



UNIVERSITAS INDONESIA

**PENGARUH STRATEGI *PULSE VACCINATION* TERHADAP
PENCEGAHAN PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK**

TESIS

**DEWI PUTRIE LESTARI
1006786070**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012**



UNIVERSITAS INDONESIA

**PENGARUH STRATEGI *PULSE VACCINATION* TERHADAP
PENCEGAHAN PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK**

TESIS

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Magister Sains**

**DEWI PUTRIE LESTARI
1006786070**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012**

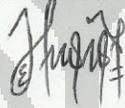
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Dewi Putrie Lestari

NPM : 1006786070

Tanda Tangan :



Tanggal : 11 Januari 2012

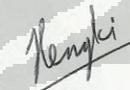
HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama : Dewi Putrie Lestari
NPM : 1006786070
Program Studi : Matematika
Judul Tesis : Pengaruh Strategi *Pulse Vaccination* terhadap Pencegahan Penyebaran Penyakit Campak.

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Hengki Tasman, M.Si. ()

Penguji : Dr. Yudi Satria, M.T. ()

Penguji : Dr.rer.nat Hendri Murfi, M.Kom. ()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 11 Januari 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah rabbil alamin. Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya yang tak berhingga kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini dan meraih gelar Magister Sains di Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Salawat serta salam semoga tercurah kepada junjungan besar Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga dan sahabatnya serta para pengikutnya yang senantiasa istiqomah sampai akhir zaman.

Pada tesis ini penulis menyadari bahwa dalam proses penyusunannya ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, dorongan, dan doa yang tulus dari banyak pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan yang berbahagia ini, dengan penuh rasa syukur dan kerendahan hati, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Hengki Tasman selaku pembimbing penulis yang dengan sabar telah memberikan bimbingan, motivasi, saran, pengarahan dan kemudahan lainnya, sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.
2. Ayahanda dan ibunda tercinta atas segala perhatian, motivasi serta kasih sayang yang tak berhingga yang diberikan kepada penulis (tesis ini penulis persembahkan untuk ayahanda dan ibunda tercinta). Terima kasih telah mendidik penulis dengan segala kesabaran, ketulusan, pengorbanan dan penuh rasa kasih sayang.
3. Seluruh anggota keluarga penulis terutama untuk kedua adik penulis, Dinda Pramesta dan Deka Priyatna.
4. Seluruh dosen Departemen Matematika atas segala ilmu yang penulis peroleh selama menjadi mahasiswa Matematika UI.
5. Nadya Ratna Eva Mutia selaku sahabat penulis tempat berbagi suka dan duka. Terima kasih untuk semua motivasi dan doa yang selama ini diberikan.
6. Iffatul Mardhiyah selaku sahabat penulis yang selalu setia menemani penulis selama penulis menjalani masa-masa kuliah di Departemen Matematika

FMIPA UI. Terima kasih untuk semua bantuannya selama ini serta telah mengisi masa kuliah penulis dengan keceriaan dan cerita seru serta kenangan yang tak terlupakan. Tak lupa juga untuk Saepul Manap, Fata dan Smily.

7. Mba Rusmi, Mba Santi, Mas Salman, Pak Ansori dan seluruh karyawan Departemen Matematika lainnya yang telah banyak memberikan bantuan.
8. Eka Julistira, terima kasih untuk bantuan, perhatian, nasihat, motivasi serta doa yang selama ini diberikan kepada penulis.
9. Wiwin, Oneng, Sitoi, Ita, Ria, Desi selaku sahabat penulis yang selalu setia menemani dan membantu penulis.
10. Teman-teman seperjuangan: Uun (terima kasih atas bantuannya dalam penyelesaian tesis ini), Ilmiyati, Desti, Feni, Nurma, Rifkos, PJ, Deby, Murti, Haryono, Rina, Dilla, Iwan, Ahmad, Martin, Rida, Risda, Siti, Fathin, Lisa, Titi, Tri, Dahlia, Endang, Umar, Supri, Endaryono, Bob, Subian.
11. Deri Irawan, M. Risky, Lidia, Dean, Mey Rijal, Ade Hermawan, M. Bhakti Kumaula dan seluruh mahasiswa Universitas Gunadarma yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan tesis ini.
12. Seluruh sahabat tercinta dosen Gunadarma: Dina indarti (terima kasih atas bantuannya selama ini dan motivasi yang diberikan kepada penulis), Ias, Nola, Murni, Handhi, Aini, Sabri, Onggo, Silvia.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan dalam penulisan tesis ini. Untuk itu, penulis mengharapkan segala kritik dan saran yang membangun dari para pembaca untuk menyempurnakan tesis ini.

Akhir kata, penulis memohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan dalam tesis ini. Semoga tesis ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya, serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat untuk kepentingan orang banyak.

Penulis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dewi Putrie Lestari
NPM : 1006786070
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Tesis

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

**Pengaruh Strategi *Pulse Vaccination* terhadap Pencegahan
Penyebaran Penyakit campak**

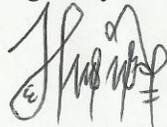
berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 11 Januari 2012

Yang menyatakan



(Dewi Putrie Lestari)

ABSTRAK

Nama : Dewi Putrie Lestari
Program Studi : Matematika
Judul : Pengaruh Strategi *Pulse Vaccination* terhadap Pencegahan Penyebaran Penyakit Campak

Penyakit campak merupakan penyakit menular dan sangat berbahaya. Oleh karena itu, perlu dilakukan suatu upaya untuk mencegah terjadinya penyebaran penyakit ini. Salah satu cara yang efektif untuk mengatasi penyebaran penyakit ini adalah vaksinasi campak. Strategi vaksinasi dibedakan menjadi dua, yaitu strategi *constant vaccination* dan strategi *pulse vaccination*. Tesis ini membahas pengaruh strategi *pulse vaccination* terhadap pencegahan penyebaran penyakit campak dengan menggunakan model epidemik SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*). Berdasarkan pembentukan model tersebut, diperoleh suatu nilai ambang batas epidemik yang digunakan sebagai batasan untuk analisis selanjutnya. Analisa sistem dinamik pada model dengan menentukan solusi periodik bebas infeksi, yang menggunakan pemetaan stroboskopik dan titik tetap. Selain itu, ditentukan kestabilan dari solusi periodik bebas infeksi dengan menggunakan metode linierisasi dan teori Floquet. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kestabilan solusi periodik bebas infeksi bergantung pada pengambilan nilai dari periode *pulse vaccination* (T) yang kestabilannya bersifat lokal. Berdasarkan kriteria kestabilan tersebut diperoleh bahwa strategi *pulse vaccination* akan berhasil mencegah terjadinya penyebaran penyakit campak jika nilai dari $T < T_{\max}$. Untuk mendukung pembahasan teori di dalam penelitian ini, dilakukan simulasi dengan menggunakan software Matlab.

Kata Kunci : penyakit campak, *constant vaccination*, *pulse vaccination*, model epidemik SIR, ambang batas epidemik, sistem dinamik, solusi periodik bebas infeksi, pemetaan stroboskopik, titik tetap, kestabilan, metode linierisasi, teori Floquet.

x+46 halaman; 9 gambar; 2 tabel; 2 lampiran

Daftar Pustaka :14 (1983-2008)

ABSTRACT

Name : Dewi Putrie Lestari
Program Study : Mathematics
Title : The Influence of Pulse Vaccination Strategy on the Prevention of the Spread of Measles

Measles is a highly infectious and dangerous disease. Therefore, there should be an attempt to prevent the spread of this disease. One effective way to tackle the spread of this disease is measles vaccination. Vaccination strategies can be divide into two, that are constant vaccination and pulse vaccination. In this thesis, it is discussed the influence of pulse vaccination strategy against measles prevention of the spread of disease by using the SIR (Susceptible, Infectious, Recovered) epidemic model. Based on the model building, it is obtained an epidemic threshold values that are used as constraints for further analysis. Analysis of dynamical systems on the model by determining the infection-free periodic solution by using a stroboscopic map and fixed point. Furthermore, we determine the stability of infection-free periodic solution by using the linearization method and Floquet theory. The results of this study showed that the stability of infection-free periodic solution depends on the uptake values of pulse vaccination period (T) which is local stability. Based on the stability criteria is obtained that the pulse vaccination strategy will successfully prevent the spread of measles disease if the value of $T < T_{\max}$. To support the discussion of the theory in this study, we perform simulations using the software Matlab.

Key Words : measles, constant vaccination, pulse vaccination, SIR epidemic model, epidemic threshold, dynamical systems, infection-free periodic solution, stroboscopic map, fixed point, stability, linearization methods, Floquet theory.

x+46 pages; 9 pictures; 2 tables; 2 appendices

Bibliography : 14 (1983-2008)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
KATA PENGANTAR	iv
HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR LAMPIRAN	x
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
2. LANDASAN TEORI	3
2.1 Sistem Persamaan Diferensial	4
2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier	5
2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier	5
2.2 Kestimbangan dan Kestabilan	6
2.3 Sistem Dinamik Diskrit	8
2.4 Pemetaan Stroboskopik	10
2.5 Metode Linierisasi dan Teori Floquet	10
3. MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN <i>PULSE VACCINATION</i>	14
3.1 Strategi <i>Pulse Vaccination</i>	14
3.2 Konstruksi Model Epidemik SIR	15
3.3 Nilai ambang batas epidemik	21
3.4 Solusi Periodik Bebas Infeksi	22
3.5 Kestabilan Solusi Periodik Bebas Infeksi	27
3.6 Penentuan Nilai Periode <i>Pulse Vaccination</i>	31
4. SIMULASI MODEL EPIDEMIK SIR	33
5. KESIMPULAN DAN SARAN	40
5.1 Kesimpulan	40
5.2 Saran	41
DAFTAR REFERENSI	42

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1. Dinamika populasi model epidemik SIR tanpa vaksinasi	18
Gambar 3.2. Interval waktu pada strategi <i>pulse vaccination</i>	25
Gambar 4.1. Proporsi individu <i>susceptible</i> berdasarkan <i>pulse vaccination</i> pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 1,25$ tahun	34
Gambar 4.2. Proporsi individu <i>infectious</i> berdasarkan <i>pulse vaccination</i> pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 1,25$ tahun	35
Gambar 4.3. Proporsi individu <i>susceptible</i> berdasarkan <i>pulse vaccination</i> pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 1,5$ tahun	36
Gambar 4.4. Proporsi individu <i>infectious</i> berdasarkan <i>pulse vaccination</i> pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 1,5$ tahun	37
Gambar 4.5. Proporsi individu <i>susceptible</i> berdasarkan <i>pulse vaccination</i> pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 2$ tahun	38
Gambar 4.6. Proporsi individu <i>infectious</i> berdasarkan <i>pulse vaccination</i> pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 2$ tahun	39

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. Parameter model epidemik SIR dengan pengaruh strategi <i>pulse vaccination</i>	17
Tabel 4.1. Nilai parameter pada simulasi model epidemik SIR dengan pengaruh <i>pulse vaccination</i>	33

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 <i>Source Code</i> Simulasi Model Epidemik SIR	44
Lampiran 2 <i>Source Code</i> Fungsi Diff_8.3	46

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit campak adalah penyakit infeksi pada saluran pernapasan yang disebabkan oleh virus *rubeola*. Penyakit ini juga sering disebut dengan penyakit *rubeola*. Penyakit campak biasanya menyerang balita dan anak-anak. Gejala penyakit ini antara lain adalah demam, batuk, pilek, radang pada saluran pernafasan, nyeri otot, mata merah dan berair, serta timbul bercak-bercak merah pada kulit. Penyakit campak merupakan penyakit yang sangat mudah menular, sehingga penyakit ini potensial untuk menimbulkan terjadinya suatu wabah. Penularan penyakit ini terjadi secara langsung dari individu yang satu ke individu yang lain melalui cairan yang berasal dari mata, hidung, dan tenggorokan yang menyebar melalui udara pada waktu batuk, bersin, atau pada saat berbicara. Setiap orang yang telah terkena penyakit campak akan memiliki imunitas atau kekebalan terhadap penyakit ini seumur hidup (Scheined-Schaulies, S., 1999).

Penyakit campak merupakan salah satu penyakit yang berbahaya karena dapat menimbulkan komplikasi, kerusakan otak dan organ lain, cacat seumur hidup, kelumpuhan, serta kematian, bahkan penyakit ini merupakan salah satu penyebab utama kematian anak-anak di dunia. Menurut *United Nations Children's Fund* (UNICEF) (2007), ada sekitar 30.000 anak di Indonesia meninggal dunia setiap tahun karena penyakit campak dan menurut *World Health Organization* (WHO) (2007), terdapat sekitar 242.000 anak di seluruh dunia meninggal dunia pada tahun 2006 karena penyakit campak.

Besarnya angka kematian dan kelumpuhan karena penyakit campak menunjukkan bahwa penyakit campak merupakan penyakit yang sangat berbahaya, sehingga sangat perlu dilakukan suatu upaya untuk mencegah penyebaran penyakit ini. Salah satu cara yang efektif untuk mencegah penyebaran penyakit ini adalah dengan melakukan program vaksinasi. Strategi vaksinasi dibedakan menjadi dua, yaitu strategi *constant vaccination* dan strategi *pulse vaccination*. Strategi *constant vaccination* adalah cara pemberian vaksin yang

dilakukan setiap saat kepada semua bayi yang baru lahir, sedangkan strategi *pulse vaccination* adalah cara pemberian vaksin yang dilakukan secara berkala dalam periode waktu tertentu kepada sebagian proporsi populasi.

Strategi *constant vaccination* bisa berhasil mencegah terjadinya epidemik suatu penyakit, jika proporsi dari individu-individu yang divaksinasi lebih besar dari suatu nilai batasan tertentu. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z. (1998) didapatkan bahwa strategi *constant vaccination* akan berhasil mencegah terjadinya epidemik campak, jika vaksin campak diberikan kepada setidaknya 95 % dari semua anak yang baru lahir dalam suatu populasi. Berdasarkan nilai batasan tersebut, jika populasi berukuran cukup besar maka penerapan strategi ini sangat sulit serta membutuhkan biaya yang mahal. Sedangkan pada strategi *pulse vaccination*, vaksin diberikan hanya kepada sebagian proporsi populasi yang akan dilakukan secara berkala setiap T tahun, sehingga dengan *pulse vaccination* diharapkan epidemik suatu penyakit dapat lebih efisien dikontrol. Selain itu, strategi *pulse vaccination* juga menggunakan vaksin yang lebih sedikit dibandingkan dengan *constant vaccination* (Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z., 1998).

Pada penjelasan sebelumnya terlihat bahwa strategi *pulse vaccination* memiliki beberapa kelebihan dibandingkan dengan strategi *constant vaccination*. Oleh karena itu, dalam tesis ini dibahas pengaruh strategi *pulse vaccination* terhadap pencegahan penyebaran penyakit campak dengan menggunakan model epidemik SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*).

1.2 Permasalahan

Berdasarkan uraian pada latar belakang, permasalahan yang dibahas dalam penulisan tesis ini adalah bagaimana pengaruh strategi *pulse vaccination* dalam upaya pencegahan terjadinya penyebaran penyakit campak?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah menganalisa pengaruh strategi *pulse vaccination* dalam upaya pencegahan terjadinya penyebaran penyakit campak.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan penjelasan mengenai teori-teori yang mendukung pembahasan di bab selanjutnya. Dalam bab ini diberikan gambaran singkat mengenai sistem persamaan diferensial, kesetimbangan dan kestabilan, sistem dinamik diskrit, pemetaan stroboskopik (*stroboscopic map*), metode linierisasi dan teori Floquet (*Floquet theory*).

Pembahasan pada tesis ini yaitu mengenai pengaruh *pulse vaccination* terhadap pencegahan penyebaran penyakit campak dengan menggunakan model epidemik SIR. Untuk melihat pengaruh *pulse vaccination* dapat dilihat dari perilaku model ini. Perilaku model epidemik SIR dapat diketahui dengan menentukan solusi eksak dari model tersebut. Model epidemik SIR pada tesis ini merupakan suatu sistem persamaan diferensial nonlinier. Pada sistem persamaan diferensial nonlinier solusi eksaknya tidak selalu dapat ditentukan. Oleh karena itu, diperlukan suatu informasi lain yang dapat digunakan untuk mengetahui perilaku dari sistem tersebut tanpa harus menentukan solusi eksaknya. Salah satu informasi yang dimaksud adalah kestabilan titik kesetimbangan, yang menyatakan suatu kondisi di mana perubahan pada sistem dapat berakhir.

Analisa sistem dengan menentukan titik kesetimbangan merupakan analisa sistem dinamik, dengan titik kesetimbangannya merupakan solusi dari sistem tersebut. Analisa Sistem dinamik pada *pulse vaccination* menggunakan dua skala waktu yaitu diskrit dan kontinu, sehingga untuk menentukan solusi sistem tersebut berdasarkan titik kesetimbangan yaitu dengan menentukan titik tetap pada pemetaan stroboskopik. Pemetaan stroboskopik ini dibentuk berdasarkan model epidemik SIR dengan pengaruh strategi *pulse vaccination*. Selanjutnya karena sistem merupakan sistem nonlinier, maka untuk melihat kestabilan dari solusi sistem ini yaitu dengan menggunakan metode linierisasi dan teori Floquet.

Berdasarkan penjelasan di atas, dalam bab ini diberikan teori-teori yang mendukung penulisan tesis ini. Pada subbab 2.1 dibahas terlebih dahulu mengenai sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dibedakan menjadi

dua yaitu sistem persamaan diferensial linier yang dibahas pada subbab 2.1.1 dan sistem persamaan diferensial nonlinier yang dijelaskan pada subbab 2.1.2. Selanjutnya pada subbab 2.2 dijelaskan mengenai definisi kesetimbangan dan kestabilan, yang digunakan dalam menentukan solusi periodik bebas infeksi pada subbab 3.4. Pada subbab 2.3 dibahas mengenai sistem dinamik diskrit serta diberikan definisi dan kriteria kestabilan dari titik tetap, yang digunakan dalam menentukan solusi periodik bebas infeksi pada subbab 3.4. Selanjutnya pada subbab 2.4 dibahas mengenai pemetaan stroboskopik yang juga akan digunakan pada subbab 3.4. Untuk menentukan kestabilan dari solusi periodik bebas infeksi pada subbab 3.5 digunakan metode linierisasi dan teori Floquet yang dijelaskan pada subbab 2.5.

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial adalah:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad (2.1)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi kontinu di D . Pada sistem persamaan diferensial (2.1), variabel bebas t bisa muncul secara eksplisit atau tidak. Jika variabel t pada persamaan (2.1) tidak dinyatakan secara eksplisit, maka sistem (2.1) disebut sebagai sistem *autonomous*. Sedangkan jika variabel t pada persamaan (2.1) dinyatakan secara eksplisit maka sistem (2.1) dikatakan sistem *non-autonomous* (Perko, L., 1996).

Sistem persamaan diferensial *autonomous* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Selanjutnya jika sistem (2.2) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan a_{ij} adalah bilangan riil, maka sistem (2.2) merupakan sistem persamaan diferensial *autonomous* linier. Sedangkan jika sistem (2.2) tidak dapat ditulis seperti bentuk linier di (2.3), maka sistem (2.2) merupakan sistem persamaan diferensial *autonomous* nonlinier.

2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier

Sistem *autonomous* linier pada bentuk (2.3) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.4)$$

dengan $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Definisi 2.1 (Bebas Linier)

Solusi-solusi $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$, ..., $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ dari sistem persamaan (2.4) dikatakan bebas linier, jika untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, hubungan $b_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + b_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + b_n\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}$ mengakibatkan $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

Definisi 2.2 (Matriks Fundamental)

Misalkan $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$, ..., $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ adalah solusi-solusi dari sistem persamaan (2.4) dan matriks $\mathbf{\Omega}(t)$ merupakan solusi dari sistem persamaan (2.4) yang dibentuk dari n buah solusi tersebut. Matriks $\mathbf{\Omega}(t)$ mempunyai bentuk, yaitu

$$\mathbf{\Omega}(t) = [\mathbf{x}^{(1)}(t) \ \mathbf{x}^{(2)}(t) \ \cdots \ \mathbf{x}^{(n)}(t)].$$

Jika $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$, ..., $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ bebas linier, maka matriks $\mathbf{\Omega}(t)$ disebut matriks fundamental. Matriks $\mathbf{\Omega}(t)$ disebut matriks fundamental utama jika $\mathbf{\Omega}(0) = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} adalah matriks identitas $n \times n$).

2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier

Bentuk umum sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu yang terdiri dari n buah persamaan adalah

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Pada sistem (2.5) $F_i : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi nonlinier yang kontinu dan terdiferensialkan di D untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

2.2 Kestimbangan dan Kestabilan

Pada sistem dinamik untuk melihat perilaku sistem ini di setiap titiknya dapat ditentukan dari penyelesaian eksaknya, namun tidak semua sistem dinamik dapat ditentukan dengan mudah penyelesaian eksaknya. Oleh karena itu, cara lain untuk melihat perilaku sistem ini yaitu dengan mengamati titik-titik dimana sistem berada pada keadaan setimbang yang dinamakan dengan titik kesetimbangan.

Titik kesetimbangan dari sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Secara matematis, definisi titik kesetimbangan dapat dituliskan pada Definisi 2.3 berikut.

Definisi 2.3 (Titik Kesetimbangan)

Suatu titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari sistem persamaan

$\frac{dx}{dt} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, jika memenuhi persamaan $F(\bar{x}) = \mathbf{0}$ (Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1983).

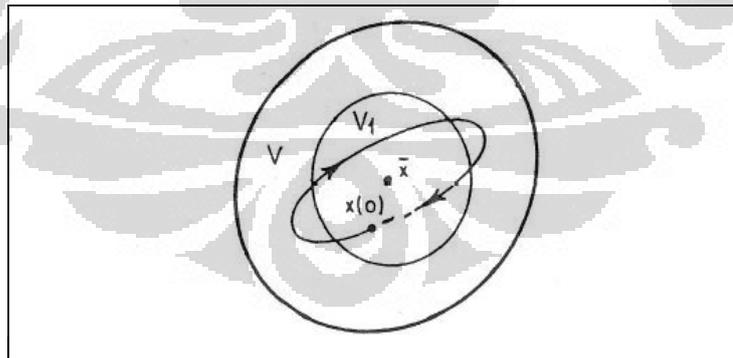
Konsep perilaku sistem pada titik kesetimbangan dikenal dengan kestabilan. Kestabilan tersebut menggambarkan perilaku dari sistem dinamik yang merupakan hasil analisa dari sistem dinamik. Ada beberapa cara yang bisa digunakan untuk menentukan kestabilan dari sistem dinamik. Berikut diberikan definisi dari kestabilan titik kesetimbangan.

Definisi 2.4 (Stabilitas Titik Kesetimbangan)

Misalkan \bar{x} adalah titik kesetimbangan dari sistem $\frac{dx}{dt} = F(x)$ dan $x(0)$ adalah titik awal.

1. \bar{x} dikatakan stabil, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ dengan $\|\mathbf{x}(0) - \bar{x}\| < \delta$, solusi $\varphi(t, \mathbf{x}(0))$ dari $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ yang melalui $\mathbf{x}(0)$ di $t = 0$ memenuhi pertidaksamaan $\|\varphi(t, \mathbf{x}(0)) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
2. \bar{x} dikatakan stabil asimtotik, jika \bar{x} stabil dan terdapat $r > 0$, sedemikian sehingga $\|\varphi(t, \mathbf{x}(0)) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ saat $t \rightarrow \infty$ untuk semua $\mathbf{x}(0)$ yang memenuhi $\|\mathbf{x}(0) - \bar{x}\| < r$.
3. \bar{x} dikatakan tidak stabil, jika terdapat suatu $\eta > 0$, sedemikian sehingga untuk sebarang $\delta > 0$ terdapat sebuah $\mathbf{x}(0)$ dengan $\|\mathbf{x}(0) - \bar{x}\| < \delta$ dan $t > 0$ sedemikian sehingga $\|\varphi(t, \mathbf{x}(0)) - \bar{x}\| > \eta$.

Berdasarkan Definisi 2.4 dapat dikatakan bahwa sistem $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dengan \bar{x} sebagai titik kesetimbangan yang stabil, berarti perubahan kecil dalam syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesaian. Sistem tersebut dikatakan stabil asimtotik yang berarti pengaruh dari perubahan kecil cenderung menghilang sama sekali (tidak berpengaruh), sedangkan ketakstabilan berarti suatu perubahan kecil pada syarat awalnya akan berakibat perubahan besar pada penyelesaian. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 2.1 berikut.



Keterangan : V = lingkungan- ε dari \bar{x}

V_1 = lingkungan- δ dari semua solusi $\varphi(t, \mathbf{x}(0))$

\bar{x} = titik kesetimbangan ; $\mathbf{x}(0)$ = titik awal

[sumber : Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1983]

Gambar 2.1 Kestabilan dari titik kesetimbangan

Pada Gambar 2.1 misalkan \bar{x} merupakan titik kesetimbangan yang stabil dengan lingkungannya adalah V . Kemudian misalkan dipilih titik awal $x(0)$ yang berada dalam lingkungan V_1 , dengan lingkungan V_1 berada dalam lingkungan V , maka solusi di titik $x(0)$ berada dalam lingkungan V .

2.3 Sistem Dinamik Diskrit

Sistem dinamik yang periodik bisa digambarkan sebagai proses iterasi. Keadaan perubahan sistem ini diakibatkan oleh suatu fungsi dan misalkan fungsi tersebut adalah fungsi F , dengan $F: X \rightarrow X$ dengan $X \subseteq \mathbb{R}$. Selanjutnya sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Untuk mempelajari perilaku sistem dinamik diskrit bisa dilakukan dengan menentukan titik tetap (*fixed point*) dari sistem tersebut. Berikut ini diberikan definisi dari titik tetap.

Definisi 2.5 (Titik Tetap)

x^* adalah titik tetap (*fixed point*) dari sistem dinamik diskrit persamaan (2.6) jika memenuhi $x^* = F(x^*)$.

Definisi 2.6 (Stabilitas Titik Tetap)

1. Suatu titik tetap x^* dari fungsi F dikatakan stabil, jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap x_0 dengan $|x_0 - x^*| < \delta$, pengulangan dari x_0 memenuhi pertidaksamaan $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq 0$ (Hale, J. & Koçak, H., 1991).
2. Titik tetap x^* dari fungsi F dikatakan stabil asimtotik, jika x^* stabil dan terdapat suatu $r > 0$, sedemikian sehingga $f^n(x_0) \rightarrow 0$ saat $n \rightarrow +\infty$, untuk setiap x_0 yang memenuhi $|x_0 - x^*| < r$ (Hale, J. & Koçak, H., 1991).

Selain Definisi 2.6, diberikan suatu teorema yang dapat digunakan untuk melihat kestabilan dari titik tetap pada suatu sistem dinamik diskrit. Isi teoremnya sebagai berikut.

Teorema 2.1 (Teorema Titik Tetap)

Misalkan F suatu fungsi terdiferensiabel dan turunan pertamanya merupakan fungsi kontinu. Titik tetap x^* dari F dikatakan stabil asimtotik jika $|F'(x^*)| < 1$, dan tidak stabil jika $|F'(x^*)| > 1$ (Hale, J. & Koçak, H., 1991).

Bukti 2.1

Untuk lebih mempermudah, pertama dijelaskan titik tetap $(x^*, x^*) = (x^*, F(x^*))$ yang merupakan titik pusat $(0,0)$. Misalkan u variabel baru yang didefinisikan oleh $u = x - x^*$. Lalu fungsi F dalam koordinat yang baru menjadi

$$g(u) = F(x^* + u) - F(x^*),$$

Jelas bahwa $g(0) = 0$. Untuk mempelajari stabilitas titik tetap x^* dari F yaitu setara dengan mempelajari stabilitas titik tetap nol dari g .

Perhatikan juga bahwa $g'(u) = F'(x^* + u)$. Sekarang pilih $\varepsilon > 0$ dan definisikan

$$m_\varepsilon = \min_{|s| \leq \varepsilon} |F'(x^* + s)|, M_\varepsilon = \max_{|s| \leq \varepsilon} |F'(x^* + s)|.$$

Karena $g(u) = \int_0^u F'(x^* + s) ds$, jika $|u| \leq \varepsilon$, maka

$$m_\varepsilon |u| \leq |g(u)| \leq M_\varepsilon |u|, \text{ untuk } n \geq 0.$$

Jika $|F'(x^*)| < 1$, maka terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $M_\varepsilon < 1$.

Selanjutnya, jika $|u| < \varepsilon$, maka

$$|g^n(u)| \leq M_\varepsilon^n |u| \leq M_\varepsilon^n \varepsilon < \varepsilon, \text{ untuk } n \geq 0.$$

Ini menunjukkan jika mengambil $\delta = \varepsilon$ berdasarkan Definisi 2.6, maka titik tetap nol dari g dikatakan stabil. Hal ini juga disebabkan karena $M_\varepsilon < 1$ dan $M_\varepsilon^n \rightarrow 0$ saat $n \rightarrow \infty$. Berdasarkan hal tersebut maka titik tetap nol dari g juga dikatakan stabil asimtotik.

Selanjutnya untuk membuktikan bagian yang kedua dari teorema diatas akan dijelaskan sebagai berikut. Perhatikan bahwa jika $|F'(x^*)| > 1$ maka terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga $m_{\varepsilon_0} > 1 + \delta_0$.

Misalkan $u \neq 0$ dan $|u| \leq \varepsilon_0$. Kemudian diperoleh

$$|g^n(u)| \geq m_{\varepsilon_0}^n |u| \geq (1 + \delta_0)^n |u|,$$

selama $|g^n(u)| \leq \varepsilon_0$. Ketidaksamaan ini menunjukkan bahwa harus ada nilai dari n sebut \hat{n} , sedemikian sehingga $|g^{\hat{n}}(u)| \geq \varepsilon_0$. Karena u dapat diambil

mendekati nol ini mengakibatkan bahwa titik tetap nol dari g dikatakan tidak stabil.

2.4 Pemetaan Stroboskopik

Pemetaan stroboskopik (*stroboscopic map*) digunakan untuk melihat hubungan antara sistem dinamik dengan waktu yang diskrit dan waktu yang kontinu berperiodik. Pemetaan stroboskopik adalah suatu fungsi yang digunakan untuk melihat perilaku dari sistem yang berperiodik.

Misalkan sistem dinamik dengan waktu kontinu yang diberikan oleh satu himpunan persamaan diferensial biasa, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t), \quad (2.7)$$

dengan $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$, $\mathbf{F} = [F_1(\mathbf{x}(t), t), F_2(\mathbf{x}(t), t), \dots, F_n(\mathbf{x}(t), t)]$.

Selanjutnya misalkan $\mathbf{x}(t)$ adalah solusi pada persamaan (2.7), maka pemetaan

$$S_T: \mathbf{x}(t) \mapsto \mathbf{x}(t + T),$$

adalah pemetaan stroboskopik dengan periode waktu T .

2.5 Metode linierisasi dan Teori Floquet

Metode linierisasi

Definisi 2.4 relatif sulit digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial nonlinier. Oleh karena itu, diberikan metode yang lebih mudah digunakan untuk menentukan kestabilan suatu sistem persamaan diferensial nonlinier dengan menyelidiki pengaruh perubahan kecil pada syarat awal. Salah satu metode yang biasa digunakan untuk menentukan kestabilan dari sistem persamaan diferensial nonlinier adalah metode linierisasi.

Jika titik (\tilde{x}, \tilde{y}) adalah titik kesetimbangan maka akan diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik kesetimbangan tersebut dengan menggunakan metode linierisasi sebagai berikut.

Misalkan (x, y) merupakan titik di sekitar titik kesetimbangan maka titik (x, y) dapat dituliskan menjadi:

$$(x, y) = (\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y} + \Delta y).$$

Selanjutnya misalkan diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu yang terdiri dari dua fungsi yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x, y).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Sehingga menurut Khamsi (2004), pendekatan fungsi F_1 dan F_2 pada persamaan (2.8) dapat ditentukan dengan menggunakan ekspansi Taylor. Bentuk ekspansi Taylor untuk sistem (2.8) dengan menggunakan metode linierisasi adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}F_1(x, y) &\approx F_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\partial F_1(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} (x - \tilde{x}) + \frac{\partial F_1(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} (y - \tilde{y}), \\ F_2(x, y) &\approx F_2(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\partial F_2(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} (x - \tilde{x}) + \frac{\partial F_2(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} (y - \tilde{y}).\end{aligned}$$

Selanjutnya karena (\tilde{x}, \tilde{y}) adalah titik kesetimbangan maka $F_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = F_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, sehingga berdasarkan ekspansi Taylor di atas diperoleh sistem linier untuk pendekatan sistem (2.8) adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F_1(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F_1(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} \Delta y, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F_2(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F_2(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} \Delta y.\end{aligned}$$

Teori Floquet

Sebelum dibahas teori Floquet (Floquet *theory*) terlebih dahulu diberikan pengertian dari solusi periodik.

Definisi 2.7 (Solusi Periodik)

Misalkan $\mathbf{x} = \phi(t)$ merupakan solusi untuk persamaan $\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$. Selanjutnya misalkan terdapat bilangan positif T sedemikian sehingga $\phi(t + T) = \phi(t)$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Maka $\phi(t)$ disebut solusi periodik dari persamaan $\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$ dengan periodenya sebesar T (Verhulst, F., 1996).

Teori Floquet digunakan untuk menyelidiki kestabilan dari solusi periodik pada sistem persamaan diferensial. Teori Floquet secara umum menggambarkan hubungan antara pemetaan stroboskopik dan metode linierisasi. Berikut ini diberikan penjelasan mengenai teori Floquet.

Misalkan persamaan

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad (2.9)$$

dengan $\mathbf{A}(t)$ matriks $n \times n$ yang kontinu dengan periodenya sebesar T , sehingga $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T), t \in \mathbb{R}$.

Berikut ini diberikan teorema Floquet untuk persamaan (2.9).

Teorema 2.2 (Teorema Floquet)

Setiap matriks fundamental $\phi(t)$ dari persamaan (2.9) bisa ditulis sebagai perkalian dari dua matriks berukuran $n \times n$ yaitu:

$$\phi(t) = P(t)C,$$

dengan $P(t)$ adalah matriks periodik dengan periodenya sebesar T dan C adalah matriks konstan $n \times n$ (Verhulst, F., 1996).

Bukti 2.2

Akan dibuktikan bahwa $P(t)$ merupakan matriks periodik dengan periodenya sebesar T , adapun langkahnya sebagai berikut.

Matriks fundamental $\phi(t)$ disusun dari n solusi independen, $\phi(t + T)$ juga merupakan matriks fundamental. Untuk menunjukkan hal ini misalkan $\tau = t + T$, maka

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A(\tau - T)x, \\ &= A(\tau)x. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Berdasarkan persamaan (2.10) dan karena $\phi(t)$ merupakan matriks fundamental dari persamaan (2.9), maka $\phi(\tau) = \phi(t + T)$ juga merupakan matriks fundamental. Jelas bahwa matriks fundamental $\phi(t)$ dan $\phi(\tau) = \phi(t + T)$ bergantung linier, yang berarti terdapat matriks C yang merupakan matriks nonsingular berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga

$$\phi(t + T) = \phi(t)C. \quad (2.11)$$

Misalkan terdapat matriks konstan B sedemikian sehingga

$$C = e^{BT}.$$

Sekarang akan dibuktikan bahwa $P(t) = \phi(t)e^{-BT}$ merupakan fungsi periodik dengan periodenya adalah T .

$$\begin{aligned}
 P(t + T) &= \phi(t + T)e^{-B(t+T)}, \\
 &= \phi(t)Ce^{-BT} e^{-Bt}, \\
 &= \phi(t)e^{-Bt}, \\
 &= P(t).
 \end{aligned}$$

Karena $P(t + T) = P(t)$, maka terbukti bahwa $P(t) = \phi(t)e^{-Bt}$ merupakan matriks periodik dengan periodenya sebesar T .

Catatan 1.

Matriks C pada persamaan (2.11) disebut dengan matriks monodromi (*monodromy matrix*) dari persamaan (2.9). Nilai eigen λ dari C disebut dengan pengali Floquet atau Floquet *multipliers* dan $\lambda = e^{\mu T}$ disebut dengan *characteristic exponent* (Verhulst, F., 1996).

Catatan 2.

Syarat perlu solusi periodik dari persamaan (2.9) menjadi stabil adalah apabila semua modulus dari pengali Floquet (Floquet *multiplier*) nilainya lebih kecil atau sama dengan 1 (Verhulst, F., 1996).

BAB 3

MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN *PULSE VACCINATION*

Dalam bab ini dibahas mengenai beberapa hal yang menjadi tujuan penulisan tesis ini. Pada subbab 3.1 dijelaskan mengenai strategi *pulse vaccination* beserta kelebihanannya dibandingkan dengan strategi *constant vaccination*. Selanjutnya pada subbab 3.2 dijelaskan mengenai konstruksi model epidemik SIR penyakit campak dengan pengaruh *pulse vaccination* yang dibedakan menjadi dua interval waktu. Kemudian dari model tersebut ditentukan nilai dari ambang batas epidemik (*epidemic threshold*) yaitu suatu nilai batasan untuk melihat terjadinya epidemik suatu penyakit atau tidak yang akan dijelaskan pada subbab 3.3. Selanjutnya untuk melihat pengaruh dari strategi *pulse vaccination* terhadap pencegahan penyebaran penyakit campak, dilakukan analisis dinamik pada model epidemik SIR yang telah diberikan pada subbab 3.2, dengan mencari solusi periodik bebas infeksi (*infection-free periodic solution*) yang akan dibahas pada subbab 3.4.

Pada subbab 3.5 ditentukan kestabilan dari solusi periodik bebas infeksi yang telah diperoleh pada subbab 3.4. Kestabilan solusi periodik bebas infeksi pada subbab 3.5 dicari dengan menggunakan metode linierisasi dan teori Floquet. Selanjutnya pada subbab 3.6 ditentukan nilai dari periode *pulse vaccination* berdasarkan nilai ambang batas epidemik.

3.1 Strategi *Pulse Vaccination*

Strategi *pulse vaccination* adalah strategi pemberian vaksin yang dilakukan secara berkala dalam periode waktu tertentu kepada sebagian proporsi populasi *susceptible*. Periode pada *pulse vaccination* dimisalkan dengan T dan proporsi dari populasi *susceptible* yang dikenakan vaksin adalah sebesar p .

Pada strategi *pulse vaccination*, vaksin diberikan hanya kepada sebagian proporsi populasi dari *susceptible* yaitu sebesar p , sehingga strategi *pulse vaccination* menggunakan vaksin yang lebih sedikit dibandingkan dengan *constant vaccination*. Selain itu, pada strategi *pulse vaccination* pemberian vaksin

dilakukan secara berkala setiap T satuan waktu, sehingga dengan strategi *pulse vaccination* diharapkan penyebaran dari penyakit campak dapat lebih efisien dikontrol.

3.2 Konstruksi Model Epidemik SIR

Pada bagian ini, dibahas pembentukan model epidemik SIR dengan memperhatikan faktor strategi *pulse vaccination* pada penyakit campak. Model SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*) pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick. Model epidemik SIR adalah salah satu model matematika yang dapat digunakan untuk mempelajari fenomena penyebaran penyakit infeksi atau penyakit menular. Model SIR pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu wabah penyakit dalam suatu populasi tertutup dan bersifat epidemik.

Secara umum model epidemik SIR dapat disajikan sebagai sistem persamaan diferensial *autonomous*. Menurut Hetchote (2000) pada model epidemik SIR, populasi dibedakan menjadi tiga kelompok, yaitu:

1. Kelompok individu *susceptible*, adalah kelompok individu yang sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit campak.
2. Kelompok individu *infectious*, adalah kelompok individu yang telah terinfeksi serta dapat menularkan penyakit campak.
3. Kelompok individu *recovered*, adalah kelompok individu yang telah terinfeksi penyakit campak dan telah sembuh dari penyakit campak serta imun terhadap penyakit ini.

Model epidemik SIR menggambarkan alur penularan penyakit dari kelompok individu *susceptible* menjadi kelompok individu *infectious* melalui hubungan antara dua kelompok tersebut. Selanjutnya, kelompok individu *infectious* yang mampu bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan memasuki kelompok individu *recovered*.

Asumsi Model

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model epidemik SIR yang dibentuk adalah sebagai berikut:

1. Populasi tertutup (tidak ada proses migrasi).
2. Jumlah populasi konstan. Pada model epidemik SIR, faktor kelahiran dan kematian diperhatikan. Kelahiran dan kematian diasumsikan mempunyai laju yang sama. Setiap individu yang baru lahir akan langsung masuk ke dalam populasi *susceptible*. Individu yang mati dari setiap kelompok mempunyai laju yang proporsional dengan jumlah individu pada masing-masing kelompok.
3. Populasi bercampur secara homogen. Keadaan homogen berarti bahwa setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama untuk melakukan kontak dengan individu lain dalam populasi. Individu yang terinfeksi penyakit campak mempunyai laju infeksi β .
4. Setiap individu yang belum terserang penyakit masuk ke dalam kelompok *susceptible*.
5. Penyakit hanya menular melalui kontak langsung dengan penderita.
6. Individu yang terinfeksi penyakit campak dapat sembuh dari penyakit tersebut dengan laju kesembuhan γ . Jumlah individu yang sembuh dari penyakit campak proporsional dengan banyaknya individu dalam kelompok *infectious*.
7. Seseorang yang sudah sembuh dari penyakit campak tidak akan terserang lagi karena telah mempunyai sistem kekebalan seumur hidup terhadap penyakit ini.

Variabel dan Parameter Model

Variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam proses pembentukan model epidemik SIR penyakit campak dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Parameter model epidemik SIR dengan pengaruh strategi *pulse vaccination*

Simbol	Keterangan	Syarat	Satuan
S	Ukuran populasi <i>susceptible</i>	$S > 0$	individu
I	Ukuran populasi <i>infectious</i>	$I > 0$	individu
R	Ukuran populasi <i>recovered</i>	$R > 0$	individu
N	Ukuran total populasi	$N = S + I + R$	individu
μ	Laju kelahiran alami per kapita=laju kematian alami per kapita	$\mu \geq 0$	1/waktu
β	Laju penularan alami per kapita	$\beta > 0$	1/waktu
γ	Laju kesembuhan alami per kapita	$\gamma > 0$	1/waktu
T	Periode <i>pulse vaccination</i>	$T > 0$	waktu
p	Proporsi individu yang divaksin	$0 < p < 1$	-
t_n	Waktu saat terjadi vaksinasi ke- n	$t_n = nT$	waktu
t_n^-	Waktu sesaat sebelum terjadi vaksinasi ke- n	$t_n^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (t_n - \varepsilon)$	waktu

Keterangan : satuan laju kelahiran = individu / waktu.

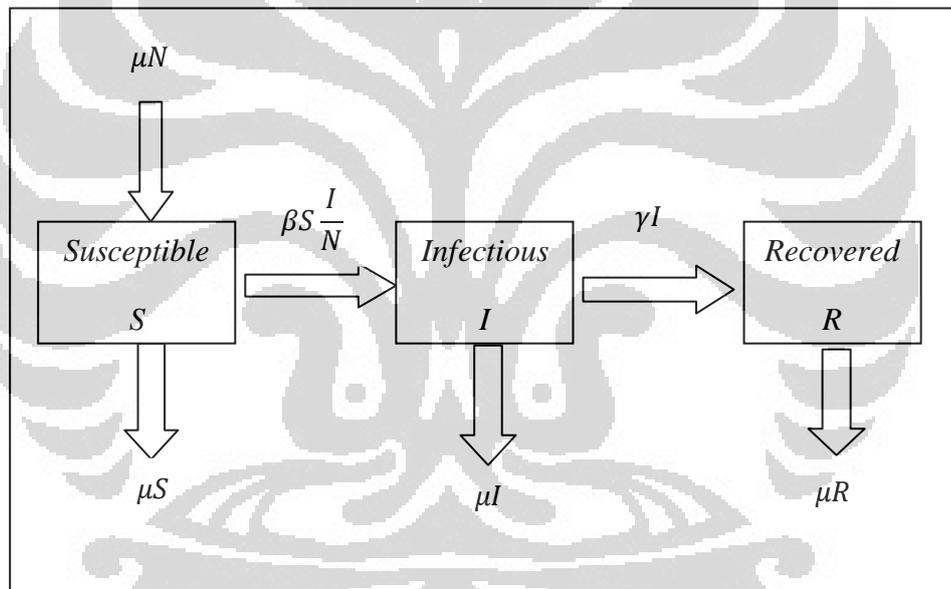
satuan laju kelahiran alami per kapita = satuan laju kelahiran \times 1/individu.

Berdasarkan variabel, parameter, dan asumsi yang digunakan, maka pola penyebaran penyakit campak dengan melihat pengaruh strategi *pulse vaccination* dapat diuraikan sebagai berikut.

Karena strategi *pulse vaccination* merupakan pemberian vaksin yang dilakukan secara periodik, maka interval waktu untuk pembentukan model epidemik SIR dibedakan menjadi dua, yaitu waktu saat dilakukan program pemberian vaksin campak yang dimisalkan dengan $t_n = nT$ dan waktu pada saat tidak dilakukan pemberian vaksin campak yang dimisalkan dengan $t_n \neq nT$. Terlebih dahulu kita akan membahas pembentukan model epidemik SIR pada saat $t_n \neq nT$ sebagai berikut.

Individu yang lahir dalam populasi mempunyai laju kelahiran alami per kapita μ . Jumlah populasi yang lahir proporsional dengan total jumlah populasi N . Oleh karena itu, jumlah populasi yang lahir dalam populasi adalah μN . Karena pada saat $t_n \neq nT$ tidak dilakukan vaksinasi maka jumlah tersebut akan memasuki kelompok *susceptible* (S). Kemudian dari asumsi yang digunakan yaitu laju kelahiran alami per kapita akan sama dengan laju kematian alami per kapita diperoleh individu yang mati dalam populasi mempunyai laju kematian alami per kapita μ .

Berikut dapat dilihat diagram transfer untuk model epidemik SIR pada saat $t_n \neq nT$ yang sesuai dengan pemisalan dan asumsi yang digunakan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Dinamika populasi model epidemik SIR tanpa vaksinasi

Berdasarkan Gambar 3.1 diperoleh bahwa pertambahan banyaknya individu *susceptible* per satuan waktu t dalam populasi yang konstan dipengaruhi oleh μN (tingkat pertambahan individu *susceptible* yang dilahirkan), kemudian pengurangannya dipengaruhi oleh $\beta S \frac{I}{N}$ (banyak individu *susceptible* yang terinfeksi campak per satuan waktu) serta dipengaruhi oleh μS (banyaknya individu yang mati dalam kelompok *susceptible*), sehingga diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S.$$

Pertambahan banyaknya individu *infectious* per satuan waktu dipengaruhi oleh $\beta S \frac{I}{N}$ (banyaknya individu *susceptible* yang berubah menjadi individu *infectious* yang disebabkan oleh kontak langsung dengan penderita penyakit campak per satuan waktu), sedangkan pengurangannya dipengaruhi oleh γI (banyaknya individu *infectious* yang telah sembuh dari penyakit campak per satuan waktu), serta dipengaruhi oleh μI (banyaknya individu yang mati dalam kelompok *infectious*), sehingga diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I - \mu I.$$

Pertambahan banyaknya individu *recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh γI (banyaknya individu *infectious* yang telah sembuh dari penyakit campak per satuan waktu), sedangkan pengurangannya dipengaruhi oleh μR (banyak individu yang mati dalam kelompok *recovered*) sehingga diperoleh

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R.$$

Dengan demikian untuk $t \neq nT$ diperoleh model epidemik SIR sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan $S(t) + I(t) + R(t) = N$ dan $S(0), I(0), R(0) > 0$.

Kemudian saat $t_n = nT$ yang berarti bahwa terjadi pemberian vaksin campak maka pembentukan modelnya sebagai berikut. Pada $t_n = nT$ berarti program *pulse vaccination* diperhatikan dalam model (3.1). Dalam strategi *pulse vaccination* vaksin campak hanya diberikan kepada sebagian p individu *susceptible*, $0 < p < 1$. Kemudian diasumsikan bahwa efisiensi vaksinasi campak adalah 100 % yang berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksin campak akan kebal dari penyakit campak. Selanjutnya individu yang mendapatkan vaksin campak akan memasuki kelompok R . Sedangkan jumlah individu yang tidak divaksin campak akan memasuki kelompok S , sehingga individu yang tidak mendapatkan vaksin campak sangat berpotensi untuk terinfeksi penyakit campak. Oleh karena itu, untuk $t_n = nT$ diperoleh model matematis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 S(t_n) &= S(t_n^-) - p S(t_n^-), \\
 I(t_n) &= I(t_n^-), \\
 R(t_n) &= R(t_n^-) + p S(t_n^-),
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

dengan $S(t_n)$ menyatakan banyaknya individu *susceptible* pada saat vaksinasi ke- n .

Terlihat dari persamaan (3.1) dan (3.2) bahwa dengan strategi *pulse vaccination* diperoleh model epidemik SIR yang merupakan sistem *non-autonomous* persamaan diferensial nonlinier orde satu.

Model epidemik SIR dengan mempertimbangkan pengaruh strategi *pulse vaccination* selengkapnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S, \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \gamma I - \mu I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R, \\
 S(t_n) &= S(t_n^-) - p S(t_n^-), \\
 I(t_n) &= I(t_n^-), \\
 R(t_n) &= R(t_n^-) + p S(t_n^-),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

dengan $S(0), I(0), R(0) > 0$ dan $0 < p < 1$.

Berdasarkan persamaan (3.3) diperoleh bahwa

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0, \text{ yang menunjukkan bahwa populasi } N \text{ konstan.}$$

Selanjutnya pada model (3.3) dilakukan normalisasi yaitu:

$$\frac{S}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = 1. \text{ Kemudian misalkan } s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}, \text{ sehingga diperoleh:}$$

$$s + i + r = 1 \tag{3.4}$$

dan model (3.3) bisa dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \mu - \beta si - \mu s, \\
 \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i - \mu i, \\
 \frac{dr}{dt} &= \gamma i - \mu r, \\
 s(t_n) &= s(t_n^-) - p s(t_n^-), \\
 i(t_n) &= i(t_n^-), \\
 r(t_n) &= r(t_n^-) + p s(t_n^-),
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

dengan s menyatakan proporsi individu *susceptible*, i menyatakan proporsi individu *infectious*, r menyatakan proporsi individu *recovered*, $s(t_n)$ menyatakan proporsi individu *susceptible* saat pemberian vaksin ke- n , $s(t_n^-)$ menyatakan proporsi individu *susceptible* sesaat sebelum pemberian vaksin ke- n .

Pada sistem (3.5) variabel r tidak muncul pada persamaan baris pertama dan kedua. Hal ini menunjukkan bahwa proporsi individu pada kelompok r tidak mempengaruhi laju perubahan proporsi individu pada kelompok s dan i . Selain itu, dari persamaan (3.4) diperoleh $r = 1 - (s + i)$ yang berarti bahwa penyelesaian untuk r dapat diperoleh dengan mudah jika penyelesaian untuk s dan i sudah diperoleh. Sehingga untuk analisis model (3.5) cukup diperhatikan sistem dimensi dua, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu - \beta si - \mu s, \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i - \mu i, \\ s(t_n) &= s(t_n^-) - p s(t_n^-), t_{n+1} = t_n + T, \\ i(t_n) &= i(t_n^-). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Selanjutnya analisa dinamik pada model epidemik SIR (3.6) bisa dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan bebas infeksi. Titik kesetimbangan bebas infeksi adalah titik yang mencerminkan suatu keadaan dimana dalam populasi tidak ada lagi individu yang terserang penyakit. Sebelum mencari titik kesetimbangan bebas infeksi untuk model (3.6), terlebih dahulu ditentukan nilai ambang batas epidemik yang dijelaskan pada subbab berikut.

3.3 Nilai Ambang Batas Epidemik

Nilai ambang batas epidemik (*epidemic threshold*) adalah suatu nilai ukuran yang menyatakan terjadinya suatu penyebaran penyakit atau tidak. Selanjutnya dalam penulisan ini nilai ambang batas epidemik disimbolkan dengan s_c . Untuk mencari nilai dari ambang batas epidemik pada model SIR dengan pengaruh strategi *pulse vaccination* dilakukan langkah sebagai berikut.

Berdasarkan model (3.6), strategi *pulse vaccination* bisa mencegah peningkatan jumlah individu yang terinfeksi, yaitu dengan cara mempertahankan $\frac{di}{dt} < 0$ untuk sepanjang waktu t . Nilai $\frac{di}{dt} < 0$ dapat diartikan bahwa jumlah

penderita suatu penyakit berangsur-angsur semakin berkurang sehingga penyakit akan menghilang dari populasi dan tidak akan terjadi penyebaran penyakit

(wabah). Selanjutnya dari model (3.6) jika $\frac{di}{dt} < 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\beta si - \mu i - \gamma i &< 0, \\ i(\beta s - \mu - \gamma) &< 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.7) diperoleh bahwa: $i(t) < 0$, untuk $t \geq 0$ atau $s(t) < \frac{\mu + \gamma}{\beta}$. Karena untuk mempertahankan $\frac{di}{dt} < 0$ pada pertidaksamaan (3.7) diperoleh bahwa $s(t) < \frac{\mu + \gamma}{\beta}$ dengan $s(t)$ menyatakan proporsi individu yang rentan terkena penyakit campak, maka diperoleh nilai ambang batas epidemik yaitu

$$s_c = \frac{\mu + \gamma}{\beta}.\tag{3.8}$$

Dalam hal ini terlihat jika nilai dari $s(t)$ lebih kecil dari nilai s_c maka di dalam populasi tidak akan terjadi penyebaran penyakit. Sebaliknya jika nilai $s(t)$ lebih besar dari nilai s_c maka di dalam populasi akan terjadi penyebaran penyakit.

Untuk analisis selanjutnya selalu diperhatikan bahwa model epidemik SIR dengan pengaruh strategi *pulse vaccination* akan dapat mencegah terjadinya penyebaran penyakit campak dengan mempertahankan proporsi individu *susceptible* $s(t)$ selalu lebih kecil dari nilai ambang batas epidemik s_c yaitu

$$s(t) < \frac{\mu + \gamma}{\beta} = s_c.$$

Selanjutnya untuk mengetahui perilaku model epidemik SIR dengan pengaruh strategi *pulse vaccination* digunakan konsep kesetimbangan dan kestabilan dengan menggunakan metode linearisasi dan teori Floquet.

3.4 Solusi Periodik Bebas Infeksi

Untuk menentukan solusi periodik bebas infeksi (*infection-free periodic solution*) pada sistem (3.6) dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Berdasarkan definisi dari titik kesetimbangan yang dijelaskan di Bab 2, kondisi sistem (3.6) akan setimbang ketika

$$\beta si - \mu i - \gamma i = 0,$$

$$i(\beta s - \mu - \gamma) = 0. \quad (3.9)$$

Dari persamaan (3.9) diperoleh nilai: $i = 0$ atau $\beta s - (\mu + \gamma) = 0$. Oleh karena itu, diperoleh solusi titik kesetimbangan bebas infeksi untuk variabel $i(t)$ pada sistem (3.6) adalah $i(t) = 0$ untuk $t \geq 0$.

Selanjutnya untuk menentukan solusi dari titik kesetimbangan bebas infeksi untuk variabel $s(t)$ yaitu dengan mensubstitusikan $i(t) = 0$ ke $\frac{ds}{dt}$ pada sistem (3.6). Akibatnya diperoleh

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \mu s \quad (3.10)$$

dan

$$s(t_n) = (1 - p)s(t_n^-), t_{n+1} = t_n + T. \quad (3.11)$$

Untuk interval $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ dari persamaan (3.10) dan persamaan (3.11) diperoleh solusi untuk variabel $s(t)$ adalah

$$\begin{aligned} s(t) &= 1 + (s(t_n) - 1)e^{-\mu(t-t_n)}, t_n \leq t < t_{n+1}, \\ s(t) &= (1 - p)Q(t), t = t_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

dengan $Q(t) = 1 + (s(t_n) - 1)e^{-\mu(t-t_n)}$ dan $s(t_n)$ menyatakan proporsi *susceptible* pada saat $t_n = nT$.

Persamaan (3.12) merupakan solusi untuk variabel $s(t)$ dan mengandung dua bentuk yaitu $Q(t)$ yang menyatakan proporsi *susceptible* antara dua pelaksanaan vaksinasi yaitu pada saat $t_n = nT$ dan $t_{n+1} = nT + T$, kemudian $(1 - p)Q(t)$ menyatakan proporsi *susceptible* pada saat vaksinasi ke- $(n+1)$.

Selanjutnya karena pada bentuk pertama persamaan (3.12) untuk waktu yang kontinu terdapat $s(t_n)$ yang berarti proporsi *susceptible* untuk waktu yang diskrit, maka untuk melihat hubungan antara waktu yang kontinu dan diskrit tersebut sesuai dengan teori yang telah dipaparkan di Bab 2 akan digunakan pemetaan stroboskopik F .

Pemetaan stroboskopik F yang digunakan yaitu

$$F(s_n) = s_{n+1}, \quad (3.13)$$

dengan $s_n = s(t_n)$ dan $s_{n+1} = s(t_{n+1})$.

Pemetaan stroboskopik F pada persamaan (3.13) menyatakan banyaknya *susceptible* $s(t)$ saat *pulse vaccination* pada waktu $t = t_n$.

Kemudian dari persamaan (3.12) dan persamaan (3.13) diperoleh:

$$\begin{aligned} F(s_n) &= s_{n+1}, \\ &= (1-p)(1 + (s_n - 1)e^{-\mu T}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Selanjutnya untuk mencari solusi periodik bebas infeksi untuk variabel $s(t)$ dengan waktu yang diskrit, ditentukan dengan mencari titik tetap (*fixed point*) dari pemetaan stroboskopik F pada persamaan (3.14).

Berdasarkan definisi dari titik tetap yang telah diberikan di Bab 2, diperoleh titik tetap untuk pemetaan stroboskopik F pada persamaan (3.14) adalah

$$\begin{aligned} s^* &= F(s^*), \\ s^* &= \frac{(1-p)(e^{\mu T} - 1)}{p - 1 + e^{\mu T}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Kemudian berdasarkan teori kestabilan untuk titik tetap yang telah diperkenalkan di Bab 2, diperoleh titik tetap s^* pada persamaan (3.15) merupakan stabil lokal karena untuk $s_n = s^*$, berlaku

$$\left| \frac{dF(s_n)}{ds} \right|_{s_n=s^*} = (1-p)e^{-\mu T} < 1.$$

Karena s^* telah ditunjukkan stabil maka barisan dari strategi *pulse vaccination* (s_n) harus konvergen ke s^* .

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $s_n = s^*$ ke sistem (3.12) maka diperoleh solusi periodik bebas infeksi untuk variabel $s(t)$ adalah

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= 1 + \frac{pe^{\mu T}}{1-e^{\mu T}-p} e^{-\mu(t-t_n)}, t_n \leq t < t_{n+1}, \\ \tilde{s}(t) &= s^*, t = t_{n+1}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

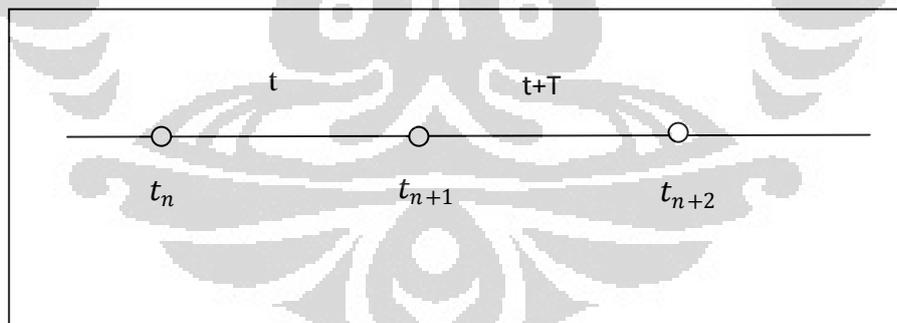
Berdasarkan persamaan (3.16), diperoleh solusi periodik bebas infeksi untuk interval $t_n \leq t \leq t_{n+1} = t_n + T$ adalah $(\tilde{s}(t), \tilde{i}(t))$ dengan

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= 1 + \frac{pe^{\mu T}}{1-e^{\mu T}-p} e^{-\mu(t-t_n)}, t_n \leq t < t_{n+1}, \\ \tilde{s}(t) &= s^*, t = t_{n+1}, \\ \tilde{i}(t) &= 0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Dapat dibuktikan bahwa $\tilde{s}(t+T) = \tilde{s}(t)$ dan $\tilde{i}(t+T) = \tilde{i}(t)$, yang berarti bahwa solusi bebas infeksi ini merupakan solusi periodik dengan periodenya adalah T sebagai berikut.

(1) Bukti untuk variabel $\tilde{s}(t)$

Sebelum membuktikan bahwa $\tilde{s}(t+T) = \tilde{s}(t)$ terlebih dahulu perhatikan interval waktu pada Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Interval waktu pada strategi *pulse vaccination*

Karena pada persamaan (3.17) untuk interval waktu yang diskrit yaitu $t = t_{n+1}$ diperoleh $\tilde{s}(t) = s^* = \frac{(1-p)(e^{\mu T}-1)}{p-1+e^{\mu T}}$, yang berarti bahwa $\tilde{s}(t)$ untuk waktu yang diskrit tidak bergantung pada t , maka untuk membuktikan $\tilde{s}(t+T) = \tilde{s}(t)$, cukup diperhatikan $\tilde{s}(t)$ untuk waktu yang kontinu dengan interval waktunya adalah

$t_n \leq t < t_{n+1}$ dan dari interval waktu tersebut terlihat bahwa batas bawah dari interval $\tilde{s}(t)$ adalah t_n .

Kemudian berdasarkan persamaan (3.17) diperoleh

$$\tilde{s}(t + T) = 1 + \frac{pe^{\mu T}}{1 - e^{\mu T} - p} e^{-\mu((t+T) - t_n)} \quad (3.18)$$

dan berdasarkan Gambar 3.2 diperoleh interval waktu untuk $\tilde{s}(t + T)$ adalah $t_{n+1} \leq t + T < t_{n+2}$, yang berarti batas bawah dari interval $\tilde{s}(t + T)$ adalah t_{n+1} .

Selanjutnya substitusikan t_n pada persamaan (3.18) dengan $t_{n+1} = t_n + T$, diperoleh

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t + T) &= 1 + \frac{pe^{\mu T}}{1 - e^{\mu T} - p} e^{-\mu((t+T) - (t_n + T))}, \\ &= 1 + \frac{pe^{\mu T}}{1 - e^{\mu T} - p} e^{-\mu(t - t_n)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sehingga berdasarkan persamaan (3.19) terbukti bahwa $\tilde{s}(t + T) = \tilde{s}(t)$.

(2) Bukti untuk variabel $\tilde{i}(t)$

Karena pada persamaan (3.17) diperoleh $\tilde{i}(t) = 0$, maka jelas terbukti bahwa $\tilde{i}(t + T) = 0 = \tilde{i}(t)$ atau $\tilde{i}(t + T) = \tilde{i}(t)$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa $\tilde{s}(t + T) = \tilde{s}(t)$ dan

$$\tilde{i}(t + T) = \tilde{i}(t).$$

Selanjutnya ditentukan kestabilan dari solusi periodik bebas infeksi ($\tilde{s}(t), \tilde{i}(t)$), yang digunakan untuk menjawab permasalahan dalam tesis ini. Untuk menentukan kestabilannya pertama digunakan metode linierisasi untuk mendapatkan sistem linier dari model (3.6). Pembahasan selengkapnya dijelaskan pada subbab berikut.

3.5 Kestabilan Solusi Periodik Bebas Infeksi

Model SIR dengan pengaruh *pulse vaccination* merupakan sistem *non-autonomous* persamaan diferensial nonlinier yang solusinya merupakan solusi periodik. Oleh karena itu, untuk melihat kestabilan dari solusi periodik bebas infeksi pada model (3.17) yaitu dengan menggunakan metode linearisasi dan teori Floquet yang telah dijelaskan di Bab 2, adapun langkah-langkahnya sebagai berikut.

Misalkan variabel x merupakan variabel yang menyatakan pertubasi untuk solusi periodik bebas infeksi dari variabel $s(t)$ dan y merupakan variabel yang menyatakan pertubasi untuk solusi periodik bebas infeksi dari variabel $i(t)$, maka untuk penggunaan metode linearisasi pada model (3.6), yaitu dengan memisalkan

$$\begin{aligned} s(t) &= \tilde{s}(t) + x(t), \\ i(t) &= \tilde{i}(t) + y(t). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Karena $\tilde{i}(t) = 0$ maka persamaan (3.20) menjadi

$$\begin{aligned} s(t) &= \tilde{s}(t) + x(t), \\ i(t) &= y(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Persamaan (3.6) diperluas menggunakan ekspansi Taylor dengan metode linierisasi, seperti pada penjelasan di Bab 2 dan dengan menggunakan pemisalan (3.21) maka diperoleh bentuk persamaan linier untuk model (3.6) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\mu x - \beta \tilde{s}(t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(\beta \tilde{s}(t) - \mu - \gamma), \end{aligned} \quad (3.22)$$

dengan skema dari strategi *pulse vaccination* yaitu

$$s(t_n) = (1 - p)s(t_n^-), t_{n+1} = t_n + T.$$

Setelah menentukan sistem linier (3.22) untuk model (3.6), selanjutnya ditentukan kestabilan dari sistem linier tersebut dengan menggunakan teori

Floquet. Teori Floquet merupakan teori yang menyediakan cara untuk memeriksa kestabilan dari sistem linier dengan koefisien periodik. Berdasarkan penjelasan mengenai teori Floquet di Bab 2 maka terlebih dahulu ditentukan matriks fundamental untuk sistem (3.22).

Matriks fundamental $X(t)$ dari sistem linier (3.22) yang didefinisikan untuk interval waktu $0 \leq t \leq T$ adalah

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix},$$

dengan $(x_1(t), y_1(t))$ dan $(x_2(t), y_2(t))$ merupakan solusi dari penurunan persamaan pada sistem linier (3.22) yang mempunyai nilai awalnya adalah

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, x_2(0) = 0, \\ y_1(0) &= 0, y_2(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Untuk mendapatkan matriks fundamental, terlebih dahulu ditentukan solusi dari persamaan (3.22) dengan menggunakan nilai awal pada persamaan (3.23), sehingga diperoleh solusinya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\mu t}, \\ y_1(t) &= 0, \\ y_2(t) &= e^{\int_0^t (\beta \bar{s}(t) - (\mu + \gamma)) dt}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Karena pada (3.24) diperoleh nilai $y_1(t) = 0$, maka untuk analisis selanjutnya dengan menggunakan teori Floquet tidak perlu dicari nilai eksak dari $x_2(t)$.

Akibatnya diperoleh matriks fundamental $X(t)$ dari sistem linier (3.22) yaitu

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-\mu t} & x_2(t) \\ 0 & e^{\int_0^t (\beta \bar{s}(t) - (\mu + \gamma)) dt} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Setelah ditentukan matriks fundamental selanjutnya ditentukan matriks monodromi. Berdasarkan matriks fundamental (3.25) dan karena $X^{-1}(0) = I$, maka diperoleh matriks monodromi $X(T)$ dari sistem linier (3.22) adalah

$$X(T) = \begin{pmatrix} e^{-\mu T} & x_2(T) \\ 0 & e^{\int_0^T (\beta \tilde{s}(t) - (\mu + \gamma)) dt} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Selanjutnya dari matriks monodromi (3.26) diperoleh dua pengali Floquet yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{-\mu T}, \\ \lambda_2 &= e^{\int_0^T (\beta \tilde{s}(t) - (\mu + \gamma)) dt}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Berdasarkan catatan 2 pada penjelasan teori Floquet di subbab 2.5 maka solusi dari persamaan (3.17) akan stabil jika harga mutlak dari semua pengali Floquet lebih kecil dari 1.

Pada persamaan (3.26) diperoleh nilai dari $|\lambda_1|$ yaitu

$$|\lambda_1| = |e^{-\mu T}| < 1.$$

Karena nilai $|\lambda_1| < 1$, maka kestabilan dari solusi (3.17) hanya bergantung pada apakah

$$|\lambda_2| < 1. \quad (3.28)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.27) dan pertidaksamaan (3.28) didapatkan

$$\begin{aligned} \left| e^{\int_0^T (\beta \tilde{s}(t) - (\mu + \gamma)) dt} \right| &< 1, \\ \left| e^{\int_0^T (\beta \tilde{s}(t) - (\mu + \gamma)) dt} \right| &< e^0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Kemudian dengan mengambil pangkat dari pertidaksamaan (3.29) diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^T (\beta \tilde{s}(t) - (\mu + \gamma)) dt &< 0, \\ \int_0^T \beta \tilde{s}(t) dt - (\mu + \gamma)T &< 0, \\ \int_0^T \beta \tilde{s}(t) dt &< (\mu + \gamma)T, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{s}(t) dt &< \frac{\mu + \gamma}{\beta}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Selanjutnya berdasarkan pertidaksamaan (3.8) dan persamaan (3.30) diperoleh bahwa solusi periodik bebas infeksi akan stabil lokal jika memenuhi

$$\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{s}(t) dt < s_c. \quad (3.31)$$

Berdasarkan persamaan (3.31) diperoleh bahwa rata-rata proporsi individu *susceptible* pada tiap *pulse vaccination* nilainya lebih kecil dari nilai ambang batas epidemik s_c .

Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai dari $\tilde{s}(t)$ pada persamaan (3.17) dan s_c pada persamaan (3.8) ke pertidaksamaan (3.31) serta mengintegrasikannya diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 + \frac{pe^{\mu T}}{1-e^{\mu T}-p} e^{-\mu(t-t_n)} \right) dt &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\ \frac{1}{T} \left(\int_0^T dt + \frac{pe^{\mu T}}{1-e^{\mu T}-p} \int_0^T e^{-\mu(t-t_n)} dt \right) &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\ \frac{1}{T} \left(T + \frac{pe^{\mu T}}{1-e^{\mu T}-p} \left(-\frac{1}{\mu} e^{-\mu(T-t_n)} + \frac{1}{\mu} e^{\mu t_n} \right) \right) &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\ \frac{1}{T} \left(T + \frac{pe^{\mu T}}{1-e^{\mu T}-p} \left(-\frac{1}{\mu} e^{-\mu(T-t_n)} + \frac{1}{\mu} e^{\mu t_n} \right) \right) &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\ \frac{1}{T} \left(T - \frac{pe^{\mu T}}{1-e^{\mu T}-p} \frac{1}{\mu} e^{-\mu(T-t_n)} + \frac{pe^{\mu T}}{1-e^{\mu T}-p} \frac{1}{\mu} e^{\mu t_n} \right) &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\ \frac{1}{T} \left(T - \frac{pe^{\mu T}}{\mu(1-e^{\mu T}-p)} e^{-\mu T} e^{\mu t_n} + \frac{pe^{\mu T}}{\mu(1-e^{\mu T}-p)} e^{\mu t_n} \right) &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Karena ruas kanan lebih kecil dari ruas kiri dan karena $\mu > 0$ dan pada $t_n = nT$ nilai $n > 0$ dan $T > 0$ sehingga $t_n > 0$ maka diperoleh $e^{\mu t_n} = e^0 = 1$.

Kemudian dengan mensubstitusikan $e^{\mu t_n} = 1$ ke pertidaksamaan (3.32) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left(T - \frac{pe^{\mu T}}{\mu(1-e^{\mu T}-p)} e^{-\mu T} + \frac{pe^{\mu T}}{\mu(1-e^{\mu T}-p)} \right) &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\ 1 - \frac{p}{\mu(1-e^{\mu T}-p)} + \frac{pe^{\mu T}}{\mu(1-e^{\mu T}-p)} &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mu T(1-e^{\mu T}-p)-p+pe^{\mu T}}{\mu T(1-e^{\mu T}-p)} &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\
\frac{\mu T-\mu Te^{\mu T}-p\mu T-p+pe^{\mu T}}{\mu T(1-e^{\mu T}-p)} &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\
\frac{(\mu T-p)(1-e^{\mu T})-\mu p T}{\mu T(1-e^{\mu T}-p)} &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}, \\
\frac{(\mu T-p)(e^{\mu T}-1)+\mu p T}{\mu T(p-1+e^{\mu T})} &< \frac{\mu+\gamma}{\beta}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Pada pertidaksamaan (3.33) karena nilai parameter dari μ , β , dan γ diberikan pada model maka kestabilan dari solusi periodik bebas infeksi bergantung dari pengambilan nilai p atau T . Dalam tugas akhir ini hanya akan ditentukan nilai dari periode T . Hal ini dijelaskan pada pembahasan selanjutnya.

3.6 Penentuan Nilai Periode *Pulse Vaccination*

Di depan telah disebutkan bahwa pada prinsipnya strategi *pulse vaccination* akan efektif dalam hal mencegah terjadinya penyebaran penyakit campak, apabila selalu dipertahankan kondisi $s(t)$ lebih kecil dari nilai ambang batas epidemic s_c . Selanjutnya berdasarkan hasil akhir pada sub bab 3.5 kestabilan bergantung pada pengambilan nilai T dan berdasarkan pertidaksamaan (3.33) terlihat bahwa kondisi tersebut bisa terwujud apabila periode vaksinasi lebih kecil dari suatu nilai tertentu. Dalam penulisan tesis ini nilai tertentu itu dimisalkan dengan T_{max} yang menyatakan periode vaksinasi maksimum. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan bahwa strategi *pulse vaccination* bisa mencegah terjadinya epidemik penyakit campak jika nilai dari $T < T_{max}$. Selanjutnya apabila periode pelaksanaan vaksinasi dari pelaksanaan ke satu ke yang lainnya melebihi nilai dari T_{max} maka strategi *pulse vaccination* akan gagal dalam hal pencegahan terjadinya penyebaran penyakit campak.

Untuk selanjutnya dalam penulisan tugas akhir ini ditentukan nilai dari T_{max} sebagai berikut. Untuk menentukan T_{max} yaitu dengan melihat proporsi maksimum dari *susceptible* sesaat sebelum vaksinasi. Berdasarkan persamaan (3.12) dan persamaan (3.17) diperoleh bahwa proporsi maksimum dari *susceptible* sesaat sebelum terjadi *pulse vaccination* adalah $Q(t)$ dengan $Q(t) = s^*/(1-p)$

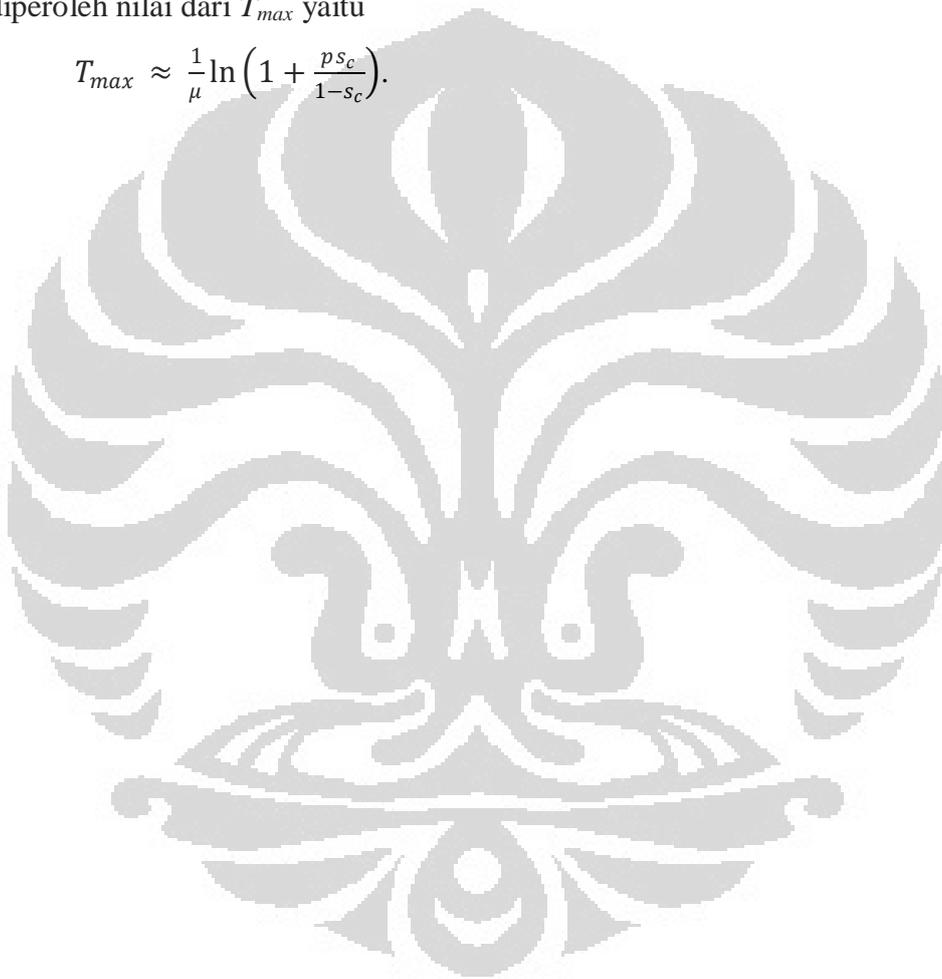
dimana s^* menyatakan proporsi minimum dari *susceptible* setelah terjadi *pulse vaccination*.

Selanjutnya karena supaya tidak terjadi penyebaran penyakit campak haruslah $s(t) < s_c$, maka untuk mencari nilai dari T_{max} kita perlu menetapkan bahwa

$$s^*/(1 - p) < s_c. \quad (3.34)$$

Dengan mensubstitusikan nilai dari s^* dan s_c pada pertidaksamaan (3.34) maka diperoleh nilai dari T_{max} yaitu

$$T_{max} \approx \frac{1}{\mu} \ln \left(1 + \frac{ps_c}{1-s_c} \right). \quad (3.35)$$



BAB 4

SIMULASI MODEL SIR DENGAN *PULSE VACCINATION*

Pada bab ini dibahas simulasi model epidemik SIR dalam menganalisa strategi *pulse vaccination* dan mensimulasikan stabilitas model epidemik SIR yang telah diperoleh pada subbab 3.2, dengan melihat pengaruh dari pengambilan nilai T . Simulasi dilakukan dengan menggunakan *software* Matlab. Pada simulasi ini diberikan sebuah kasus tentang penyebaran penyakit campak yang akan disimulasikan ke dalam model epidemik SIR dengan pengaruh *pulse vaccination* yang telah dibahas di Bab 3. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi di bab ini dapat dilihat pada Tabel 4.1. Selain itu, interval waktu pelaksanaan strategi *pulse vaccination* dalam simulasi ini adalah 30 tahun.

Tabel 4.1. Nilai parameter pada simulasi model epidemik SIR dengan *pulse vaccination*

Parameter	Nilai Parameter
$s(0)$	0,0556
$i(0)$	0,05
μ	0,02/tahun
β	1800/tahun
γ	100/tahun
p	0,515

Sumber: nilai parameter μ , β , dan γ diperoleh dari (Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z., 1998)

Model epidemik SIR dengan pengaruh strategi *pulse vaccination* pada model (3.6) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 bisa dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{ds}{dt} = 0,02 - 1800si - 0,02s,$$

$$\frac{di}{dt} = 1800si - 100i - 0,02i,$$

$$\frac{dr}{dt} = 100i - 0,02r, \quad (4.1)$$

$$s(t_n) = s(t_n^-) - 0,5 s(t_n^-),$$

$$i(t_n) = i(t_n^-),$$

$$r(t_n) = r(t_n^-) + 0,5 s(t_n^-).$$

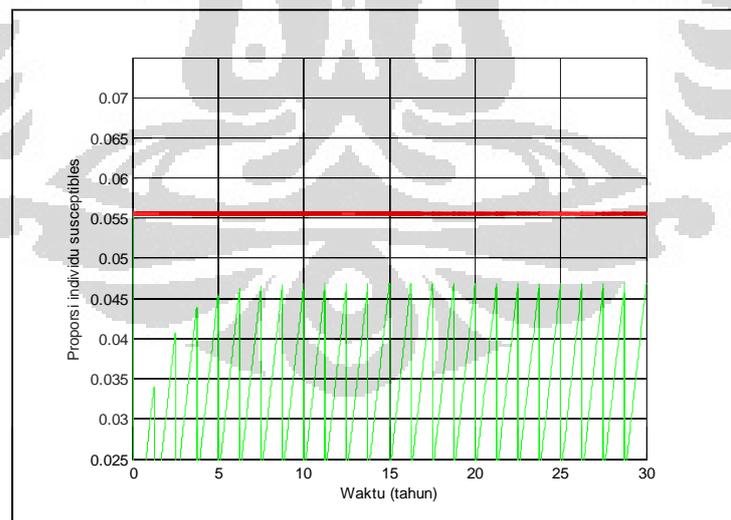
Selanjutnya dicari solusi numerik dari model (4.1) dengan menggunakan program Matlab. *Source code* simulasi dapat dilihat pada lampiran tesis ini.

Berdasarkan perhitungan nilai T_{max} pada subbab 3.6 dan dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.1, diperoleh $T_{max} = 1,49 \approx 1,5$ tahun. Untuk melihat pengaruh dari nilai T terhadap keberhasilan dari strategi *pulse vaccination*, simulasi dilakukan dengan pengambilan nilai T yang berbeda beda. Nilai T yang diambil dalam simulasi adalah 1,25 tahun, 1,5 tahun, dan 2 tahun.

1. Simulasi untuk $T = 1,25$ tahun

Karena nilai $T_{max} = 1,49 \approx 1,5$ tahun, maka pertama akan dilihat pengaruh strategi *pulse vaccination* dengan nilai $T < T_{max}$ yaitu $T = 1,25$ tahun.

Berdasarkan *source code* pada Lampiran 1 dan Lampiran 2, dihasilkan keluaran sebagai berikut. Untuk individu *susceptible* diperoleh



Keterangan : — = *epidemic threshold* s_c (3.8)

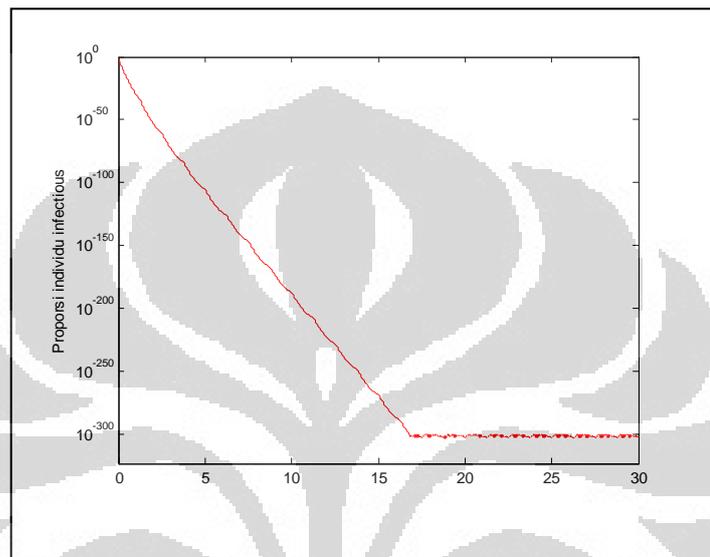
— = pergerakan $s(t)$ untuk model (4.1)

— = titik tetap s^* (3.15)

Gambar 4.1 Proporsi individu *susceptible* berdasarkan *pulse vaccination* pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 1,25$ tahun

Hasil keluaran pada Gambar 4.1 menunjukkan bahwa proporsi populasi *susceptible* pada saat terjadi vaksinasi maupun pada saat tidak terjadi vaksinasi nilainya berada jauh di bawah nilai ambang batas epidemik s_c .

Untuk individu *infectious* diperoleh



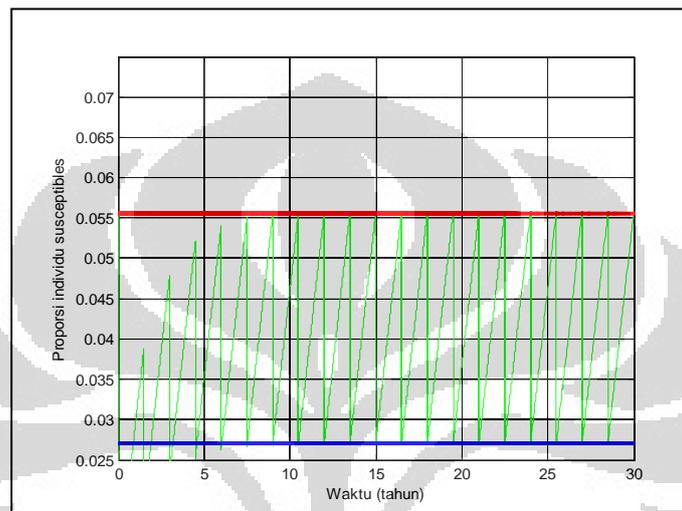
Keterangan : nilai proporsi individu *infectious* dalam skala logaritma
 Gambar 4.2 Proporsi individu *infectious* berdasarkan *pulse vaccination* pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 1,25$ tahun

Berdasarkan keluaran pada Gambar 4.2 terlihat bahwa proporsi individu *infectious* lama kelamaan semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa dengan vaksinasi akan mengurangi nilai proporsi individu yang terinfeksi.

Berdasarkan Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 terlihat bahwa strategi *pulse vaccination* dengan pelaksanaan vaksinasi setiap 1,25 tahun yang berarti nilai $T < T_{max}$ sangat berhasil mencegah terjadinya epidemik penyakit campak. Hal ini dikarenakan nilai proporsi individu *susceptible* pada saat dilakukan vaksinasi maupun pada saat tidak dilakukan vaksinasi berada jauh di bawah nilai ambang batas epidemik s_c , dan untuk proporsi individu *infectious* seiring dengan berjalannya waktu nilainya semakin kecil.

2. Simulasi untuk $T = 1,5$ tahun

Berdasarkan *source code* pada Lampiran 1 dan Lampiran 2 dengan mengganti nilai T menjadi $T = 1,5$, diperoleh keluaran sebagai berikut. Untuk individu *susceptible* diperoleh

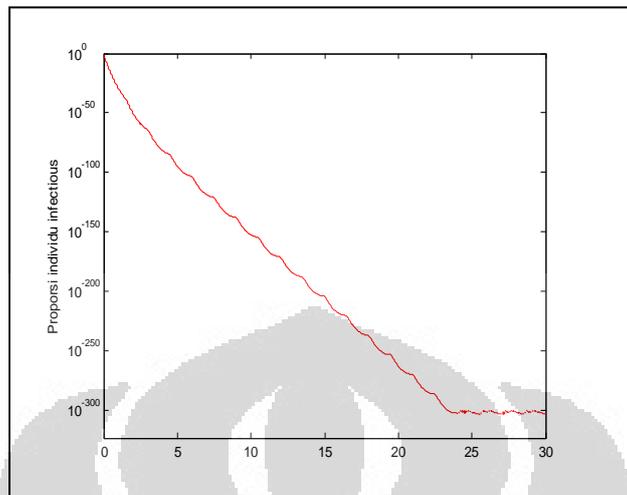


Keterangan : — = *epidemic threshold* s_c (3.8)
 — = pergerakan $s(t)$ untuk model (4.1)
 — = titik tetap s^* (3.15)

Gambar 4.3 Proporsi individu *susceptible* berdasarkan *pulse vaccination* pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 1,5$ tahun

Hasil keluaran pada Gambar 4.3 menunjukkan bahwa proporsi populasi *susceptible* pada saat terjadi vaksinasi, nilainya berada di bawah nilai ambang batas epidemik s_c dan lama kelamaan mulai $t = 10$ nilainya mendekati titik tetap s^* atau dapat dikatakan nilai dari $s(t)$ konvergen ke titik tetap s^* . Hal ini sesuai dengan teori pada Bab 3. Sedangkan pada saat tidak terjadi vaksinasi, lama kelamaan seiring berjalannya waktu nilai proporsi populasi *susceptible* mendekati nilai ambang batas epidemik s_c tetapi nilainya tidak melebihi nilai ambang batas epidemik tersebut.

Untuk individu *infectious* diperoleh



Keterangan : nilai proporsi individu *infectious* dalam skala logaritma

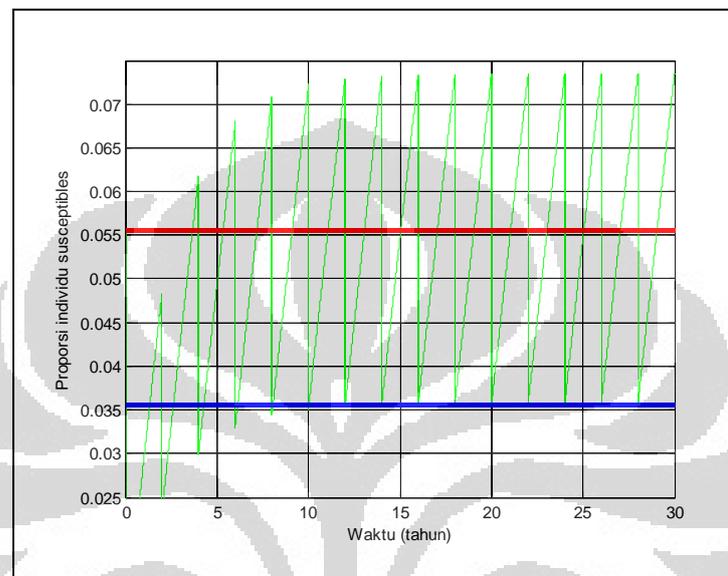
Gambar 4.4 Proporsi individu *infectious* berdasarkan *pulse vaccination* pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 1,5$ tahun

Berdasarkan keluaran pada Gambar 4.4 terlihat bahwa proporsi individu *infectious* lama kelamaan nilainya semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa dengan vaksinasi akan mengurangi nilai proporsi individu yang terinfeksi.

Berdasarkan Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 terlihat bahwa strategi *pulse vaccination* dengan pelaksanaan vaksinasi setiap 1,5 tahun yang berarti nilai $T < T_{max}$ dan nilai T sama dengan hasil aproksimasi dari nilai T_{max} , yaitu $T_{max} = 1,49 \approx 1,5$ berhasil mencegah terjadinya epidemik penyakit campak. Hal ini dikarenakan nilai proporsi individu *susceptible* pada saat dilakukan vaksinasi berada di bawah nilai ambang batas epidemik s_c , dan pada saat tidak dilakukan vaksinasi nilainya tidak melebihi nilai ambang batas epidemik s_c . Selain itu, untuk proporsi individu *infectious* seiring dengan berjalannya waktu nilainya semakin kecil.

3. Simulasi untuk $T = 2$ tahun

Berdasarkan *source code* pada Lampiran 1 dan Lampiran 2, dengan mengganti nilai dari T menjadi $T = 2$, diperoleh keluaran sebagai berikut. Untuk individu *susceptible* diperoleh

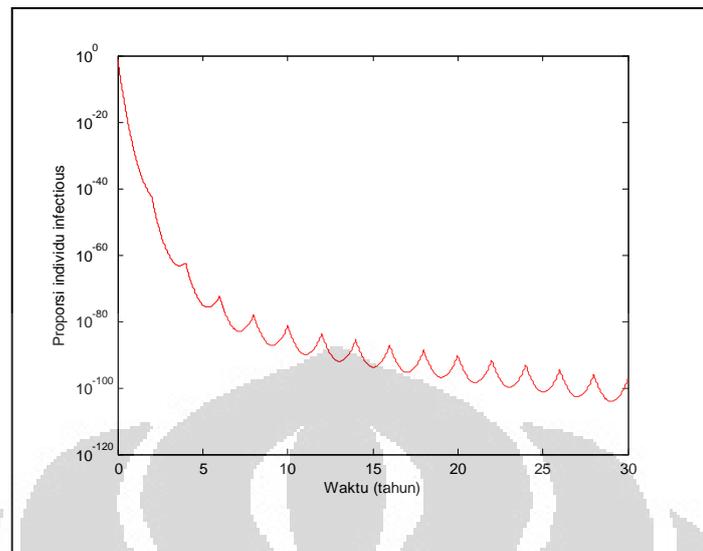


Keterangan : — = *epidemic threshold* s_c (3.8)
 — = pergerakan $s(t)$ untuk model (4.1)
 — = titik tetap s^* (3.15)

Gambar 4.5 Proporsi individu *susceptible* berdasarkan *pulse vaccination* pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 2$ tahun.

Hasil keluaran pada Gambar 4.5 menunjukkan bahwa nilai proporsi populasi *susceptible* pada saat terjadi vaksinasi berada di bawah nilai ambang batas epidemik s_c dan lama kelamaan mulai $t = 10$ nilainya mendekati titik tetap s^* atau dapat dikatakan nilai dari $s(t)$ konvergen ke titik tetap s^* . Hal ini sesuai dengan teori pada Bab 3. Sedangkan pada saat tidak terjadi vaksinasi, lama kelamaan seiring berjalannya waktu nilai proporsi populasi *susceptible* lebih besar dari nilai ambang batas epidemik s_c atau dapat dikatakan nilainya melebihi nilai ambang batas epidemik tersebut.

Untuk individu *infectious* diperoleh



Keterangan : nilai proporsi individu *infectious* dalam skala logaritma
 Gambar 4.6 Proporsi individu *infectious* berdasarkan *pulse vaccination* pada model epidemik SIR dengan nilai $T = 2$ tahun

Berdasarkan keluaran pada Gambar 4.6 terlihat bahwa jumlah individu *infectious* lama kelamaan semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa dengan vaksinasi akan mengurangi jumlah individu yang terinfeksi.

Berdasarkan Gambar 4.5 dan Gambar 4.6 terlihat bahwa strategi *pulse vaccination* dengan pelaksanaan vaksinasi setiap 2 tahun yang berarti nilai $T > T_{max}$ berhasil mencegah terjadinya epidemik penyakit campak hanya pada saat dilakukan vaksinasi dan pada saat tidak dilakukan vaksinasi terjadi epidemik penyebaran campak. Hal ini dikarenakan nilai proporsi individu *susceptible* pada saat dilakukan vaksinasi berada di bawah nilai ambang batas epidemik s_c , dan pada saat tidak dilakukan vaksinasi nilainya melebihi nilai ambang batas epidemik s_c .

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi kesimpulan yang dapat diberikan oleh penulis berdasarkan dari hasil pembahasan bab-bab sebelumnya, serta saran yang dapat diberikan oleh penulis untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penulisan tesis ini dapat dirinci sebagai berikut:

1. Model epidemik SIR penyakit campak dengan *pulse vaccination* dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s,$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i - \mu i,$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r,$$

$$s(t_n) = s(t_n^-) - p s(t_n^-),$$

$$i(t_n) = i(t_n^-),$$

$$r(t_n) = r(t_n^-) + p s(t_n^-),$$

dengan s menyatakan proporsi individu *susceptible*, i menyatakan proporsi individu *infectious*, r menyatakan proporsi individu *recovered*, $s(t_n)$ menyatakan proporsi individu *susceptible* saat pemberian vaksin ke- n , $s(t_n^-)$ menyatakan proporsi individu *susceptible* sesaat sebelum pemberian vaksin ke- n .

2. Model di atas merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier *non-autonomous* sehingga solusi dari model tersebut merupakan solusi periodik. Berdasarkan analisa dinamik diperoleh solusi periodik bebas infeksi dari model epidemik SIR penyakit campak dengan pengaruh strategi *pulse vaccination* adalah

$$\tilde{s}(t) = 1 + \frac{p e^{\mu T}}{1 - e^{\mu T} - p} e^{-\mu(t-t_n)}, t_n \leq t < t_{n+1},$$

$$\tilde{s}(t) = s^*, t = t_{n+1},$$

$$\tilde{i}(t) = 0.$$

3. Dengan menggunakan metode linierisasi dan teori Floquet diperoleh bahwa solusi periodik bebas infeksi tersebut akan stabil secara lokal jika

$$\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{s}(t) dt < \frac{\mu + \gamma}{\beta} = s_c. \quad (5.1)$$

4. Selanjutnya berdasarkan (5.1) diperoleh kestabilan solusi periodik bebas infeksi bergantung dari nilai periode *pulse vaccination* (T), yaitu nilai dari T haruslah $T < T_{max}$.

5. Berdasarkan nilai proporsi maksimum dari *susceptible* sesaat sebelum vaksinasi dan nilai dari *epidemic threshold*, diperoleh nilai aproksimasi dari T_{max} adalah

$$T_{max} \approx \frac{1}{\mu} \ln \left(1 + \frac{p s_c}{1 - s_c} \right)$$

6. Secara keseluruhan dapat dikatakan bahwa berdasarkan dari kriteria kestabilan solusi periodik bebas infeksi maka dapat dikatakan bahwa strategi *pulse vaccination* berhasil dalam hal pencegahan terjadinya penyebaran penyakit campak asalkan nilai $T < T_{max}$ dengan nilai

$$T_{max} \approx \frac{1}{\mu} \ln \left(1 + \frac{p s_c}{1 - s_c} \right).$$

5.2 Saran

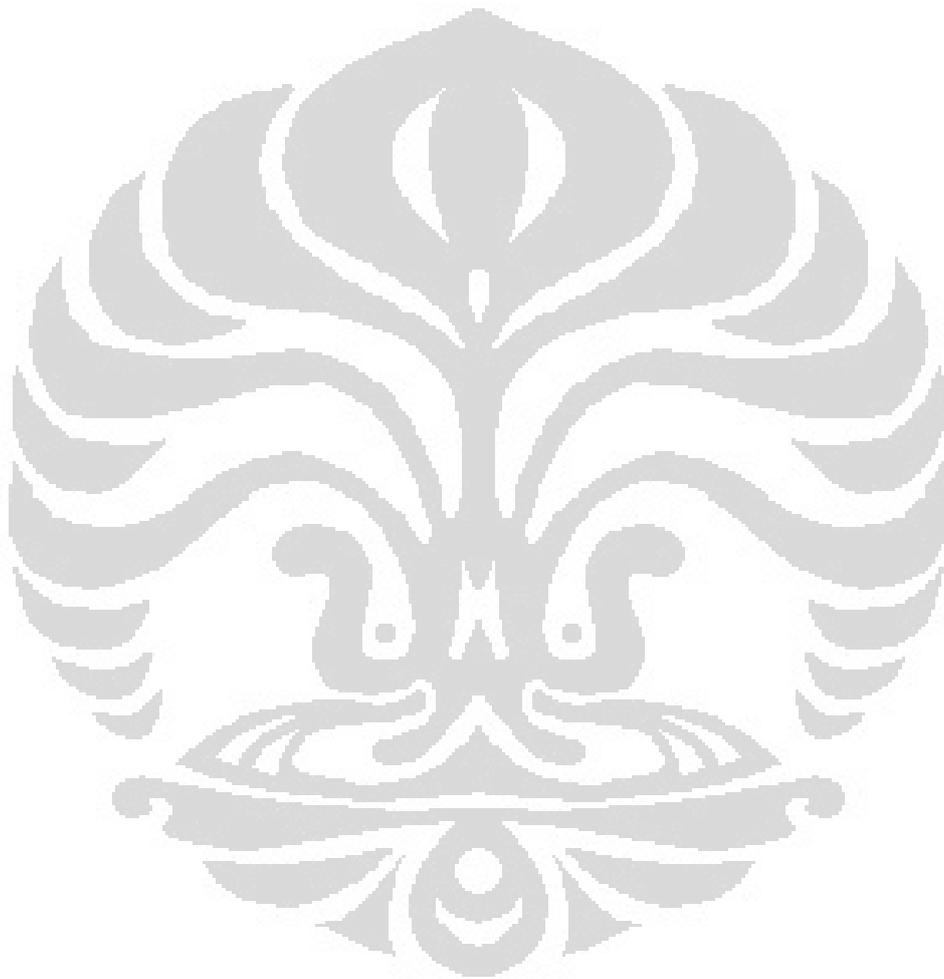
Dalam penulisan tesis ini pengaruh dari strategi *pulse vaccination* ditentukan hanya dengan mencari solusi periodik bebas infeksi. Analisa dinamik pada model epidemik SIR dengan pengaruh *pulse vaccination* bisa juga dilakukan dengan menentukan solusi periodik epidemik. pada penulisan tugas akhir ini menentukan kestabilan dari solusi periodik bebas penyakit menggunakan metode linierisasi yang akan diperoleh kestabilan lokal. Berdasarkan hal-hal tersebut, penulis memberikan saran kepada para pembaca yang tertarik untuk mengembangkan pembahasan di tesis ini dengan menentukan solusi periodik epidemik serta menentukan kestabilan global dari solusi periodik bebas infeksi maupun solusi periodik epidemik.

DAFTAR REFERENSI

- Agur, Z., Cojocaru, L., Major, G., Anderson, R.M., & Danon, Y. (1993). Pulse mass measles vaccination across age cohorts. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* 90, 11698-11702.
- Bellomo, N. & Preziosi, L. (1995). *Modeling mathematical methods and scientific computation*. Florida: CRC Press.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillation, dynamical systems, and bifurcations of vektor fields*. New York: Springer-Verlag.
- Hale, J. & Koçak, H. (1991). *Dynamics and bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- Hethcote, H.W. (2000). The mathematics of infectious disease. *SIAM Review* 42, 4, 599-653.
- Khamsi, M.A. (2004). *Equilibrium point analysis: linearization technique*. Utrecht University, Utrecht.
- Meng, X., & Chen, L. (2008). The dynamics of a new SIR epidemic model concerning pulse vaccination strategy. *Applied Mathematics and Computation*, 197, 582-597.
- Perko, L. (1996). *Differential equation and dynamical systems*. New York: Springer-Verlag.
- Scheined-Schaulies, S. (1999). Pathogenic aspects of measles virus infections. *Arch Virol Suppl*, 15, 139-58.
- Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z. (1998). Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. *Bull. Math. Biol*, 60, 6, 1123-1148.
- Stone, L., Shulgin, B., & Agur, Z. (2000). Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model. *Mathematic and Computer Modelling*, 31, 207-215.
- UNICEF. (2007). Going the extra mile. *Unicef Indonesia Immunization Drive Reaches Remote Areas*. http://www.unicef.org/indonesia/reallives_7295.html.

Verhulst, F. (1996). *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. New York: Springer-Verlag.

WHO. (2007). Measles. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs286/en/>



LAMPIRAN 1

Source Code Simulasi Model Epidemik SIR

```
clear all;
clc;
% Ini merupakan source code MATLAB dari program 8.3 untuk model
epidemik SIR dengan pengaruh strategi pulse vaccination.
% Vaksinasi dimulai pada saat tV, dengan proporsi yang divaksin
adalah p dari semua individu susceptible setiap T tahun.

% Nilai parameter-parameter yang digunakan pada model.
beta1=1800;
gamma1=100;
mu1=0.02;
S0=0.0556;
I0=0.05;
p=0.515;
T=1.25;
SC=(mu1+gamma1)/beta1
Sstar=(1-p)*(exp(mu1*T)-1)/(p-1+exp(mu1*T))
tV=1.25;
MaxTime=30; % MaxTime adalah batas waktunya terjadi vaksinasi

% Evaluasi keabsahan semua nilai parameter
if S0<=0
    error('Nilai awal dari proporsi susceptibles kurang dari atau
sama dengan nol',S0);
end

if I0<=0
    error('Nilai awal dari proporsi infectious kurang dari atau
sama dengan nol',I0);
end

if beta1<=0
    error('Laju penularan beta kurang dari atau sama dengan
nol',beta1);
end

if gamma1<=0
    error('Laju kesembuhan gamma kurang dari atau sama dengan
nol',gamma1);
end

if mu1<0
    error('Laju kelahiran=laju kematian mu kurang dari nol',mu1);
end

if p<0 || p>1
    error('Proporsi vaksinasi p tidak antara nol dan satu',p);
end

if T<0
    error('Waktu antara pulses T kurang dari atau sama dengan
nol',T);
```

```

end

if tV<0 || tV>=MaxTime
    error('Waktu vaksinasi pertama tV tidak antara nol dan akhir
waktu vaksinasi',tV);
end

if MaxTime<=0
    error('Waktu maksimum vaksinasi kurang dari atau sama dengan
nol',MaxTime);
end

if S0+I0>1
    warning('Nilai awal dari susceptibles+infectious lebih besar
dari satu',S0,I0,S0+I0);
end

% Iterasi
options = odeset('RelTol', 1e-12, 'AbsTol', [1e-400 1e-400]);
[t, pop]=ode45(@Diff_8_3,[0 tV],[S0 I0],options,[beta1 gamma1
mul]);
TT=t;
S=pop(:,1);
I=pop(:,2);
while TT(end)<MaxTime
    % Vaksinasi sebagian p dari individu susceptible
    pop(end,1)=pop(end,1)*(1-p);
    [t, pop]=ode45(@Diff_8_3, [TT(end) min(TT(end)+T,MaxTime)],
pop(end,:),options,[beta1 gamma1 mul]);
    TT=[TT; t];
    S=[S; pop(:,1)];
    I=[I; pop(:,2)];
end

% Plots individu susceptibles
figure(1)
plot(TT,S,'-g');
hold on;
grid on
Y=get(gca,'YLim');
plot(TT,SC,'r');
plot(TT,Sstar,'b');
hold off
xlabel 'Waktu (tahun)';
ylabel 'Proporsi individu susceptibles'
axis([0 MaxTime 0.025 0.075])

% Plots individu infectious
figure(2)
semilogy(TT,I,'-r');
hold on;
hold off
xlabel 'Waktu (tahun)';
ylabel 'Proporsi individu infectious'

```

LAMPIRAN 2

Source Code Fungsi Diff_8.3

```
function dPop=Diff_8_3(t,pop, parameter)

beta1=parameter(1);
gamma1=parameter(2);
mu1=parameter(3);

dPop=zeros(2,1);

dPop(1)= mu1 - beta1*pop(1)*pop(2) - mu1*pop(1);
dPop(2)= beta1*pop(1)*pop(2) - (gamma1 + mu1)*pop(2);
```

