoleh selesaian ruas kiri dan ruas kanan tidak sama. Sedemikian sehingga (1), dengan $b < b'$ dan $a = a'$ mempunyai dalam kasus ini adalah $x \geq b'\phi\ a$ atau $x \geq (b \oplus b')\phi\ a$.

c.2. Kasus kedua persamaan $a\otimes x \oplus b = b'$

Untuk menyelesaikan persamaan $a\otimes x \oplus b = b'$, dengan syarat $b' \geq a'\otimes x$ atau $x \leq b'\phi\ a'$ ditinjau dua subkasus yaitu:

c.2.1. Subkasus pertama adalah selesaian untuk persamaaan $ax = b'$ dengan syarat $a\otimes x \geq b$ atau $x \geq b\ \phi\ a$, maka selesaian dari persamaan sub-kasus pertama adalah irisan antara $x = b'\phi\ a$ dengan $x \geq b\ \phi\ a$ yaitu $x = b'\phi\ a$.

c.2.2. Subkasus kedua adalah selesaian untuk persamaaan $b = b'$, karena diketahui bahwa $b \neq b'$, maka subkasus kedua menjadi penyataan yang tidak benar.

Berdasarkan kedua subkasus di atas, selesaian persamaan (1) dengan syarat $a = a'$ dan $b < b'$ adalah irisan dari $x \leq b'\ \phi\ a'$ dan $x = b'\ \phi\ a$ yaitu $x \geq b'\ \phi\ a$ atau $x \geq (b \oplus b')\ \phi\ a$.

Sedangkan untuk pembuktian dengan $a = a'$ dan $b > b'$ pada persamaan (1) $a\otimes x \oplus b = a'\otimes x \oplus b'$ akan memberikan selesaian unik yaitu $x \geq (b \oplus b')\ \phi\ a$, dengan langkah – langkah yang sama dengan syarat $a = a'$ dan $b < b'$.

d. Jika $(a < a'\ dan\ b = b')$, maka selesaian persamaan (1) adalah $x \leq (b \oplus b')\phi\ a$. Untuk memperoleh selesaian persamaan (1) yaitu; $a\otimes x \oplus b = a'\otimes x \oplus b'$ ditinjau dalam dua kasus:

d.1. Kasus pertama persamaan $a\otimes x \oplus b = a'\otimes x$;

Untuk menyelesaikan persamaan $a\otimes x \oplus b = a'\otimes x$, dengan syarat $a'x \geq b'$ atau $x \geq b'\phi\ a'$, terdapat dua subkasus penyelesian yaitu:

d.1.1. Selesaian untuk persamaan $a \otimes x = a' \otimes x$, dengan syarat $a \otimes x \geq b$ atau $x \geq b\ \phi\ a$ dengan $a' < a$. Karena $a' < a$ subkasus pertama ti-dak mempunyai selesaian.

d.1.2. Selesaian untuk persamaaan $b = a' \otimes x,$ dengan syarat $a \otimes x \leq b$ atau $x \leq b \,\phi\, a,$ pada subkasus kedua adalah irisan antara $x = b \,\emptyset\, a'$ dengan $x \leq b \,\phi\, a$ yaitu $x = b \,\emptyset\, a'$. Dengan demikian pada kasus pertama mempunyai selesaian $x = b \,\emptyset\, a'$.

d.2. Kasus kedua persamaan $a \otimes x \oplus b = b'$.

Untuk menyelesaian persamaan $a \otimes x \oplus b = b'$, dengan syarat $b' \geq a' \otimes x$ atau $x \leq b' \phi\, a'$, ditinjau dalam dua subkasus yaitu:

d.2.1. Subkasus pertama, selesaian untuk $a \otimes x = b'$maka $x = b' \,\phi\, a$ (5)

d.2.2. Subkasus kedua, selesaian untuk $b = b'$, dengan syarat $a \otimes x \leq b$. Diketahui bahwa $b = b'$, maka subkasus kedua selesian persamaan tersebut adalah irisan antara x dengan $x \leq b \,\phi\, a$ untuk setiap $x \in \mathcal{R}_{max}$ adalah $x \leq b \,\phi\, a$.

Selanjutnya, bila persamaan $x = b' \,\emptyset\, a$ disubtitusikan ke dalam persamaan (1) yaitu: $a \otimes x \oplus b = a' \otimes x \oplus b'$, maka diperoleh:

i) Ruas kiri :

Diperhatikan persamaan (1) ruas kiri yaitu; $a \otimes x \oplus b$ dan persamaan (5) yaitu; $x = b' \emptyset\, a$. Jika (5) disubstitusi ke dalam (1) diperoleh:

$(a \otimes b' \,\emptyset\, a) \oplus b =\ max\,(a + b' - a, b)= max\,(b', b) =\ b'$.

ii) Ruas kanan :

Diperhatikan persamaan (1) ruas kanan yaitu; $a' \otimes x \oplus b'$ dan persamaan (5) yaitu; $x = b' \emptyset\, a$. Jika (5) disubstitusi ke dalam (1) diperoleh :

$(a' \otimes b' \,\emptyset\, a) \oplus b' = max\,(a' + b' - a, b') = (a' - a + b'\,,\ b') \neq b'$, hal ini dikarenakan $a < a'$ untuk setiap $a, a' \in \mathcal{R}_{max}$.

Dengan demikian diperoleh selesaian ruas kiri dan ruas kanan tidak sama. Karena $a < a'$ dan $b = b'$ maka selesaian persamaan (1) dalam kasus kedua adalah $x \leq b' \phi\, a'$ atau $x \leq b \,\phi\, (a \oplus a')$.

Sedangkan untuk $a > a'$ dan $b = b'$ pada persamaan (1) mempunyai selesaian $x \leq b \,\phi (a \oplus a')$, dengan langkah – langkah yang sama dengan syarat $a < a'$ dan $b = b'$.

Contoh 3.3.3.3

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan:

a. $4 \otimes x \oplus 2 = 1 \otimes x \oplus 6$

Persamaan afin aljabar *Max-plus* di atas memenuhi Teorema 3.3.3.2 bagian a, maka selesaiannya adalah $x = (2 \oplus 6)\ \phi (4 \oplus 1) \rightarrow x = 6\ \phi\ 4 \ \rightarrow x = 6 - \ 4 = 2.$

b. $5 \otimes x \oplus 2 = 5 \otimes x \oplus 7$

Persamaan afin aljabar *Max-plus* di atas memenuhi Teorema 3.3.3.2 bagian c, maka selesaiannya adalah $x \geq (2 \oplus 7)\phi\ 5 \rightarrow x \geq 7\phi\ 5 \ \rightarrow x \geq 7 - \ 5 \ \rightarrow x \geq 2.$

Contoh 3.3.3.4

Tabel 6. Perbandingan persamaan linier pada aljabar klasik dan persamaan afin aljabar *Max-plus*

No	**Operasi pada aljabar klasik**	**Operasi pada aljabar *Max-plus***
1.	Tentukan nilai x yang memenuhi persamaaa linier berikut: a. $4x - 8 = 0$ Penyelesaian: $4x - 8 \quad = 0$ $4x - 8 + 8 \quad = 0 + 8$ $4x \quad = 8$ $4x \times \frac{1}{4} \quad = 8 \times \frac{1}{4}$ $\frac{4}{4}x \quad = \frac{8}{4}$ $x \quad = 2$ Nilai x dari persamaan $4x - 8 = 0$ adalah 2.	Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan: a. $2 \otimes x \oplus 4 = 3 \otimes x \oplus 2$ Penyelesaian: Persamaan afin aljabar *Max-plus* di atas memenuhi teorema 3.3.3.2 bagian a, maka $x = (4 \oplus 2)\phi$ $(2 \oplus 3) = 4\ \phi\ 3 = 4 - 3.$ Jadi nilai yang memenuhi persamaan adalah $x = 1.$

	b. $4x - 8 \geq 0$ Penyelesaian: $4x - 8 \quad \geq 0$ $4x - 8 + 8 \quad \geq 0 + 8$ $4x \quad \geq 8$ $4x \times \frac{1}{4} \quad \geq 8 \times \frac{1}{4}$ $\frac{4}{4}x \quad \geq \frac{8}{4}$ $x \quad \geq 2$ Nilai x dari persamaan $4x - 8 \geq 0$ adalah $x \geq 2$.	b. $2 \otimes x \oplus 8 = 3 \otimes x \oplus 8$ Penyelesaian: Persamaan afin aljabar *Max-plus* diatas memenuhi teorema 3.3.3.2 bagian d, maka $x \leq 8\phi\,(2 \oplus 3)$ $\rightarrow x \leq 8\phi\, 3$ $\rightarrow x \leq 8 - 3$ $\rightarrow x \leq 5$. Jadi selesaiannya adalah $x \leq 5$.

3.4 Sistem Persamaan Linier

Pada subbab ini dibahas tentang sistem persamaan linier dalam aljabar klasik [1] dan aljabar *Max-plus* [2, 5, 6, 10, 12].

3.4.1 Sistem Persamaan Linier [SPL] Aljabar Klasik

Sistem persamaan linier dalam aljabar klasik dua peubah (variabel) secara umum dituliskan sebagai berikut:

$a_1x + b_1y = c_1$ (a_1, b_1 keduanya tidak nol)

$a_2x + b_2y = c_2$ (a_2, b_2 keduanya tidak nol)

Kedua sistem persamaan linier di atas dapat diilustrasikan dalam grafik kartesius yang berbentuk garis; sebut ℓ_1 dan ℓ_2. Selesaian sistem persamaan linier ada tiga, yang berpadanan dengan titik – titik potong ℓ_1 dan ℓ_2.

1. Jika garis ℓ_1 dan ℓ_2 berpotongan di satu titik $\left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right)$, maka sistem persamaan linier mempunyai selesaian tunggal.
2. Jika garis ℓ_1 dan ℓ_2 berhimpit dibanyak titik $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\right)$, maka sistem peramaan linier mempunyai selesaian banyak.
3. Jika garis ℓ_1 dan ℓ_2 saling sejajar $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\right)$ maka sistem persamaan linier tidak mempunyai selesaian.

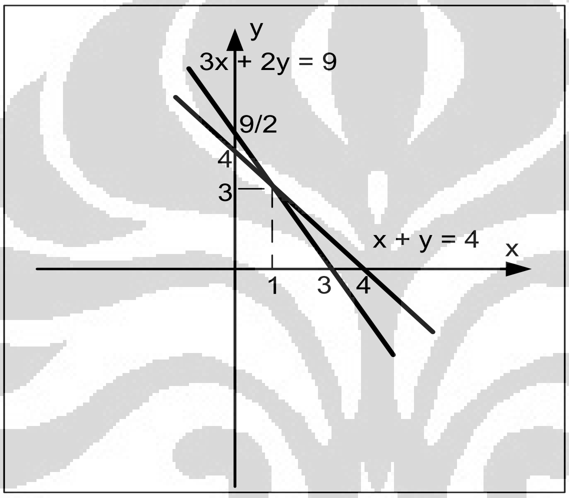
Contoh 3.4.1.1

Tentukan nilai x dan y yang memenuhi SPL berikut:

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 9 & (1) \\ 2x + y = 5 & (2) \end{cases}$

Penyelesaian:

Dengan mensubtitusikan (2) ke dalam (1) diperoleh $x = 1$ dan $y = 3$. Pada grafik kartesius kedua garis berpotongan pada titik $x = 1$ dan $y = 3$, yaitu:



Gambar 23. Grafik SPL $3x + 2y = 9$ dan $2x + y = 5$

3.4.2 Sistem Persamaan Linier aljabar *Max-plus* Bentuk $\boldsymbol{A \otimes x \oplus b = P \otimes x \oplus q}$

Sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* secara umum berbentuk $A \otimes x \oplus b = P \otimes x \oplus q$. Di samping bentuk umum, ada dua bentuk khusus sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* yang dibahas yaitu $x = A \otimes x \oplus b$ dan $A \otimes x = b$. Sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* $A \otimes x \oplus b = P \otimes x \oplus q$, dengan A dan P adalah matriks berukuran $n \times n$ dan b dan q adalah sebuah matriks berukuran $n \times 1$. Dalam mencari selesaiannya sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* bentuk umum diubah ke dalam bentuk kanonik.

Definisi 3.4.2.1

Sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* $A \otimes x \oplus b = P \otimes x \oplus q$ dikatakan berbentuk kanonik jika $A, P, b\ dan\ q$ memenuhi:

1. Jika $a_{ij} < p_{ij}$, maka $a_{ij} = \varepsilon$ dan jika $a_{ij} > p_{ij}$, maka $p_{ij} = \varepsilon$.

2. Jika $b_i < q_i$, maka $b_i = \varepsilon$ dan jika $b_i > q_i$, maka $q_i = \varepsilon$.

Bentuk umum sistem persamaan linier aljabar *Max- plus* $A \otimes x \oplus b = P \otimes x \oplus q$ untuk menentukan selesaiannya diubah ke dalam bentuk kanonik dengan cara mengubah:

- Jika $a_{ij} < p_{ij}$, maka $a_{ij} = \varepsilon$ dan jika $a_{ij} > p_{ij}$ maka $p_{ij} = \varepsilon$.
- Jika $b_i < q_i$, maka $b_i = \varepsilon$ dan jika $b_i > q_i$, maka $q_i = \varepsilon$.

Selanjutnya, sistem persamaan linier aljabar *Max- plus* $A \otimes x \oplus b = P \otimes x \oplus q$ yang telah diubah kedalam bentuk kanonik dapat diselesaikan dengan cara seperti menyelesaikan sistem persamaan linier dalam aljabar klasik. Selesaian dalam sistem persamaan linier aljabar *Max- plus* $A \otimes x \oplus b = P \otimes x \oplus q$ mempunyai tiga kemungkinan:

1. Tidak terdapat selesaian.
2. Mempunyai selesaian yang tunggal.
3. Mempunyai selesaian yang banyak.

Akan tetapi sistem persamaan linier aljabar *Max- plus* $A \otimes x \oplus b = P \otimes x \oplus q$, belum dapat ditentukan jenis selesaianya.

Contoh 3.4.2.2

Selesaikan sistem persamaan linier aljabar *Max- plus* berikut :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Sistem persamaan di atas diubah menjadi bentuk kanonik yaitu:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon \otimes x_1) \oplus (3 \otimes x_2) \\ (\varepsilon \otimes x_1) \oplus (3 \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5 \otimes x_1) \oplus (\varepsilon \otimes x_2) \\ (2 \otimes x_1) \oplus (\varepsilon \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \max(\varepsilon \otimes x_1, 3 \otimes x_2) \\ \max(\varepsilon \otimes x_1, 3 \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(5 \otimes x_1, \varepsilon \otimes x_2) \\ \max(2 \otimes x_1, \varepsilon \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \otimes x_2 \\ 3 \otimes x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \otimes x_1 \\ 2 \otimes x_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh dua persamaan afin yaitu:

a). $3 \otimes x_2 = 5 \otimes x_1 \oplus 3$

b). $3 \otimes x_2 \oplus 1 = 2 \otimes x_1 \oplus 1$

Dengan mensubtitusikan persamaan afin (a) ke dalam persamaan afin (b) diperoleh persamaan afin yang baru yaitu: $5 \otimes x_1 \oplus 3 = 2 \otimes x_1 \oplus 1$. Berdasarkan Teorema

3.3.3.2 (b), persamaan afin $5 \otimes x_1 \oplus 3 = 2 \otimes x_1 \oplus 1$ tidak menpunyai selesaian, karena tidak memenuhi salah satu dari persamaan afin yang mempunyai selesaian. Dengan demikian sistem persamaan (1) tidak mempunyai selesaian.

Contoh 3.4.2.3

Selesaikan sistem persamaan linier aljabar *Max- plus* berikut;

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Sistem persamaan di atas diubah menjadi bentuk kanonik yaitu:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon \otimes x_1) \oplus (3 \otimes x_2) \\ (\varepsilon \otimes x_1) \oplus (3 \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5 \otimes x_1) \oplus (\varepsilon \otimes x_2) \\ (2 \otimes x_1) \oplus (\varepsilon \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \max(\varepsilon \otimes x_1, 3 \otimes x_2) \\ \max(\varepsilon \otimes x_1, 3 \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(5 \otimes x_1, \varepsilon \otimes x_2) \\ \max(2 \otimes x_1, \varepsilon \otimes x_2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \otimes x_2 \\ 3 \otimes x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \otimes x_1 \\ 2 \otimes x_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh dua persamaan afin yaitu:

a). $3 \otimes x_2 \oplus 1 = 5 \otimes x_1$

b). $3 \otimes x_2 = 2 \otimes x_1 \oplus 3$

Dengan mensubtitusikan persamaan afin (b) ke dalam persamaan afin (a) diperoleh persamaan afin yang baru yaitu: $2 \otimes x_1 \oplus 3 = 5 \otimes x_1$. Berdasarkan Teorema 3.3.3.2 (a) maka selesaian persamaan afin $2 \otimes x_1 \oplus 3 = 5 \otimes x_1$ adalah $x_1 = (b \oplus b')\phi\ (a \oplus a')$ yaitu: $x_1 = (3 \oplus \varepsilon)\ \phi\ (5 \oplus 2)$ = -2. Selanjutnya hasil selesaian dari $x_1 = -2$ disubtitusikan ke (b) diperoleh $x_2 = e$. Sedemikian sehingga selesaian sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* (2) adalah $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ e \end{pmatrix}$.

Contoh 3.4.2.4

Tentukan selesaian dari sistem persamaan linier aljabar *Max- plus* berikut adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Sistem persamaan linier di atas diubah menjadi bentuk kanonik yaitu:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}(\varepsilon \otimes x_1) \oplus (5 \otimes x_2) \\ (\varepsilon \otimes x_1) \oplus (5 \otimes x_2)\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}4 \\ \varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(4 \otimes x_1) \oplus (\varepsilon \otimes x_2) \\ (4 \otimes x_1) \oplus (\varepsilon \otimes x_2)\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}\varepsilon \\ 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\max\,(\varepsilon \otimes x_1, 5 \otimes x_2) \\ \max\,(\varepsilon \otimes x_1\,, 5 \otimes x_2)\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}4 \\ \varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\max\,(4 \otimes x_1\,, \varepsilon \otimes x_2) \\ \max\,(4 \otimes x_1\,, \varepsilon \otimes x_2)\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}\varepsilon \\ 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 \otimes x_2 \\ 5 \otimes x_2\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}4 \\ \varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 \otimes x_1 \\ 4 \otimes x_1\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}\varepsilon \\ 3\end{pmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh dua persamaan afin yaitu:

a). $5 \otimes x_2 \; \oplus 4 \quad = 4 \otimes x_1$

b). $5 \otimes x_2 \quad = 4 \otimes x_1 \oplus 1$

Dengan mensubtitusikan persamaan afin (a) ke dalam persamaan afin (b) diperoleh persamaan afin yang baru yaitu: $5 \otimes x_2$ =$5 \otimes x_2 \; \oplus 4$. Berdasarkan Teorema 3.3.3.2 (c) maka selesaian persamaan afin $5 \otimes x_2$ =$5 \otimes x_2 \; \oplus 4$ adalah $x_2 \geq (b \oplus b')\ \phi\ a)$ yaitu: $x_2 \geq (\varepsilon \oplus 4)\ \phi\ 5) \rightarrow x_2 \geq -1$. Selanjutnya hasil selesaian dari $x_2 \geq -1$ disubtitusikan ke (b) diperoleh $x_1 \geq e$. Sedemikan sehingga selesaian sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* (3) adalah $\left\{\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \middle| x_2 \geq -1 \;\wedge\; x_1 \geq e\right\}$.

3.4.3 Sistem Persamaan Linier aljabar *Max-plus* Bentuk $\boldsymbol{x = A \otimes x \oplus b}$

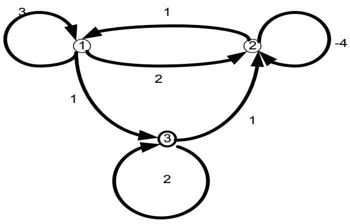
Untuk mencari selesaian sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* bentuk $x = A \otimes x \oplus b$. Pandang bahwa A adalah matriks persegi yang berukuran $n \times n$ dan b adalah matriks kolom yang berukuran $n \times 1$. Selesaian di atas erat kaitanya dengan bentuk graf dari suatu matriks. Bentuk graf dimaksud adalah graf preseden yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.4.3.1.

Diberikan $A \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}$. Graf preseden matriks A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (V, E)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $E = \{(j, i) \mid a_{ij} \neq \varepsilon\}$.

Contoh 3.4.3.2

Diberikan $A = \begin{pmatrix}3 & 1 & \varepsilon \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 2\end{pmatrix}$, graf preseden dari matriks A adalah graf berarah berbobot $G(A) = (V, E)$ dengan $V = \{1, 2, 3\}$ dan $E = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,1), (2,2)(3,2), (3,3)\}$. Bila disajikan dalam gambar adalah sebagai berikut:



Gambar 24. Graf $G(A) = (V, E)$

Teorema 3.4.3.3 [2, 5, 12]

Diberikan $A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$. Jika hanya ada sirkuit dengan bobot nonpositif di $G(A)$, maka selesaian untuk sistem persamaan linier *Aljabar Max-plus* bentuk $x = A \otimes x \oplus b$ adalah $x = A^* \otimes b$, dengan $A^* = e \oplus A \oplus A^{\otimes^2} \oplus ... \oplus A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus ...$. Lebih lanjut jika semua sirkuit $G(A)$ berbobot negatif, maka selesaian sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* bentuk $x = A \otimes x \oplus b$ adalah tunggal.

Bukti:

Eksistensi dari $x = A^* \otimes b$

a. Keberadaan dari $x = A^* \otimes b$.

1. Elemen- elemen A^n adalah merupakan bobot maksimum dari semua lintasan dengan panjang n yang menghubungkan simpul j ke simpul i.
2. $A^* = e \oplus A \oplus A^{\otimes^2} \oplus ... \oplus A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus ...$, maka $(A^*)_{ij}$ adalah bobot maksimum dari semua lintasan yang mungkin, yang menghubungkan simpul j ke simpul i.
3. $(A^*)_{ij}$ ada jika dan hanya jika tidak ada komponen yang terhubung secara kuat di $G(A)$ yang mempunyai sirkuit dengan bobot positif.

Bukti:

(→) Andaikan ada komponen yang terhubung kuat di $G(A)$yang mempunyai sirkuit dengan bobot positif.

Misalkan: Sirkuit $i_1 \to i_2 \to i_k \to i_1$ mempunyai bobot $+a$ artinya $\left(A^{\otimes^k}\right)_{i_1 i_1}$ mempunyai bobot minimal$+a$. $\left(A^{\otimes^{2k}}\right)_{i_1 i_1}$ mempunyai minimal bobot $+2a$. $\left(A^{\otimes^{nk}}\right)_{i_1 i_1}$ mempunyai bobot minimal $+na$. Akibatnya $(A^*)_{i_1 i_1}$ tidak ada, karena komponen $\left(A^{\otimes^{nk}}\right)_{i_1 i_1}$ makin besar ketika $n \to \infty$. Hal ini kontradiksi dengan $(A^*)_{ij}$ ada. Jadi pengandaian salah, haruslah tidak ada komponen yang terhubung kuat di $G(A)$ yang mempunyai sirkuit dengan bobot positif.

(←) Andaikan $(A^*)_{ij}$ tak ada. Maka $(A^*)_{ij}$ tidak mempunyai lintasan yang berbobot maksimum. Maka bobot lintasan dari simpul j ke simpul i semakin besar dengan semakin panjangnya lintasan. Sedemikan hingga, karena bobot lintasan semakin besar maka bobot sirkuit $i \rightarrow i$ atau $j \rightarrow j$ juga semakin besar. Jadi ada sirkuit dengan bobot positif, maka kontradiksi. Sehingga pengadaian salah, haruslah $(A^*)_{ij}$ ada. Berdasarkan Teorema 3.4.3.3, maka syarat perlu dan syarat cukup, keberadaan $A^*\otimes b$ terpenuhi. Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $x = A^*\otimes b$ adalah selesaian dari $x = A\otimes x\ b$.

$x \quad = A\otimes x \oplus b = A \otimes (A^*\otimes b)\oplus b = A \otimes A^*\otimes b \oplus e\otimes b$

$= (A \otimes A^* \oplus e)\otimes b$

$= (A \otimes (e\oplus A\oplus A^{\otimes^2}\oplus \ldots \oplus A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus \ldots) \oplus e)\otimes b$

$= (A \otimes e\oplus A^{\otimes^2}\oplus \ldots \oplus A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus \ldots) \oplus e)\otimes b$

$= (A\oplus A^{\otimes^2}\oplus \ldots \oplus A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus \ldots \oplus e)\otimes b$

$= (e\oplus A^{\otimes^2}\oplus \ldots \oplus A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n+1}} \oplus \ldots) \otimes b$

$= A^*\otimes b$

b. Ketunggalan selesaian dari $x = A^* \otimes b$

Untuk Menunjukan ketunggalan selesaian dari persamaan $x = A \otimes x \oplus b$. Misalkan x adalah selesaian $x = A \otimes x \oplus b$. Subtitusikan x kedalam $A \otimes x \oplus b$, yaitu:

$x \quad = A \otimes x \oplus b = A \otimes (A \otimes x \oplus b) \oplus b$

$= A \otimes A \otimes x \oplus A \otimes b \oplus b$

$= A^{\otimes^2} \otimes x \oplus A \otimes b \oplus b$ (bila dilakukan subtitusi nilai x secara terus menerus, akan diperoleh);

$= A^{\otimes^n} \otimes x \oplus A^{\otimes^{n-1}} \otimes b \oplus \ldots . \oplus A^{\otimes^2} \otimes b \oplus A \otimes b \oplus b$

$= \oplus_{l=0}^{n-1} (A^{\otimes^l} \otimes b) \oplus (A^{\otimes^n} \otimes x)$ (b.1)

Elemen- elemen $A^{\otimes^n}$ adalah bobot maksimum dari lintasan dengan panjang n. Untuk n cukup besar, setiap lintasan mengandung satu atau lebih sirkuit elementer sebagai sublintasan. Jika $n \to \infty$ banyaknya sirkuit elemeter yang terjadi menuju ∞. Karena sirkuit di $G(A)$ mempunyai bobot negatif, maka elemen-elemen $A^{\otimes^n} \to \varepsilon$ untuk $n \to \infty$, yaitu:

$$A^{\otimes^n} \otimes x = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

Jadi, untuk $n \to \infty$ persamaan (b.1) menjadi $= A^* \otimes b$, dengan demikian :

$(A^{\otimes^l} \otimes b) = (A^{\otimes^l}) \otimes b = A^* \otimes b.$

$= (e \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^{n-1} \oplus \dots) \otimes b$

$= A^* \otimes b$

$= x$ (terbukti)

Contoh 3.4.3.4

Tentukan penyelesain dari sistem persamaan linier aljabar max-plus $x = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \otimes x \oplus \begin{pmatrix} e \\ 2 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} x &= (e \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^{n-1} \oplus \dots) \otimes b) \\ &= \left(\begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \oplus \dots \right) \otimes \begin{pmatrix} e \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 2 \\ -3 & e \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e \oplus 4 \\ e \oplus 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Jadi selesaian $x = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \otimes x \oplus \begin{pmatrix} e \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Teorema 3.4.3.5 [2, 10, 12]

Diberikan $A \in \mathcal{R}_{max}^{n \times n}$. Jika semua sirkuit dalam $G(A)$ mempunyai bobot nonpositif, maka $A^* = e \oplus A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes^{n-1}}$.

Bukti:

Karena matriks A berdimensi $n \times n$ maka banyak simpul dari graf $G(A)$ adalah n. Sehingga semua lintasan dengan panjang $l \geq n$ tersusun dari k sirkuit dengan jumlah panjang semua sirkuit kurang dari l dan ada suatu lintasan dengan panjang kurang dari n. Sehingga untuk setiap $l \geq n$ dan untuk setiap $p, q \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ terdapat $r \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ sehingga:

$(A^{\otimes^l})_{pq} = (A^{\otimes^m})_{pq} + \sum_i^k (A^{\otimes^{t_i}})_{r_i, r_i}$ dengan $0 \leq m \leq n-1$, $1 \leq t_i \leq n$, $1 \leq r_i \leq n$ dan $k = 1, 2, 3, \dots$

Karena semua sirkuit mempunyai bobot nonpositif, maka untuk setiap $l \geq n$ dan untuk setiap $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ berlaku $(A^{\otimes^l})_{ij} \leq (A^{\otimes^m})_{ij}$ dengan $0 \leq m \leq n-1$.

Akibatnya $(A^{\otimes^l})_{ij} \leq A^{\otimes^0} \oplus A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes^{n-1}}$, $\forall\, l \geq n$.

$$A^{\otimes l} \leq e \oplus A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes^{n-1}}, \forall\, l \geq n.$$

Dengan demikian $A^* = e \oplus A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \dots \oplus A^{\otimes^{n-1}}$.

3.4.4 Sistem Persamaan Linier Aljabar *Max-plus* Bentuk $A \otimes x = b$

Sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* $A \otimes x = b$, tidak selalu mempunyai selesaian. Sehingga untuk menentukan selesaian $A \otimes x = b$ dapat diperlemah dengan mendefinisikan beberapa konsep subselesaiannya.

Definisi 3.4.4.1

Diberikan $\bar{\mathcal{R}}_{max}$ merupakan himpunan $\mathcal{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ bersama operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang didefinisikan sama seperti pada $\mathcal{R}_{max}$, serta didefinisikan $-\infty \oplus \infty = \infty$.

Definisi 3.4.4.2

Subselesaian sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* $A \otimes x = b$ adalah x jika memenuhi $A \otimes x \leq b$. Subselesaian selalu ada, yaitu $\hat{x}_j \leq b_i - A_{ij}$, $\forall\, i, j = 1, 2, 3, \dots n$.

Teorema 3.4.4.3

Subselesaian terbesar dari sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* $A \otimes x = b$, dengan A adalah matriks $n \times n$ dan b adalah matriks $n \times 1$ dengan elemen- elemen matriks di $\bar{\mathcal{R}}_{max}$ adalah $e \phi \hat{x} = (e \phi b) \otimes A$. Bila dalam aljabar klasik dapat ditulis menjadi $-\hat{x}_j = \max(-b_i + A_{ij})$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Bukti :

Pandang bahwa:

$$A \otimes x \ \leq b \ \leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_{11} \otimes x_1 \oplus A_{12} \otimes x_2 \oplus \ldots \oplus A_{1n} \otimes x_n \leq b_1 \\ A_{21} \otimes x_1 \oplus A_{22} \otimes x_2 \oplus \ldots \oplus A_{2n} \otimes x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ A_{n1} \otimes x_1 \oplus A_{n2} \otimes x_2 \oplus \ldots \oplus A_{nn} \otimes x_n \leq b_n \end{Bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \{\oplus_j (A_{ij} \otimes x_j) \ \leq b_i, \forall i \text{ dan } x \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

$$\leftrightarrow \{A_{ij} \otimes x_j \ \leq b_i, \ \forall \ i, j \text{ dan } x \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

$$\leftrightarrow \{A_{ij} + \ x_j \ \leq b_i, \forall i, j \text{ dan } x \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

$$\leftrightarrow \{x_j \ \leq \ b_i - A_{ij}, \forall \ i, j \text{ dan } x \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

$$\leftrightarrow \{x_j \ \leq \ min_{\ i}(b_i - A_{ij} \ ), \forall j \text{ dan } x \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

$$\leftrightarrow \{-x_j \ \geq max_i(-b_i + A_{ij} \ ), \forall j \text{ dan } x \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

Jadi subselesaian terbesar dari sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* $A \otimes x = b$ adalah setiap vektor $\hat{x}$ yang komponen- komponennya memenuhi $-\hat{x}_j \geq max_i(-b_i + A_{ij}), \forall \ j$. Jika vektor $x' = (x_1', x_2', \ldots, \ x_n')^t$ didefinisikan dengan $-x_j' \geq max_i(-b_i + A_{ij}) \ \forall j = 1, 2, \ldots, n$. Maka akan diperoleh:

$$\{-x_j' \ \geq max_i\left(-b_i + A_{ij}\right), \forall j\} \leftrightarrow \{x_j' = \ min_{\ i}(b_i - A_{ij} \ ), \forall j \text{ dan } x' \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

$$\leftrightarrow \{x_j' \leq (b_i - A_{ij} \ ), \forall i, j \text{ dan } x' \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

$$\leftrightarrow \{\oplus_j (A_{ij} \otimes x_j') \ \leq b_i, \forall i \text{ dan } x' \in \bar{\mathcal{R}}_{max}\}$$

$$\leftrightarrow \{A \otimes x' \ \leq b\}$$

Jadi vektor $\hat{x}$ tersebut merupakan subselesaian sistem persamaan linier $A \otimes x = b$ Karena $-\hat{x}_j \geq max_i\left(-b_i + A_{ij}\right) = -x_j', \forall j$. Maka $\hat{x}_j \leq x_j' , \forall j,$ akibatnya $\hat{x} \leq x'$. Dalam menentukan subselesaian $A \otimes x = b$, mula – mula dilakukan dengan menghitung $x' = A^t \otimes (-b)$, yang ditunjukkan sebagai berikut:

$$-x' = \begin{pmatrix} -x_1' \\ -x_2' \\ \vdots \\ -x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} max_i(-b_i + A_{i1}) \\ max_i(-b_i + A_{i2}) \\ \vdots \\ max_i(-b_i + A_{in}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} max_i(A_{i1} - b_i) \\ max_i(A_{i2} - b_i) \\ \vdots \\ max_i(A_{in} - b_i) \end{pmatrix}$$

$$-x' = \begin{pmatrix} A_{11} \otimes (-b_1) \oplus A_{21} \otimes (-b_2) \oplus \cdots \oplus A_{m1} \otimes (-b_m) \\ A_{12} \otimes (-b_1) \oplus A_{22} \otimes (-b_2) \oplus \cdots \oplus A_{m2} \otimes (-b_m) \\ \vdots \\ A_{1n} \otimes (-b_1) \oplus A_{2n} \otimes (-b_2) \oplus \cdots \oplus A_{mn} \otimes (-b_m) \end{pmatrix}$$

$$-x' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ \vdots \\ -b_m \end{pmatrix}$$

$$-x' = A^t \otimes (-b)$$

Contoh 3.4.4.4

Tentukan selesaian sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* berikut dengan terlebih dulu menentukan subselesaian terbesarnya.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & e \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Mula-mula dihitung : $-x = A^t \otimes (-b) \rightarrow -x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & e & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \rightarrow$ $-x = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Dengan demikian subselesaian terbesar dari sistem persamaan linier tersebut adalah $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Untuk melihat kesahihan selesaian tersebut, disubtitusikan $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ pada $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & e \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ yaitu:

Akan memberikan hasil $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & e \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$. Maka $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ merupakan selesaian dari sistem persamaan linier Aljabar Max-plus di atas.

Contoh 3.4.4.5

Tentukan selesaian sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* berikut dengan terlebih dulu menentukan subselesaian terbesarnya.

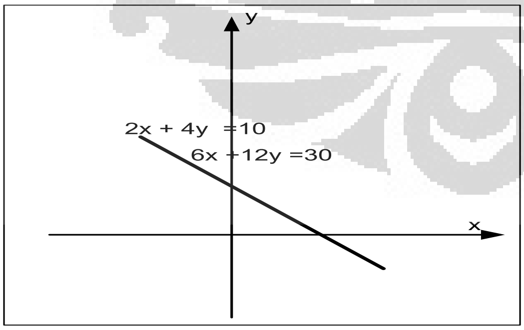
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & e \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

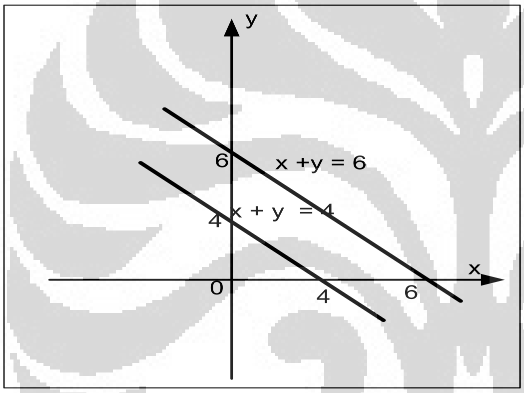
Mula-mula di hitung : $A^t \otimes (-b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & e & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$. Dengan demikian subselesaian terbesar dari sistem persamaan linier tersebut adalah $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Untuk melihat kesahihan selesaian tersebut, disubtitusikan $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ pada $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & e \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ yaitu:

Akan memberikan hasil $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & e \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Maka $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ bukan merupakan selesaian dari sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* di atas tetapi merupakan subselesaian.

Contoh 3.4.4.6

Tabel 7. Perbandingan sistem persamaan linier pada aljabar klasik dan aljabar *Max-plus*

No	Operasi pada aljabar klasik	Operasi pada Aljabar *Max-plus*
1.	Tentukan nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaaa linier berikut: $\begin{cases} 2x + 4y = 10 & (1) \\ 6x + 12y = 30 & (2) \end{cases}$ Penyelesaian: Dengan mensubtitusikan (1) ke (2) diperoleh 0 = 0. Maka SPL tersebut mempunyai selesaian banyak , hal ini karena $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Dalam grafik kartesius kedua garis mempunyai kemiringan yang sama dan berhimpit disemua titik sebagai berikut:  **Gambar 25**. Grafik SPL $2x + 4y = 10$ dan $6x + 12y = 30$	Tentukan nilai x yang memenuhi sistem persamaan linier berikut: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1) Penyelesaian: SPL di atas diubah menjadi bentuk kanonik yaitu: $\begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Dengan demikian diperoleh dua persamaan afin yaitu: a). $2 \otimes x_2 = 5 \otimes x_1 \oplus 3$ b). $2 \otimes x_2 \oplus 1 = 2 \otimes x_1 \oplus 1$ Dengan mensubtitusikan persamaan afin (a) kedalam persamaan afin (b) diperoleh persamaan afin yang baru yaitu: $5 \otimes x_1 \oplus 3 = 2 \otimes x_1 \oplus 1$. Berdasarkan Teorema 3.3.3.2 persamaan afin $5 \otimes x_1 \oplus 3 = 2 \otimes x_1 \oplus 1$ tidak mempunyai selesaian, karena diperoleh persamaa afin dengan $a \neq a'$ dan $b' \neq b$ dan $a > a'$
2.	Tentukan nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaan linier berikut:	

	$\begin{cases} x+y=6 & (1) \\ x+y=4 & (2) \end{cases}$ Penyelesaian: Bentuk sistem persamaan linier di atas tidak mempunyai selesaian, karena $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. Dalam grafik kartesius kedua garis tersebut mempunyai kemiringan yang sama dan saling sejajar sebagai berikut:  **Gambar 26**. Grafik SPL $x+y=6$ dan $x+y=4$	dan $b' < b$ yang tidak memenuhi salah satu dari persamaan afin yang mempunyai selesaian. Sehingga sistem persamaan (1) tidak mempunyai selesaian.

Diperhatikan dari Tabel 7, penyelesaian sistem persamaan linier pada aljabar klasik dua variabel diperoleh dengan menentukan titik potong kedua garis dari persamaan pada grafik kartesius . Akan tetepi hal ini akan lebih sulit dilakukan untuk yang lebih dari dua variabel, sehingga untuk yang lebih dari dua varibel dapat dilakukan dengan eleminasi atau subtitusi. Pada sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* penyelesaiannya dilakukan dengan mengubah kedalam bentuk kanonik, sehingga diperoleh persamaan afin. Penyelesaian persamaan afin aljabar *Max-plus* dapat dilakukan dengan menentukan titik potong kedua ruas persamaan afin.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Diberikan himpunan bilangan real $\mathcal{R} \cup \{-\infty\}$, dinotasikan sebagai $\mathcal{R}_\varepsilon$, yang dilengkapi dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$. Jika diberikan sembarang bilangan x dan y, maka $x \oplus y$ didefinisikan sebagai nilai maksimum dari salah satu dari bilangan tersebut, dan $x \otimes y$ didefinisikan sebagai jumlah dari kedua bilangan tersebut. Sistem matematika $(\mathcal{R}_\varepsilon,\oplus,\otimes)$ disebut aljabar *Max-plus* dan dinotasikan dengan $\mathcal{R}_{max}$. Aljabar *Max-plus* merupakan salah satu struktur aljabar yang semilapangan komutatif idempoten dengan elemen identitas pada operasi penjumlahan $\oplus$ (elemen nol) adalah $\varepsilon = -\infty$ dan pada operasi perkalian $\otimes$ (elemen satu) adalah $e = 0$.

Himpunan matriks persegi berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen di $\mathcal{R}_{max}$ dinotasikan sebagai $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$. Matriks dalam aljabar *Max-plus* yang dilengkapi operasi biner $\oplus$ pada $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ dan satu operasi $\otimes$ dari $\mathcal{R}_{max}$ pada $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$, maka $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan moduloid atas $\mathcal{R}_{max}$. Moduloid yang ditambah satu operasi biner $\otimes$ dari $\mathcal{R}_{max}$ pada $\mathcal{R}_{max}^{n\times n}$ membentuk aljabar idempoten. Pengoperasian matriks dalam aljabar *Max-plus* sama dengan pengoperasian matriks di aljabar klasik, yaitu banyaknya baris dari matriks yang dikali sama dengan banyaknya kolom dari matriks pengalinya. Fungsi linier $y = f(x) = a \otimes x$ dalam aljabar *Max-plus* mempunyai kemiringan 1.

Sistem persamaan linier aljabar *Max-plus* secara umum berbentuk $A\otimes x \oplus b = P\otimes x \oplus q$, untuk menentukan selesaianya diubah ke dalam bentuk kanonik. Untuk menentukan selesaian sistem persamaan linier bentuk $x = A\otimes x \oplus b$ adalah dengan pendekatan graf presenden dan bentuk $A\otimes x = b$, dengan memperlemah dengan subselesaian (subsolusi).

4.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari polinomial karakteristik, nilai eigen dan vektor eigen dalam aljabar *Max-plus* .

DAFTAR PUSTAKA

1. Anton, H, “ Elementary Linear Algebra”, Wiley &Sons, Inc, New York, 2005.
2. Baccelli, F, Cohen, G, Olsder, G.J. dan Quadrat, J.P, “Synchronization and Linearity”, Wiley, New York, 1992.
3. Heidergott, B., “Max-plus Algebra and Queues”, Departement of Economics and Operations Research De boelelan 1105,1081 HV Amsterdam. The Netherlands, 2008.
4. Hungerford, T.W, “Algebra Graduate Texts In Mathematics”, Springer, seattle, Washington, 1980.
5. Kasie G.F, “Max-Plus Algebra”, Master’s Thesis submitted to the faculty of be Virginia Polytechnic Institute and State University, 2009
6. Nasution, A.D.J, “Aljabar *Max- Plus*”, Skripsi, Fakultas MIPA Jurusan Matematika, Universitas Indonesia, Depok, 2004.
7. Olsder.G.J dan Roos.C, “Cramer and Caylay-Hamilton in the Max-Algebra”, Delft University of Technology, Departemen of mathematics and informatics, Netherlands, 1987.
8. Olsder.G.J dan Roos.C, “On the Characteristic equation and Minimal Realizations For Distcrete-event Dynamic Systems”, Delft University of Technology, Departemen of mathematics and informatics, Netherlands, 1990.
9. Rudhito A.M., Wahyuni, S., Suparwanto, A. dan Susilo, F., “Sistem Persamaan Linier iterative Max-plus Interval”, Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan penerapan MIPA ,pp.263-272, UNY Mei 2008.
10. Rudhito, A. M , “ Sistem Linier max-plus waktu –invariant”, Tesis, Universitas Gajah Mada, 2003.
11. Schutter, B., “On the ultimate behavior of the sequence of consecutive powers of a matrix in the max-plus algebra,” *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 307, no. 1–3, pp. 103–117, March 2000.
12. Subiono, “Aljabar Maxplus dan Terapannya”, Diktat Mata kuliah, FMIPA-ITS, Surabaya, 2010