



UNIVERSITAS INDONESIA

**PELABELAN TOTAL (a, d) -BUSUR ANTI AJAIB
PADA GABUNGAN GRAF KORONA DAN
GABUNGAN GRAF PRISMA**

TESIS

**MURTININGRUM
1006786190**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012**



UNIVERSITAS INDONESIA

**PELABELAN TOTAL (a, d) -BUSUR ANTI AJAIB
PADA GABUNGAN GRAF KORONA DAN
GABUNGAN GRAF PRISMA**

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

**MURTININGRUM
1006786190**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk,
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Murtiningrum

NPM : 1006786190

Tanda Tangan : 

Tanggal : 10 Januari 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :
Nama : Murtiningrum
NPM : 1006786190
Program Studi : Magister Matematika
Judul Tesis : Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada
Gabungan Graf Korona dan Gabungan Graf
Prisma

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing 1	: Dr. Kiki A. Sugeng, M.Si	(.....)
Pembimbing 2	: Dra. Siti Aminah, M.Kom	(.....)
Penguji 1	: Prof. Dr. Djati Kerami	(.....)
Penguji 2	: Dr. rer. nat. Hendri Murfi, S.Si., M.Kom	(.....)
Penguji 3	: Arie Wibowo, M.Si	(.....)

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 10 Januari 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Magister Sains, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Kiki A. Sugeng dan Dra. Siti Aminah, M.Kom, selaku dosen pembimbing I dan II yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Yudi Satria, M.T, selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA UI yang telah membimbing dan mengarahkan selama masa perkuliahan.
3. Prof. Dr. Djati Kerami, selaku Ketua Program Studi Magister Matematika dan Dr. rer. nat. Hendri Murfi, S.Si., M.Kom, selaku Sekretaris Program Studi sekaligus Dosen Pembimbing Akademik yang memberikan arahan kepada penulis selama menyelesaikan studi
4. Seluruh staf pengajar di Program Studi Magister Matematika FMIPA UI, yang tidak mungkin disebutkan satu persatu, atas arahan, bimbingan dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan. Karyawan/karyawati Departemen Matematika FMIPA UI, yang selalu siap membantu saat penulis butuhkan.
5. Pemerintah Provinsi Jambi yang telah memfasilitasi penulis sehingga penulis dapat menempuh pendidikan di Universitas Indonesia.
6. Suami tercinta Tuji Wiyatno, M.Pd yang tak pernah bosan memberikan semangat untuk menyelesaikan tesis ini. Anakku tersayang M. Daffa, M. Naufal dan Thoriq Abdul Hadi, ma'afkan bunda kebersamaan kita banyak yang tersita.

7. Bapak H. Sidam Cholid dan Ibunda Hj. Seniwati, Ibunda Hj. Daliyem, kasih sayang kalian tak dapat digantikan apapun. Mas Susilo, Titi, Dede, terima kasih atas dukungannya.
8. Rekan seperjuangan dari Jambi, Haryono, Supri, Ayin, Rida, Lisa, Risda, Mbak Tri, ayo semangat.
9. Rekan-rekan satu angkatan di Program Magister Matematika, Mbak Rina, Desti, Pak PJ, Dilla, Teh Siti, Titi, Mbak Fathin, Gita, Lia, Pak Iwan, Uun, Dewi, Mia dan rekan-rekan semua yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu, terima kasih atas kebersamaan dan diskusi-diskusinya.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Murtiningrum

NPM : 1006786190

Program Studi : Magister Matematika

Departemen : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jenis Karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-eksklusive Royalti-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf Korona dan Gabungan Graf Prisma

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 10 Januari 2012

Yang menyatakan


.....
(Murtiningrum)

ABSTRAK

Nama : Murtiningrum
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf Korona dan Gabungan Graf Prisma

Misalkan $G(p, q)$ adalah sebuah graf dengan $p = |V(G)|$ dan $q = |E(G)|$ masing-masing adalah banyaknya simpul dan busur dari G . Pelabelan total (a, d) -busur anti ajaib $((a, d)$ -PTBAA) dari sebuah graf $G(p, q)$ adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga himpunan bobot busur $\{f(u) + f(uv) + f(v) : uv \in E(G)\}$ sama dengan $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat $a > 0$ dan $d \geq 0$. Jika $f(V) = \{1, 2, \dots, p\}$ maka pelabelan f disebut pelabelan total super (a, d) -busur anti ajaib $((a, d)$ -PTSBAA), dan jika $d = 0$ maka pelabelan f disebut juga pelabelan total busur ajaib (PTBA). Pada tesis ini dibangun suatu konstruksi (a, d) -PTBAA pada gabungan m graf korona $C_n \odot P_2$ isomorfik untuk $d = 0$ dan $d = 2$, dan gabungan m graf prisma $C_n \times P_2$ isomorfik untuk $d = 0, d = 1$ dan $d = 2$.

Kata kunci : Pelabelan total (a, d) -busur anti ajaib, pelabelan total super (a, d) -busur anti ajaib, gabungan graf isomorfik, graf korona, graf prisma.
xi+77 halaman : 23 gambar; 11 tabel
Daftar Pustaka : 8 (1986-2011)

ABSTRACT

Name : Murtiningrum
Program Study : Magister of Mathematic
Title : (a, d) -Edge Antimagic Total Labeling on Union of
Corona Graphs and Union of Prisms Graphs

Let $G(p, q)$ is a graph with $p = |V(G)|$ and $q = |E(G)|$ be respectively the number of vertices and the number of edges of G . An (a, d) -edge antimagic total labeling ((a, d) -EAT labeling) of a $G(p, q)$ graph is defined as a one-to-one mapping f from $V(G) \cup E(G)$ onto the set $\{1, 2, \dots, p + q\}$, so that the set of weight $\{f(u) + f(uv) + f(v) : uv \in E(G)\}$ is equal to $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + q - 1d\}$ for two integer $a > 0$ and $d \geq 0$. If $fV=1, 2, \dots, p$ then f labeling is called super (a, d) -edge antimagic total labeling (super (a, d) -EAT labeling) and when $d = 0$ then f labeling is called edge magic total labeling (EMT labeling). In this thesis was constructed (a, d) -EAT labeling on union of isomorphic corona $C_n \odot P_2$ graphs for $d = 0$ and $d = 2$, and union of isomorphic prisms $C_n \times P_2$ graphs for $d = 0, d = 1$ and $d = 2$.

Key words : (a, d) -edge antimagic total labeling, super (a, d) -edge antimagic total labeling, union isomorphic graphs, corona graph, prisms graph.

xi+77 pages : 23 pictures; 11 tables

Bibliography : 8 (1986-2011)

DAFTAR ISI

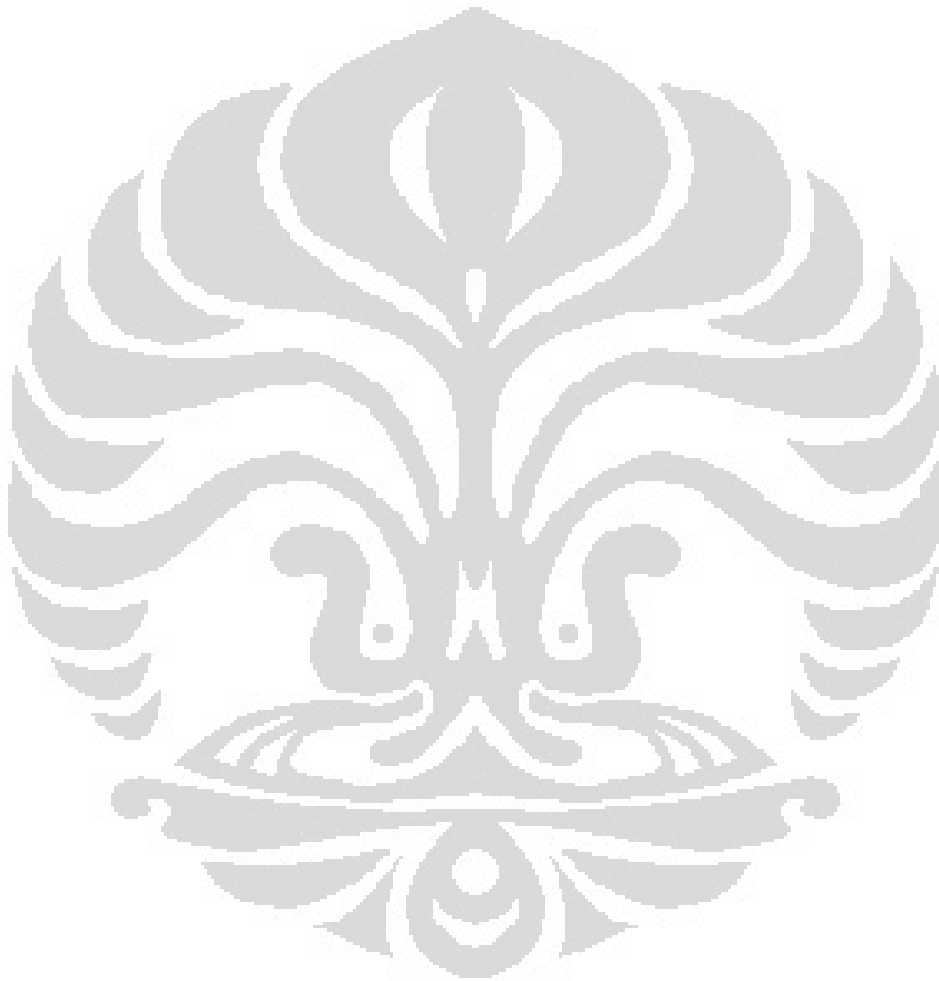
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH.....	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT.....	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR LAMPIRAN.....	xi
1. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan.....	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Metode penelitian	3
2. LANDASAN TEORI.....	4
2.1 Pengertian Graf.....	4
2.2 Operasi Pada Graf	6
2.2.1 Gabungan Graf	6
2.2.2 Produk Korona	7
2.2.3 Produk Kartesius	8
2.3 Beberapa Graf Sederhana.....	8
2.3.1 Graf Lintasan dan Graf Lingkaran.....	8
2.3.2 Graf Korona $C_n \odot P_2$	9
2.3.3 Graf Prisma	10
2.4 Pelabelan Graf	10
2.4.1 Pelabelan Total (a, d) -Busur Ajaib	10
2.4.2 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib	11
3. PELABELAN TOTAL (a, d)-BUSUR ANTI AJAIB PADA GABUNGAN GRAF KORONA DAN GABUNGAN GRAF PRISMA.....	14
3.1 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Graf Korona $C_n \odot P_2$	14
3.2 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf Korona $C_n \odot P_2$	19
3.3 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Graf Prisma $C_n \times P_2$	38
3.4 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf Prisma $C_n \times P_2$	44
4. KESIMPULAN DAN SARAN	64
DAFTAR PUSTAKA	66

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1.	Pelabelan graf	1
Gambar 2.1.	Contoh sebuah graf.....	4
Gambar 2.2.	Contoh dua graf yang isomorfik.....	6
Gambar 2.3.	Gabungan graf	7
Gambar 2.4.	Graf korona	7
Gambar 2.5.	Contoh produk kartesius dari dua graf	8
Gambar 2.6.	Graf lintasan dan graf lingkaran	9
Gambar 2.7.	Konstruksi graf korona	9
Gambar 2.8.	Graf prisma	10
Gambar 2.9.	PTBA pada graf lingkaran C_7	11
Gambar 2.10.	(18, 1)-PTBAA pada graf lingkaran C_8	12
Gambar 2.11.	(26, 1)-PTBAA pada graf lingkaran C_8	13
Gambar 3.1.	Graf korona.....	15
Gambar 3.2.	(27, 2)-PTBAA pada graf korona $C_7 \odot P_2$	19
Gambar 3.3.	Gabungan graf korona	20
Gambar 3.4.	(90, 2)-PTBAA pada graf $5(C_5 \odot P_2)$	34
Gambar 3.5.	(189, 0)-PTBAA pada graf $5(C_5 \odot P_2)$	37
Gambar 3.6.	Graf prisma	38
Gambar 3.7.	(20, 2)-PTBAA pada graf prisma $C_7 \times P_2$	43
Gambar 3.8.	Gabungan graf prisma	44
Gambar 3.9.	(82, 1)-PTBAA pada graf $4(C_5 \times P_2)$	49
Gambar 3.10.	(65, 2)-PTBAA pada graf $5(C_5 \times P_2)$	59
Gambar 3.11.	(139, 0)-PTBAA pada graf $5(C_5 \times P_2)$	62

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Bobot busur graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2	67
Lampiran 2. Bobot busur graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_3	71
Lampiran 3. Bobot busur graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_4	75



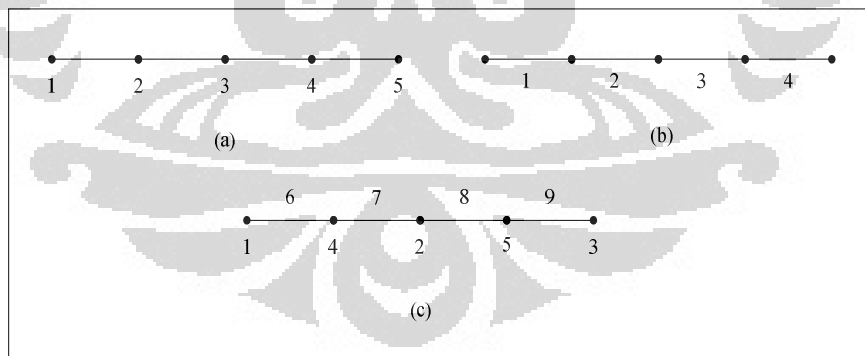
BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan adalah bagian dari teori graf. Pelabelan graf pertama kali di perkenalkan oleh Sedláček pada tahun 1963 (Bača dan Miller, 2008). Konsep pelabelan graf sangat dikenal dalam teori graf tidak hanya karena tantangan pelabelannya tetapi juga karena aplikasinya pada ilmu lain, sebagai contoh x-ray, kristalografi, teori kode (kriptografi), astronomi, desain sirkuit, desain jaringan komunikasi dan lain-lain.

Sebuah graf terdiri atas himpunan simpul-simpul dan himpunan busur-busur. Pada suatu graf dapat dikenakan pelabelan. Pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan simpul-simpul dan atau himpunan busur-busur suatu graf ke himpunan bilangan (biasanya bilangan bulat) yang disebut label. Pelabelan dengan domain himpunan simpul disebut pelabelan simpul, pelabelan dengan domain himpunan busur disebut pelabelan busur dan pelabelan dengan domain himpunan simpul dan busur disebut pelabelan total.



Gambar 1.1. (a) Pelabelan simpul (b) Pelabelan busur (c) Pelabelan total

Selanjutnya label yang dikenakan pada simpul dan busur tersebut dijumlahkan. Penjumlahan dari label yang dikenakan pada simpul dan busur dari suatu graf disebut bobot. Bobot simpul adalah penjumlahan label simpul dengan

label busur yang hadir pada simpul tersebut dan bobot busur adalah penjumlahan label busur dengan label simpul yang dihubungkan oleh busur tersebut.

Bobot-bobot simpul atau bobot-bobot busur yang diperoleh dari penjumlahan label tersebut dapat merupakan bilangan konstan atau berbeda. Jika pelabelan menghasilkan bobot-bobot simpul atau bobot-bobot busur yang konstan disebut pelabelan ajaib. Pelabelan ajaib diperkenalkan oleh Sedláček pada tahun 1963. Ia mendefinisikan sebuah graf adalah ajaib jika mempunyai pelabelan simpul atau pelabelan busur sedemikian hingga bobot-bobot simpul atau bobot-bobot busurnya konstan (Bača dan Miller, 2008).

Jika pelabelan menghasilkan bobot-bobot simpul atau bobot-bobot busur yang berbeda disebut pelabelan anti ajaib. Pelabelan anti ajaib ini diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990 (Gallian, 2010). Selanjutnya pada tahun 1993 Bodendiek dan Walter menemukan bahwa bobot-bobot simpul atau bobot-bobot busur dari pelabelan anti ajaib ini tidak hanya berbeda tetapi juga membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku pertama $a > 0$ dan beda $d \geq 0$ (Bača dan Miller, 2008).

Hartsfield dan Ringel mengeluarkan konjektur bahwa setiap graf yang terhubung kecuali K_2 memiliki pelabelan anti ajaib (Bača dan Miller, 2008). Hal ini mendorong para peneliti untuk terus melakukan konstruksi pelabelan anti ajaib seiring ditemukannya kelas-kelas graf yang baru. Salah satunya adalah konstruksi pelabelan total (a, d) -busur anti ajaib (disingkat (a, d) -PTBAA).

Konstruksi (a, d) -PTBAA telah dilakukan pada beberapa kelas graf, baik yang berupa graf tunggal maupun gabungan graf. Beberapa hasil yang telah diperoleh diantaranya adalah: graf lingkaran memiliki (a, d) -PTBAA untuk $d \in \{0, 1, 2\}$ (Bača dan Miller, 2008); graf korona $C_n \odot P_2$ memiliki (a, d) -PTBAA untuk $d \in \{2\}$ (Nugroho dkk, 2011); graf prisma $C_n \times P_2$ memiliki (a, d) -PTBAA untuk $d \in \{0, 1, 2\}$ (Sugeng dkk, 2006); gabungan graf lingkaran isomorfik memiliki (a, d) -PTBAA untuk $d \in \{0, 1, 2\}$ (Bača dan Miller, 2008); gabungan graf matahari isomorfik memiliki (a, d) -PTBAA untuk $d \in \{1, 2\}$ (Niagara, 2010). Untuk itu penulis tertarik untuk melakukan penelitian terhadap (a, d) -PTBAA pada gabungan graf korona $C_n \odot P_2$ yang isomorfik dan gabungan graf prisma $C_n \times P_2$ yang isomorfik.

1.2 Permasalahan

Permasalahan pada penelitian ini adalah bagaimana konstruksi (a, d) -PTBAA pada gabungan graf korona $C_n \odot P_2$ dan gabungan graf prisma $C_n \times P_2$.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini konstruksi (a, d) -PTBAA dilakukan pada :

- a. Gabungan sebanyak m graf korona $C_n \odot P_2$ yang isomorfik, untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$, untuk nilai $d = 0$ dan $d = 2$.
- b. Gabungan sebanyak m graf prisma $C_n \times P_2$ yang isomorfik, untuk setiap m bilangan bulat positif dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$, untuk nilai $d = 1$. Dan gabungan sebanyak m graf prisma $C_n \times P_2$ yang isomorfik, untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$, untuk nilai $d = 0$ dan $d = 2$.

1.4 Tujuan Penulisan

Secara umum tujuan penelitian ini adalah membuat konstruksi dan rumus umum (a, d) -PTBAA pada gabungan graf korona $C_n \odot P_2$ dan gabungan graf prisma $C_n \times P_2$.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan melalui studi literatur dengan mempelajari paper atau buku-buku yang berkaitan dengan topik penelitian. Selanjutnya hasil studi literatur ini digunakan untuk mengkonstruksi (a, d) -PTBAA pada gabungan graf korona $C_n \odot P_2$ dan gabungan graf prisma $C_n \times P_2$.

BAB II

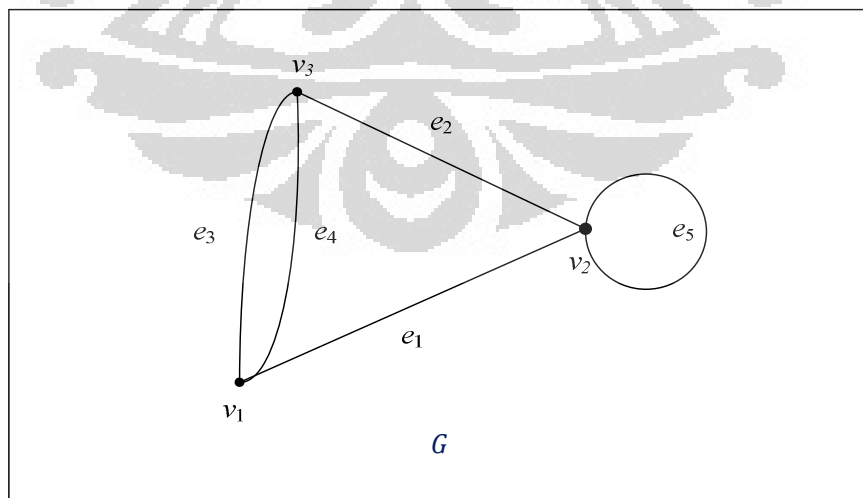
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan penjelasan mengenai pengertian graf, operasi pada graf, beberapa graf sederhana dan pelabelan graf yang akan digunakan dalam penulisan tesis ini.

2.1 Pengertian Graf

Sebuah **graf G** adalah himpunan tak kosong berhingga dari objek-objek yang disebut **simpul**, bersama dengan (mungkin kosong) himpunan pasangan tidak terurut dari simpul-simpul yang berbeda dari G yang disebut **busur**. Himpunan simpul dari G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan busur dinotasikan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Jika $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ masing-masing adalah banyaknya simpul dan busur dari G , maka graf tersebut biasa ditulis $G(p, q)$ (Bača dan Miller, 2008). Jika himpunan busur dari graf G merupakan himpunan kosong maka graf tersebut disebut **graf kosong** (*null graph*) (West, 2001). Pada Gambar 2.1 berikut diberikan contoh sebuah graf.



Gambar 2.1. Contoh sebuah graf

Pada Gambar 2.1, himpunan simpul dan busur pada graf G masing-masing adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_1v_3, v_2v_2\}$. Banyaknya simpul adalah $|V(G)| = 3$ dan banyaknya busur adalah $|E(G)| = 5$. Busur e_1 mempunyai simpul awal v_1 dan simpul akhir v_2 yang disebut **titik ujung** (*end point*).

Pada Gambar 2.1, busur e_5 disebut **gelang** (*loop*) dan busur e_3 dan e_4 disebut **busur ganda** (*multiple edges*). Sebuah gelang adalah sebuah busur yang mempunyai titik ujung yang sama dan busur ganda adalah busur yang mempunyai pasangan titik ujung yang sama. Sebuah graf yang tidak mempunyai gelang dan busur ganda disebut graf **seederhana** (*simple graph*) (West, 2001).

Jika $e = \{v_1v_2\}$ adalah sebuah busur pada graf G , maka v_1 dan v_2 disebut simpul yang **bertetangga** (*adjacent*) dan busur e disebut **hadir** (*incident*) pada simpul v_1 dan v_2 . Demikian pula jika e_1 dan e_2 dua busur berbeda yang hadir pada simpul yang sama maka e_1 dan e_2 disebut busur yang bertetangga (Chartrand dan Lesniak, 1986). Sebuah graf sederhana disebut **graf lengkap** (*complete graph*) jika setiap dua simpulnya bertetangga (West, 2001).

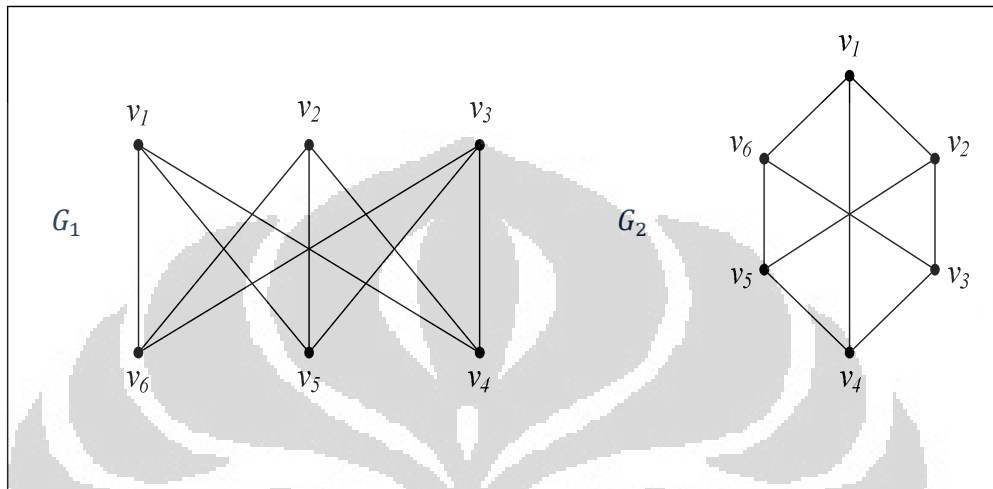
Banyaknya busur yang hadir pada suatu simpul v disebut **derajat** (*degree*), dinotasikan dengan $\deg_G v$ atau $\deg v$. Sebuah simpul dengan $\deg v = 0$ disebut **simpul terpencil** (*isolated vertex*) dan sebuah simpul dengan $\deg v = 1$ disebut **simpul akhir** (*end-vertex*) (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Sebuah **jalan** (*walk*) adalah barisan simpul dan busur $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ sedemikian hingga untuk $1 \leq i \leq k$, busur e_i mempunyai titik ujung v_{i-1} dan v_i . Sebuah **jalur** (*trail*) adalah sebuah jalan dengan tidak ada busur yang berulang. Sebuah jalan atau jalur adalah tertutup jika mempunyai titik ujung yang sama. (West, 2001).

Sebuah graf kadangkala menjadi bagian dari graf lain yang lebih besar. Sebuah graf H adalah **graf bagian** (*subgraph*) dari graf G , jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, dinotasikan dengan $H \subset G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Dua buah graf seringkali memiliki struktur yang sama, hanya dibedakan bagaimana simpul dan busurnya dilabel atau dalam menggambarkan grafnya. Graf yang demikian disebut dua graf yang isomorfik. Sebuah graf G_1 dikatakan

isomorfik (*isomorphic*) ke graf G_2 jika terdapat pemetaan satu-satu Φ , yang disebut isomorfisma, dari $V(G_1)$ pada $V(G_2)$, dengan demikian $uv \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $\Phi(u)\Phi(v) \in E(G_2)$. Jika G_1 isomorfik ke G_2 ditulis $G_1 \cong G_2$



Gambar 2.2. Contoh dua graf yang isomorfik

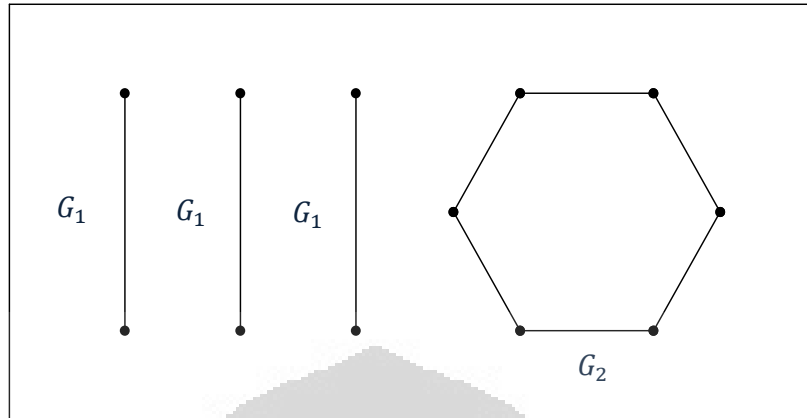
Pada Gambar 2.2 graf G_1 dan G_2 adalah isomorfik, $G_1 \cong G_2$, karena terdapat sebuah pemetaan $\Phi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ yang didefinisikan oleh $\Phi(v_1) = v_1, \Phi(v_2) = v_3, \Phi(v_3) = v_5, \Phi(v_4) = v_2, \Phi(v_5) = v_4, \Phi(v_6) = v_6$, dan Φ adalah sebuah isomorfisma (Chartrand dan Lesniak, 1986).

2.2 Operasi Pada Graf

Terdapat beberapa cara mengoperasikan graf sehingga menghasilkan graf yang baru, beberapa diantaranya adalah:

2.2.1 Gabungan graf (*Union Graph*)

Gabungan graf G_1, G_2, \dots, G_k ditulis $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ adalah sebuah graf dengan himpunan simpul $\cup_{i=1}^k V(G_i)$ dan himpunan busur $\cup_{i=1}^k E(G_i)$. Gabungan n buah graf G yang sama ditulis nG (West, 2001). Pada Gambar 2.3 diberikan contoh gabungan graf.

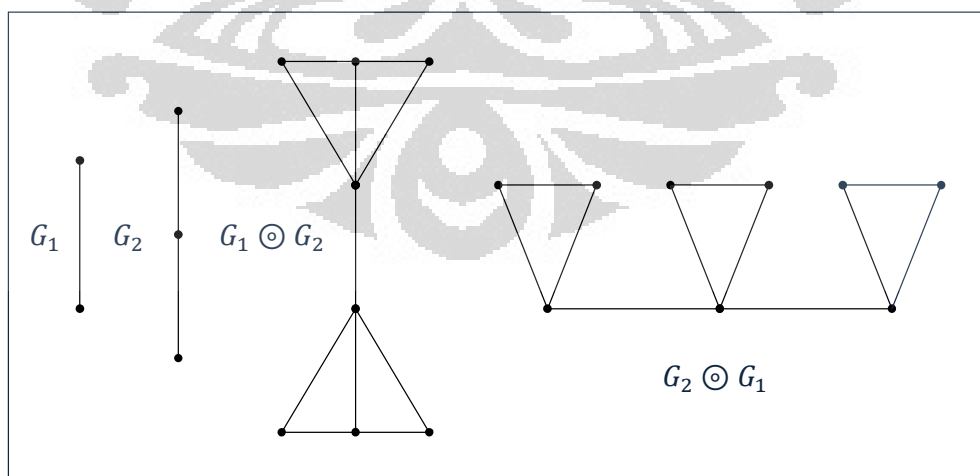


Gambar 2.3. Graf $(3G_1) \cup G_2$

2.2.2 Produk Korona

Produk korona $G_1 \odot G_2$ dari dua graf G_1 dan G_2 didefinisikan oleh Frucht dan Harary (Harary, 1996), sebagai graf G yang diperoleh dengan membuat satu penggandaan dari graf G_1 yang mempunyai P_1 simpul dan menggandakan graf G_2 sebanyak P_1 kemudian menghubungkan simpul ke- i graf G_1 ke setiap simpul hasil penggandaan graf G_2 ke- i .

Misal diberikan graf G_1 dan G_2 , maka dapat dibentuk graf korona $G_1 \odot G_2$ dan $G_2 \odot G_1$ yang berbeda seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.4.

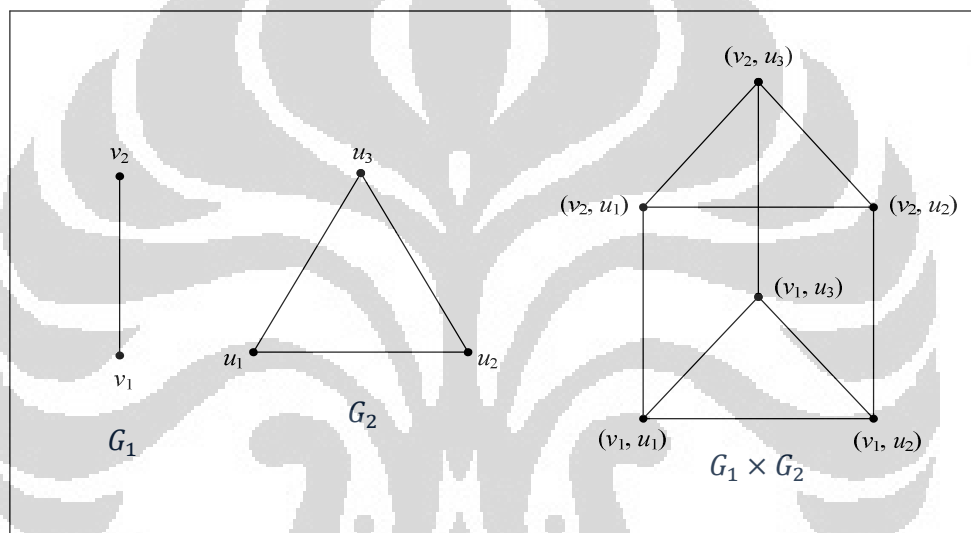


Gambar 2.4. Graf G_1 dan G_2 dan graf korona yang dapat dibentuk

2.2.3 Produk Kartesius (*Cartesian Product*)

Menurut Chartrand dan Lesniak (1986), produk kartesius dari graf G_1 dan G_2 ditulis graf $G = G_1 \times G_2$ adalah sebuah graf dengan himpunan simpul $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dengan dua simpul (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) pada G adalah bertetangga jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$.

Misal diberikan graf G_1 dan G_2 , produk kartesius dari graf G_1 dan G_2 diperlihatkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5. Contoh produk kartesius dari dua graf

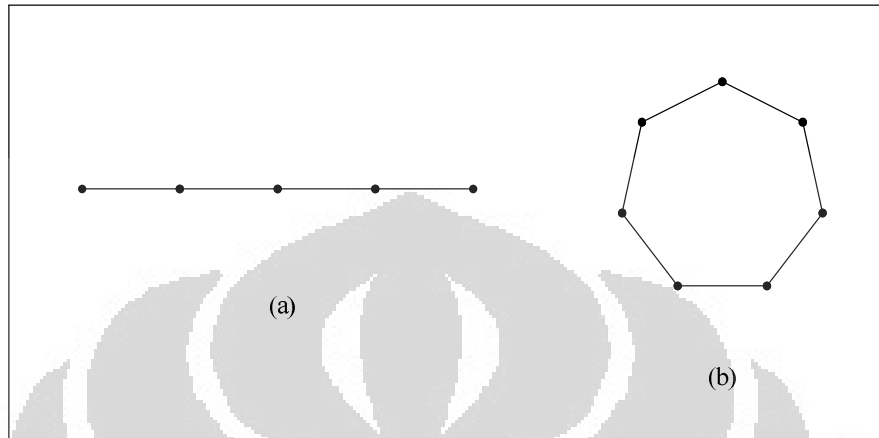
2.3 Beberapa Graf Sederhana

Terdapat berbagai jenis graf yang termasuk ke dalam kelas graf sederhana, beberapa diantaranya adalah:

2.3.1 Graf Lintasan dan Graf Lingkaran

Sebuah lintasan u, v adalah sebuah jalur dengan simpul awal u dan simpul akhir v yang berderajat 1 dan yang lainnya disebut simpul dalam (*internal vertices*) yang berderajat 2 (West, 2001). Dan graf lingkaran C_n adalah sebuah jalur tertutup $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ ($n \geq 3$) dengan n simpul v_i yang berbeda

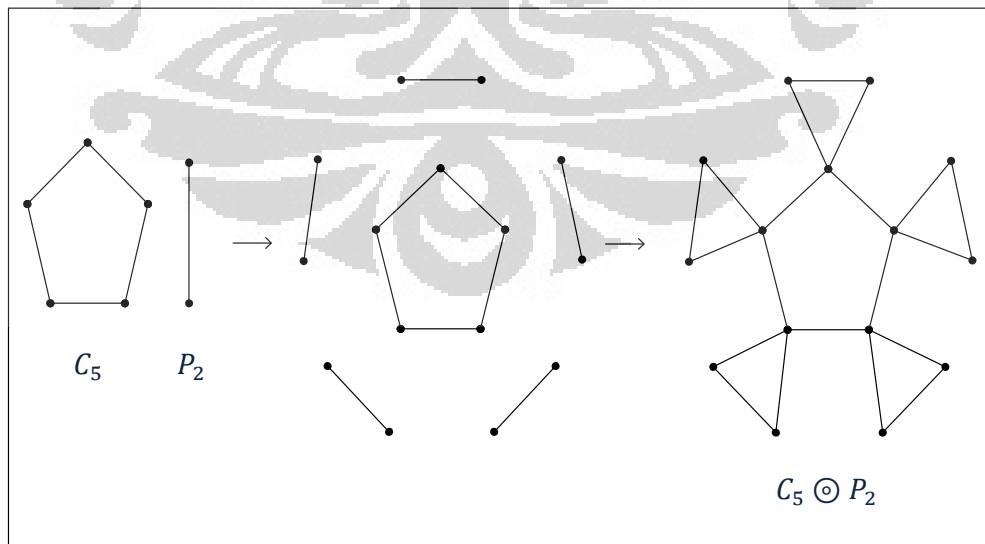
(Chartrand dan Lesniak, 1986). Pada Gambar 2.3 diberikan contoh graf lintasan dan graf lingkaran.



Gambar 2.6. (a) Graf lintasan P_5 (b) Graf lingkaran C_7

2.3.2 Graf Korona $C_n \odot P_2$

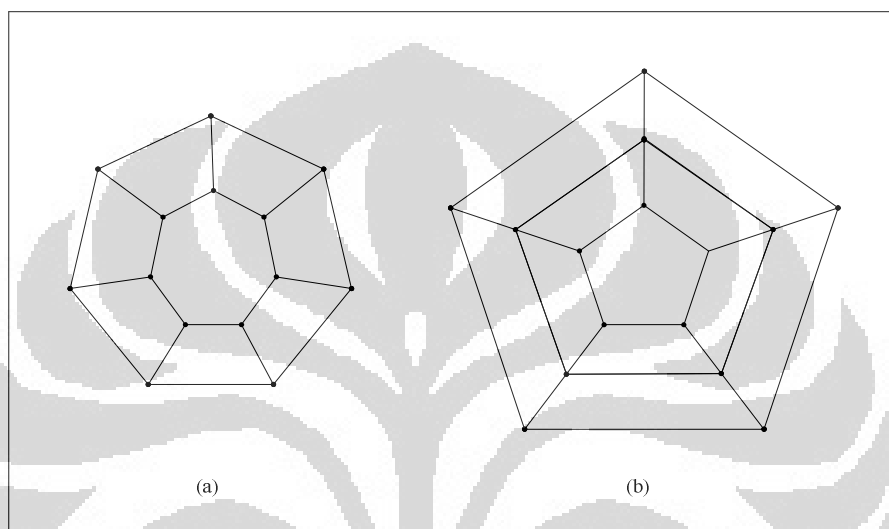
Graf korona $C_n \odot P_2$ merupakan salah satu graf produk korona yang diperoleh dengan menggandakan graf P_2 sebanyak n , selanjutnya simpul ke- i pada graf C_n dihubungkan ke setiap simpul P_2 , dimana $1 \leq i \leq n$. Pada Gambar 2.7 diperlihatkan konstruksi graf korona $C_5 \odot P_2$.



Gambar 2.7. Konstruksi graf korona $C_5 \odot P_2$

2.3.3 Graf Prisma

Menurut Bača dan Miller (2008) graf prisma didefinisikan sebagai produk kartesius dari sebuah lingkaran dengan m simpul dengan sebuah lintasan dengan n simpul, dinotasikan dengan $C_m \times P_n$. Pada Gambar 2.5 diperlihatkan contoh graf prisma.



Gambar 2.8. (a) Graf prisma $C_7 \times P_2$ (b) Graf prisma $C_5 \times P_3$

2.4 Pelabelan Graf

Menurut Bača dan Miller (2008), pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan simpul-simpul dan atau himpunan busur-busur suatu graf ke himpunan bilangan (biasanya bilangan bulat) yang disebut label. Pelabelan dengan domain himpunan simpul disebut pelabelan simpul, pelabelan dengan domain himpunan busur disebut pelabelan busur dan pelabelan dengan domain himpunan simpul dan busur disebut pelabelan total. Terdapat berbagai jenis pelabelan graf, dua diantaranya adalah:

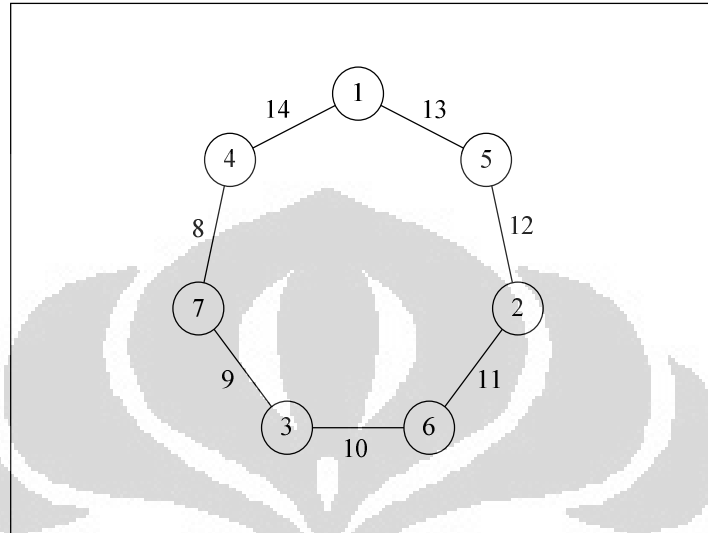
2.4.1 Pelabelan Total Busur Ajaib

Sebuah pemetaan satu-satu $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ disebut pelabelan total busur ajaib (*edge magic total labelling*), disingkat PTBA (*EMT labelling*) dari sebuah graf $G(p, q)$ jika,

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

Universitas Indonesia

adalah konstan untuk setiap $xy \in E(G)$ (Bača dan Miller, 2008). Pada Gambar 2.9 diperlihatkan contoh PTBA pada graf lingkaran C_7 dengan nilai $k = 19$.

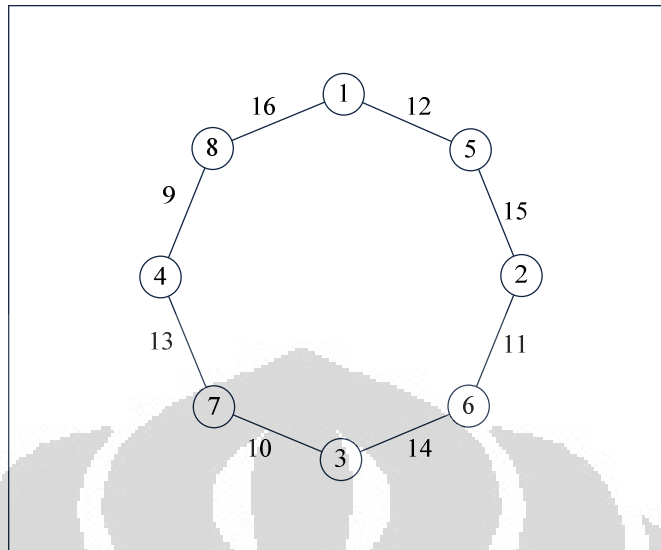


Gambar 2.9. Contoh PTBA pada graf lingkaran C_7

2.4.2 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib

Pelabelan total (a, d) -busur anti ajaib ((a, d) -edge anti magic total labelling), disingkat (a, d) -PTBAA ((a, d) -EAT Labelling) dari sebuah graf $G(p, q)$ adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga himpunan bobot busur $\{f(u) + f(uv) + f(v) : uv \in E(G)\}$ sama dengan $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Suatu pelabelan total (a, d) -busur anti ajaib disebut super, ditulis (a, d) -PTSBA, jika himpunan simpul dari graf G tersebut diberi label $\{1, 2, \dots, p\}$ dan $f(E(G)) = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$. Jika $d = 0$ maka $(a, 0)$ -PTBAA tersebut juga merupakan PTBA dengan $k = a$. Definisi (a, d) -PTBAA ini diperkenalkan oleh Simanjuntak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 (Bača dan Miller, 2008). Pada Gambar 2.10 diberikan contoh $(18, 1)$ -PTBAA pada graf C_8 .



Gambar 2.10. $(18, 1)$ -PTBAA pada graf lingkaran C_8

Untuk suatu (a, d) -PTBAA dari sebuah graf $G(p, q)$, bobot busur minimum yang mungkin adalah $1 + 2 + 3$, sehingga diperoleh

$$a \geq 6 \quad (2.1)$$

sedangkan bobot busur maksimum yang mungkin adalah $(p + q - 2) + (p + q - 1) + (p + q) = 3p + 3q - 3$, sehingga diperoleh

$$a + (q - 1)d \leq 3p + 3q - 3. \quad (2.2)$$

Dari (2.1) dan (2.2) diperoleh

$$6 + (q - 1)d \leq 3p + 3q - 3, \quad (2.3)$$

$$d \leq \frac{3p + 3q - 9}{q - 1}.$$

Pertidaksamaan (2.3) merupakan batas atas dari d untuk suatu (a, d) -PTBAA pada graf G .

Misal f adalah (a, d) -PTBAA dari suatu graf $G(p, q)$, maka dapat dibuat (a, d) -PTBAA yang lain dari f . Misal $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ adalah pemetaan satu-satu. Definisikan pelabelan $f' : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ dengan

$$f'(u) = p + q + 1 - f(u), \text{ untuk setiap } u \in V(G). \quad (2.4)$$

$$f'(uv) = p + q + 1 - f(uv), \text{ untuk setiap } uv \in E(G). \quad (2.5)$$

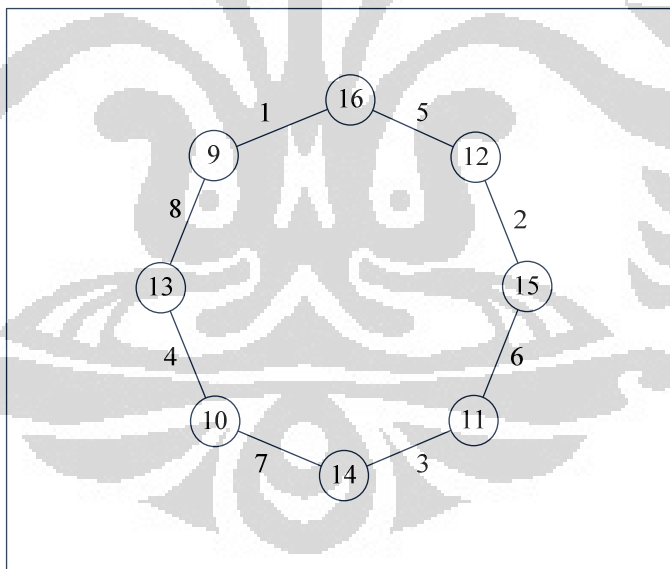
Dari persamaan (2.4) dan (2.5), f' juga merupakan pemetaan satu-satu dari $V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$. f' disebut **dual** dari f . Jadi (a, d) -PTBAA dari suatu graf tidak tunggal.

Teorema 2.4.1. (Bača dan Miller, 2008).

Jika f adalah suatu (a, d) -PTBAA dari graf $G(p, q)$, maka f' adalah $(3p + 3q + 3 - a - (q - 1)d, d)$ -PTBAA pada G .

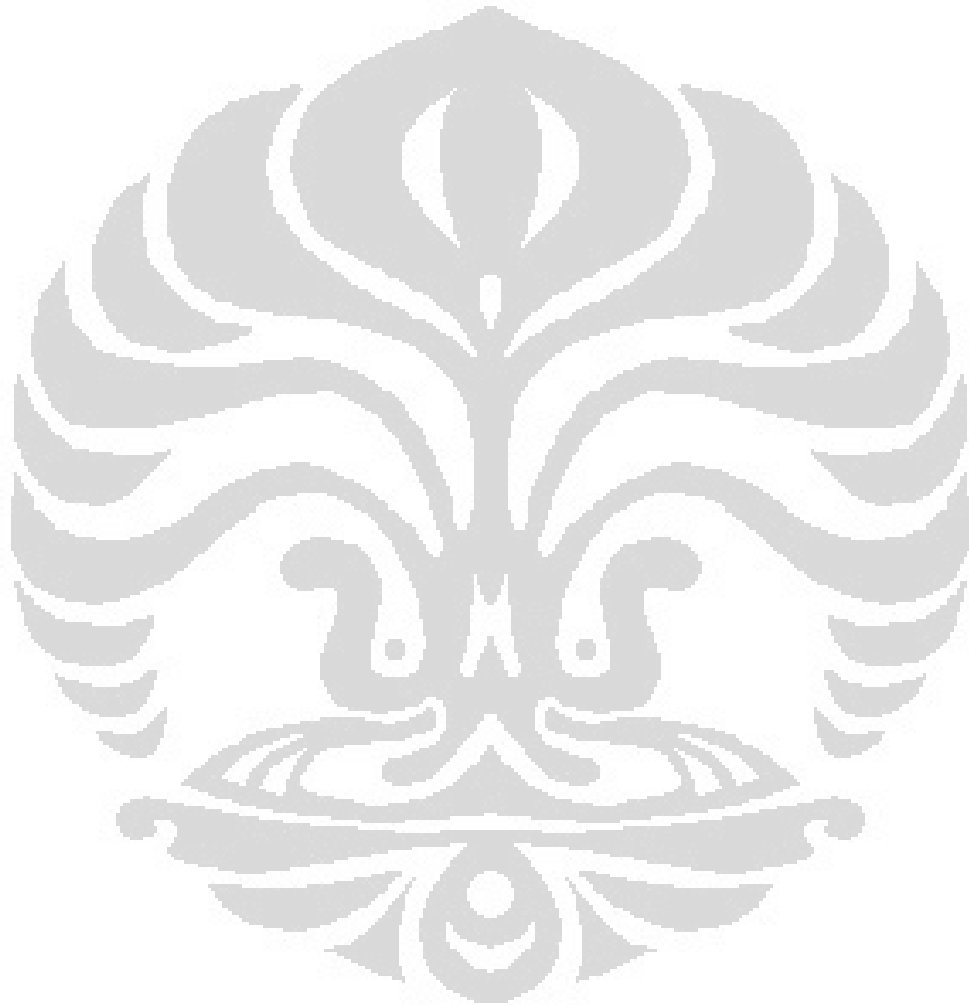
Bukti. Misal $e_i = (u_i v_i)$ adalah busur-busur yang mempunyai bobot busur $a + id$, $i = 0, 1, \dots, q - 1$. Sehingga dari definisi dual f , himpunan semua bobot busur dari busur-busur di G sama dengan

$$\{3p + 3q + 3 - (f(u_i) + f(v_i) + f(e_i)) \mid i = 0, 1, \dots, q - 1\} = \\ \{3p + 3q + 3 - (a + id) \mid i = 0, 1, \dots, q - 1\}. \text{ Akibatnya } f' \text{ adalah } (3p + 3q + 3 - a - (q - 1)d, d)\text{-PTBAA pada } G. \quad \blacksquare$$



Gambar 2.11. $(26, 1)$ -PTBAA pada graf lingkaran C_8

$(26, 1)$ -PTBAA pada graf lingkaran C_8 pada Gambar 2.11 merupakan dual dari $(18, 1)$ -PTBAA pada Gambar 2.10. Dalam penulisan tesis ini konstruksi pelabelan yang digunakan adalah konstruksi (a, d) -PTBAA, namun dalam pembahasannya dikaitkan dengan (a, d) -PTBA.



BAB III

PELABELAN TOTAL (a, d) -BUSUR ANTI AJAIB PADA GABUNGAN GRAF KORONA DAN GABUNGAN GRAF PRISMA

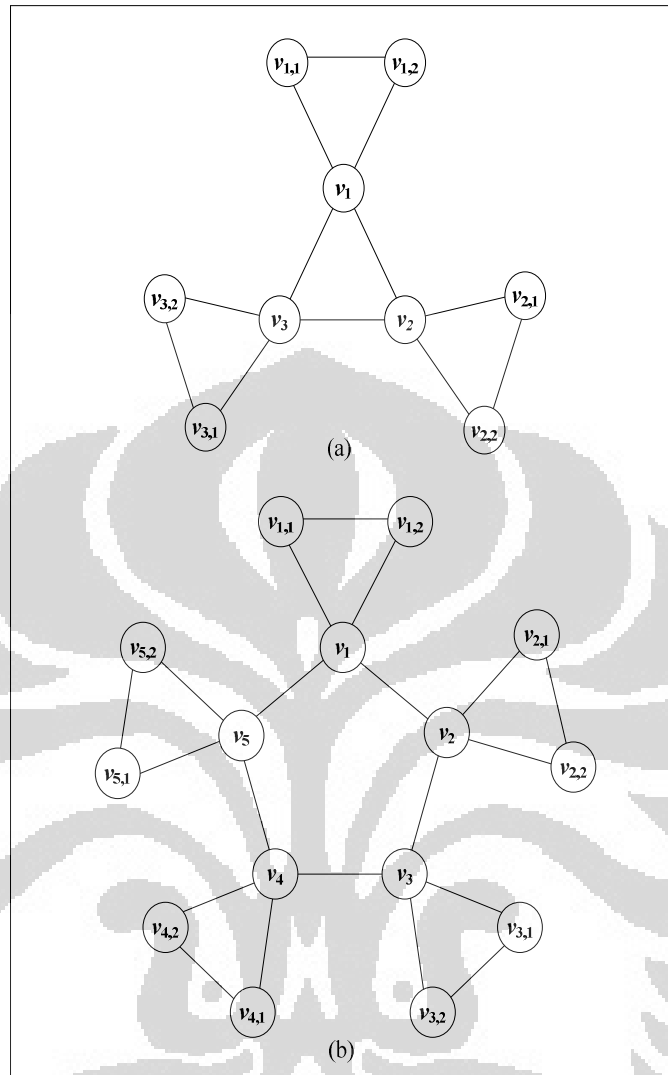
Pada bab ini akan dibahas konstruksi pelabelan total (a, d) -busur anti ajaib, disingkat (a, d) -PTBAA, pada gabungan graf korona $C_n \odot P_2$ dengan terlebih dahulu ditunjukkan bahwa graf korona $C_n \odot P_2$ memiliki (a, d) -PTBAA untuk $d = 2$ yang telah dilakukan oleh Nugroho dkk (2011). Dilanjutkan dengan konstruksi (a, d) -PTBAA pada gabungan graf prisma $C_n \times P_2$ dengan terlebih dahulu ditunjukkan bahwa graf prisma $C_n \times P_2$ memiliki (a, d) -PTBAA untuk $d = 2$ yang telah dilakukan oleh Sugeng dkk (2006).

3.1 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Graf Korona $C_n \odot P_2$

Graf korona $C_n \odot P_2$ adalah graf yang diperoleh dengan menggandakan graf P_2 sebanyak n , selanjutnya simpul ke- i pada graf C_n dihubungkan ke setiap simpul P_2 , dimana $1 \leq i \leq n$. Graf korona $C_n \odot P_2$ merupakan graf sederhana dengan graf lingkaran dan lintasan sebagai graf bagiannya. Jika n adalah banyaknya simpul pada graf C_n , maka banyaknya simpul dan busur pada graf korona $C_n \odot P_2$ masing-masing adalah $|V(C_n \odot P_2)| = 3n$ dan $|E(C_n \odot P_2)| = 4n$.

Himpunan simpul dan busur pada graf korona $C_n \odot P_2$ adalah $V(C_n \odot P_2) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,2} | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n \odot P_2) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{v_i v_{i,1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i,2} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,1} v_{i,2} | 1 \leq i \leq n\}$,

dimana v_i adalah simpul yang berasal dari graf lingkaran C_n dan $v_{i,1}, v_{i,2}$ adalah simpul yang berasal pada graf lintasan P_2 . Pada Gambar 3.1 diperlihatkan contoh graf korona $C_3 \odot P_2$ dan $C_5 \odot P_2$ dengan notasi simpul-simpulnya.



Gambar 3.1. (a) Graf korona $C_3 \odot P_2$ (b) Graf korona $C_5 \odot P_2$

Konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf korona $C_n \odot P_2$ untuk $d = 2$ telah dilakukan oleh Nugroho dkk (2011) dan berikut dituliskan ulang untuk kelengkapan konstruksi.

Teorema 3.1.1 (Nugroho dkk, 2011)

Graf korona $C_n \odot P_2$ memiliki $\left(\frac{7n+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA untuk setiap n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Bukti. Banyaknya simpul dan busur pada graf $C_n \odot P_2$ masing-masing adalah $3n$ dan $4n$. Misal $\alpha_1: V(C_n \odot P_2) \cup E(C_n \odot P_2) \rightarrow \{1, 2, \dots, 7n\}$. Untuk $1 \leq i \leq n$, n bilangan ganjil, $n \geq 3$. Indeks i dihitung dengan modulo n . Didefinisikan label simpul dan busur graf korona $C_n \odot P_2$ sebagai berikut:

1. Label simpul

$$\alpha_1(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & , i \text{ ganjil} \\ \frac{n+i+1}{2} & , i \text{ genap} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\alpha_1(v_{i,1}) = \begin{cases} \frac{3n+i}{2} & , i \text{ ganjil} \\ \frac{2n+i}{2} & , i \text{ genap} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\alpha_1(v_{i,2}) = 3n - i + 1 \quad , 1 \leq i \leq n \quad (3.3)$$

2. Label busur

$$\alpha_1(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 3n + i + 1 & , 1 \leq i \leq n - 1 \\ 3n + 1 & , i = n \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\alpha_1(v_i v_{i,1}) = 4n + i \quad , 1 \leq i \leq n - 1 \quad (3.5)$$

$$\alpha_1(v_i v_{i,2}) = \begin{cases} \frac{11n-i+2}{2} & , i \text{ ganjil} \\ \frac{12n-i+2}{2} & , i \text{ genap} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\alpha_1(v_{i,1} v_{i,2}) = \begin{cases} \frac{14n-i+1}{2} & , i \text{ ganjil} \\ \frac{13n-i+1}{2} & , i \text{ genap} \end{cases} \quad (3.7)$$

Selanjutnya perhitungan bobot busur pada graf korona $C_n \odot P_2$ terhadap pelabelan α_1 dibagi menjadi 3 kasus, yaitu bobot busur pada graf lingkaran C_n , bobot busur yang menghubungkan simpul pada graf lingkaran C_n dengan simpul pada graf lintasan P_2 serta bobot busur pada graf lintasan P_2 .

1. Bobot busur pada graf lingkaran C_n

Untuk $1 \leq i \leq n - 1$, i ganjil

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}(v_i v_{i+1}) &= \alpha_1(v_i) + \alpha_1(v_i v_{i+1}) + \alpha_1(v_{i+1}) \\ &= \left(\frac{i+1}{2}\right) + (3n + i + 1) + \left(\frac{n + (i+1) + 1}{2}\right) \\ &= \frac{7n+1}{2} + 2i + 2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Untuk $1 \leq i \leq n - 1$, i genap

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}(v_i v_{i+1}) &= \alpha_1(v_i) + \alpha_1(v_i v_{i+1}) + \alpha_1(v_{i+1}) \\ &= \left(\frac{n+i+1}{2}\right) + (3n+i+1) + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right) \\ &= \frac{7n+1}{2} + 2i + 2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Untuk $i = n$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}(v_n v_1) &= \alpha_1(v_n) + \alpha_1(v_n v_1) + \alpha_1(v_1) \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right) + (3n+1) + \left(\frac{1+1}{2}\right) \\ &= \frac{7n+1}{2} + 2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

2. Bobot busur yang menghubungkan simpul pada graf lingkaran C_n dengan simpul pada graf lintasan P_2

a. Busur $v_i v_{i,1}$

Untuk i ganjil

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}(v_i v_{i,1}) &= \alpha_1(v_i) + \alpha_1(v_i v_{i,1}) + \alpha_1(v_{i,1}) \\ &= \left(\frac{i+1}{2}\right) + (4n+i) + \left(\frac{3n+i}{2}\right) \\ &= \frac{7n+1}{2} + 2n + 2i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Untuk i genap

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}(v_i v_{i,1}) &= \alpha_1(v_i) + \alpha_1(v_i v_{i,1}) + \alpha_1(v_{i,1}) \\ &= \left(\frac{n+i+1}{2}\right) + (4n+i) + \left(\frac{2n+i}{2}\right) \\ &= \frac{7n+1}{2} + 2n + 2i. \end{aligned} \quad (3.12)$$

b. Busur $v_i v_{i,2}$

Untuk i ganjil

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}(v_i v_{i,2}) &= \alpha_1(v_i) + \alpha_1(v_i v_{i,2}) + \alpha_1(v_{i,2}) \\ &= \left(\frac{i+1}{2}\right) + \left(\frac{11n-i+2}{2}\right) + (3n-i+1) \\ &= \frac{7n+1}{2} + 5n - i + 2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Untuk i genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_1}(v_i v_{i,2}) &= \alpha_1(v_i) + \alpha_1(v_i v_{i,2}) + \alpha_1(v_{i,2}) \\
 &= \left(\frac{n+i+1}{2}\right) + \left(\frac{12n-i+2}{2}\right) + (3n-i+1) \\
 &= \frac{7n+1}{2} + 6n - i + 2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

3. Bobot busur pada graf lintasan P_2

a. Busur $v_{i,1} v_{i,2}$

Untuk i ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_1}(v_{i,1} v_{i,2}) &= \alpha_1(v_{i,1}) + \alpha_1(v_{i,1} v_{i,2}) + \alpha_1(v_{i,2}) \\
 &= \left(\frac{3n+i}{2}\right) + \left(\frac{14n-i+1}{2}\right) + (3n-i+1) \\
 &= \frac{7n+1}{2} + 8n - i + 1.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Untuk i genap

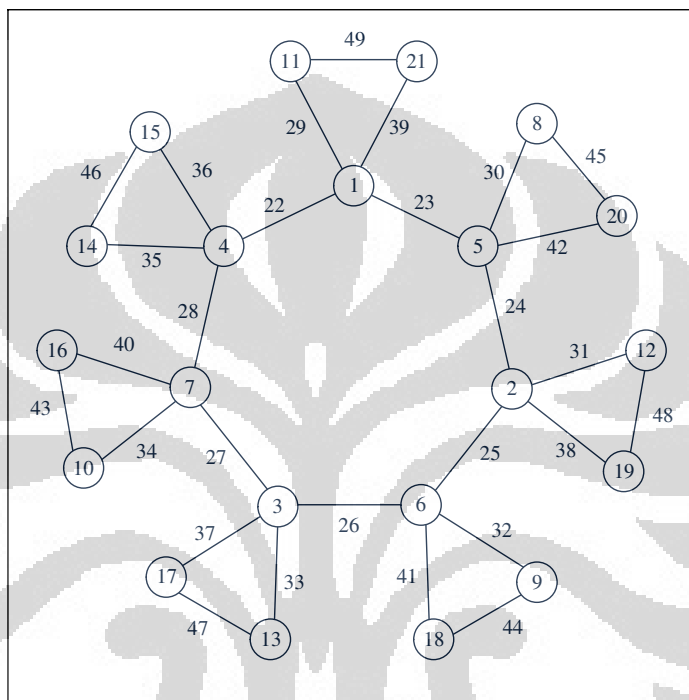
$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_1}(v_{i,1} v_{i,2}) &= \alpha_1(v_{i,1}) + \alpha_1(v_{i,1} v_{i,2}) + \alpha_1(v_{i,2}) \\
 &= \left(\frac{2n+i}{2}\right) + \left(\frac{13n-i+1}{2}\right) + (3n-i+1) \\
 &= \frac{7n+1}{2} + 7n - i + 1.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Dari persamaan (3.8) hingga persamaan (3.16), diperoleh himpunan bobot busur pada graf korona $C_n \odot P_2$ terhadap pelabelan α_1 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W &= \{W_{\alpha_1}(v_i v_{i+1}) | v_i v_{i+1} \in E\} \cup \{W_{\alpha_1}(v_i v_{i,1}) | v_i v_{i,1} \in E\} \cup \\
 &\quad \{W_{\alpha_1}(v_i v_{i,2}) | v_i v_{i,2} \in E\} \cup \{W_{\alpha_1}(v_{i,1} v_{i,2}) | v_{i,1} v_{i,2} \in E\}. \\
 &= \left\{\frac{7n+1}{2} + 2, \frac{7n+1}{2} + 4, \dots, \frac{7n+1}{2} + 2n\right\} \cup \left\{\frac{7n+1}{2} + 2n + 2, \dots, \frac{7n+1}{2} + 4n\right\} \cup \\
 &\quad \left\{\frac{7n+1}{2} + 4n + 2, \dots, \frac{7n+1}{2} + 6n\right\} \cup \left\{\frac{7n+1}{2} + 6n + 2, \dots, \frac{7n+1}{2} + 8n\right\}. \\
 &= \left\{\frac{7n+1}{2} + 2, \frac{7n+1}{2} + 4, \dots, \frac{7n+1}{2} + 4n, \frac{7n+1}{2} + 4n + 2, \dots, \frac{7n+1}{2} + 8n\right\}.
 \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas dapat dilihat bahwa himpunan bobot busur W membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama $a = \frac{7n+1}{2} + 2$ dan beda $d = 2$. Jadi pelabelan α_1 adalah $\left(\frac{7n+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA pada graf korona $C_n \odot P_2$ untuk setiap n bilangan ganjil, $n \geq 3$. ■

Label simpul pada graf korona $C_n \odot P_2$ dari pelabelan α_1 adalah himpunan $\{1, 2, \dots, 3n\}$. Jadi pelabelan α_1 juga merupakan (a, d) -PTSBA untuk graf korona $C_n \odot P_2$ dengan $a = \frac{7n+1}{2} + 2$ dan $d = 2$. Pada Gambar 3.2 diperlihatkan contoh $(27, 2)$ -PTBAA pada graf korona $C_7 \odot P_2$.

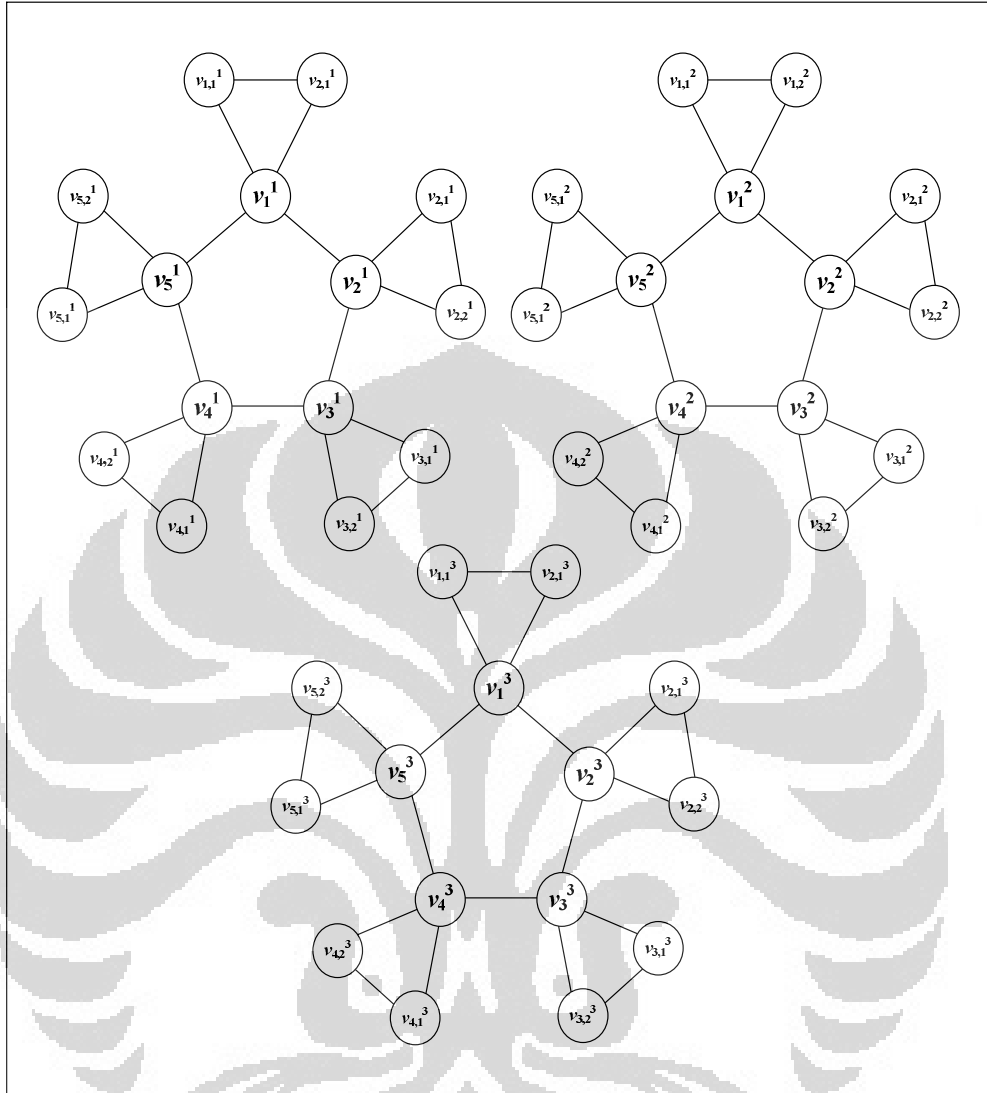


Gambar 3.2. $(27, 2)$ -PTBAA pada graf korona $C_7 \odot P_2$

Pada subbab ini telah diberikan konstruksi (a, d) -PTBAA yang dilakukan oleh Nugroho dkk (2011). Selanjutnya pada subbab berikut akan diberikan konstruksi (a, d) -PTBAA pada gabungan graf korona $C_n \odot P_2$.

3.2 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf Korona $C_n \odot P_2$

Jika graf korona $C_n \odot P_2$ sebanyak m digabung, $m \geq 2$, maka terbentuk gabungan graf yang disebut gabungan m graf korona $C_n \odot P_2$ isomorfik, dinotasikan dengan $m(C_n \odot P_2)$. Pada Gambar 3.3 diperlihatkan contoh graf $3(C_5 \odot P_2)$, beserta notasi penulisannya.



Gambar 3.3. Graf korona $3(C_5 @ P_2)$

Himpunan simpul dan busur pada graf $m(C_n @ P_2)$ masing-masing adalah:

$$\begin{aligned}
 V(m(C_n @ P_2)) &= \{v_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \\
 &\quad \{v_{i,1}^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{v_{i,2}^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}, \\
 E(m(C_n @ P_2)) &= \{v_i^j v_{i+1}^j | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \\
 &\quad \{v_n^j v_1^j | 1 \leq j \leq m\} \cup \{v_i^j v_{i,1}^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \\
 &\quad \{v_i^j v_{i,2}^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \\
 &\quad \{v_{i,1}^j v_{i,2}^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},
 \end{aligned}$$

dimana v_i^j adalah simpul ke- i pada graf lingkaran C_n ke- j dan $v_{i,1}^j, v_{i,2}^j$ adalah simpul pada graf lintasan P_2 ke- j . Pada graf $m(C_n \odot P_2)$ berlaku hubungan $|V(m(C_n \odot P_2))| = \frac{3}{4} |E(m(C_n \odot P_2))|$.

Batas atas nilai d yang mungkin dari (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ dapat ditentukan dengan menggunakan pertidaksamaan (2.3) pada subbab 2.4. Banyaknya simpul dan busur pada graf $m(C_n \odot P_2)$ masing-masing adalah $3mn$ dan $4mn$, maka dengan mensubsitusikan nilai ini ke dalam pertidaksamaan (2.3), diperoleh

$$d \leq \frac{3(3mn)+3(4mn)-9}{4mn-1}$$

atau

$$d \leq 5 + \frac{mn-4}{4mn-1}. \quad (3.17)$$

Untuk m dan n bilangan bulat positif, $n \geq 3$, dari pertidaksamaan (3.17) diperoleh nilai d yang mungkin dari (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$, yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dalam tesis ini konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ hanya dilakukan untuk nilai $d = 0$ dan $d = 2$. Berikut akan diberikan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ untuk $d = 2$.

Teorema 3.2.1

Graf korona $m(C_n \odot P_2)$ memiliki $(\frac{7mn+1}{2} + 2, 2)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Bukti. Misal $\alpha_2 : V(m(C_n \odot P_2)) \cup E(m(C_n \odot P_2)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3mn + 4mn\}$. Untuk $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, m$ dan n bilangan bilangan ganjil, $n \geq 3$. Didefinisikan label simpul dan busur dari graf $m(C_n \odot P_2)$ adalah sebagai berikut:

1. Label simpul

$$\alpha_2(v_i^j) = \begin{cases} \frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2} & , i \text{ ganjil}, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{im+1}{2} + \frac{j}{2} & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 & , i \text{ genap}, 1 \leq j \leq m \\ \frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2} & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\alpha_2(v_{i,1}^j) = \begin{cases} \frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1 & , i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(2n+i)}{2} + \frac{j+1}{2} & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(2n+i+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i \text{ genap}, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2} & , i = n-1, j \text{ genap} \\ mn + \frac{j+1}{2} & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(2n+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\alpha_2(v_{i,2}^j) = \begin{cases} \frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ m(3n-i-1) + \frac{j}{2} & , j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ 2mn + \frac{j+1}{2} & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(4n+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 3mn - j + 1 & , i = n, 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.20)$$

2. Label busur

$$\alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} \frac{m(6n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ m(3n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2}\right) & , j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ (4mn+1) - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(8n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 3mn + j & , i = n, 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) = \begin{cases} \frac{m(8n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ m(4n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2}\right) & , j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ 5mn - \left(\frac{j-1}{2}\right) & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(10n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 4mn + j & , i = n, 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) = \begin{cases} \frac{m(11n-i-2)}{2} + j & , i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(12n-i)+2}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(12n-i-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i \text{ genap}, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{11mn+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(11n+1)+2}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 6mn - \left(\frac{j-1}{2}\right) & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(12n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) = \begin{cases} \frac{m(14n-i+1)+2}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , i \text{ ganjil}, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(14n-i)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(13n-i-1)}{2} + j & , i \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{13mn+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(13n+1)+2}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.24)$$

Label simpul dan busur pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2 adalah bilangan bulat positif yang berbeda yaitu $\alpha_2(V) = \{1, 2, \dots, 3mn\}$ dan $\alpha_2(E) = \{3mn + 1, 3mn + 2, \dots, 7mn\}$. Maka pelabelan α_2 adalah pemetaan satu-satu dan pada dari $V(m(C_n \odot P_2)) \cup E(m(C_n \odot P_2))$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, 7mn\}$.

Bobot sembarang busur pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2 dibagi menjadi 4 kasus, yaitu:

1. $W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) = \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j)$.
2. $W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) = \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j)$.
3. $W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) = \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j)$.
4. $W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) = \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j)$.

Untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. Indeks i dihitung dengan modulo n . Berikut akan dihitung bobot busur masing-masing kasus.

Kasus 1: Bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$

Berdasarkan pelabelan α_2 dari persamaan (3.18) dan (3.21), terdapat 8 kasus perhitungan bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$, yaitu:

a. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i ganjil, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] + \left[\frac{m(6n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1 \right] \\
 &= \frac{m(7n+4i+2)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

b. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i genap, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(6n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{m(i+1-1)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
 &= \frac{m(7n+4i+2)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

c. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i ganjil, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[m(3n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1 \right] \\
 &= \frac{m(7n+4i+4)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

d. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i genap, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 \right] + \left[m(3n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(i+1-1)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
 &= \frac{m(7n+4i+4)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

e. Untuk $i = n - 1$, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n + (n - 1) + 1)}{2} - j + 1 \right] + \left[(4mn + 1) - \left(\frac{j + 1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{mn - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] \\
 &= \frac{11mn + 1}{2} - j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

f. Untuk $i = n - 1$, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n + (n - 1) + 1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(8n - 1) + 1}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(n - 1)}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{m(11n - 2) + 1}{2} - j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

g. Untuk $i = n$, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{mn - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] + [3mn + j] + \left[\frac{j + 1}{2} \right] \\
 &= \frac{7mn + 1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

h. Untuk $i = n$, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \alpha_2(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n - 1)}{2} + \frac{j}{2} \right] + [3mn + j] + \left[\frac{m + 1}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{7mn + 1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Kasus 2: Bobot busur $v_i^j v_{i,1}^j$

Berdasarkan pelabelan α_2 dari persamaan (3.18), (3.19) dan (3.22) terdapat 8 kasus perhitungan bobot busur $v_i^j v_{i,1}^j$, yaitu:

a. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i ganjil, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] + \left[\frac{m(8n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1 \right] \\
 &= \frac{m(11n+4i+2)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

b. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i ganjil, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j) \\
 &= \left[\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[m(4n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1 \right] \\
 &= \frac{m(11n+4i+4)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

c. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i genap, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(8n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(2n+i)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
 &= \frac{m(11n+4i+2)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

d. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i genap, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 \right] + \left[m(4n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(2n+i+1)+1}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{m(11n+4i+4)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

e. Untuk $i = n - 1, j$ ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n + (n - 1) + 1)}{2} - j + 1 \right] + \left[5mn - \left(\frac{j - 1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{3mn - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] \\
 &= \frac{15mn + 1}{2} - j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

f. Untuk $i = n - 1, j$ genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n + (n - 1) + 1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(10n - 1) + 1}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(3n - 1)}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{m(15n - 2) + 1}{2} - j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

g. Untuk $i = n, j$ ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j) \\
 &= \left[\frac{mn - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] + [4mn + j] + \left[mn + \frac{j + 1}{2} \right] \\
 &= \frac{11mn + 1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

h. Untuk $i = n, j$ genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n - 1)}{2} + \frac{j}{2} \right] + [4mn + j] + \left[\frac{m(2n + 1) + 1}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{11mn + 1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Kasus 3: Bobot busur $v_i^j v_{i,2}^j$

Berdasarkan pelabelan α_2 dari persamaan (3.18), (3.20) dan (3.23) terdapat 8 kasus perhitungan bobot busur $v_i^j v_{i,2}^j$, yaitu :

Universitas Indonesia

a. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i ganjil, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
 &= \left[\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] + \left[\frac{m(11n-i-2)}{2} + j \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
 &= \frac{m(17n-2i-4)+1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

b. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i ganjil, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
 &= \left[\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[\frac{m(11n-i-2)}{2} + j \right] + \\
 &\quad \left[m(3n-i-1) + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{m(17n-2i-4)+1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

c. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i genap, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(12n-i)+2}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
 &= \frac{m(19n-2i)+1}{2} - j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

d. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i genap, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(12n-i-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[m(3n-i-1) + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{m(19n-2i-2)+1}{2} - j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

e. Untuk $i = n - 1, j$ ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n + (n - 1) + 1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{11mn + 3}{2} - \left(\frac{j + 1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[2mn + \frac{j + 1}{2} \right] \\
 &= \frac{17mn + 1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

f. Untuk $i = n - 1, j$ genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n + (n - 1) + 1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(11n + 1) + 2}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(4n + 1) + 1}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{m(17n + 2) + 1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

g. Untuk $i = n, j$ ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
 &= \left[\frac{mn - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] + \left[6mn - \left(\frac{j - 1}{2} \right) \right] + [3mn - j + 1] \\
 &= \frac{19mn + 1}{2} - j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

h. Untuk $i = n, j$ genap

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_i^j) + \alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
 &= \left[\frac{m(n - 1)}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[\frac{m(12n - 1) + 1}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad [3mn - j + 1] \\
 &= \frac{m(19n - 2) + 1}{2} - j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Kasus 4: Bobot busur $v_{i,1}^j v_{i,2}^j$

Berdasarkan pelabelan α_2 dari persamaan (3.19), (3.20) dan (3.24) terdapat 8 kasus perhitungan bobot busur $v_{i,1}^j v_{i,2}^j$, yaitu:

a. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i ganjil, j ganjil

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\ &= \left[\frac{m(3n + i + 2)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(14n - i + 1) + 2}{2} - \left(\frac{j + 1}{2} \right) \right] \\ &\quad + \left[\frac{m(6n - 2i - 1) - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] \\ &= \frac{m(23n - 2i + 2) + 1}{2} - j + 1. \end{aligned} \quad (3.49)$$

b. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i ganjil, j genap

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\ &= \left[\frac{m(3n + i + 2)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(14n - i) + 1}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\ &\quad \left[\frac{m(3n - i - 1) + j}{2} \right] \\ &= \frac{m(23n - 2i) + 1}{2} - j + 1. \end{aligned} \quad (3.50)$$

c. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i genap, j ganjil

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\ &= \left[\frac{m(2n + i)}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] + \left[\frac{m(13n - i - 1)}{2} + j \right] + \\ &\quad \left[\frac{m(6n - 2i - 1) - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] \\ &= \frac{m(21n - 2i - 2) + 1}{2} + 2j. \end{aligned} \quad (3.51)$$

d. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, i genap, j genap

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\ &= \left[\frac{m(2n + i + 1) + 1}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[\frac{m(13n - i - 1)}{2} + j \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[m(3n - i - 1) + \frac{j}{2} \right] \\
&= \frac{m(21n - 2i - 2) + 1}{2} + 2j.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

e. Untuk $i = n - 1$, j ganjil

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
&= \left[\frac{3mn - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] + \left[\frac{m(13n - (n - 1)) - 1}{2} + j \right] + \\
&\quad \left[\frac{2mn + \frac{j+1}{2}}{2} \right] \\
&= \frac{19mn + 1}{2} + 2j.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

f. Untuk $i = n - 1$, j genap

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
&= \left[\frac{m(3n - 1)}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[\frac{m(13n - (n - 1)) - 1}{2} + j \right] + \\
&\quad \left[\frac{\frac{m(4n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}}{2} \right] \\
&= \frac{19mn + 1}{2} + 2j.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

g. Untuk $i = n$, j ganjil

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
&= \left[mn + \left(\frac{j + 1}{2} \right) \right] + \left[\frac{13mn + 3}{2} - \left(\frac{j + 1}{2} \right) \right] + [3mn - j + 1] \\
&= \frac{21mn + 1}{2} - j + 2.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

h. Untuk $i = n$, j genap

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) &= \alpha_2(v_{i,1}^j) + \alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) + \alpha_2(v_{i,2}^j) \\
&= \left[\frac{m(2n + 1) + 1}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[\frac{m(13n + 1) + 2}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
&\quad [3mn - j + 1] \\
&= \frac{m(21n + 2) + 1}{2} - j + 2.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Bobot busur pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2 untuk setiap kasus ini disajikan pada Tabel 1.1 hingga Tabel 1.4 dalam Lampiran 1.

Dari persamaan (3.25) sampai dengan (3.56), himpunan bobot busur masing-masing kasus adalah sebagai berikut:

a. Himpunan bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$

$$W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) = \left\{ \frac{7mn+1}{2} + 2, \frac{7mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{7mn+1}{2} + 2m, \frac{7mn+1}{2} + 2m + 2, \dots, \frac{11mn+1}{2} - 2m, \frac{11mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{11mn+1}{2} \right\}.$$

b. Himpunan bobot busur $v_i^j v_{i,1}^j$

$$W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) = \left\{ \frac{11mn+1}{2} + 2, \frac{11mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{11mn+1}{2} + 2m, \frac{11mn+1}{2} + 2m + 2, \dots, \frac{15mn+1}{2} - 2m, \frac{15mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{15mn+1}{2} \right\}.$$

c. Himpunan bobot busur $v_i^j v_{i,2}^j$

$$W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) = \left\{ \frac{15mn+1}{2} + 2, \frac{15mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{17mn+1}{2} - m, \frac{17mn+1}{2} - m + 2, \dots, \frac{17mn+1}{2} + m, \frac{17mn+1}{2} + m + 2, \dots, \frac{19mn+1}{2} - 2m, \frac{19mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{19mn+1}{2} \right\}.$$

d. Himpunan bobot busur $v_{i,1}^j v_{i,2}^j$

$$W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) = \left\{ \frac{19mn+1}{2} + 2, \frac{19mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{19mn+1}{2} + 2m, \frac{21mn+1}{2} - 3m + 2, \dots, \frac{21mn+1}{2} - m, \frac{21mn+1}{2} - m + 2, \dots, \frac{21mn+1}{2} + m, \frac{21mn+1}{2} + m + 2, \dots, \frac{23mn+1}{2} \right\}.$$

Jadi himpunan semua bobot busur pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2 adalah:

$$\begin{aligned} W &= \{W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j) | v_i^j v_{i+1}^j \in E\} \cup \{W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j) | v_i^j v_{i,1}^j \in E\} \cup \\ &\quad \{W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j) | v_i^j v_{i,2}^j \in E\} \cup \{W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) | v_{i,1}^j v_{i,2}^j \in E\}. \\ &= \left\{ \frac{7mn+1}{2} + 2, \frac{7mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{11mn+1}{2} - 2m, \frac{11mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{11mn+1}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \frac{11mn+1}{2} + 2, \frac{11mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{15mn+1}{2} - 2m, \frac{15mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{15mn+1}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \frac{15mn+1}{2} + 2, \frac{15mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{19mn+1}{2} - 2m, \frac{19mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{19mn+1}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \frac{19mn+1}{2} + 2, \frac{19mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{21mn+1}{2} - m, \frac{21mn+1}{2} - m + 2, \dots, \frac{23mn+1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

$$W = \left\{ \frac{7mn+1}{2} + 2, \frac{7mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{15mn+1}{2} + 2, \frac{15mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{23mn+1}{2} \right\}.$$

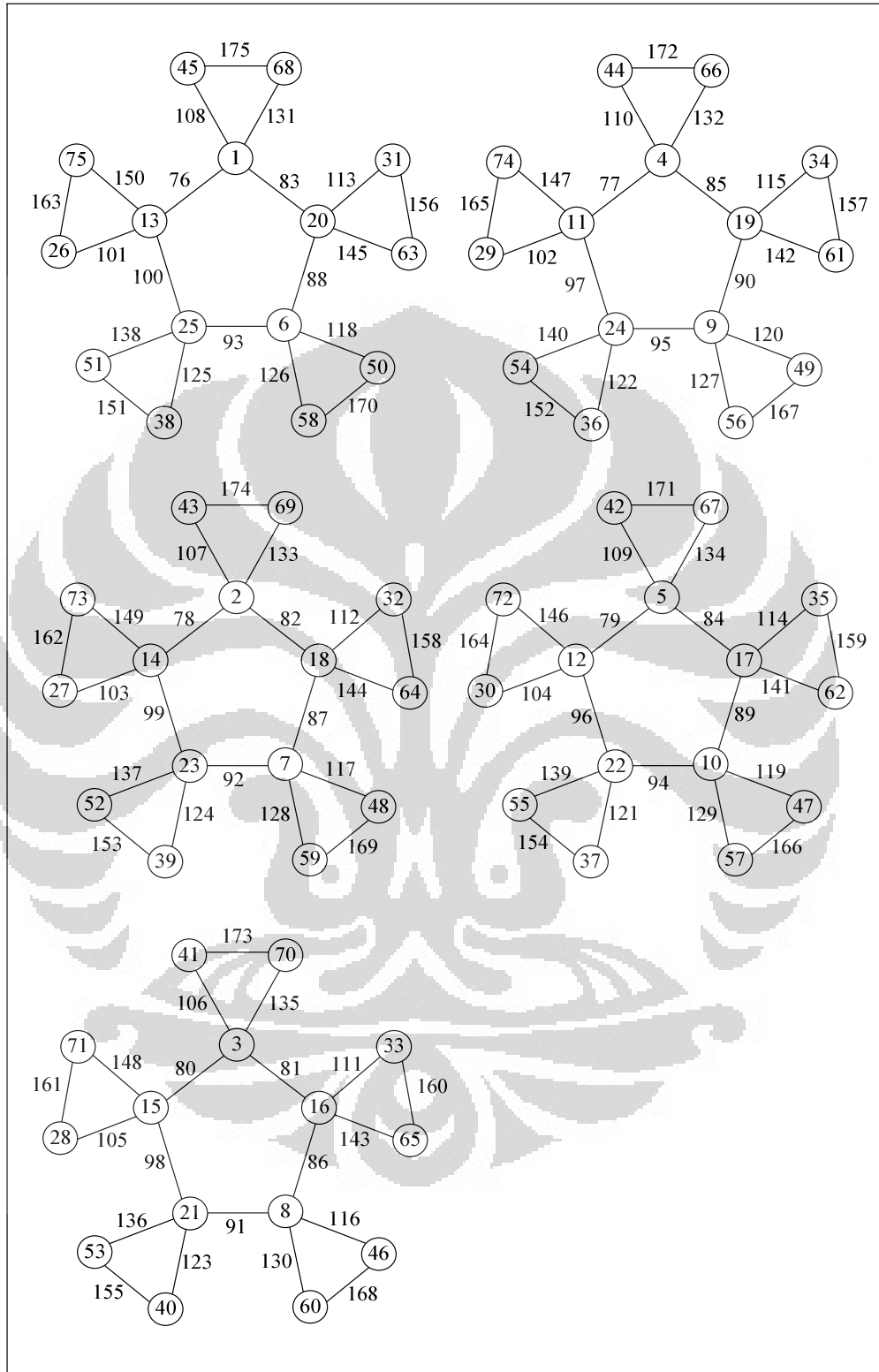
Himpunan bobot busur yang diperoleh membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama $a = \frac{7mn+1}{2} + 2$ dan beda $d = 2$. Bobot busur terkecil a diperoleh dari persamaan (3.31) yaitu pada busur $v_i^j v_{i+1}^j$ untuk $i = n$ dan $j = 1$. Jadi pelabelan α_2 adalah $\left(\frac{7mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA pada graf korona $m(C_n \odot P_2)$ untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. ■

Pelabelan α_2 juga merupakan $\left(\frac{7mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTSBAA, karena label simpul pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2 adalah bilangan positif terkecil $1, 2, 3, \dots, 3mn$. Selanjutnya dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4, dari Teorema 3.2.1 diperoleh Akibat 3.2.2.

Akibat 3.2.2.

Graf korona $m(C_n \odot P_2)$ memiliki $\left(\frac{19mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Pada Gambar 3.4 diperlihatkan contoh $(a, 2)$ -PTBAA pada graf $5(C_5 \odot P_2)$ dengan nilai $a = \frac{7mn+1}{2} + 2 = \frac{7(5)(5)+1}{2} + 2 = 90$.



Gambar 3.4. $(90, 2)$ -PTBAA pada graf $5(C_5 \odot P_2)$

Konstruksi (a, d) -PTBAA untuk nilai $d = 2$ telah diberikan pada Teorema 3.2.1. Selanjutnya dengan menggunakan pelabelan simpul yang sama seperti pada bukti Teorema 3.2.1 tetapi dengan pelabelan busur yang berbeda, diperoleh Akibat 3.2.3.

Akibat 3.2.3.

Graf korona $m(C_n \odot P_2)$ memiliki $\left(\frac{15mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Bukti. Misal $\alpha_3: V(m(C_n \odot P_2)) \cup E(m(C_n \odot P_2)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 7mn\}$.

Untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, m dan n bilangan bilangan ganjil, $n \geq 3$. Dengan mendefinisikan $\alpha_3(V) = \alpha_2(V)$ untuk setiap simpul V di $m(C_n \odot P_2)$ dan dengan mendefinisikan label busur sebagai berikut:

$$\alpha_3(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} \frac{m(14n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ m(7n-i-1) + \frac{j}{2} & , j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ 6mn + \frac{j+1}{2} & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(12n+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 7mn - j + 1 & , i = n, 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.57)$$

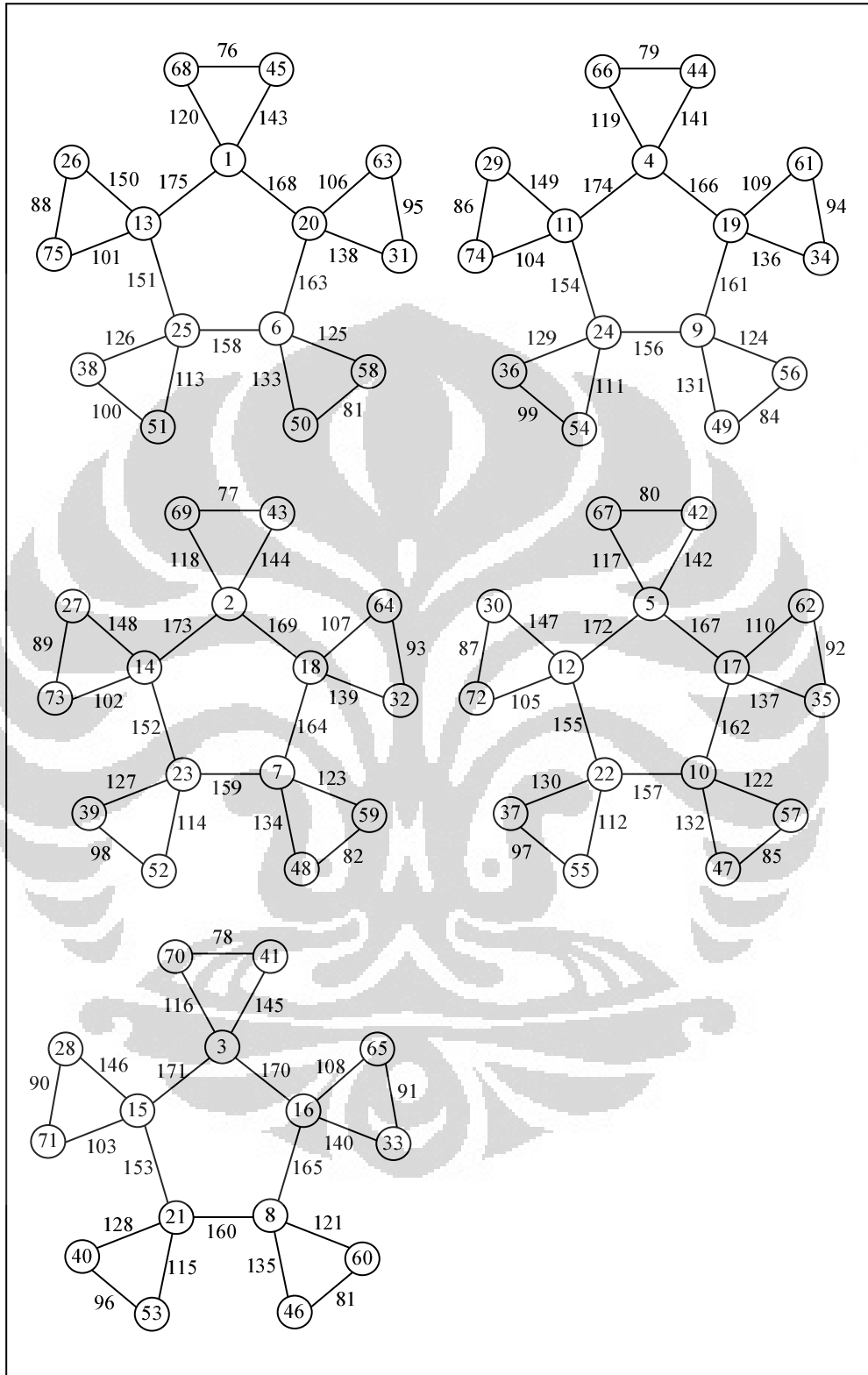
$$\alpha_3(v_i^j v_{i,1}^j) = \begin{cases} \frac{m(12n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ m(6n-i-1) + \frac{j}{2} & , j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ 5mn + \frac{j+1}{2} & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(10n+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 6mn - j + 1 & , i = n, 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\alpha_3(v_i^j v_{i,2}^j) = \begin{cases} \frac{m(9n+i+2)}{2} - j + 1 & , i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(8n+i)+2}{2} + \frac{j+1}{2} & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(8n+i+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i \text{ genap}, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{9mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(9n-1)}{2} + \frac{j}{2} & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 4mn + \frac{j+1}{2} & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(8n+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\alpha_3(v_{i,1}^j v_{i,2}^j) = \begin{cases} \frac{m(6n+i-1)}{2} + \frac{j+1}{2} & , i \text{ ganjil}, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(6n+i)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(7n+i+1)}{2} - j + 1 & , i \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{7mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(7n-1)}{2} + \frac{j}{2} & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.60)$$

Diperoleh bobot busur yang sama untuk sembarang busur pada graf $m(C_n \odot P_2)$, seperti yang ditunjukkan pada Tabel 2.1 hingga Tabel 2.4 dalam Lampiran 2. Sehingga bobot busurnya sama, yaitu $\frac{15mn+1}{2} + 1$ untuk setiap busur. Maka pelabelan α_3 merupakan $\left(\frac{15mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. ■

Telah diperoleh pelabelan α_3 merupakan $\left(\frac{15mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA, karena nilai $d = 0$ maka pelabelan α_3 juga merupakan PTBA dengan $k = a = \frac{15mn+1}{2} + 1$. Pada Gambar 3.5 diperlihatkan contoh $(a, 0)$ -PTBAA pada graf $5(C_5 \odot P_2)$, dengan nilai $a = \frac{15mn+1}{2} + 1 = \frac{15(5)(5)+1}{2} + 1 = 189$.



Gambar 3.5. $(189, 0)$ -PTBAA pada graf $5(C_5 \odot P_2)$

Selanjutnya dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4, dari Akibat 3.2.3 diperoleh Akibat 3.2.4.

Akibat 3.2.4.

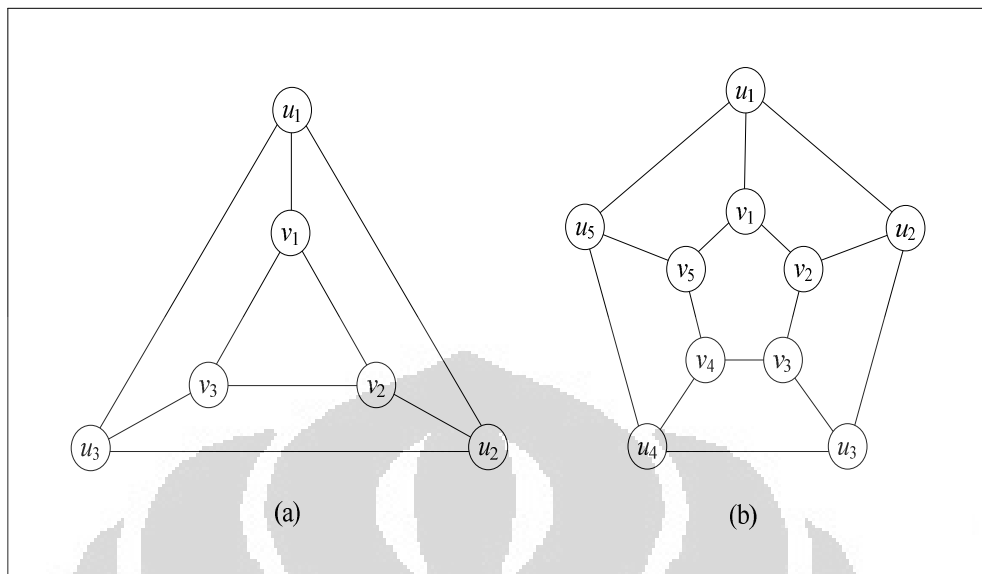
Graf korona $m(C_n \odot P_2)$ memiliki $\left(\frac{27mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Pada subbab ini telah diberikan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ untuk nilai $d = 0$ dan $d = 2$. Pada subbab berikut akan diberikan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf prisma $C_n \times P_2$ dan gabungan m graf prisma $C_n \times P_2$ isomorfik.

3.3 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Graf Prisma $C_n \times P_2$

Graf prisma $C_n \times P_2$ didefinisikan sebagai produk kartesius dari graf lingkaran C_n dengan graf lintasan P_2 . Jika n adalah banyaknya simpul pada graf C_n , maka banyaknya simpul dan busur pada graf prisma $C_n \times P_2$ masing-masing adalah $|V(C_n \times P_2)| = 2n$ dan $|E(C_n \times P_2)| = 3n$.

Himpunan simpul dan busur pada graf prisma $C_n \times P_2$ masing-masing adalah $V(C_n \times P_2) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n \times P_2) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{v_i u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_n u_1\}$, dimana v_i adalah simpul-simpul pada graf lingkaran dalam dan u_i adalah simpul-simpul pada graf lingkaran luar. Pada Gambar 3.6 diperlihatkan contoh graf prisma $C_3 \times P_2$ dan $C_5 \times P_2$ beserta notasi simpul-simpulnya.



Gambar 3.6. (a) Graf prisma $C_3 \times P_2$ (b) Graf prisma $C_5 \times P_2$

Konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf prisma $C_n \times P_2$ untuk $d = 2$ telah dilakukan oleh Sugeng dkk (2006). Namun dalam tesis ini akan diberikan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf prisma $C_n \times P_2$ untuk $d = 2$ secara berbeda dari bukti yang diberikan Sugeng dkk.

Teorema 3.3.1

Graf prisma $C_n \times P_2$ memiliki $\left(\frac{5n+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA untuk setiap n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Bukti. Misal $\beta_1 : V(C_n \times P_2) \cup E(C_n \times P_2) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n + 3n\}$.

Untuk $1 \leq i \leq n$, n bilangan ganjil, $n \geq 3$. Didefinisikan label simpul dan busur pada graf prisma $C_n \times P_2$ adalah sebagai berikut:

1. Label simpul

$$\beta_1(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & , i \text{ ganjil} \\ \frac{n+i+1}{2} & , i \text{ genap} \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\beta_1(u_i) = \begin{cases} \frac{3n+i}{2} & , i \text{ ganjil} \\ \frac{2n+i}{2} & , i \text{ genap} \end{cases} \quad (3.62)$$

2. Label busur

$$\beta_1(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n + i + 1 & , 1 \leq i \leq n - 1 \\ 2n + 1 & , i = n \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\beta_1(v_i u_i) = 3n + i \quad , 1 \leq i \leq n \quad (3.64)$$

$$\beta_1(u_i u_{i+1}) = 4n + i \quad , 1 \leq i \leq n \quad (3.65)$$

Label simpul dan busur pada graf prisma $C_n \times P_2$ terhadap pelabelan β_1 adalah bilangan bulat positif yang berbeda yaitu $\beta_1(V) = \{1, 2, \dots, 2n\}$ dan $\beta_1(E) = \{2n + 1, 2n + 2, \dots, 5n\}$. Maka pelabelan β_1 adalah pemetaan satu-satu dan pada dari $V(C_n \times P_2) \cup E(C_n \times P_2)$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, 5n\}$.

Bobot sembarang busur pada graf prisma $C_n \times P_2$ terhadap pelabelan β_1 dibagi menjadi 3 kasus, yaitu:

1. $W_{\beta_1}(v_i v_{i+1}) = \beta_1(v_i) + \beta_1(v_i v_{i+1}) + \beta_1(v_{i+1})$.
2. $W_{\beta_1}(v_i u_i) = \beta_1(v_i) + \beta_1(v_i u_i) + \beta_1(u_i)$.
3. $W_{\beta_1}(u_i u_{i+1}) = \beta_1(u_i) + \beta_1(u_i u_{i+1}) + \beta_1(u_{i+1})$.

Untuk $1 \leq i \leq n$, n bilangan ganjil, $n \geq 3$. Indeks i dihitung dengan modulo n .

Berikut akan dihitung bobot busur masing-masing kasus.

Kasus 1: Bobot busur $v_i v_{i+1}$

Berdasarkan pelabelan β_1 dari persamaan (3.61) dan (3.63) terdapat 3 kasus perhitungan bobot busur $v_i v_{i+1}$, yaitu :

- a. Untuk $1 \leq i \leq n - 1$, i ganjil

$$\begin{aligned} W_{\beta_1}(v_i v_{i+1}) &= \beta_1(v_i) + \beta_1(v_i v_{i+1}) + \beta_1(v_{i+1}) \\ &= \left[\frac{i+1}{2} \right] + [2n + i + 1] + \left[\frac{n+i+2}{2} \right] \\ &= \frac{5n+4i+1}{2} + 2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

b. Untuk $1 \leq i \leq n - 1$, i genap

$$\begin{aligned} W_{\beta_1}(v_i v_{i+1}) &= \beta_1(v_i) + \beta_1(v_i v_{i+1}) + \beta_1(v_{i+1}) \\ &= \left[\frac{n+i+1}{2} \right] + [2n+i+1] + \left[\frac{i+2}{2} \right] \\ &= \frac{5n+4i+1}{2} + 2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

c. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned} W_{\beta_1}(v_i v_{i+1}) &= \beta_1(v_i) + \beta_1(v_i v_{i+1}) + \beta_1(v_{i+1}) \\ &= \left[\frac{n+1}{2} \right] + [2n+1] + [1] \\ &= \frac{5n+1}{2} + 2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Kasus 2: Bobot busur $v_i u_i$

Berdasarkan pelabelan α_3 dari persamaan (3.61), (3.62) dan (3.64) terdapat 2 kasus perhitungan bobot busur $v_i u_i$, yaitu:

a. Untuk i ganjil

$$\begin{aligned} W_{\beta_1}(v_i u_i) &= \beta_1(v_i) + \beta_1(v_i u_i) + \beta_1(u_i) \\ &= \left[\frac{i+1}{2} \right] + [3n+i] + \left[\frac{3n+i}{2} \right] \\ &= \frac{9n+4i+1}{2}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

b. Untuk i genap

$$\begin{aligned} W_{\beta_1}(v_i u_i) &= \beta_1(v_i) + \beta_1(v_i u_i) + \beta_1(u_i) \\ &= \left[\frac{n+i+1}{2} \right] + [3n+i] + \left[\frac{2n+i}{2} \right] \\ &= \frac{9n+4i+1}{2}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Kasus 3: Bobot busur $u_i u_{i+1}$

Berdasarkan pelabelan α_3 dari persamaan (3.62) dan (3.65) terdapat 2 kasus perhitungan bobot busur $u_i u_{i+1}$, yaitu :

a. Untuk i ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_1}(u_i u_{i+1}) &= \beta_1(u_i) + \beta_1(u_i u_{i+1}) + \beta_1(u_{i+1}) \\
 &= \left[\frac{3n+i}{2} \right] + [4n+i] + \left[\frac{2n+i+1}{2} \right] \\
 &= \frac{13n+4i+1}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_1}(u_i u_{i+1}) &= \beta_1(u_i) + \beta_1(u_i u_{i+1}) + \beta_1(u_{i+1}) \\
 &= \left[\frac{2n+i}{2} \right] + [4n+i] + \left[\frac{3n+i+1}{2} \right] \\
 &= \frac{13n+4i+1}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Dari persamaan (3.66) hingga persamaan (3.72), himpunan bobot busur masing-masing kasus adalah sebagai berikut:

a. Himpunan bobot busur $v_i v_{i+1}$

$$W_{\beta_1}(v_i v_{i+1}) = \left\{ \frac{5n+1}{2} + 2, \frac{5n+1}{2} + 4, \dots, \frac{9n+1}{2} \right\}.$$

b. Himpunan bobot busur $v_i u_i$

$$W_{\beta_1}(v_i u_i) = \left\{ \frac{9n+1}{2} + 2, \frac{9n+1}{2} + 4, \dots, \frac{13n+1}{2} \right\}.$$

c. Himpunan bobot busur $u_i u_{i+1}$

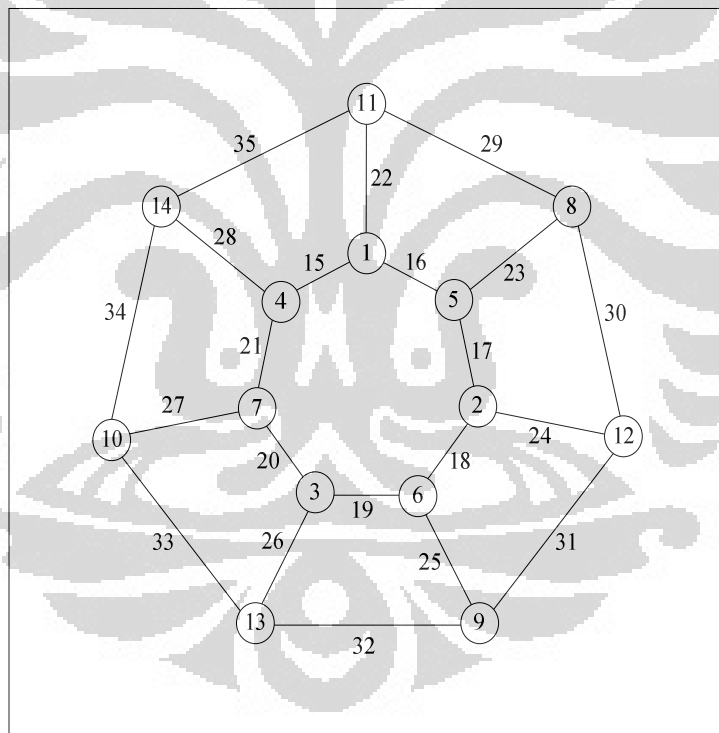
$$W_{\beta_1}(u_i u_{i+1}) = \left\{ \frac{13n+1}{2} + 2, \frac{13n+1}{2} + 4, \dots, \frac{17n+1}{2} \right\}.$$

Diperoleh himpunan semua bobot busur graf $(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_1 adalah:

$$\begin{aligned}
 W &= \{W_{\beta_1}(v_i v_{i+1}) | v_i v_{i+1} \in E\} \cup \{W_{\beta_1}(v_i u_i) | v_i u_i \in E\} \cup \\
 &\quad \{W_{\beta_1}(u_i u_{i+1}) | u_i u_{i+1} \in E\}. \\
 &= \left\{ \frac{5n+1}{2} + 2, \frac{5n+1}{2} + 4, \dots, \frac{9n+1}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{9n+1}{2} + 2, \frac{9n+1}{2} + 4, \dots, \frac{13n+1}{2} \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ \frac{13n+1}{2} + 2, \frac{13n+1}{2} + 4, \dots, \frac{17n+1}{2} \right\}. \\
 &= \left\{ \frac{5n+1}{2} + 2, \frac{5n+1}{2} + 4, \dots, \frac{9n+1}{2}, \frac{9n+1}{2} + 2, \dots, \frac{13n+1}{2}, \dots, \frac{17n+1}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Himpunan bobot busur yang diperoleh membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama $a = \frac{5n+1}{2} + 2$ dan beda $d = 2$. Bobot busur terkecil a diperoleh dari persamaan (3.68) yaitu busur $v_i^j v_{i+1}^j$ untuk $i = n$. Jadi pelabelan β_1 adalah $(\frac{5n+1}{2} + 2, 2)$ -PTBAA pada graf prisma $C_n \times P_2$ untuk setiap n bilangan ganjil, $n \geq 3$. ■

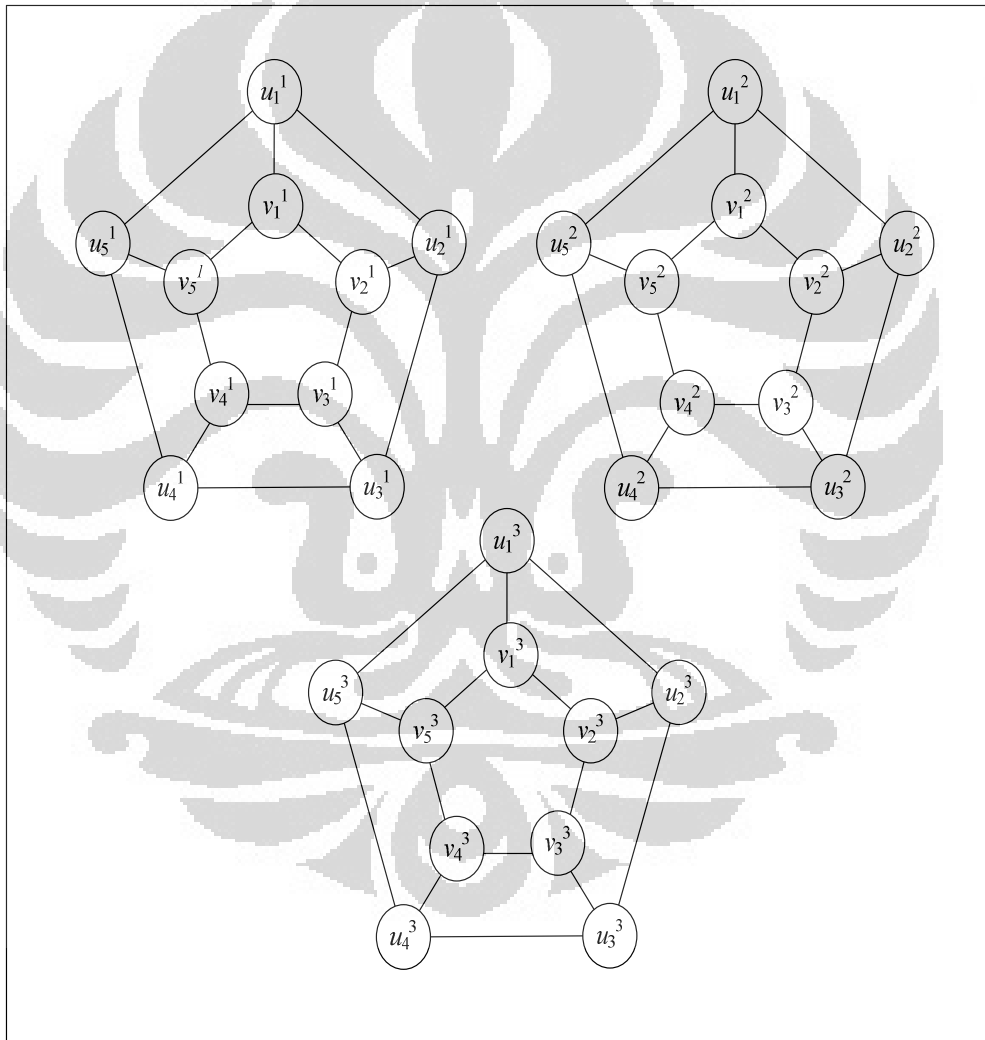
Label simpul pada graf prisma $C_n \times P_2$ terhadap pelabelan β_1 adalah himpunan $\{1, 2, \dots, 3n\}$. Maka Pelabelan β_1 juga merupakan (a, d) -PTSBA untuk graf prisma $C_n \times P_2$ dengan $a = \frac{5n+1}{2} + 2$ dan $d = 2$. Pada Gambar 3.7 diperlihatkan contoh $(20, 2)$ -PTBAA pada graf prisma $C_7 \times P_2$.



Gambar 3.7. $(20, 2)$ -PTBAA pada graf prisma $C_7 \times P_2$

3.4 Pelabelan Total (a, d) -Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf Prisma $C_n \times P_2$

Jika graf prisma $C_n \times P_2$ sebanyak m digabung, $m \geq 2$, maka akan terbentuk gabungan graf yang disebut gabungan m graf prisma $C_n \times P_2$ isomorfik, dinotasikan dengan $m(C_n \times P_2)$. Pada graf $m(C_n \times P_2)$ berlaku hubungan $|V(m(C_n \times P_2))| = \frac{2}{3}|E(m(C_n \times P_2))|$. Pada Gambar 3.8 diperlihatkan contoh graf $3(C_5 \times P_2)$ dengan notasi simpul-simpulnya.



Gambar 3.8. Graf prisma $3(C_5 \times P_2)$

Himpunan simpul dan busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ masing-masing adalah:
 $V(m(C_n \times P_2)) = \{v_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{u_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan
 $E(m(C_n \times P_2)) = \{v_i^j v_{i+1}^j | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{v_n^j v_1^j | 1 \leq j \leq m\} \cup$
 $\{v_i^j u_i^j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{u_i^j u_{i+1}^j | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup$
 $\{u_n^j u_1^j | 1 \leq j \leq m\}$, dimana v_i^j adalah simpul ke- i pada graf lingkaran dalam ke- j
dan u_i^j adalah simpul ke- i pada graf lingkaran luar ke- j .

Batas atas nilai d yang mungkin dari (a, d) -PTBAA pada graf prisma $m(C_n \times P_2)$ dapat ditentukan dengan menggunakan pertidaksamaan (2.3) pada subbab 2.4. Banyaknya simpul dan banyaknya busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ masing-masing adalah $2mn$ dan $3mn$, maka dengan mensubstitusikan nilai ini ke dalam pertidaksamaan (2.3), diperoleh:

$$d \leq \frac{3(2mn)+3(3mn)-9}{3mn-1}$$

atau

$$d \leq 4 + \frac{3mn-5}{3mn-1} \quad (3.73)$$

Untuk m dan n bilangan bulat positif, $n \geq 3$, dari pertidaksamaan (3.73) diperoleh nilai d yang mungkin dari (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dalam tesis ini konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ hanya dilakukan untuk nilai $d = 0, d = 1$ dan $d = 2$. Berikut akan diberikan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ untuk nilai $d = 1$.

Teorema 3.4.1

Graf prisma $m(C_n \times P_2)$ memiliki $(4mn + 2, 1)$ -PTBAA untuk setiap m bilangan bulat positif dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Bukti.

Misal $\beta_2 : V(m(C_n \times P_2)) \cup E(m(C_n \times P_2)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2mn + 3mn\}$

Untuk $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n$, m bilangan bulat positif dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Didefinisikan label simpul dan busur dari graf $m(C_n \times P_2)$ sebagai berikut:

1. Label simpul

$$\beta_2(v_i^j) = j + (i - 1)m \quad , 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \quad (3.74)$$

$$\beta_2(u_i^j) = \begin{cases} m(2n - 1) + j & , i = 1 \\ m(n + i - 2) + j & , 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.75)$$

2. Label busur

$$\beta_2(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} m(5n - i + 1) - j + 1 & , 1 \leq i \leq n - 1 \\ m(3n + 1) - j + 1 & , i = n \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\beta_2(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} m(4n + 1) - j + 1 & , i = 1 \\ m(3n - i + 2) - j + 1 & , 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.77)$$

$$\beta_2(u_i^j u_{i+1}^j) = \begin{cases} m(2n + 1) - j + 1 & , i = 1 \\ m(4n - i + 2) - j + 1 & , 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.78)$$

Label simpul dan busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_2 adalah bilangan bulat positif yang berbeda yaitu $\beta_2(V) = \{1, 2, \dots, 2mn\}$ dan $\beta_2(E) = \{2mn + 1, 2mn + 2, \dots, 5mn\}$. Maka pelabelan β_2 adalah pemetaan satu-satu dan pada dari $V(m(C_n \times P_2)) \cup E(m(C_n \times P_2))$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, 5mn\}$.

Bobot sembarang busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_2 dibagi menjadi 3 kasus, yaitu:

1. $W_{\beta_2}(v_i^j v_{i+1}^j) = \beta_2(v_i^j) + \beta_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_2(v_{i+1}^j)$.
2. $W_{\beta_2}(v_i^j u_i^j) = \beta_2(v_i^j) + \beta_2(v_i^j u_i^j) + \beta_2(u_i^j)$.
3. $W_{\beta_2}(u_i^j u_{i+1}^j) = \beta_2(u_i^j) + \beta_2(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_2(u_{i+1}^j)$.

Untuk $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, m$ bilangan bulat positif dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Indeks i dihitung dengan modulo n . Berikut akan dihitung bobot busur masing-masing kasus.

Kasus 1: Bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$

Berdasarkan pelabelan β_2 dari persamaan (3.74) dan (3.76), terdapat 2 kasus perhitungan bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$, yaitu :

a. Untuk $1 \leq i \leq n - 1$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \beta_2(v_i^j) + \beta_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_2(v_{i+1}^j) \\ &= [j + (i - 1)m] + [m(5n - i + 1) - j + 1] + \end{aligned}$$

Universitas Indonesia

$$\begin{aligned}
& [j + ((i + 1) - 1)m] \\
& = m(5n + i) + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

b. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_2}(v_i^j v_{i+1}^j) & = \beta_2(v_i^j) + \beta_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_2(v_{i+1}^j) \\
& = [j + (n - 1)m] + [m(3n + 1) - j + 1] + [j + (1 - 1)m] \\
& = 4mn + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Kasus 2: Bobot busur $v_i^j u_i^j$

Berdasarkan pelabelan β_2 dari persamaan (3.74), (3.75) dan (3.77), terdapat 2 kasus perhitungan bobot busur $v_i^j u_i^j$, yaitu :

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_2}(v_1^j u_1^j) & = \beta_2(v_1^j) + \beta_2(v_1^j u_1^j) + \beta_2(u_1^j) \\
& = [j + (1 - 1)m] + [m(4n + 1) - j + 1] + [m(2n - 1) + j] \\
& = 6mn + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

b. Untuk $2 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_2}(v_i^j u_i^j) & = \beta_2(v_i^j) + \beta_2(v_i^j u_i^j) + \beta_2(u_i^j) \\
& = [j + (i - 1)m] + [m(3n - i + 2) - j + 1] + [m(n + i - 2) + j] \\
& = m(4n + i - 1) + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Kasus 3: Bobot busur $u_i^j u_{i+1}^j$

Berdasarkan pelabelan β_2 dari persamaan (3.75) dan (3.78), terdapat 2 kasus perhitungan bobot busur $u_i^j u_{i+1}^j$, yaitu :

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_2}(u_1^j u_{i+1}^j) & = \beta_2(u_1^j) + \beta_2(u_1^j u_{i+1}^j) + \beta_2(u_{i+1}^j) \\
& = [m(2n - 1) + j] + [m(2n + 1) - j + 1] + \\
& \quad [m(n + 2 - 2) + j] \\
& = 5mn + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

b. Untuk $2 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(u_i^j u_{i+1}^j) &= \beta_2(u_i^j) + \beta_2(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_2(u_{i+1}^j) \\
 &= [m(n+i-2) + j] + [m(4n-i+2) - j + 1] + \\
 &\quad [m(n+(i+1)-2) + j] \\
 &= m(6n+i-1) + j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Maka untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, m bilangan bilangan bulat positif dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. Himpunan bobot busur masing-masing kasus adalah sebagai berikut:

a. Himpunan bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$

$$W_{\beta_2}(v_i^j v_{i+1}^j) = \{4mn + 2, 4mn + 3, \dots, 4mn + m + 1, 5mn + m + 2, 5mn + m + 3, \dots, 6mn + 1\}.$$

b. Himpunan bobot busur $v_i^j u_i^j$

$$W_{\beta_2}(v_i^j u_i^j) = \{6mn + 2, 6mn + 3, \dots, 6mn + m + 1, 4mn + m + 2, 4mn + m + 2, \dots, 5mn + 1\}.$$

c. Himpunan bobot busur $u_i^j u_{i+1}^j$

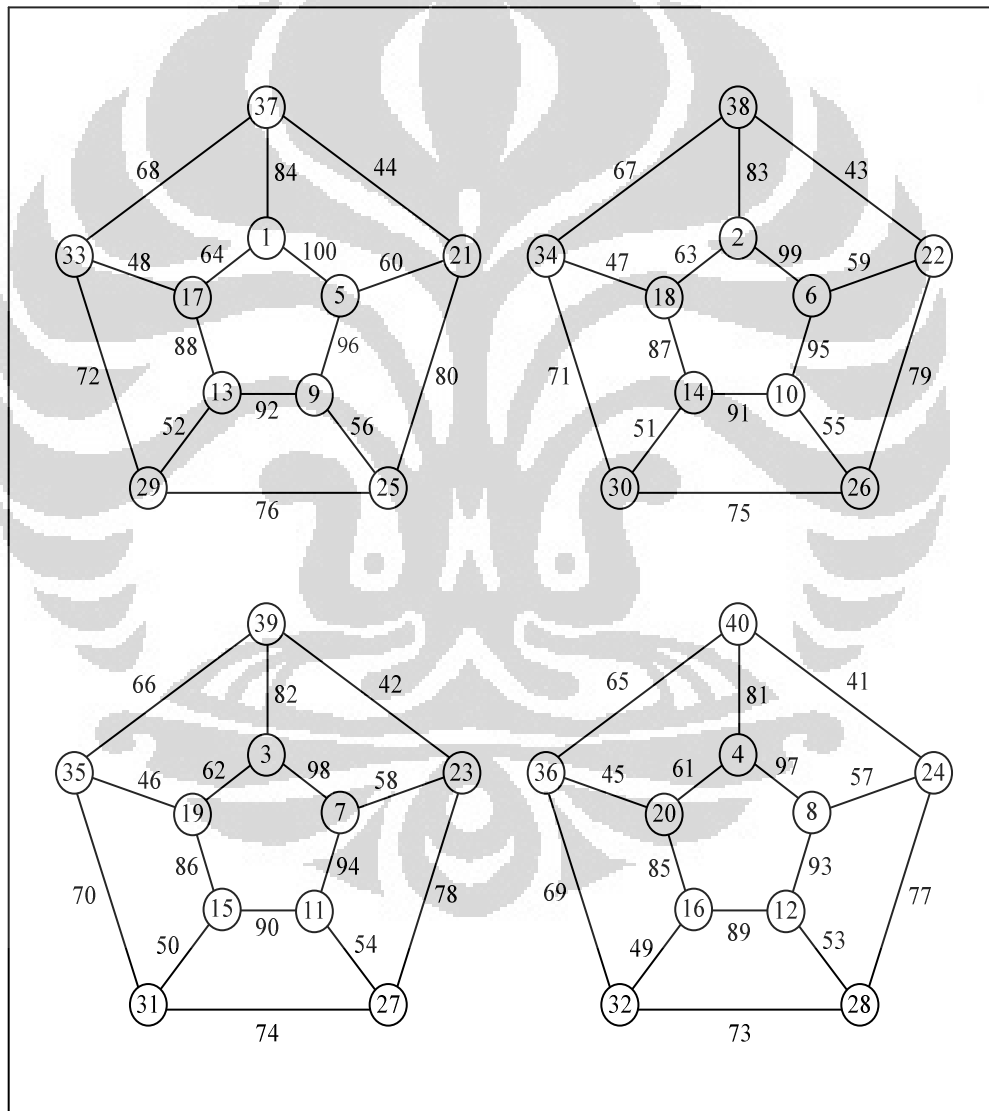
$$W_{\beta_2}(u_i^j u_{i+1}^j) = \{5mn + 2, 5mn + 3, \dots, 5mn + m + 1, 6mn + m + 2, 6mn + m + 3, \dots, 7mn + 1\}.$$

Diperoleh himpunan semua bobot busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_2 adalah:

$$\begin{aligned}
 W &= \{W_{\beta_2}(v_i^j v_{i+1}^j) | v_i^j v_{i+1}^j \in E\} \cup \{W_{\beta_2}(v_i^j u_i^j) | v_i^j u_i^j \in E\} \cup \\
 &\quad \{W_{\beta_2}(u_i^j u_{i+1}^j) | u_i^j u_{i+1}^j \in E\}. \\
 &= \{4mn + 2, 4mn + 3, \dots, 4mn + m + 1, 5mn + m + 2, \dots, 6mn + 1\} \cup \\
 &\quad \{6mn + 2, 6mn + 3, \dots, 6mn + m + 1, 4mn + m + 2, \dots, 5mn + 1\} \cup \\
 &\quad \{5mn + 2, 5mn + 3, \dots, 5mn + m + 1, 6mn + m + 2, \dots, 7mn + 1\}. \\
 &= \{4mn + 2, 4mn + 3, \dots, 4mn + m + 1, 4mn + m + 2, \dots, 5mn + 1, \\
 &\quad 5mn + 2, \dots, 5mn + m + 1, 5mn + m + 2, \dots, 6mn + 1, 6mn + 2, \dots, \\
 &\quad 6mn + m + 1, 6mn + m + 2, \dots, 7mn + 1\}. \\
 &= \{4mn + 2, 4mn + 3, \dots, 5mn + 1, \dots, 6mn + 1, 6mn + 2, \dots, 7mn + 1\}
 \end{aligned}$$

Himpunan bobot busur yang diperoleh membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama $a = 4mn + 2$ dan beda $d = 1$. Bobot busur terkecil a diperoleh dari persamaan (3.80) yaitu busur $v_i^j v_{i+1}^j$ untuk $i = n$ dan $j = 1$. Maka terbukti bahwa pelabelan β_2 adalah $(4mn + 2, 1)$ -PTBAA pada graf prisma $m(C_n \times P_2)$ untuk setiap m bilangan bulat positif dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. ■

Pada Gambar 3.9 diperlihatkan contoh $(82, 1)$ -PTBAA pada graf $4(C_5 \times P_2)$.



Gambar 3.9. $(82, 1)$ -PTBAA pada graf $4(C_5 \times P_2)$

Pelabelan β_2 juga merupakan $(4mn + 2, 1)$ -PTSBA, karena label simpul graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_2 adalah bilangan positif terkecil $1, 2, 3, \dots, 2mn$. Selanjutnya dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4, dari Teorema 3.4.1 diperoleh Akibat 3.4.2.

Akibat 3.4.2.

Graf prisma $m(C_n \times P_2)$ memiliki $(8mn + 2, 1)$ -PTBAA untuk setiap m bilangan bulat positif dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ untuk nilai $d = 1$ telah diberikan pada Teorema 3.4.1. Selanjutnya pada Teorema 3.4.3 berikut akan diberikan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ untuk nilai $d = 2$.

Teorema 3.4.3

Graf prisma $m(C_n \times P_2)$ memiliki $\left(\frac{5mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Bukti. Misal $\beta_3 : V(m(C_n \times P_2)) \cup E(m(C_n \times P_2)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5mn\}$.

Untuk $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. Didefinisikan label simpul dan busur graf $m(C_n \times P_2)$ sebagai berikut:

1. Label simpul

$$\beta_3(v_i^j) = \begin{cases} \frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2} & , i \text{ ganjil}, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{im+1}{2} + \frac{j}{2} & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 & , i \text{ genap}, 1 \leq j \leq m \\ \frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2} & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.85)$$

$$\beta_3(u_i^j) = \begin{cases} \frac{m(3n+i)}{2} - j + 1 & , i \text{ ganjil}, 2 \leq i \leq n \\ \frac{m(2n+i-2)}{2} + \frac{j+1}{2} & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil}, 2 \leq i \leq n \\ \frac{m(2n+i-1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i \text{ genap}, j \text{ genap}, 2 \leq i \leq n \\ \frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , i = 1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2} & , i = 1, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.86)$$

2. Label busur

$$\beta_3(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} \frac{m(4n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ m(2n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2}\right) & , j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ (3mn+1) - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(6n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 2mn+j & , i = n, 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.87)$$

$$\beta_3(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} 3mn+j & , i = 1, 1 \leq j \leq m \\ \frac{m(6n+2i-1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , j \text{ ganjil}, 2 \leq i \leq n-1 \\ m(3n+i) + 1 - \left(\frac{j}{2}\right) & , j \text{ genap}, 2 \leq i \leq n-1 \\ 4mn+1 - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(8n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.88)$$

$$\beta_3(u_i^j u_{i+1}^j) = \begin{cases} 4mn+j & , i = 1, 1 \leq j \leq m \\ \frac{m(8n+2i-1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right) & , j \text{ ganjil}, 2 \leq i \leq n-1 \\ m(4n+i) + 1 - \left(\frac{j}{2}\right) & , j \text{ genap}, 2 \leq i \leq n-1 \\ 5mn - \left(\frac{j-1}{2}\right) & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(10n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right) & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.89)$$

Label simpul dan busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_3 adalah bilangan bulat positif yang berbeda yaitu $\beta_3(V) = \{1, 2, \dots, 2mn\}$ dan $\beta_3(E) = \{2mn+1, 2mn+2, \dots, 5mn\}$. Maka pelabelan β_3 adalah pemetaan satu-satu dan pada dari $V(m(C_n \times P_2)) \cup E(m(C_n \times P_2))$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, 5mn\}$.

Bobot sembarang busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_3 dibagi menjadi 3 kasus, yaitu:

1. $W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) = \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_3(v_{i+1}^j)$,
2. $W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) = \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j)$,
3. $W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) = \beta_3(u_i^j) + \beta_3(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_3(u_{i+1}^j)$.

Untuk $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. Indeks i dihitung dengan modulo n . Berikut akan dihitung bobot busur masing-masing kasus.

Kasus 1: Bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$

Berdasarkan pelabelan β_3 dari persamaan (3.85) dan (3.87), terdapat 6 kasus perhitungan bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$, yaitu :

a. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, j ganjil

$$\begin{aligned} W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_3(v_{i+1}^j) \\ &= \left[\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] + \left[\frac{m(4n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\ &\quad \left[\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1 \right] \\ &= \frac{m(5n+5i+1)+1}{2} - j + 2. \end{aligned} \quad (3.90)$$

b. Untuk $1 \leq i \leq n - 2$, j genap

$$\begin{aligned} W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_3(v_{i+1}^j) \\ &= \left[\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[m(2n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\ &\quad \left[\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1 \right] \\ &= \frac{m(5n+4i+4)+1}{2} - j + 2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

c. Untuk $i = n - 1$, j ganjil

$$W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) = \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_3(v_{i+1}^j)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{m(n + (n - 1) + 1)}{2} - j + 1 \right] + \left[(3mn + 1) - \left(\frac{j + 1}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{mn - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] \\
&= \frac{9mn + 1}{2} - j + 1.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

d. Untuk $i = n - 1$, j genap

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_3(v_{i+1}^j) \\
&= \left[\frac{m(n + (n - 1) + 1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(6n - 1) + 1}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{m(n - 1)}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
&= \frac{m(9n - 2) + 1}{2} - j + 1.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

e. Untuk $i = n$, j ganjil

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_3(v_{i+1}^j) \\
&= \left[\frac{mn - 1}{2} + \frac{j + 1}{2} \right] + [2mn + j] + \left[\frac{m(1 - 1)j + 1}{2} \right] \\
&= \frac{5mn + 1}{2} + 2j.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

f. Untuk $i = n$, j genap

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \beta_3(v_{i+1}^j) \\
&= \left[\frac{m(n - 1)}{2} + \frac{j}{2} \right] + [2mn + j] + \left[\frac{(1)m + 1}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
&= \frac{5mn + 1}{2} + 2j.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Kasus 2: Bobot busur $v_i^j u_i^j$

Berdasarkan pelabelan β_3 dari persamaan (3.85), (3.86) dan (3.88), terdapat 8 kasus perhitungan bobot busur $v_i^j u_i^j$, yaitu :

a. Untuk $i = 1, j$ ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j) \\
 &= \left[\frac{m(1-1)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] + [3mn + j] + \left[\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
 &= \frac{9mn+1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

b. Untuk $i = 1, j$ genap

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j) \\
 &= \left[\frac{(1)m+1}{2} + \frac{j}{2} \right] + [3mn + j] + \left[\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{9mn+1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

c. Untuk $2 \leq i \leq n-1, i$ ganjil, j ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j) \\
 &= \left[\frac{m(i-1)}{2} + \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \left[\frac{m(6n+2i-1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(3n+i)}{2} - j + 1 \right] \\
 &= \frac{m(9n+4i-2)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

d. Untuk $2 \leq i \leq n-1, i$ ganjil, j genap

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j) \\
 &= \left[\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[m(3n+i) + 1 - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(3n+i)}{2} - j + 1 \right] \\
 &= \frac{m(9n+4i)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

e. Untuk $2 \leq i \leq n-1, i$ genap, j ganjil

$$W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) = \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(6n+2i-1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{m(2n+i-2)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
&= \frac{m(9n+4i-2)+1}{2} - j + 2.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

f. Untuk $2 \leq i \leq n-1$, i genap, j genap

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j) \\
&= \left[\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1 \right] + \left[m(3n+i) + 1 - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{m(2n+i-1)+1}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
&= \frac{m(9n+4i)+1}{2} - j + 2.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

g. Untuk $i = n$, j ganjil

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j) \\
&= \left[\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} \right] + \left[4mn + 1 - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{m(3n+n)}{2} - j + 1 \right] \\
&= \frac{13mn+1}{2} - j + 1.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

h. Untuk $i = n$, j genap

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) &= \beta_3(v_i^j) + \beta_3(v_i^j u_i^j) + \beta_3(u_i^j) \\
&= \left[\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2} \right] + \left[\frac{m(8n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{m(3n+n)}{2} - j + 1 \right] \\
&= \frac{m(13n-2)+1}{2} - j + 1.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Kasus 3: Bobot busur $u_i^j u_{i+1}^j$

Berdasarkan pelabelan β_3 dari persamaan (3.86) dan (3.89), terdapat 6 kasus perhitungan bobot busur $u_i^j u_{i+1}^j$, yaitu :

a. Untuk $i = 1, j$ ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) &= \beta_3(u_i^j) + \beta_3(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_3(u_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} \right] + [4mn+j] + \\
 &\quad \left[\frac{m(2n+2-2)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
 &= \frac{13mn+1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

b. Untuk $i = 1, j$ genap

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) &= \beta_3(u_i^j) + \beta_3(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_3(u_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2} \right] + [4mn+j] + \\
 &\quad \left[\frac{m(2n+2-1)+1}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
 &= \frac{13mn+1}{2} + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

c. Untuk $2 \leq i \leq n-1, j$ ganjil

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) &= \beta_3(u_i^j) + \beta_3(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_3(u_{i+1}^j) \\
 &= \left[\frac{m(3n+i)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(8n+2i-1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2} \right) \right] + \\
 &\quad \left[\frac{m(2n+i-1)}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
 &= \frac{m(13n+4i-2)+1}{2} - j + 2.
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

d. Untuk $2 \leq i \leq n-1, j$ genap

$$W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) = \beta_3(u_i^j) + \beta_3(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_3(u_{i+1}^j)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{m(3n+i)}{2} - j + 1 \right] + \left[m(4n+i) + 1 - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{m(2n+i-1) + 1}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
&= \frac{m(13n+4i-1)+1}{2} - j + 2.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

e. Untuk $i = n$, j ganjil

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) &= \beta_3(u_i^j) + \beta_3(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_3(u_{i+1}^j) \\
&= \left[\frac{m(3n+n)}{2} - j + 1 \right] + \left[5mn - \left(\frac{j-1}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2} \right] \\
&= \frac{17mn+1}{2} - j + 1.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

f. Untuk $i = n$, j genap

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) &= \beta_3(u_i^j) + \beta_3(u_i^j u_{i+1}^j) + \beta_3(u_{i+1}^j) \\
&= \left[\frac{m(3n+n)}{2} - j + 1 \right] + \left[\frac{m(10n-1) + 1}{2} - \left(\frac{j}{2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2} \right] \\
&= \frac{m(17n-2)+1}{2} - j + 1.
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Dari persamaan (3.90) sampai dengan (3.109), himpunan bobot busur masing-masing kasus adalah sebagai berikut:

a. Himpunan bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \left\{ \frac{5mn+1}{2} + 2, \frac{5mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{5mn+1}{2} + 2m, \frac{5mn+1}{2} + 2m + 2, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{9mn+1}{2} - 2m, \frac{9mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{9mn+1}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

b. Himpunan bobot busur $v_i^j u_i^j$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) &= \left\{ \frac{9mn+1}{2} + 2, \frac{9mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{9mn+1}{2} + 2m, \frac{9mn+1}{2} + 2m + 2, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{13mn+1}{2} - 2m, \frac{13mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{13mn+1}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

c. Himpunan bobot busur $u_i^j u_{i+1}^j$

$$W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) = \left\{ \frac{13mn+1}{2} + 2, \frac{13mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{13mn+1}{2} + 2m, \frac{13mn+1}{2} + 2m + 2, \dots, \frac{17mn+1}{2} - 2m, \frac{17mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{17mn+1}{2} \right\}.$$

Diperoleh himpunan semua bobot busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_3 adalah:

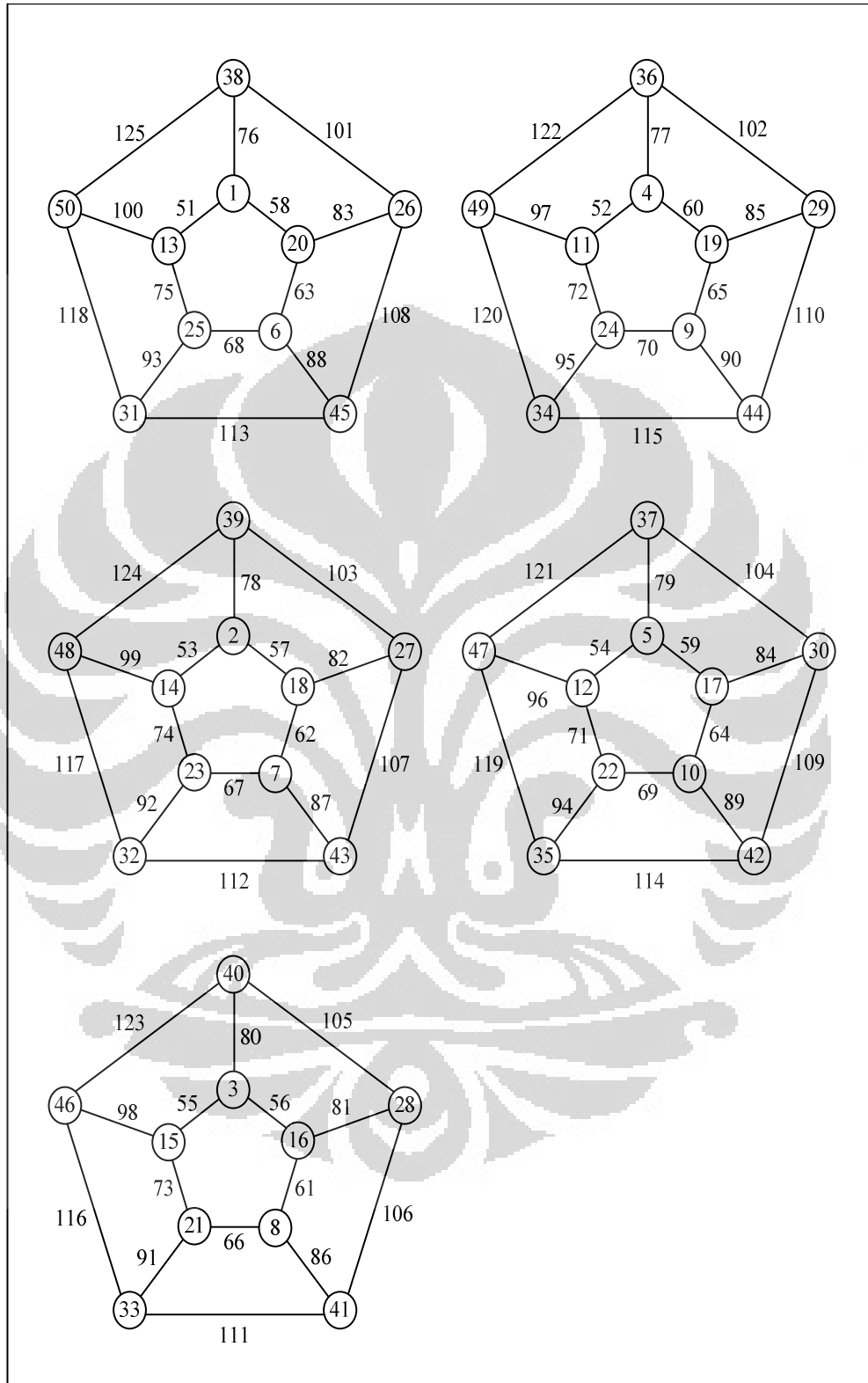
$$\begin{aligned} W &= \{W_{\beta_3}(v_i^j v_{i+1}^j) | v_i^j v_{i+1}^j \in E\} \cup \{W_{\beta_3}(v_i^j u_i^j) | v_i^j u_i^j \in E\} \cup \\ &\quad \{W_{\beta_3}(u_i^j u_{i+1}^j) | u_i^j u_{i+1}^j \in E\}. \\ &= \left\{ \frac{5mn+1}{2} + 2, \frac{5mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{9mn+1}{2} - 2m, \frac{9mn+1}{2} + 2m + 2, \dots, \frac{9mn+1}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \frac{9mn+1}{2} + 2, \frac{9mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{13mn+1}{2} - 2m, \frac{13mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{13mn+1}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \frac{13mn+1}{2} + 2, \frac{13mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{17mn+1}{2} - 2m, \frac{17mn+1}{2} - 2m + 2, \dots, \frac{17mn+1}{2} \right\}. \\ &= \left\{ \frac{5mn+1}{2} + 2, \frac{5mn+1}{2} + 4, \dots, \frac{13mn+1}{2}, \frac{13mn+1}{2} + 2, \dots, \frac{17mn+1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Himpunan bobot busur yang diperoleh membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama $a = \frac{5mn+1}{2} + 2$ dan beda $d = 2$. Bobot busur terkecil a diperoleh dari persamaan (3.94) yaitu pada busur $v_i^j v_{i+1}^j$ untuk $i = n$ dan $j = 1$. Jadi pelabelan β_3 adalah $\left(\frac{5mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA pada gabungan graf prisma $C_n \times P_2$ isomorfik untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. ■

Label simpul pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_3 adalah bilangan positif terkecil $\{1, 2, 3, \dots, 2mn\}$, maka pelabelan β_3 juga merupakan $\left(\frac{5mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTSBA. Selanjutnya dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4, dari Teorema 3.4.3 diperoleh Akibat 3.4.4.

Akibat 3.4.4.

Graf prisma $m(C_n \times P_2)$ memiliki $\left(\frac{15mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.



Gambar 3.10. $(65, 2)$ -PTBAA pada graf $5(C_5 \times P_2)$

Universitas Indonesia

Pada Gambar 3.10 diperlihatkan contoh $(65, 2)$ -PTBAA pada graf prisma $5(C_5 \times P_2)$ dengan nilai $a = \frac{5mn+1}{2} + 2 = \frac{5(5)(5)+1}{2} + 2 = 65$.

Konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ untuk nilai $d = 2$ telah diberikan pada Teorema 3.4.3. Selanjutnya jika label busur pada pelabelan β_3 dikenakan pada graf $m(C_n \times P_2)$ dengan cara yang berbeda, diperoleh Akibat 3.4.5.

Akibat 3.4.5.

Graf prisma $m(C_n \times P_2)$ memiliki $(\frac{11mn+1}{2} + 1, 0)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Bukti. Misal $\beta_4: V(m(C_n \times P_2)) \cup E(m(C_n \times P_2)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5mn\}$.

Untuk $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. Dengan mendefinisikan $\beta_4(V) = \beta_3(V)$ untuk setiap simpul V di $m(C_n \times P_2)$ dan dengan mendefinisikan label busur sebagai berikut:

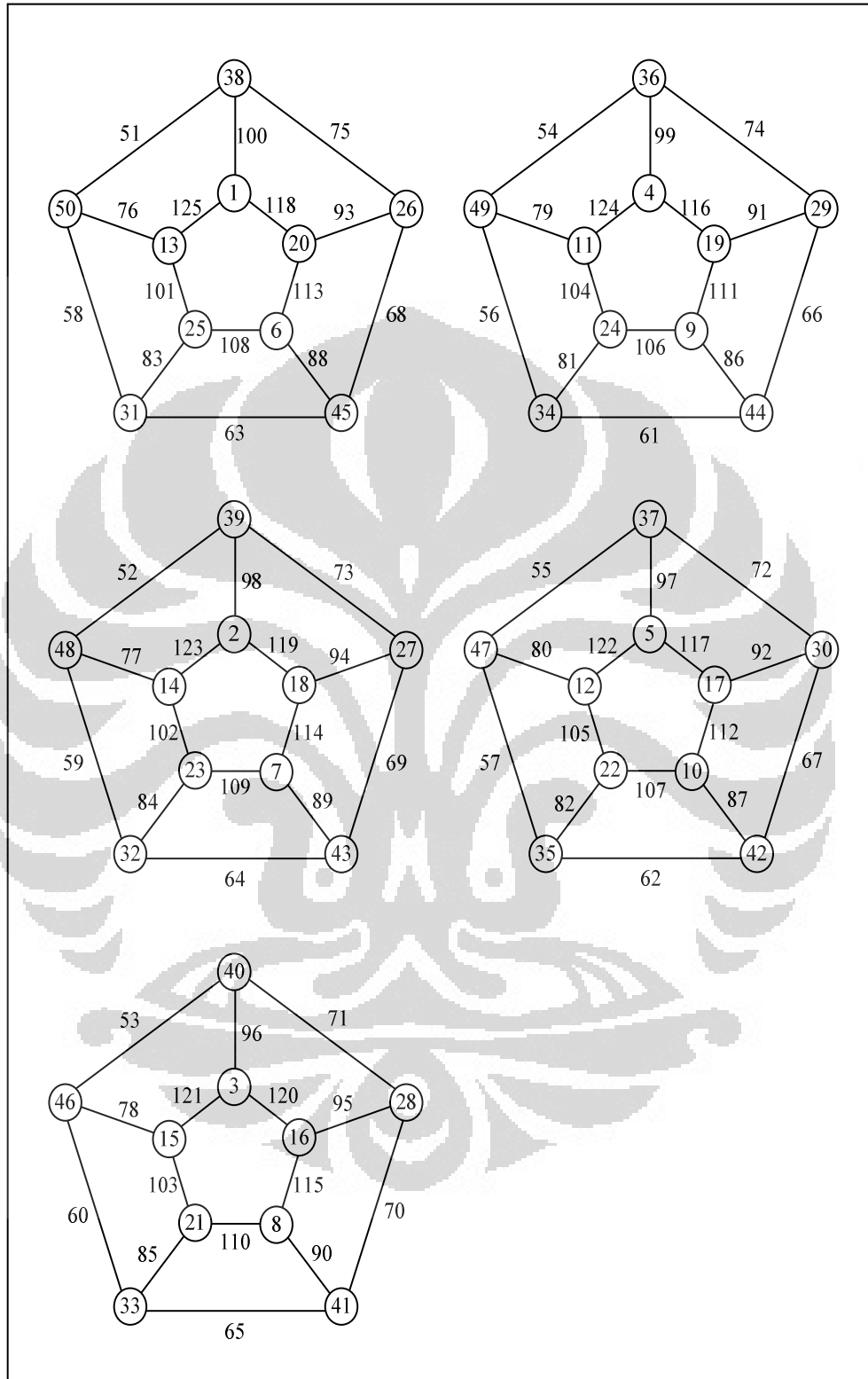
$$\beta_4(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} \frac{m(10n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2 \\ m(5n-i-1) + \frac{j}{2} & , j \text{ genap}, 1 \leq i \leq n-2 \\ 4mn + \frac{j+1}{2} & , i = n-1, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(8n+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i = n-1, j \text{ genap} \\ 5mn - j + 1 & , i = n, 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.110)$$

$$\beta_4(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} 4mn + j + 1 & , i = 1, 1 \leq j \leq m \\ \frac{m(4n-2i+1)-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , 2 \leq i \leq n-1, j \text{ ganjil} \\ m(4n+i) + \frac{j}{2} & , 2 \leq i \leq n-1, j \text{ genap} \\ 3mn + \frac{j+1}{2} & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(6n+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.111)$$

$$\beta_4(u_i^j u_{i+1}^j) = \begin{cases} 3mn - j + 1 & , i = 1, 1 \leq j \leq m \\ \frac{m(6n-2i+1)-1}{2} + \frac{j+1}{2} & , 2 \leq i \leq n-1, j \text{ ganjil} \\ m(3n-i) + \frac{j}{2} & , 2 \leq i \leq n-1, j \text{ genap} \\ 2mn + \frac{j+1}{2} & , i = n, j \text{ ganjil} \\ \frac{m(4n+1)+1}{2} + \frac{j}{2} & , i = n, j \text{ genap} \end{cases} \quad (3.110)$$

Bobot sembarang busur pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_4 mempunyai bobot busur yang sama seperti yang ditunjukkan pada Tabel 3.1 hingga Tabel 3.3 dalam Lampiran 3. Sehingga bobot busurnya sama, yaitu $\frac{11mn+1}{2} + 1$ untuk setiap busur. Maka pelabelan β_4 merupakan $(\frac{11mn+1}{2} + 1, 0)$ -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$. ■

Telah diperoleh pelabelan β_4 merupakan $(\frac{11mn+1}{2} + 1, 0)$ -PTBAA, karena nilai $d = 0$ maka pelabelan β_4 juga merupakan PTBA dengan $k = a = \frac{11mn+1}{2} + 1$. Pada Gambar 3.11 diperlihatkan contoh $(139, 0)$ -PTBAA pada graf $5(C_5 \times P_2)$.



Gambar 3.11. $(139, 0)$ -PTBAA pada graf $5(C_5 \times P_2)$

Selanjutnya dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4, dari Akibat 3.4.5 diperoleh Akibat 3.4.6.

Akibat 3.4.6.

Graf prisma $m(C_n \times P_2)$ memiliki $\left(\frac{19mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ yang dilakukan dalam tesis ini adalah konstruksi (a, d) -PTBAA untuk nilai $d = 0$ dan $d = 2$. Sementara nilai d yang mungkin dari (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ adalah $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dengan demikian masih terdapat konstruksi (a, d) -PTBAA yang belum dilakukan yaitu untuk nilai $d = 1, 3, 4, 5$.

Demikian pula dengan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$. Pada tesis ini konstruksi yang dilakukan adalah untuk nilai $d = 0, d = 1$ dan $d = 2$. Sementara nilai d yang mungkin dari (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ adalah $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dengan demikian masih terdapat konstruksi (a, d) -PTBAA yang belum dilakukan yaitu untuk nilai $d = 3, 4$. Pada bab berikut diberikan kesimpulan dari hasil penelitian pada tesis ini.

BAB IV

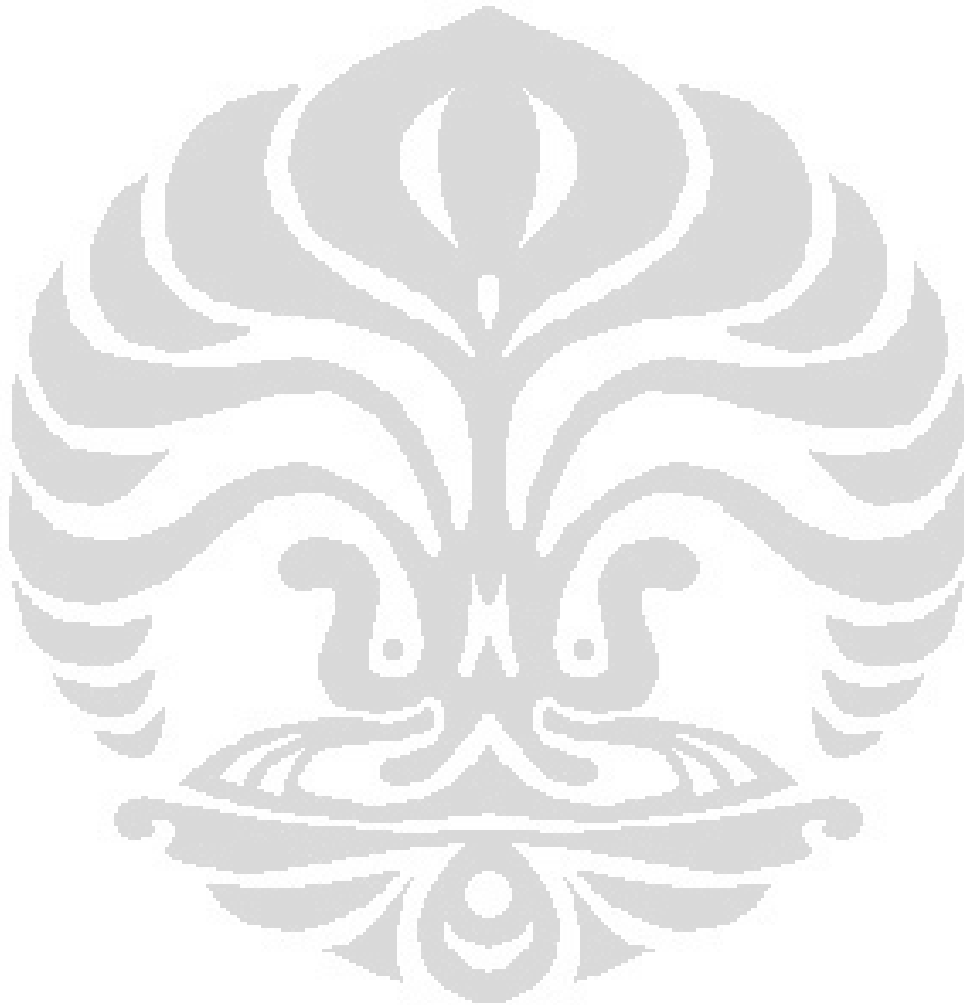
KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan konstruksi (a, d) -PTBAA yang telah dibahas pada Bab III, diperoleh kesimpulan,

1. Graf $m(C_n \odot P_2)$ yaitu gabungan m graf korona $C_n \odot P_2$ isomorfik, mempunyai:
 - a. $\left(\frac{7mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA dan $\left(\frac{19mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.
 - b. $\left(\frac{15mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA dan $\left(\frac{27mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.
2. Graf $m(C_n \times P_2)$ yaitu gabungan m graf prisma $C_n \times P_2$ isomorfik, mempunyai:
 - a. $(4mn + 2, 1)$ -PTBAA dan $(8mn + 2, 1)$ -PTBAA untuk setiap m bilangan bulat positif dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.
 - b. $\left(\frac{5mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA dan $\left(\frac{15mn+1}{2} + 2, 2\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.
 - c. $\left(\frac{11mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA dan $\left(\frac{19mn+1}{2} + 1, 0\right)$ -PTBAA untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

Nilai d yang mungkin dari (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ adalah $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Sementara pada tesis ini konstruksi (a, d) -PTBAA yang telah dilakukan adalah untuk nilai $d = 0$ dan $d = 2$. Dengan demikian penelitian dapat dilanjutkan dengan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \odot P_2)$ untuk nilai d yang belum dilakukan yaitu $d = 1, 3, 4, 5$.

Demikian pula dengan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$. Pada tesis ini konstruksi (a, d) -PTBAA yang telah dilakukan adalah untuk nilai $d = 0, d = 1$ dan $d = 2$. Sementara nilai d yang mungkin dari (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ adalah $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dengan demikian penelitian dapat dilanjutkan dengan konstruksi (a, d) -PTBAA pada graf $m(C_n \times P_2)$ untuk nilai d yang belum dilakukan yaitu $d = 3, 4$.



DAFTAR PUSTAKA

- Bača, M and Miller, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs : A Wealth of Problems and Some Solution*. Florida : Brown Walker Press.
- Chartrand, G., Lesniak, L. (1986). *Graph and Digraph* (2nd ed.). California : Wadsworth Inc.
- Galian, J. A. (2010). Dynamic survey of graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 17#ds6
- Harary, F. (1996). *Graph Theory*. Philippines : Addison-Wesley Publishing Company.
- Niagara, W. M. (2010). *Pelabelan Total (a, d)-Busur Anti Ajaib Pada Gabungan Graf Dari Kelas Graf yang Sama untuk $d = 1$ dan $d = 2$* . Skripsi, Departemen Matematika FMIPA UI.
- Nugroho, E. R. dkk. (2011. Okt). Pelabelan Total (a, d)-Busur Anti Ajaib Pada Graf Korona. *Prosiding Seminar Nasional Matematika UNPAR Bandung*.
- Sugeng, K. A., Miller, M., Bača, M. (2006). Super Edge-Antimagic Total Labellings. *Utilitas Math* 71, 131-141.
- West, DB. (2001). *Introduction to Graph Theory* (2nd ed.). London : Prentice Hall.



LAMPIRAN

Lampiran 1. Bobot busur graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2

Tabel 1.1. Bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$ pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2

	$\alpha_2(v_i^j)$	$\alpha_2(v_i^j v_{i+1}^j)$	$\alpha_2(v_{i+1}^j)$	$W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i+1}^j)$
$1 \leq i \leq n-2,$ i ganjil, j ganjil	$\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(6n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(7n+4i+2)+1}{2} - j + 2$
$1 \leq i \leq n-2,$ i genap, j ganjil	$\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2}$	$m(3n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2}\right)$	$\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(7n+4i+4)+1}{2} - j + 2$
$1 \leq i \leq n-2,$ i ganjil, j genap	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(6n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$\frac{m(i+1-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(7n+4i+2)+1}{2} - j + 2$
$1 \leq i \leq n-2,$ i genap, j genap	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$m(3n+i+1) + 1 - \left(\frac{j}{2}\right)$	$\frac{m(i+1-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(7n+4i+4)+1}{2} - j + 2$
$i = n-1,$ j ganjil	$\frac{m(n+(n-1)+1)}{2} - j + 1$	$(4mn+1) - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} - j + 1$
$i = n-1,$ j genap	$\frac{m(n+(n-1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(8n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right)$	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(11n-2)+1}{2} - j + 1$
$i = n, j$ ganjil	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$3mn+j$	$\frac{j+1}{2}$	$\frac{7mn+1}{2} + 2j$
$i = n, j$ genap	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$3mn+j$	$\frac{m+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{7mn+1}{2} + 2j$

(Lanjutan)

Tabel 1.2. Bobot busur $v_i^j v_{i,1}^j$ pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2

	$\alpha_2(v_i^j)$	$\alpha_2(v_i^j v_{i,1}^j)$	$\alpha_2(v_{i,1}^j)$	$W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,1}^j)$
$1 \leq i \leq n-2,$ i ganjil, j ganjil	$\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(8n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$\frac{m(3n+i+2)}{2} - j+1$	$\frac{m(11n+4i+2)+1}{2} - j+2$
$1 \leq i \leq n-2,$ i ganjil, j genap	$\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2}$	$m(4n+i+1)+1 - \left(\frac{j}{2}\right)$	$\frac{m(3n+i+2)}{2} - j+1$	$\frac{m(11n+4i+4)+1}{2} - j+2$
$1 \leq i \leq n-2,$ i genap, j ganjil	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j+1$	$\frac{m(8n+2i+1)+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$\frac{m(2n+i)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(11n+4i+2)+1}{2} - j+2$
$1 \leq i \leq n-2,$ i genap, j genap	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j+1$	$m(4n+i+1)+1 - \left(\frac{j}{2}\right)$	$\frac{m(2n+i+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(11n+4i+4)+1}{2} - j+2$
$i = n-1,$ j ganjil	$\frac{m(n+(n-1)+1)}{2} - j+1$	$5mn - \left(\frac{j-1}{2}\right)$	$\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} - j+1$
$i = n-1,$ j genap	$\frac{m(n+(n-1)+1)}{2} - j+1$	$\frac{m(10n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right)$	$\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(15n-2)+1}{2} - j+1$
$i = n, j$ ganjil	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$4mn+j$	$mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 2j$
$i = n, j$ genap	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$4mn+j$	$\frac{m(2n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 2j$

(Lanjutan)

Tabel 1.3. Bobot busur $v_i^j v_{i,2}^j$ pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2

	$\alpha_2(v_i^j)$	$\alpha_2(v_i^j v_{i,2}^j)$	$\alpha_2(v_{i,2}^j)$	$W_{\alpha_2}(v_i^j v_{i,2}^j)$
$1 \leq i \leq n-2,$ i ganjil, j ganjil	$\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(11n-i-2)}{2} + j$	$\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(17n-2i-4)+1}{2} + 2j$
$1 \leq i \leq n-2,$ i ganjil, j genap	$\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(11n-i-2)}{2} + j$	$m(3n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(17n-2i-4)+1}{2} + 2j$
$1 \leq i \leq n-2,$ i genap, j ganjil	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(12n-i)+2}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(19n-2i)+1}{2} - j + 1$
$1 \leq i \leq n-2,$ i genap, j genap	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(12n-i-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right)$	$m(3n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(19n-2i-2)+1}{2} - j + 1$
$i = n-1,$ j ganjil	$\frac{m(n+(n-1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{11mn+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$2mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{17mn+1}{2} - j + 2$
$i = n-1,$ j genap	$\frac{m(n+(n-1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(11n+1)+2}{2} - \left(\frac{j}{2}\right)$	$\frac{m(4n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(17n+2)+1}{2} - j + 2$
$i = n, j$ ganjil	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$6mn - \left(\frac{j-1}{2}\right)$	$3mn - j + 1$	$\frac{19mn+1}{2} - j + 1$
$i = n, j$ genap	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(12n-1)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right)$	$3mn - j + 1$	$\frac{m(19n-2)+1}{2} - j + 1$

(Lanjutan)

Tabel 1.4. Bobot busur $v_{i,1}^j v_{i,2}^j$ pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_2

	$\alpha_2(v_{i,1}^j)$	$\alpha_2(v_{i,1}^j v_{i,2}^j)$	$\alpha_2(v_{i,2}^j)$	$W_{\alpha_2}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j)$
$1 \leq i \leq n-2,$ i ganjil, j ganjil	$\frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1$	$\frac{m(14n-i+1)+2}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(23n-2i+2)+1}{2} - j + 1$
$1 \leq i \leq n-2,$ i ganjil, j genap	$\frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1$	$\frac{m(14n-i)+1}{2} - \left(\frac{j}{2}\right)$	$m(3n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(23n-2i)+1}{2} - j + 1$
$1 \leq i \leq n-2,$ i genap, j ganjil	$\frac{m(2n+i)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(13n-i-1)}{2} + j$	$\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(21n-2i-2)+1}{2} + 2j$
$1 \leq i \leq n-2,$ i genap, j genap	$\frac{m(2n+i+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(13n-i-1)}{2} + j$	$m(3n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(21n-2i-2)+1}{2} + 2j$
$i = n-1,$ j ganjil	$\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(13n-(n-1)-1)}{2} + j$	$2mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{19mn+1}{2} + 2j$
$i = n-1,$ j genap	$\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(13n-(n-1)-1)}{2} + j$	$\frac{m(4n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{19mn+1}{2} + 2j$
$i = n, j$ ganjil	$mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{13mn+3}{2} - \left(\frac{j+1}{2}\right)$	$3mn - j + 1$	$\frac{21mn+1}{2} - j + 2$
$i = n, j$ genap	$\frac{m(2n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(13n+1)+2}{2} - \left(\frac{j}{2}\right)$	$3mn - j + 1$	$\frac{m(21n+2)+1}{2} - j + 2$

Lampiran 2. Bobot busur graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_3

Tabel 2.1. Bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$ pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_3

	$\alpha_3(v_i^j)$	$\alpha_3(v_i^j v_{i+1}^j)$	$\alpha_3(v_{i+1}^j)$	$W_{\alpha_3}(v_i^j v_{i+1}^j)$
$1 \leq i \leq n-2, i \text{ ganjil}, j \text{ ganjil}$	$\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(14n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n-2, i \text{ genap}, j \text{ ganjil}$	$\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2}$	$m(7n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n-2, i \text{ ganjil}, j \text{ genap}$	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(14n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(i+1-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n-2, i \text{ genap}, j \text{ genap}$	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$m(7n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(i+1-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n-1, j \text{ ganjil}$	$mn - j + 1$	$6mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n-1, j \text{ genap}$	$mn - j + 1$	$\frac{m(12n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n, j \text{ ganjil}$	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$7mn - j + 1$	$\frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n, j \text{ genap}$	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$7mn - j + 1$	$\frac{m+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$

(Lanjutan)

Tabel 2.2. Bobot busur $v_i^j v_{i,1}^j$ pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_3

	$\alpha_3(v_i^j)$	$\alpha_3(v_i^j v_{i,1}^j)$	$\alpha_3(v_{i,1}^j)$	$W_{\alpha_3}(v_i^j v_{i,1}^j)$
$1 \leq i \leq n - 2, i \text{ ganjil}, j \text{ ganjil}$	$\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(12n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n - 2, i \text{ ganjil}, j \text{ genap}$	$\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2}$	$m(6n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n - 2, i \text{ genap}, j \text{ ganjil}$	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(12n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(2n+i)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n - 2, i \text{ genap}, j \text{ genap}$	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$m(6n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(2n+i+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n - 1, j \text{ ganjil}$	$mn - j + 1$	$5mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n - 1, j \text{ genap}$	$mn - j + 1$	$\frac{m(10n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n, j \text{ ganjil}$	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$6mn - j + 1$	$mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n, j \text{ genap}$	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$6mn - j + 1$	$\frac{m(2n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$

(Lanjutan)

Tabel 2.3. Bobot busur $v_i^j v_{i,2}^j$ pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_3

	$\alpha_3(v_i^j)$	$\alpha_3(v_i^j v_{i,2}^j)$	$\alpha_3(v_{i,2}^j)$	$W_{\alpha_3}(v_i^j v_{i,2}^j)$
$1 \leq i \leq n - 2, i \text{ ganjil}, j \text{ ganjil}$	$\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(9n+i+2)}{2} - j + 1$	$\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n - 2, i \text{ ganjil}, j \text{ genap}$	$\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(9n+i+2)}{2} - j + 1$	$m(3n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n - 2, i \text{ genap}, j \text{ ganjil}$	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(8n+i)+2}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n - 2, i \text{ genap}, j \text{ genap}$	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(8n+i+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$m(3n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n - 1, j \text{ ganjil}$	$mn - j + 1$	$\frac{9mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$2mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n - 1, j \text{ genap}$	$mn - j + 1$	$\frac{m(9n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(4n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n, j \text{ ganjil}$	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$4mn + \frac{j+1}{2}$	$3mn - j + 1$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n, j \text{ genap}$	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(8n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$3mn - j + 1$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$

(Lanjutan)

Tabel 2.4. Bobot busur $v_{i,1}^j v_{i,2}^j$ pada graf $m(C_n \odot P_2)$ terhadap pelabelan α_3

	$\alpha_3(v_{i,1}^j)$	$\alpha_3(v_{i,1}^j v_{i,2}^j)$	$\alpha_3(v_{i,2}^j)$	$W_{\alpha_3}(v_{i,1}^j v_{i,2}^j)$
$1 \leq i \leq n-2, i$ ganjil, j ganjil	$\frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1$	$\frac{m(6n+i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n-2, i$ ganjil, j genap	$\frac{m(3n+i+2)}{2} - j + 1$	$\frac{m(6n+i)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$m(3n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n-2, i$ genap, j ganjil	$\frac{m(2n+i)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(7n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(6n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n-2, i$ genap, j genap	$\frac{m(2n+i+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(7n+i+1)}{2} - j + 1$	$m(3n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n-1, j$ ganjil	$\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(7n+(n-1)+1)}{2} - j + 1$	$2mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n-1, j$ genap	$\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(7n+(n-1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(4n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n, j$ ganjil	$mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{7mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$3mn - j + 1$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$
$i = n, j$ genap	$\frac{m(2n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(7n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$3mn - j + 1$	$\frac{15mn+1}{2} + 1$

Lampiran 3. Bobot busur graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_4

Tabel 3.1. Bobot busur $v_i^j v_{i+1}^j$ pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_4

	$\beta_4(v_i^j)$	$\beta_4(v_i^j v_{i+1}^j)$	$\beta_4(v_{i+1}^j)$	$W_{\beta_4}(v_i^j v_{i+1}^j)$
$1 \leq i \leq n-2, j$ ganjil	$\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(10n-2i-1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$1 \leq i \leq n-2, j$ genap	$\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2}$	$m(5n-i-1) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(n+(i+1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = n-1, j$ ganjil	$\frac{m(n+(n-1)+1)}{2} - j + 1$	$4mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = n-1, j$ genap	$\frac{m(n+(n-1)+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(8n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = n, j$ ganjil	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$5mn - j + 1$	$\frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = n, j$ genap	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$5mn - j + 1$	$\frac{m+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$

(Lanjutan)

Tabel 3.2. Bobot busur $v_i^j u_i^j$ pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_4

	$\beta_4(v_i^j)$	$\beta_4(v_i^j u_i^j)$	$\beta_4(u_i^j)$	$W_{\beta_4}(v_i^j u_i^j)$
$i = 1, j$ ganjil	$\frac{j+1}{2}$	$4mn + j + 1$	$\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = 1, j$ genap	$\frac{m+1}{2} + \frac{j}{2}$	$4mn + j + 1$	$\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$2 \leq i \leq n-1, i$ ganjil, j ganjil	$\frac{m(i-1)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(4n-2i+1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(3n+i)}{2} - j + 1$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$2 \leq i \leq n-1, i$ ganjil, j genap	$\frac{im+1}{2} + \frac{j}{2}$	$m(4n+i) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(3n+i)}{2} - j + 1$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$2 \leq i \leq n-1, i$ genap, j ganjil	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$\frac{m(4n-2i+1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(2n+i-2)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$2 \leq i \leq n-1, i$ genap, j genap	$\frac{m(n+i+1)}{2} - j + 1$	$m(4n+i) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(2n+i-1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = n, j$ ganjil	$\frac{mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$3mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(3n+n)}{2} - j + 1$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = n, j$ genap	$\frac{m(n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(6n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(3n+n)}{2} - j + 1$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$

(Lanjutan)

Tabel 3.3. Bobot busur $u_i^j u_{i+1}^j$ pada graf $m(C_n \times P_2)$ terhadap pelabelan β_4

	$\beta_4(u_i^j)$	$\beta_4(u_i^j u_{i+1}^j)$	$\beta_4(u_{i+1}^j)$	$\beta_4(u_i^j u_{i+1}^j)$
$i = 1, j$ ganjil	$\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$3mn - j + 1$	$\frac{m(2n+2-2)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = 1, j$ genap	$\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$3mn - j + 1$	$\frac{m(2n+2-1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$2 \leq i \leq n-1, j$ ganjil	$\frac{m(3n+i)}{2} - j + 1$	$\frac{m(6n-2i+1)-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{m(2n+i-2)}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$2 \leq i \leq n-1, j$ genap	$\frac{m(3n+i)}{2} - j + 1$	$m(3n-i) + \frac{j}{2}$	$\frac{m(2n+i-1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = n, j$ ganjil	$\frac{m(3n+n)}{2} - j + 1$	$2mn + \frac{j+1}{2}$	$\frac{3mn-1}{2} + \frac{j+1}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$
$i = n, j$ genap	$\frac{m(3n+n)}{2} - j + 1$	$\frac{m(4n+1)+1}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{m(3n-1)}{2} + \frac{j}{2}$	$\frac{11mn+1}{2} + 1$