UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF TANGGA, GABUNGAN GRAF TANGGA, DAN GRAF KAKI SERIBU

TESIS

M. HARYONO
1006786165

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF TANGGA, GABUNGAN GRAF TANGGA, DAN GRAF KAKI SERIBU

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

M. HARYONO
1006786165

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar

Nama	: M. Haryono
NPM	: 1006786165
Tanda tangan	: ....
Tanggal	: 05 Januari 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama	: M. Haryono
NPM	: 1006768165
Program Studi	: Magister Matematika
Judul Skripsi	: Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Tangga, Gabungan Graf Tangga, dan Graf Kaki Seribu.

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	: Dr. Kiki Ariyanti Sugeng	(..............................)
Pembimbing II	: Dra. Denny Riama Silaban, M. Kom	(..............................)
Penguji 1	: Gatot F. Hertono, PhD	(..............................)
Penguji 2	: Dr. Rer.nat. Hendri Murfi, M. Kom	(..............................)
Penguji 3	: Arie Wibowo, M. Si	(..............................)

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 05 Januari 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Dr. Kiki Ariyanti Sugeng dan Dra. Denny Riama Silaban, M. Kom, selaku dosen Pembimbing I dan II yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk memberikan nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini;

(2) Dinas Pendidikan Nasional Provinsi Jambi yang telah memberikan bantuan berupa beasiswa untuk menempuh pendidikan di Universitas Indonesia;

(3) Prof. Dr. Djati Kerami selaku Ketua Program Magister Matematika yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama menyelesaikan proses studi;

(4) Dr. rer.nat. Hendri Murfi, M. Kom, selaku Pembimbing Akademik;

(5) Dr. Yudi Satria, M.T, selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Rahmi Rusin S. Si, M. Sc.Tech, selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI;

(6) Seluruh staf pengajar di Program Magister Matematika FMIPA UI, yang tidak mungkin disebutkan satu persatu, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;

(7) Istriku tercinta Sarmi, S.PdI, Anakku tersayang M. ‘Ulwan dan Rofifah Sholehah atas segala dukungan dan senantiasa mendoakan dengan ikhlas;

(8) Ibu Sarni dan Bapak Sarpin semoga Allah menerima segala amal kebaikan beliau berdua;

(9) Kang Syukur, Yu Komari, Yu Konipah, Kang Suhud, Kang Sabari, Kalimah dan keluarga, terima kasih atas dukungannya;

(10) Drs. Edy Purwanta, M.Pd selaku Kepala Sekolah dan seluruh civitas akedemika SMA Titian Teras yang telah mendukung untuk mengikuti program Magister di Universitas Indonesia;

(11) Mas Susilo, Mas Mulyadi, Mas Ayin, Bang Zulfi, Bang Supri, Mas Huda, Pak Salim, Piter John, Debby Sanjaya, dan semua kawan-kawan S2 angkatan 2010 yang tidak disebut satu persatu namanya, terima kasih atas dukungan dan bantuanya.

Akhir kata, saya berharap Allah SWT. berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 05 Januari 2012

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: M. Haryono
NPM	: 1006768165
Program Studi	: Magister Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (Non-exclusive Royalty-Free Right) atas karya ilmiah saya yang berjudul: Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Tangga, Gabungan Graf Tangga, dan Graf Kaki Seribu beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/ format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 05 Januari 2012

Yang menyatakan

....

(M. Haryono)

ABSTRAK

Nama : M. Haryono
Program studi : Magister Matematika
Judul : Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Tangga, Gabungan Graf Tangga, dan Graf Kaki Seribu.

Suatu graf tak berarah sederhana $G = (V, E)$ dikatakan graf jumlah jika terdapat pelabelan f yaitu pemetaan injektif dari V ke himpunan bulat positif S sehingga $uv \in E$ jika dan hanya jika terdapat simpul w sedemikian sehingga $f(w) = f(u) + f(v)$, $w \in V \cup I$, dengan I himpunan simpul terisolasi. Dalam hal ini w disebut simpul bekerja. Jika w simpul terisolasi, maka pelabelan jumlah f disebut pelabelan jumlah eksklusif. Banyak minimum dari simpul-simpul terisolasi disebut dengan bilangan jumlah eksklusif dan dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$. Derajat maksimum suatu graf adalah banyaknya busur maksimal yang hadir pada suatu simpul pada graf dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Jika $\varepsilon(G) = \Delta(G)$, maka dikatakan $\varepsilon(G)$ adalah bilangan jumlah eksklusif optimum dari graf G.
Pada tesis ini ditunjukkan bilangan jumlah eksklusif optimum dari graf tangga $\varepsilon(L_n) = 3$, gabungan m graf tangga yang isomorfik $\varepsilon(mL_n) = 3$, gabungan beberapa graf tangga tak perlu isomorfik $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) = 3$, dan graf kaki seribu $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = 3 + r$

Kata Kunci : graf jumlah, graf tangga, gabungan graf tangga, graf kaki seribu, pelabelan jumlah, pelabelan jumlah eksklusif.
xi + 42 halaman; 28 gambar; 1 tabel
Daftar Referensi : 10 (1989-2011)

ABSTRACT

Name : M. Haryono
Study Program : Magister Mathematics
Title : Exclusive Sum Labeling of Ladder Graph, Union of Ladder Graph, and Centipede graph.

A graph $G = (V, E)$ is called sum graph if there is an injective labeling called sum labeling f from V to a set of distinct positive integer S such that $uv \in E$ if only if there is a vertex w such that $f(w) = f(u) + f(v)$, $w \in V \cup I$ where I is the set of isolated vertices. In this case w is called working vertex. If all working vertices are isolated vertices then the labeling is called exclusive sum labeling. A sum number of G is the smallest number of isolated vertices such that there exists an exclusive sum labeling f which realizes $G \cup I$ as a sum graph. A sum number is denoted by $\varepsilon(G)$. The maximum degree of vertex in graph is denoted $\Delta(G)$. If $\varepsilon(G) = \Delta(G)$, then G is called $\varepsilon(G)$ optimum exclusive sum labelling of G. In this thesis will show optimum exclusive sum labeling of ladder graphs $\varepsilon(L_n) = 3$, union of m isomorphic ladder graphs $\varepsilon(mL_n) = 3$, and union of m non isomorphic ladder graphs $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) = 3$ and centipede graphs $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = 3 + r$.

Key words : sum graph, ladder graph, union of adder graphs, centipede graph, sum labelling, exclusive sum labelling.
xi + 42 pages; 28 pictures; 1 table
Bibliography : 10 (1989-2011)

ABSTRAK

Nama : M. Haryono
Program studi : Magister Matematika
Judul : Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Tangga, Gabungan Graf Tangga, dan Graf Kaki Seribu.

Suatu graf tak berarah sederhana $G = (V, E)$ dikatakan graf jumlah jika terdapat pelabelan f yaitu pemetaan injektif dari V ke himpunan bulat positif S sehingga $uv \in E$ jika dan hanya jika terdapat simpul w sedemikian sehingga $f(w) = f(u) + f(v)$, $w \in V \cup I$, dengan I himpunan simpul terisolasi. Dalam hal ini w disebut simpul bekerja. Jika w simpul terisolasi, maka pelabelan jumlah f disebut pelabelan jumlah eksklusif. Banyak minimum dari simpul-simpul terisolasi disebut dengan bilangan jumlah eksklusif dan dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$. Derajat maksimum suatu graf adalah banyaknya busur maksimal yang hadir pada suatu simpul pada graf dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Jika $\varepsilon(G) = \Delta(G)$, maka dikatakan $\varepsilon(G)$ adalah bilangan jumlah eksklusif optimum dari graf G.
Pada tesis ini ditunjukkan bilangan jumlah eksklusif optimum dari graf tangga $\varepsilon(L_n) = 3$, gabungan m graf tangga yang isomorfik $\varepsilon(mL_n) = 3$, gabungan beberapa graf tangga tak perlu isomorfik $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) = 3$, dan graf kaki seribu $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = 3 + r$

Kata Kunci : graf jumlah, graf tangga, gabungan graf tangga, graf kaki seribu, pelabelan jumlah, pelabelan jumlah eksklusif.
xi + 42 halaman; 28 gambar; 1 tabel
Daftar Referensi : 10 (1989-2011)

ABSTRACT

Name : M. Haryono
Study Program : Magister Mathematics
Title : Exclusive Sum Labeling of Ladder Graph, Union of Ladder Graph, and Centipede graph.

A graph $G = (V, E)$ is called sum graph if there is an injective labeling called sum labeling f from V to a set of distinct positive integer S such that $uv \in E$ if only if there is a vertex w such that $f(w) = f(u) + f(v)$, $w \in V \cup I$ where I is the set of isolated vertices. In this case w is called working vertex. If all working vertices are isolated vertices then the labeling is called exclusive sum labeling. A sum number of G is the smallest number of isolated vertices such that there exists an exclusive sum labeling f which realizes $G \cup I$ as a sum graph. A sum number is denoted by $\varepsilon(G)$. The maximum degree of vertex in graph is denoted $\Delta(G)$. If $\varepsilon(G) = \Delta(G)$, then G is called $\varepsilon(G)$ optimum exclusive sum labelling of G. In this thesis will show optimum exclusive sum labeling of ladder graphs $\varepsilon(L_n) = 3$, union of m isomorphic ladder graphs $\varepsilon(mL_n) = 3$, and union of m non isomorphic ladder graphs $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) = 3$ and centipede graphs $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = 3 + r$.

Key words : sum graph, ladder graph, union of adder graphs, centipede graph, sum labelling, exclusive sum labelling.
xi + 42 pages; 28 pictures; 1 table
Bibliography : 10 (1989-2011)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri dari V, suatu himpunan tak kosong simpul-simpul (*vertices*) dan E adalah suatu himpunan busur-busur (*edges*). Setiap busur memiliki satu atau dua simpul dihubungkan dengannya, disebut dengan simpul ujung (*endpoint*). Busur menghubungkan setiap simpul-simpul ujung (Rosen, 2007).

Model graf dapat digunakan untuk menunjukkan perjalanan dalam kota dengan tidak dilalui dua kali, digunakan untuk menunjukkan banyak warna pada pewarnaan peta, untuk menunjukkan antara dua senyawa yang berbeda yang memiliki rumus formula yang sama namun struktur yang digunakan berbeda, jaringan antara komputer dalam model jaringan komunikasi, menemukan jalan terpendek antara dua kota pada suatu jaringan transportasi, untuk mengevaluasi dan menguji jaringan stasiun televisi (Rosen, 2007).

Pelabelan pada graf G adalah pemberian nilai bilangan bulat ke simpul-simpul atau busur-busur atau keduanya dengan aturan tertentu (Gallian, 2010). Jika domain pelabelan hanya himpunan simpul pada graf G disebut pelabelan simpul. Jika pelabelan hanya pemetaan dari busur pada graf G ke bilangan bulat positif, maka disebut pelabelan busur. Dan bila pelabelan merupakan pemetaan dari himpunan busur dan himpunan simpul sekaligus ke himpunan bilangan bulat positif maka disebut pelabelan total (Bača and Miller, 2009).

Pelabelan diklasifikasikan dalam beberapa jenis, antara lain pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan graceful, skolem graceful, pelabelan jumlah, pelabelan jumlah eksklusif (Gallian, 2010).

Suatu pelabelan jumlah f graf G adalah pemetaan dari simpul-simpul pada G ke bilangan bulat positif sedemikian sehingga $uv \in E$ jika dan hanya jika jumlah dari label simpul u dan v adalah label simpul w pada G. Dalam hal ini w disebut simpul bekerja. Suatu graf yang memiliki pelabelan jumlah disebut graf jumlah. Sebarang graf jumlah G akan memerlukan beberapa simpul-simpul terisolasi

(Tuga, dkk., 2005). Banyak minimal dari simpul-simpul terisolasi yang perlu ditambahkan agar diperoleh graf jumlah disebut bilangan jumlah, dan dinotasikan dengan $\sigma(G)$. Banyak minimal simpul yang ditambahkan agar pelabelan jumlah f disebut pelabelan jumlah eksklusif disebut bilangan jumlah eksklusif dan dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$ (Miller, dkk., 2005).

Pelabelan jumlah dari graf $G \cup \overline{K_r}$ untuk $r \in Z^+$ disebut pelabelan jumlah eksklusif terhadap graf G jika semua simpul bekerja anggota $\overline{K_r}$. Setiap graf dapat dilakukan menjadi graf jumlah eksklusif dengan menambahkan beberapa simpul terisolasi (Tuga, dkk., 2005).

Pembahasan pelabelan graf memberikan suatu tantangan dan memungkinkan untuk bisa menemukan pelabelan pada graf yang belum diketahui pelabelannya dengan memberikan label lain pada simpul-simpul dan atau busur-busur graf yang telah ada sehingga diperoleh label yang lain dari suatu graf.

Dari pengkajian pelabelan jumlah eksklusif pada graf tangga timbul motivasi untuk menemukan konstruksi pelabelan khususnya pelabelan jumlah eksklusif pada modifikasi graf tangga yang belum ada pada rangkuman yang dilakukan oleh Gallian (2010).

1.2 Permasalahan

Berdasarkan latar belakang diatas maka permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana menemukan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf tangga, gabungan graf tangga, dan graf kaki seribu.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan permasalahan di atas, tujuan penelitian ini adalah untuk

1) mengkonstruksi pelabelan jumlah eksklusif graf tangga, gabungan graf tangga, dan graf kaki seribu.
2) menentukan bilangan jumlah eksklusif pada graf tangga, gabungan graf tangga, dan graf kaki seribu.

3) menunjukkan bilangan jumlah eksklusif graf tangga, gabungan graf tangga, dan graf kaki seribu adalah optimal.

1.4 Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, tesis ataupun paper yang relevan dengan topik penelitian. Hasil pengkajian dilanjutkan dengan mengkonstruksi pelabelan jumlah eksklusif untuk beberapa kelas graf yang diperoleh dari modifikasi graf tangga antara lain gabungan graf tangga isomorfik, gabungan graf tangga tak isomorfik, dan graf kaki seribu.

BAB 2

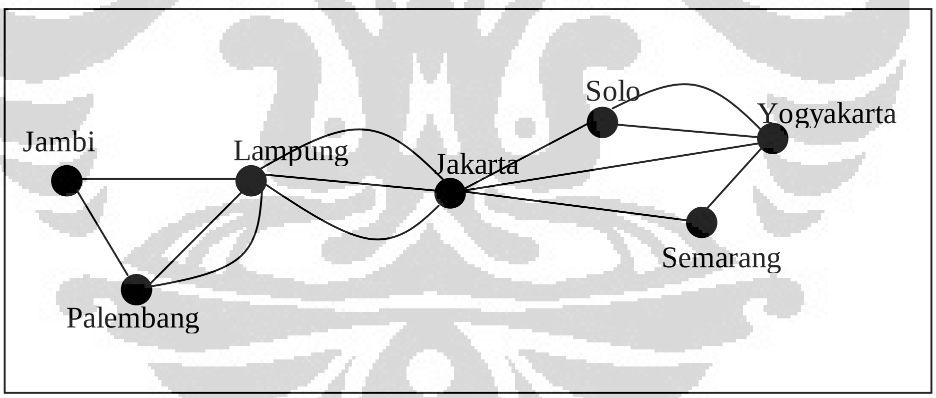
GRAF, PELABELAN JUMLAH, DAN PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF

Pada bab ini definisi dan istilah graf sebagian besar berdasarkan pada Rosen (2007).

2.1 Pengertian Graf dan Istilah-istilah

Graf merupakan struktur diskrit yang mengandung simpul dan busur yang menghubungkan simpul-simpul. Banyak persoalan dapat dimodelkan dengan graf. Sebagai contoh, graf dapat menggambarkan hubungan kompetisi dari spesies yang berbeda dalam suatu rantai makanan dalam suatu ekologi, graf dapat menunjukkan pengaruh seseorang pada suatu organisasi. Graf juga dapat menunjukan hubungan antara manusia, kolaborasi penelitian, banyaknya sambungan telpon, hubungan antar wesite, model peta transportasi, dan skema penugasan kepada karyawan dalam suatu organisasi/ perusahaan.

Bentuk graf dari jaringan transportasi ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Jaringan transportasi antar beberapa kota

Suatu **graf** $G = (V, E)$ terdiri dari V, suatu himpunan tak kosong simpul-simpul (*vertices*) dan E adalah suatu himpunan busur-busur (*edges*). Setiap busur memiliki satu atau dua simpul yang dihubungkan olehnya, yang disebut **simpul ujung** (*endpoints*). Loop adalah busur yang menghubungkan simpul ke dirinya sendiri. Suatu graf dengan himpunan simpul V tak berhingga (*infinite*) disebut

graf tak berhingga, dan graf dengan himpunan simpul V berhingga (*finite*) disebut **graf berhingga** (Rosen, 2007).

Suatu Graf yang setiap busurnya menghubungkan dua simpul berbeda atau tidak ada dua busur yang menghubungkan dua pasangan simpul yang sama disebut **graf sederhana** (*simple graphs*). Graf yang memiliki banyak busur yang menghubungkan pasangan simpul yang sama disebut ***multigraphs***.

Dua simpul u dan v dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) pada graf tak berarah G jika uv adalah busur di G. Jika $e = uv$, busur e disebut **saling hadir** (*incident*) dengan simpul u dan simpul v. Busur e juga disebut menghubungkan u dan v. Setiap busur menghubungkan satu atau lebih simpul-simpul. Simpul-simpul tersebut disebut **titik ujung** (*endpoint*). **Derajat** (*degree*) pada graf tak berarah G adalah banyaknya busur yang hadir pada simpul tersebut dan dinotasikan dengan $deg(v)$. Derajat tertinggi suatu graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$ yang menyatakan jumlah terbanyak busur yang hadir pada suatu simpul, sedangkan derajat terkecil suatu graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ yang menyatakan jumlah terkecil busur yang hadir pada suatu simpul di graf G.

Suatu simpul yang memiliki derajat **nol** disebut **simpul terisolasi** (*isolated vertices*)**.** Sedangkan simpul yang berderajat satu dan hanya satu disebut **daun** (*pendant*), hal ini berakibat simpul tersebut bertetangga tepat dengan satu simpul lain.

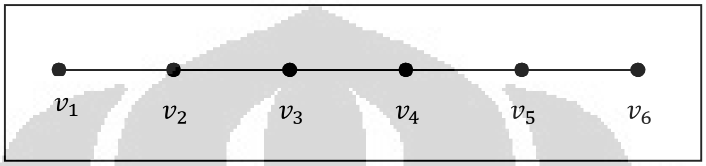
Graf dengan busur-busur tidak diberikan tanda arah disebut **graf tak berarah** (*undirected graph*). Graf **berarah** (*directed graph*) $G = (V, E)$ mengandung himpunan V dan himpunan busur berarah E. Setiap busur menyatakan pasangan berurut simpul-simpul. Dan arahnya menyatakan pasangan berurut (u, v), u disebut **awal** (*star*) dan v disebut **akhir** (*end*).

Graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dikatakan **isomorfik** jika terdapat fungsi f satu-satu dari V_1 pada V_2 dengan syarat a dan b bertetangga di G_1 jika dan hanya jika $f(a)$ dan $f(b)$ bertetangga di G_2, untuk setiap a dan b di V_1. Dua graf yang isomorfik memiliki banyak simpul-simpul yang sama, karena terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan simpul-simpul pada graf.

2.2 Jenis-Jenis Graf Sederhana

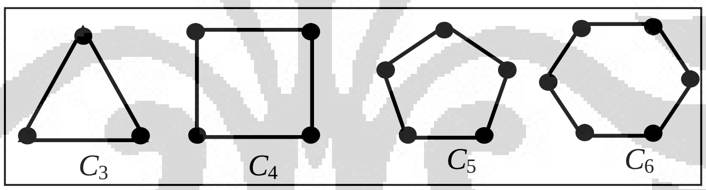
Pada penjelasan ini akan disampaikan beberapa jenis-jenis graf sederhana, dan sebagian besar istilah dan definisi diambil dari Rosen (2007), antara lain

Graf Lintasan P_n, untuk $n \geq 2$, mengandung n simpul $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$ dan busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n$. Contoh graf lintasan P_n ditunjukkan pada Gambar 2.2.



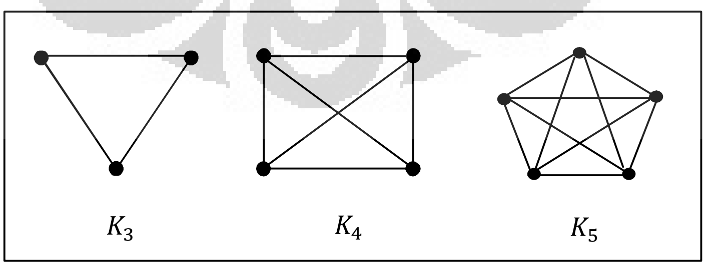
Gambar 2.2. Graf lintasan P_6.

Graf lingkaran (*Cycle Graph*) C_n, untuk $n \geq 3$, mengandung n simpul $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$ dan busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n$ dan v_nv_1. Contoh graf lingkaran C_n, untuk $n = 3, 4, 5, 6$ ditunjukkan pada Gambar 2.3.



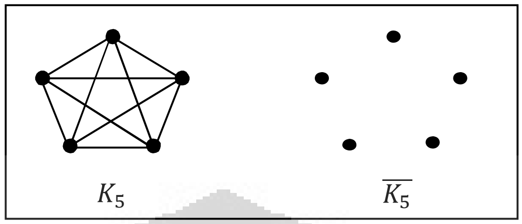
Gambar 2.3. Graf lingkaran C_n, untuk $3 \leq n \leq 6$

Graf lengkap memiliki n simpul, dinotasikan dengan K_n, yaitu graf sederhana yang menngandung tepat satu busur antara pasangan simpul yang berberda. Gambar 2.4 adalah contoh graf lengkap K_n, $n = 3,4,5$.



Gambar 2.4. Graf lengkap K_n, $n = 3,4,5$

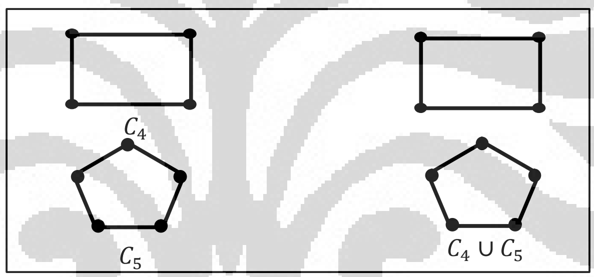
Komplemen graf dari graf G dinotasikan dengan $\bar{G}$ juga memiliki himpunan simpul $V(G)$, tetapi dua simpul bertetangga di $\bar{G}$ jika dan hanya jika mereka tidak bertetangga di G. Gambar 2.5 menunjukkan contoh graf K_5 dan graf $\overline{K_5}$.



Gambar 2.5. Graf K_5 dan graf $\overline{K_5}$

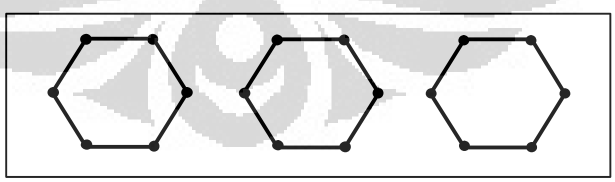
Gabungan dari dua graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$, adalah graf sederhana dengan himpunan simpul $V_1 \cup V_2$ dan himpunan busur $E_1 \cup E_2$. Gabungan dari G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$

Gambar 2.6 menunjukkan contoh graf gabungan $G = G_1 \cup G_2$



Gambar 2.6. Gabungan Graf $C_4 \cup C_5$

Untuk **gabungan graf yang isomorfik** $G \cup G \cup ... \cup G$ sebanyak m dinotasikan sebagai mG, $m \in Z^+$. Contoh gabungan 3 graf lingkaran $3C_6$ ditunjukkan pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7. Gabungan 3 Graf Lingkaran $3C_6$

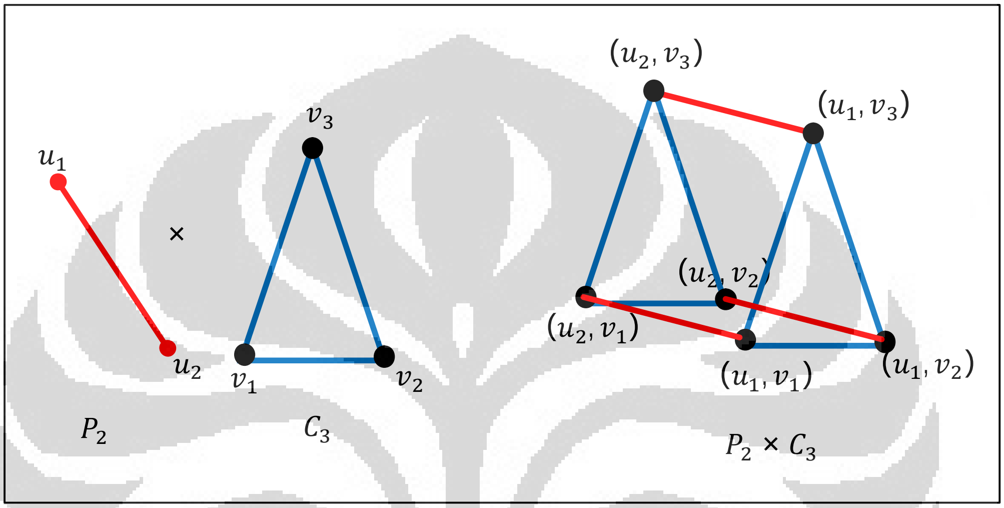
Harary (1995) mendefinsikan bahwa **hasil kali kartesian** (*cartesian product*) dua graf $G = (V, E)$ dan $H = (V, E)$, adalah graf dengan himpunan simpul-simpul $V(G) \times V(H)$ dengan syarat simpul (u, v) bertetangga dengan simpul (u', v') jika dan hanya jika

$$u = u' \text{ dan } vv' \in E(H)$$

atau

$$v = v' \text{ dan } uu' \in E(G)$$

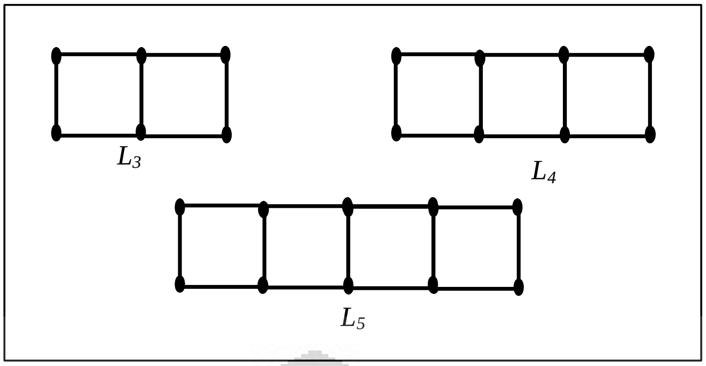
Gambar 2.8 merupakan contoh graf hasil kali kartesian



Gambar 2.8. Graf Hasil kali Kartesian $P_2 \times C_3$

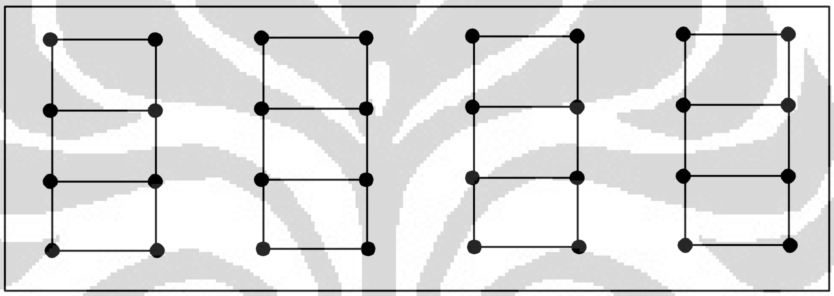
dimana, $V(P_2) = \{u_1, u_2\}$, $E(P_2) = \{u_1u_2\}$, $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_2\}$, dan $E(C_3) = \{v_1v_2,\ v_1v_3,\ v_2v_3\}$. Himpunan simpul-simpul pada Gambar 2.8 dapat dinyatakan sebagai $V(P_2 \times C_3) = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_2, v_3)\}$. Sesuai definisi simpul (u_1, v_1) dan simpul (u_1, v_2) bertetangga, karena $u_1 = u_1$ dan $v_1v_2 \in E(C_3)$, simpul (u_1, v_1) dan simpul (u_1, v_3) bertetangga, karena $u_1 = u_1$ dan $v_1v_3 \in E(C_3)$, simpul (u_1, v_2) dan simpul (u_1, v_3) bertetangga, karena $u_1 = u_1$ dan $v_2u_3 \in E(C_3)$, simpul (u_1, v_1) dan simpul (u_2, v_1) bertetangga, karena $v_1 = v_1$ dan $u_1u_2 \in E(P_2)$, simpul (u_1, v_2) dan simpul (u_2, v_2) bertetangga, karena $v_2 = v_2$ dan $u_1u_2 \in E(P_2)$, simpul (u_1, v_3) dan simpul (u_2, v_3) bertetangga, karena $v_3 = v_3$ dan $u_1u_2 \in E(P_2)$.

Graf tangga merupakan graf hasil kali kartesian dari graf P_2 dan P_n. Yang selanjutnya $P_2 \times P_n$ dinotasikan dengan L_n, dan selanjutnya disebut graf tangga. Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.9 berikut:



Gambar 2.9. Graf tangga L_n , untuk $3 \leq n \leq 5$

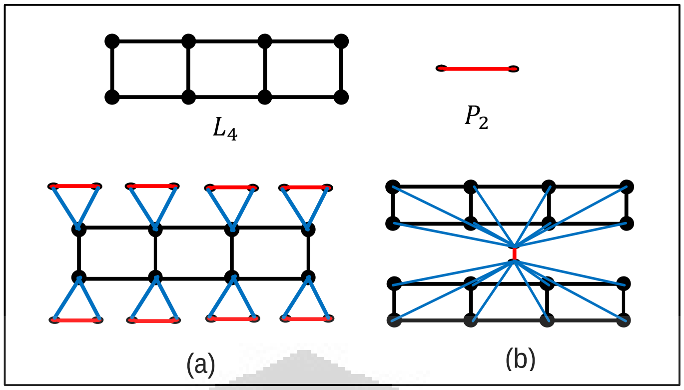
Gabungan graf tangga L_n sebanyak m yang isomorfik dinotasikan dengan mL_n, sebagai mana ditunjukkan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10. Graf tangga $4L_4$.

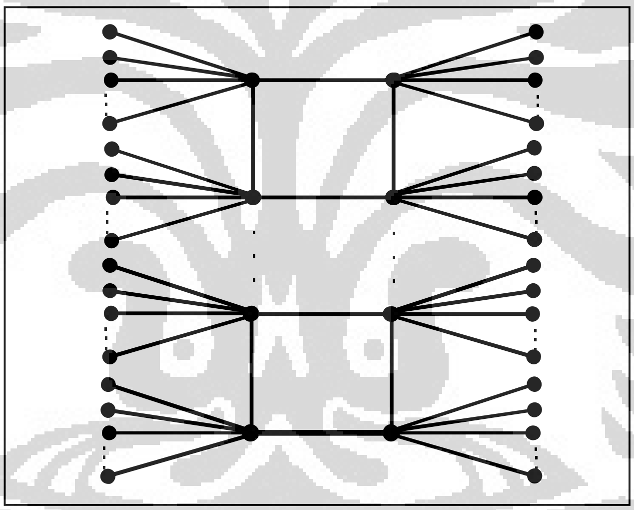
Produk korona (*corona product*) dua graf G_1 dan G_2 dilambangkan dengan $G_1 \odot G_2$ didefinisikan sebagai graf G yang diperoleh dengan meletakkan penggandaan simpul graf G_2 yang memiliki p_2 simpul sebanyak simpul graf G_1, kemudian menghubungkan penggandaan simpul ke-i dari G_2 ke setiap simpul ke-i di G_1 (Harary, 1995).

Diberikan L_4 (graf tangga) dan P_2 (graf lintasan) maka graf produk korona $G = L_4 \odot P_2$ dan $G = P_2 \odot L_4$ ditunjukkan pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11. Graf (a) $L_4 \odot P_2$ dan (b) $P_2 \odot L_4$

Graf kaki seribu merupakan graf korona L_n dengan komplemen graf lengkap $\overline{K_r}$ dan dinotasikan $L_n \odot \overline{K_r}$. Graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ ditunjukkan pada Gambar 2.12 berikut



Gambar 2.12 Graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$

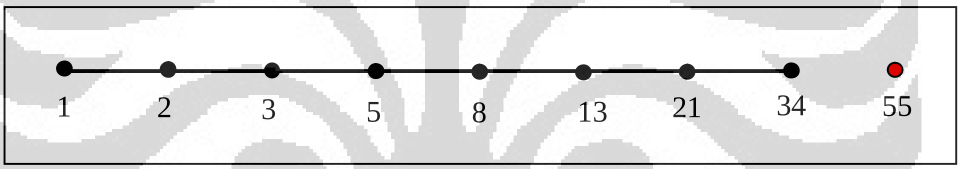
Dalam tesis ini dibahas pelabelan jumlah eksklusif pada graf tangga, gabungan graf tangga , dan graf kaki seribu.

2.3 Pelabelan Jumlah dan Pelabelan Jumlah Eksklusif

Suatu graf tak berarah sederhana $G = (V, E)$ dikatakan graf jumlah (*sum graph*) jika terdapat pelabelan f yaitu pemetaan injektif dari V ke himpunan bulat positif S sehingga $uv \in E$ jika dan hanya jika terdapat simpul w sedemikian sehingga $f(w) = f(u) + f(v)$, $w \in V \cup I$ dengan I himpunan simpul terisolasi. Simpul w disebut simpul bekerja. Jika semua simpul bekerja merupakan simpul terisolasi maka pelabelan jumlah f disebut pelabelan jumlah eksklusif. Banyak minimal dari simpul-simpul terisolasi yang perlu ditambahkan agar diperoleh graf jumlah disebut bilangan jumlah, dan dinotasikan dengan $\sigma(G)$. Banyak minimal yang ditambahkan agar pelabelan jumlah f disebut pelabelan jumlah eksklusif disebut bilangan jumlah eksklusif dan dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$ (Miller, dkk., 2005).

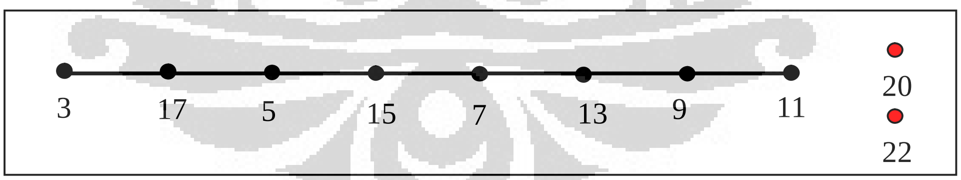
Misalkan $\Delta(G)$ menyatakan derajat tertinggi simpul-simpul pada graf G, maka $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$. Jika $\varepsilon(G) = \Delta(G)$, $\varepsilon(G)$ disebut bilangan eksklusif optimal (Tuga, dkk., 2005).

Gambar 2.13 merupakan contoh graf jumlah dengan bilangan jumlah graf lintasan $\sigma(P_8)$ =1.



Gambar 2.13. Pelabelan jumlah pada graf lintasan, dengan $\sigma(P_8) = 1$.

Pelabelan jumlah eksklusif ditunjukkan pada contoh Gambar 2.14 dengan bilangan jumlah eksklusif graf lintasan $\varepsilon(P_8) = 2$.



Gambar 2.14. Pelabelan jumlah ekklusif pada graf lintasan, $\varepsilon(P_8) = 2$.

Sebarang graf G dapat dibentuk menjadi graf jumlah dengan menambahkan satu atau lebih simpul terisolasi, jika diperlukan. Simpul dengan label tertinggi tidak dapat dihubungkan dengan simpul lain. Akibatnya graf jumlah akan memiliki paling sedikit satu simpul terisolasi.

Miller, dkk. (2005) menjelaskan bahwa Harary memperkenalkan konsep graf jumlah di tahun 1990, setelah itu peneliti-peneliti telah menemukan pelabelan jumlah dari beberapa jenis graf. Kemudian Miller, dkk. (2005) juga menemukan ide pelabelan jumlah eksklusif sebagai perluasan dari pelabelan jumlah.

Miller, dkk. (2005) telah merangkum beberapa graf jumlah dan jumlah bilangan eksklusifnya seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Rangkuman graf-graf yang telah diketahui bilangan jumlah dan bilangan jumlah eksklusifnya (Miller, dkk., 2005)

Graph	σ (G)	ε (G)
Bintang $(S_n), n \geq 2$	1	n
Dua Bintang $(S_{m,n}), m, n \geq 2$	1	max $\{m, n\}$
Caterpillar S	1	Δ S
Pohon $(T_n), n \geq 3$	1	?
Lintasan (P_n)	1	2
Lingkaran (C_4) $C_n, n \geq 4$	3 2	3 3
Roda $W_n, n \geq 5$, n ganjil $n \geq 4$, n genap	n $\frac{n}{2} + 2$	n n
Kipas f_n $n = 3$ $n \geq 3$, n genap $n \geq 5$, n ganjil	 3 3 4	 n n n
Friendship F_n	2	$2n$
Lengkap, K_n, $n \geq 3$	$2n - 3$	$2n - 3$
Cocktail party $H_{2,n}$ $H_{m,n}$	 $4n - 5$?	 $4n - 5$?
Bipartite Lengkap $K_{n,n}$ $K_{m,n}$	 $\left\lceil \frac{4n-3}{2} \right\rceil$ $\left\lceil \frac{k(n-1)}{2} + \frac{m}{(k-1)} \right\rceil$ dengan $k = \left\lceil \frac{\sqrt{1 + (8m + n - 1)(n - 1)}}{2} \right\rceil$	 $2n - 1$ $m + n - 1$

Selain itu juga telah ditunjukkan graf *shrub* Sh, memiliki $\varepsilon(Sh) = \Delta(Sh)$ (Tuga, dkk., 2005).

Menurut Gallian (2010), Vilfred dan Florida juga telah menunjukkan selain yang tercantum dalam Tabel 2.1 bilangan jumlah eksklusif untuk beberapa graf antara lain $P_n \times P_2$ atau $\varepsilon(P_n \times P_2) = 3$ dan $\varepsilon(P_3 \times P_3) = 4$. Sanjaya, John, Haryono (2011) juga telah menunjukkan dengan cara yang berbeda bahwa bilangan eksklusif graf tangga adalah $\varepsilon(L_n) = 3$, $n \geq 3$.

Karena pada graf tangga L_n telah ditunjukkan pelabelan jumlah eksklusif untuk graf tangga tunggal maka muncul pertanyaan bagaimana dengan bilangan jumlah eksklusif untuk gabungan m graf tangga dan modifikasinya yaitu graf kaki seribu. Karena itu dalam tesis ini akan ditunjukkan pelabelan graf jumlah eksklusif untuk menjawab pertanyaan diatas.

Pada bab ini telah dibahas beberapa konsep graf, jenis-jenis graf, pelabelan jumlah, dan pelabelan jumlah eksklusif yang akan digunakan pada Bab 3. Pada bab ini juga diberikan rangkuman hasil-hasil penelitian tentang pelabelan jumlah dan jumlah eksklusif pada beberapa graf. Pada bab 3 akan dibahas tentang konstruksi pelabelan jumlah eksklusif graf tangga, gabungan graf tangga, graf kaki seribu, dan contoh-contohnya.

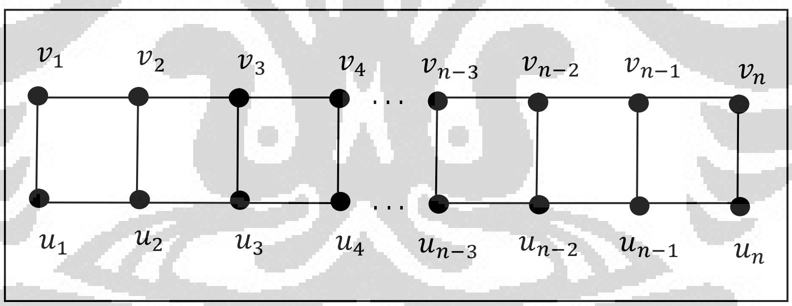
BAB 3

PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF GRAF TANGGA, GABUNGAN GRAF TANGGA, DAN GRAF KAKI SERIBU

Pada bab ini dibahas pelabelan jumlah untuk graf tangga, gabungan graf tangga yang isomorfik, gabungan graf tangga yang tak isomorfik, dan graf kaki seribu.

3.1. Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Tangga

Untuk mengkonstruksi pelabelan eksklusif pada graf tangga $L_n = P_n \times P_2$ himpunan simpul-simpul dibagi dua himpunan yang terdiri dari himpunan simpul $\{ v_1, v_2, v_3, \ldots v_n\}$ dan $\{ u_1, u_2, u_3, \ldots u_n\}$, dimana $E = \{v_i u_i | 1 \le i \le n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \le i \le n-1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \le i \le n-1\}$. Setiap barisan mewakili satu sisi dari tangga seperti Gambar 3.1. Graf tangga L_n memiliki banyak simpul $2n$ dan banyak busur $3n-2$.



Gambar 3.1. Notasi simpul graf L_n.

Sebelum membentuk pelabelan jumlah eksklusif pada graf L_n perlu ditentukan batasan bilangan jumlah eksklusif. Derajat maksimum dari simpul pada graf L_n dinotasikan dengan $\Delta(L_n)$. Miller, dkk (2005) menyatakan bahwa $\varepsilon(G) \ge \Delta(G)$. Karena $\Delta(L_n) = 3$, $n \ge 3$ maka $\varepsilon(L_n) \ge 3$.

Sistematika pembuktian teorema-teorema pada tesis ini mengikuti langkah-langkah sebagai berikut

I) Definisikan label untuk setiap simpul-simpul pada graf,

II) Tunjukkan tidak ada busur tambahan antar simpul yang tidak bertetangga, Untuk graf tangga L_n harus ditunjukkan tidak ada busur tambahan,

a) antara v_i dengan u_j jika $i \neq j$,

b) antara v_i dengan v_j dan u_i dengan u_j jika $j - i \geq 2$,

c) antara simpul terisolasi dengan simpul-simpul pada graf terhubung,

d) antara simpul terisolasi.

III) Tunjukkan banyak simpul terisolasi telah minimal.

Pada Teorema berikut diberikan bilangan jumlah eksklusif graf tangga $\varepsilon(L_n), n \geq 3$.

Teorema 3.1. (Sanjaya, John, Haryono, 2011), $\varepsilon(L_n) = 3,\ n \geq 3$.

Bukti.

Misalkan notasi simpul graf tangga $L_n,\ n \geq 3$ mengikuti Gambar 3.1.
Nyatakan simpul-simpul terisolasi sebagai $w_a,\ a = 1, 2, 3$.
Ambil sembarang bilangan genap positif d.
Untuk $d \equiv 2 \pmod 4$, ambil bilangan positif ganjil $x > \frac{d}{2}$, dan untuk $d \equiv 0 \pmod 4$, ambil bilangan positif ganjil x.
Untuk $1 \leq i \leq n$, label simpul-simpul graf L_n sebagai berikut,

$$f(v_i) = \begin{cases} x + d(i-1) & , i \text{ ganjil} \\ x + d(2n - i) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} x + d(2n-i) & , i \text{ ganjil} \\ x + d(i - 1) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

Sekarang dihitung jumlah masing-masing pasangan simpul yang saling bertetangga.

1. $f(v_i) + f(v_{i+1}) = \begin{cases} 2x + d(2n-2) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + 2dn & , i \text{ genap} \end{cases}$
2. $f(u_i) + f(u_{i+1}) = \begin{cases} 2x + 2dn & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n-2) & , i \text{ genap} \end{cases}$
3. $f(v_i) + f(u_i) \quad = 2x + d(2n - 1)$.

Maka tiga label simpul terisolasi adalah $f(w_1) = 2x + d(2n - 2)$,

$f(w_2) = 2x + d(2n-1)$, dan $f(w_2) = 2x + 2dn$.

Untuk menunjukkan f merupakan pelabelan jumlah eksklusif pada graf L_n, langkah-langkah yang harus dilakukan adalah menunjukkan hal berikut,

1. Tidak ada busur antara v_i dan u_j, jika $i \neq j$.

$$f(v_i) + f(u_j) = \begin{cases} 2x + d(2n + i - j - 1) & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & \text{, untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

Hasil penjumlahan label-label simpul pada graf L_n merupakan bilangan-bilangan genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Label $f(v_i) + f(u_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j$, yaitu $f(w_2) = 2x + d(2n-1)$.

2. Tidak ada busur antara v_i dan v_j, jika $i - j \geq 2$.

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(v_j)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

$$f(v_i) + f(v_j) = \begin{cases} 2x + d(i + j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i - j) & , i, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Hasil penjumlahan label-label simpul pada graf L_n merupakan bilangan-bilangan positif genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Label $f(v_i) + f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2n-2)$ atau $f(w_3) = 2x + 2dn$.

3. Tidak ada busur antara u_i dan u_j, jika $i - j \geq 2$.

Jumlah dari label $f(u_i)$ dan $f(u_j)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

$$f(u_i) + f(u_j) = \begin{cases} 2x + d(2n - i - j) & , i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(i + j - 2) & , i, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Hasil penjumlahan label-label simpul pada graf L_n merupakan bilangan-bilangan positif genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Label $f(u_i) + f(u_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2n-2)$ atau $f(w_3) = 2x + 2dn$.

4. Tidak ada busur antara v_i atau u_i, dengan $w_a, a = 1,2,3, i = 1,2, \ldots, n$.

Untuk menunjukkan $f(w_k) + f(v_i)$ atau $f(w_k) + f(u_i)$ bukan merupakan label dari graf L_n dapat ditinjau dari dua kasus yaitu untuk $d \equiv 2 \pmod 4$ atau $d \equiv 0 \pmod 4$.

a) Untuk $d \equiv 2 \pmod 4$

Diketahui bahwa $x > \frac{d}{2}$.

Label simpul terisolasi terkecil diperoleh pada $f(w_1) = 2x + d(2n-2)$.

Label terkecil dan terbesar graf L_n adalah $f(v_1) = x$ dan $f(u_1) = x + d(2n-1)$ sehingga jumlah label terkecil pada graf L_n dan label terkecil simpul terisolasi adalah $x + 2x + d(2n-2) = 3x + d(2n-2) = 2x - d + (x + d(2n-1))$.

Karena $x > \frac{d}{2}$ maka $2x - d + (x + d(2n-1)) > x + d(2n-1)$.

Hal ini berarti tidak ada label simpul-simpul pada graf L_n yang merupakan jumlah dari label terisolasi dengan label simpul-simpul pada graf L_n.

b) Untuk $d \equiv 0 \pmod 4$

Semua label simpul-simpul graf tangga merupakan bilangan dalam bentuk $1 \pmod 4$ (atau $3 \pmod 4$). Label simpul-simpul terisolasi merupakan jumlah dua label simpul-simpul graf L_n yaitu $f(v_i) + f(v_j)$ atau $f(v_i) + f(u_j)$ atau $f(u_i) + f(u_j)$ sehingga akan diperoleh bentuk penjumlahan, yaitu

$1 \pmod 4 + 1 \pmod 4 \equiv 2 \pmod 4$ (atau $3 \pmod 4 + 3 \pmod 4 \equiv 2 \pmod 4$).

Artinya label simpul-simpul terisolasi selalu bernilai $2 \pmod 4$.

Untuk semua label simpul di graf tangga L_n merupakan bilangan ganjil positif dengan bentuk $1 \pmod 4$ diperoleh

$f(w_a) + f(v_i) \equiv 2 \pmod 4 + 1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$ atau

$f(w_a) + f(u_i) \equiv 2 \pmod 4 + 1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$

yang bukan merupakan anggota dari label simpul-simpul pada graf tangga L_n.

Untuk semua label simpul di graf tangga L_n merupakan bilangan ganjil positif dengan bentuk $3 \pmod 4$, maka

$f(w_a) + f(v_i) \equiv 2 \pmod 4 + 3 \pmod 4 \equiv 5 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$ atau

$f(w_a) + f(u_i) \equiv 2 \pmod 4 + 3 \pmod 4 \equiv 5 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$

juga bukan merupakan anggota dari label simpul-simpul pada graf tangga L_n.

5. Tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi.

   a) Untuk $d \equiv 2 \pmod 4$

   Dengan perhitungan sederhana dapat ditunjukkan bahwa

   $f(w_1) + f(w_2) \neq f(w_3)$ atau $2x + d(2n - 1) + 2x + 2dn \neq 2x + d(2n + 1)$, sehingga tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi.

   b) Untuk $d \equiv 0 \pmod 4$

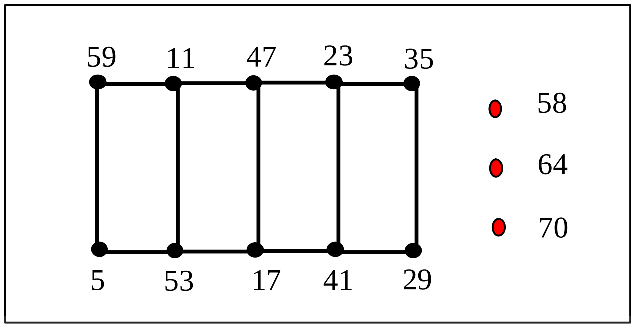
   Karena semua label simpul terisolasi $f(w_a) \equiv 2 \pmod 4$

   $f(w_i) + f(w_j) \equiv 2 \pmod 4 + 2 \pmod 4 \equiv 4 \pmod 4 \equiv 0 \pmod 4$

   untuk $i \neq j, i, j = 1,2,3$, maka label berbentuk $0 \pmod 4$ bukan merupakan label dari simpul terisolasi.

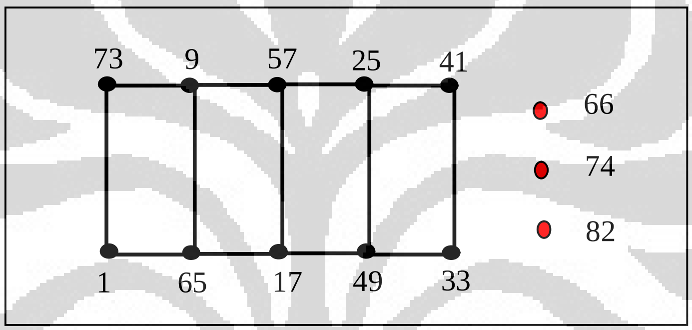
Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa bilangan jumlah eksklusif graf tangga $\varepsilon(L_n) \leq 3$. Menurut Miller, dkk (2005) untuk sebarang graf G berlaku $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$. Karena $\Delta(L_n) = 3$, $n \geq 3$ maka $\varepsilon(L_n) = 3$. Berdasarkan hal tersebut maka $\varepsilon(L_n) = 3$, $n \geq 3$ merupakan bilangan eksklusif optimal graf tangga L_n. Pada tabel 2.1 juga telah ditunjukkan bahwa $\varepsilon(C_4) = 3$ (Miller, dkk., 2005). Karena L_2 isomorfis dengan C_4 maka $\varepsilon(L_2) = \varepsilon(C_4) = 3$, sehingga $\varepsilon(L_n) = 3$ berlaku untuk $n \geq 2$. ■

Contoh pelabelan jumlah eksklusif untuk graf L_5 dengan $d = 6\ (2 \pmod 4)$ dan $x = 5\ (1 \pmod 4)$ ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Pelabelan jumlah eksklusif pada graf L_5, $d = 2, x = 5$.

Contoh pelabelan jumlah eksklusif untuk graf L_5 dengan $d = 8$ $(0 \pmod 4)$ dan $x = 1$ $(1 \pmod 4)$ ditunjukkan pada Gambar 3.3.



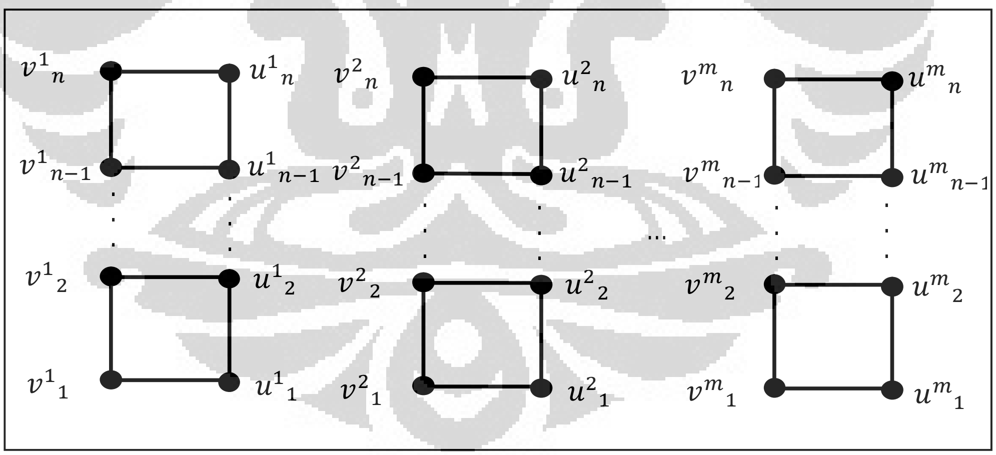
Gambar 3.3. Pelabelan jumlah eksklusif pada graf L_5, $d = 8$, $x = 1$.

Pada contoh Gambar 3.2 jika diurutkan maka himpunan label simpulnya adalah $\{5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59\}$ membentuk barisan aritmatika dengan $d = 6$ dan pada Gambar 3.3 jika diurutkan maka himpunan label simpulnya adalah $\{1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73\}$ dengan $d = 8$ sebagai selisih dua label simpul-simpul yang berurutan.

Dari pembuktian Teorema 3.1 maka untuk $d \equiv 0 \pmod 4$ label dapat dimulai dari 1, sedangkan untuk $d \equiv 2 \pmod 4$ label terkecilnya $> \frac{d}{2}$, jadi tidak mungkin dimulai dari 1.

3.2. Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Gabungan Graf Tangga

Pada subbab ini akan dibahas konstruksi pelabelan untuk generalisasi graf tangga, yaitu konstruksi pelabelan jumlah ekslusif pada gabungan m graf tangga yang isomorfik (mL_n). Himpunan simpul-simpul V pada graf mL_n dibagi menjadi $2m$ himpunan yang terdiri dari himpunan simpul $\{ v^1{}_1, v^1{}_2, v^1{}_3, \ldots, v^1{}_n\}$ dan $\{ u^1{}_1, u^1{}_2, u^1{}_3, \ldots, u^1{}_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul pada graf tangga pertama, $\{ v^2{}_1, v^2{}_2, v^2{}_3, \ldots, v^2{}_n\}$ dan $\{ u^2{}_1, u^2{}_2, u^2{}_3, \ldots, u^2{}_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul pada graf tangga kedua, $\{ v^3{}_1, v^3{}_2, v^3{}_3, \ldots, v^3{}_n\}$ dan $\{ u^3{}_1, u^3{}_2, u^3{}_3, \ldots, u^3{}_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul pada graf tangga ketiga dan seterusnya sampai $\{ v^m{}_1, v^m{}_2, v^m{}_3, \ldots, v^m{}_{n-1}, v^m{}_n\}$ dan $\{ u^m{}_1, u^m{}_2, u^m{}_3, \ldots, u^m{}_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul pada graf tangga ke-m seperti ditunjukkan pada Gambar 3.4. dimana simpul-simpul dihubungkan oleh busur-busur $E = \{v^l{}_i u^l{}_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v^l{}_i v^l{}_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ $\cup \{u^l{}_i u^l{}_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$, $1 \leq l \leq m$. Setiap himpunan simpul mewakili simpul-simpul pada satu sisi graf mL_n. Graf mL_n mempunyai banyak simpul $2mn$ dan banyak busur $3mn - 2m$.



Gambar 3.4 Notasi simpul graf mL_n.

Pada Teorema 3.4 diberikan bilangan jumlah eksklusif m graf tangga yang isomorfik $\varepsilon(mL_n)$.

Teorema 3.4 $\varepsilon(mL_n) = 3,\ n \geq 3,\ m \geq 1$.

Bukti.

Misalkan notasi simpul gabungan m graf tangga mL_n, $n \geq 3$, $m \geq 1$ mengikuti Gambar 3.4. Nyatakan simpul terisolasi dengan w_a, $a = 1, 2, 3$. Untuk $d \equiv 2 \pmod 4$, ambil bilangan positif ganjil x dengan $x > \frac{md}{2}$, dan untuk $d \equiv 0 \pmod 4$, ambil bilangan positif ganjil x.

Untuk $1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n$, label simpul-simpul mL_n sebagai berikut

$$f(v^k{}_i) = \begin{cases} x + d(m(i-1) + (k-1)) & , i \text{ ganjil} \\ x + d\big(m(2n - i + 2) - (k+1)\big) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u^k{}_i) = \begin{cases} x + d\big(m(2n - i + 2) - (k+1)\big) & , i \text{ ganjil} \\ x + d(m(i-1) + (k-1)) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

Jumlah dua label simpul-simpul bertetangga mL_n adalah sebagai berikut

$$f(v^k{}_i) + f(v^k{}_{i+1}) = \begin{cases} 2x + d(2mn - 2)) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2mn + 2(m-1)) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u^k{}_i) + f(u^k{}_{i+1}) = \begin{cases} 2x + d(2mn + 2(m-1)) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2mn - 2) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v^k{}_i) + f(u^k{}_i) = \begin{cases} 2x + d(2mn + (m-2)) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2mn + (m-2)) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

dengan $1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n$.

Maka tiga label simpul terisolasi adalah $f(w_1) = 2x + d(2mn - 2)$, $f(w_2) = 2x + d(2mn + m - 2)$, $f(w_3) = 2x + d(2mn + 2m - 2)$.

Untuk menunjukkan f merupakan pelabelan jumlah eksklusif, langkah-langkah yang harus dilakukan adalah menunjukkan hal berikut.

1. Tidak ada busur antara $v^k{}_i$ dan $u^k{}_j$, jika $i \neq j$.

   Jumlah label simpul $v^k{}_i$ dan $u^k{}_j$

   $$f(v^k{}_i) + f(u^k{}_j) = \begin{cases} 2x + d(m(2n + i - j + 1) - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(m(2n - i + j + 1) - 2) & , i, j \text{ genap} \end{cases}$$

   $1 \leq k \leq m, 1 \leq i, j \leq n$.

   Karena d genap maka $f(v^k{}_i) + f(u^k{}_j)$ juga genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Label $f(v^k{}_i) + f(u^k{}_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j$, yaitu

   $f(w_2) = 2x + d(2mn + m - 2)$.

2. Tidak ada busur antara $v^k{}_i$ dan $u^l{}_i$, jika $k \neq l$.

$$f(v^k{}_i) + f(u^l{}_i) = \begin{cases} 2x + d(2mn + (m + k - l - 2)) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2mn + (m + k - l - 2)) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$1 \leq k, l \leq m,\ 1 \leq i \leq n.$

Karena d genap maka $f(v^k{}_i) + f(u^l{}_i)$ merupakan bilangan genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Label $f(v^k{}_i) + f(u^l{}_i)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $k = l$, yaitu $f(w_2) = 2x + d(2mn + m - 2)$.

3. Tidak ada busur antara $v^k{}_i$ dengan $v^k{}_j$, jika $i - j \geq 2$.

Jumlah dari $f(v^k{}_i)$ dengan $f\left(v^k{}_j\right)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

$$f(v^k{}_i) + f\left(v^k{}_j\right) = \begin{cases} 2x + d(m(i + j - 2) + 2(k - 1)) & , i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(m(4n - i - j + 4) - 2(k + 1)) & , i, j \text{ genap} \\ 2x + d(m(2n + i - j + 1) - 2) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 2x + d(m(2n - i + j + 1) - 2) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(v^k{}_i) + f\left(v^k{}_j\right)$ merupakan bilangan-bilangan positif genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Nilai $f(v^k{}_i) + f\left(v^k{}_j\right)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2mn - 2)$ atau $f(w_3) = 2x + d(2mn + 2m - 2)$.

4. Tidak ada busur antara $u^k{}_i$ dan $u^k{}_j$, jika $i - j \geq 2$.

Jumlah dari $f(u^k{}_i)$ dengan $f\left(u^k{}_j\right)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

$$f(u^k{}_i) + f\left(u^k{}_j\right) = \begin{cases} 2x + d(m(4n - i - j + 4) - 2(k + 1)) & , i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(m(i + j - 2) + 2(k - 1)) & , i, j \text{ genap} \\ 2x + d(m(2n - i + j + 1) - 2) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 2x + d(m(2n + i - j + 1) - 2) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Karena d genap maka nilai $f(u^k{}_i) + f\left(u^k{}_j\right)$ merupakan bilangan-bilangan positif genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi, jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2mn - 2)$ atau $f(w_3) = 2x + d(2mn + 2m - 2)$.

5. Tidak ada busur antara $v^k{}_i$ dengan $v^l{}_i$, untuk setiap k, l.

$$f(v^k{}_i) + f(v^l{}_i) = \begin{cases} 2x + d\big(m(2i - 2) + (k + l - 2)\big) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(m(2n - 2i + 4) - (k + l + 2)) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$1 \leq k, l \leq m,\ 1 \leq i \leq n.$

Nilai $f(v^k{}_i) + f(v^l{}_i)$ bukan merupakan label simpul-simpul terisolasi untuk setiap k, l, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2mn - 2)$ atau $f(w_3) = 2x + d(2mn + 2m - 2)$.

6. Tidak ada busur antara $u^k{}_i$ dengan $u^l{}_i$ untuk setiap k, l

$$f(u^k{}_i) + f(u^l{}_i) = \begin{cases} 2x + d(m(2n - 2i + 4) - (k + l + 2)) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d\big(m(2i - 2) + (k + l - 2)\big) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$1 \leq k, l \leq m,\ 1 \leq i \leq n$.

Nilai $f(u^k{}_i) + f(u^l{}_i)$ bukan merupakan label simpul-simpul terisolasi untuk setiap k, l, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2mn - 2)$ atau $f(w_3) = 2x + d(2mn + 2m - 2)$.

7. Tidak ada busur antara $v^k{}_i$ atau $u^k{}_i$, dengan w_a, $a = 1,2,3$, $v_i, u_i \in V(mL_n)$. Untuk menunjukkan $f(w_a) + f(v^k{}_i)$ atau $f(w_a) + f(u^k{}_i)$ bukan merupakan label pada mL_n dapat ditinjau dari dua kasus yaitu untuk $d \equiv 2 \pmod 4$ atau $d \equiv 0 \pmod 4$.

a) Untuk $d \equiv 2 \pmod 4$

Diketahui bahwa $x > \frac{md}{2}$. Label simpul terisolasi terkecil diperoleh pada $f(w_1) = 2x + d(2mn - 2)$. Label terkecil dan terbesar simpul pada mL_n adalah $f(v_1) = x$ dan $f(u^1{}_1) = x + d\big(2mn + (m - 2)\big)$. Sehingga jumlah label terkecil pada graf mL_n dan label terkecil simpul terisolasi adalah

$x + 2x + d(2mn - 2) = 3x + d(2mn - 2)$

$= (3x - md) + d\big(2mn + (m - 2)\big)$

$= (2x - md) + \big(x + d(2mn + (m - 2))\big)$.

Karena $x > \frac{md}{2}$ maka $(2x - md) + \big(x + d(2mn + (m - 2))\big) >$ $\big(x + d(2mn + (m - 2))\big)$.

Hal ini berarti tidak ada label simpul-simpul pada graf mL_n yang merupakan jumlah dari label terisolasi dengan label simpul-simpul pada graf mL_n.

b) Untuk $d \equiv 0 \pmod 4$

Semua label simpul-simpul graf mL_n merupakan bilangan dalam bentuk $1 \pmod 4$ (atau $3 \pmod 4$). Label simpul-simpul bekerja merupakan jumlah dua label simpul-simpul graf mL_n yaitu $f(v^k{}_i) + f\big(v^k{}_j\big)$ atau $f(v^k{}_i) +$

$f(u^k{}_j)$ atau $f(u^k{}_i) + f(u^k{}_j)$ akan diperoleh dua bentuk penjumlahan, yaitu $1 \pmod 4 + 1 \pmod 4 \equiv 2 \pmod 4$ (atau $3 \pmod 4 + 3 \pmod 4 \equiv 2 \pmod 4$).

Artinya label simpul-simpul terisolasi selalu bernilai $2 \pmod 4$.

Untuk semua label simpul pada graf mL_n merupakan bilangan ganjil positif dengan bentuk $1 \pmod 4$ diperoleh

$f(w_a) + f(v^k{}_i) \equiv 2 \pmod 4 + 1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$ atau

$f(w_a) + f(u^k{}_i) \equiv 2 \pmod 4 + 1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$

yang bukan merupakan anggota dari label simpul-simpul pada graf mL_n.

Untuk semua label simpul pada graf mL_n merupakan bilangan ganjil positif dengan bentuk $3 \pmod 4$, maka

$f(w_a) + f(v^k{}_i) \equiv 2 \pmod 4 + 3 \pmod 4 \equiv 5 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$ atau

$f(w_a) + f(u^k{}_i) \equiv 2 \pmod 4 + 3 \pmod 4 \equiv 5 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$

juga bukan merupakan anggota dari label simpul-simpul pada graf mL_n.

8. Tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi.

a) Untuk $d \equiv 2 \pmod 4$

Terlihat bahwa $f(w_1) + f(w_2) \neq f(w_3)$ adalah $4x + d(m(4n+1) - 4 \neq 2x + d(2mn + 2(m-1))$. Sehingga tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi.

b) Untuk $d \equiv 0 \pmod 4$

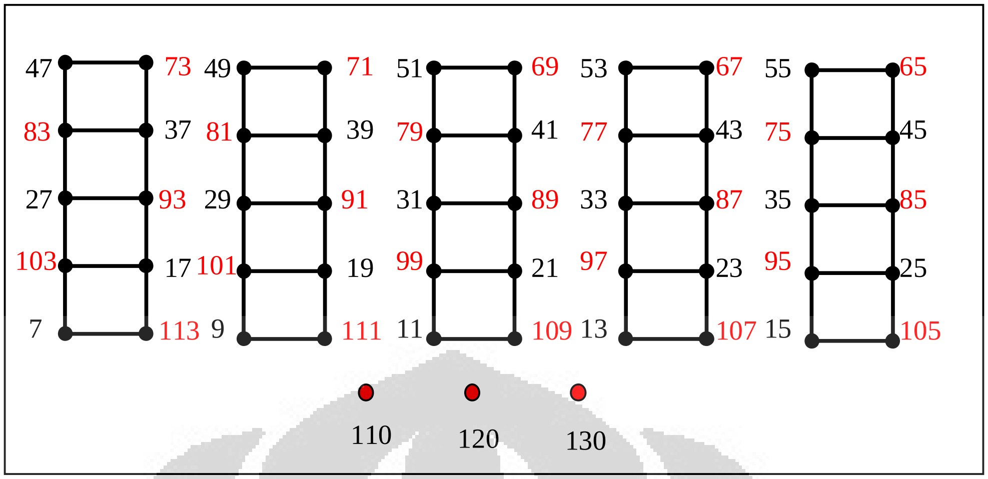
Karena semua label simpul terisolasi $f(w_a) \equiv 2 \pmod 4$, $a = 1, 2, 3$ maka $f(w_i) + f(w_j) \equiv 2 \pmod 4 + 2 \pmod 4 \equiv 4 \pmod 4 \equiv 0 \pmod 4$ untuk $i \neq j$ dengan $i, j = 1, 2, 3$.

$f(w_i) + f(w_j) \equiv 0 \pmod 4$ bukan merupakan label simpul terisolasi.

Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa $\varepsilon(mL_n) \leq 3$. Menurut Miller, dkk (2005) untuk sebarang graf G berlaku $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$. Sehingga telah ditunjukkan $\varepsilon(mL_n) = 3$ merupakan bilangan eksklusif optimal untuk graf mL_n , untuk $n \geq 3$

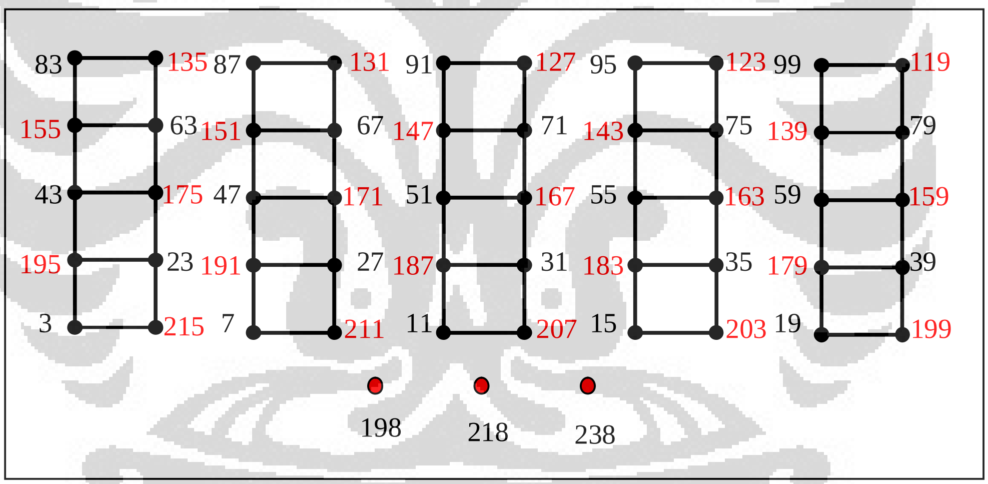
■

Contoh pelabelan jumlah eksklusif pada graf $5L_5$ dengan $x = 7\ (3 \pmod 4)$ dan $d \equiv 2\ (2 \pmod 4)$ ditunjukkan pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5. Pelabelan jumlah eksklusif pada graf $5L_5$, $x = 7, d = 2$.

Contoh pelabelan jumlah eksklusif pada graf $5L_5$ dengan $x = 3$ $(3 \pmod 4)$ dan $d = 4$ $(0 \pmod 4)$ ditunjukkan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6. Pelabelan jumlah eksklusif pada graf $5L_5, x = 3, d = 4$.

Pembahasan dilanjutkan dengan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada gabungan graf tangga yang tak isomorfik $\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right)$, $n_i \geq 3$, $m \geq 1$. Graf $\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}$ diperoleh dari gabungan graf tangga mL_n dengan melakukan penghapusan pada pasangan simpul-simpul ujung $\left({v^l}_j,\ {u^l}_j\right)$ pada graf mL_n.

Penghapusan pada pasangan simpul dengan aturan tertentu pada konstruksi pelabelan yang diperoleh dari Teorema 3.4 diperoleh Akibat 3.5.

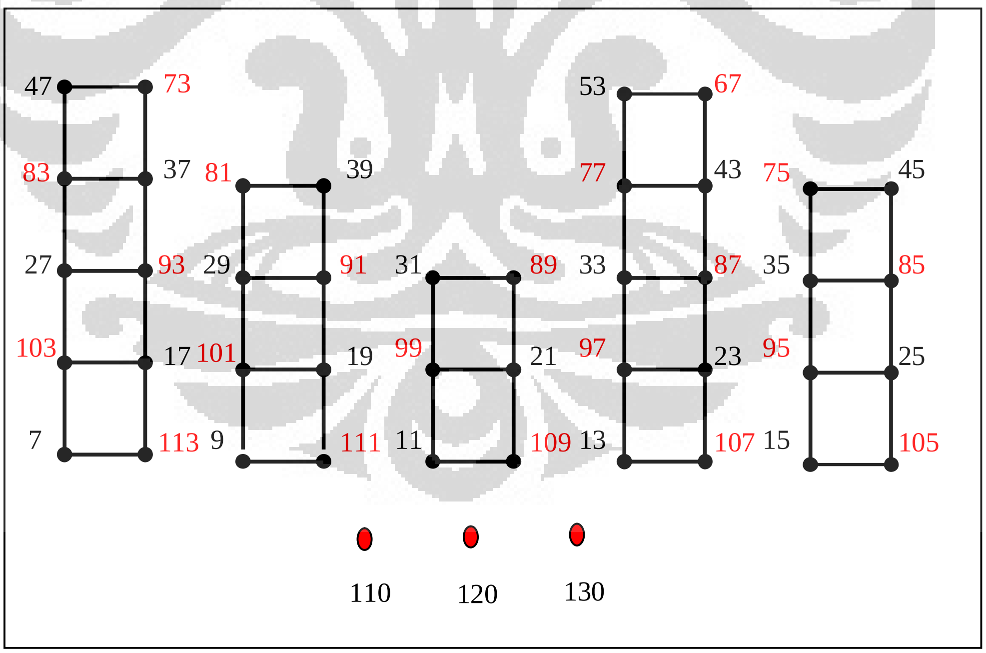
Akibat 3.5 $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) = 3$, untuk setiap $n_i \geq 3,\ m \geq 1$.

Bukti.

Ambil $n = \max(n_i,\ i = 1,2, \dots m)$, label pada graf $\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}$, untuk setiap $n_i \geq 3,\ m \geq 1$ diperoleh dari label graf $mL_n, n \geq 3$, seperti pada bukti Teorema 3.4. Untuk setiap graf tangga ke-i dengan $n_i \leq n$ dilakukan penghapusan pasangan simpul $({v^l}_j, {u^l}_j)$ dengan semua busur yang hadir pada simpul tersebut untuk $j = 1,2, \dots, n - n_i - 1$, $l = 1,2, \dots, m$.

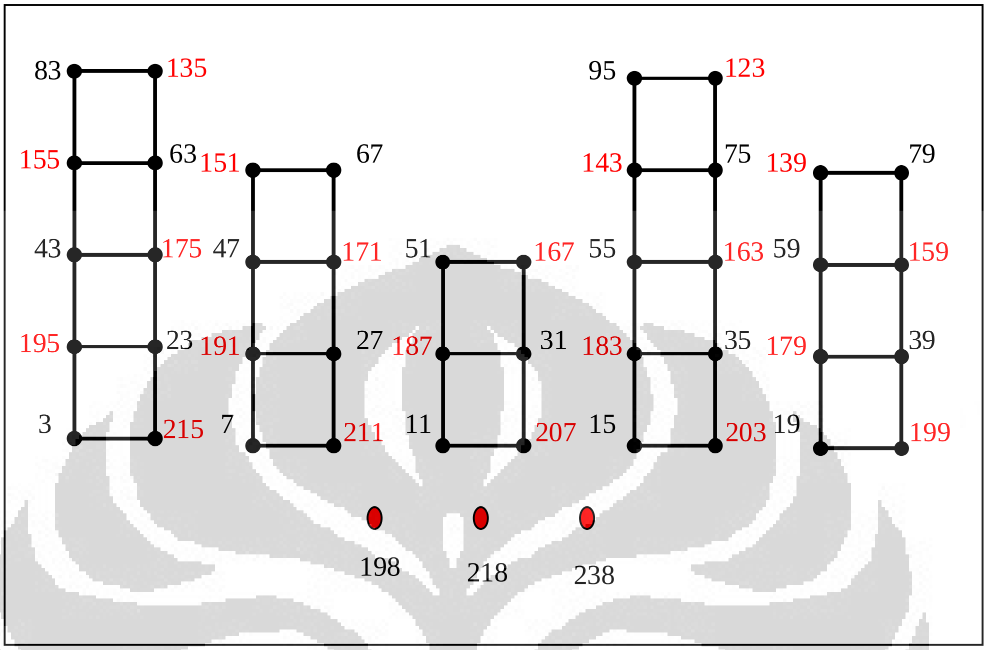
Karena penghapusan pada pasangan simpul dan busur yang hadir pada simpul tersebut, untuk $j = 1,2, \dots, n - n_i - 1$, $l = 1,2, \dots, m$, tidak mengakibatkan perubahan derajat tertinggi dan tetap mempertahankan banyaknya simpul terisolasi, maka diperoleh $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) \geq \Delta(mL_n) = 3$. Jadi $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) = 3,\ n_i \geq 3,\ m \geq 1$ ∎

Contoh pelabelan jumlah eksklusif dari graf $L_5 \cup L_4 \cup L_3 \cup L_5 \cup L_4$, dengan $d = 2\ (2 \pmod 4)$ dan $x = 7\ (3 \pmod 4)$ditunjukkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7. Pelabelan jumlah eksklusif graf $L_5 \cup L_4 \cup L_3 \cup L_5 \cup L_4$, dengan $d = 2,\ x = 7$

Contoh pelabelan jumlah eksklusif graf $L_5 \cup L_4 \cup L_3 \cup L_5 \cup L_4$, dengan $d = 4$ (0 (mod 4)) dan $x = 5$ (1 (mod 4))ditunjukkan pada Gambar 3.8.

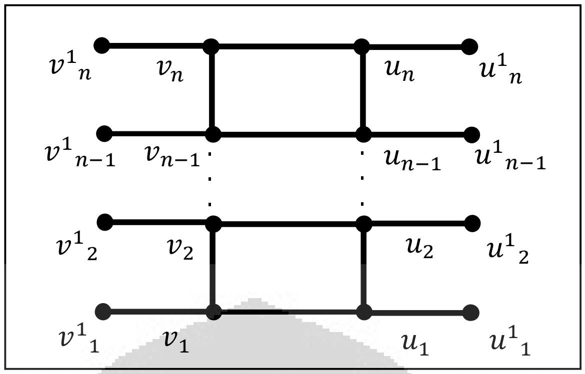


Gambar 3.8. Pelabelan jumlah eksklusif graf $L_5 \cup L_4 \cup L_3 \cup L_5 \cup L_4$, dengan $d = 4,\ x = 3$

3.3. Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Kaki Seribu

Pada sub bab ini dikonstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf dengan notasi graf $L_n \odot K_1$ yang selanjutnya disebut dengan graf kaki seribu.

Untuk mengkonstruksi pelabelan eksklusif pada graf kaki seribu $L_n \odot K_1$ himpunan simpul-simpul V dibagi empat himpunan yang terdiri dari himpunan simpul $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ dan $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, u_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul pada graf tangga L_n serta $\{{v^1}_1, {v^1}_2, {v^1}_3, \ldots, {v^1}_{n-1}, {v^1}_n\}$ dan $\{{u^1}_1, {u^1}_2, {u^1}_3, \ldots, {u^1}_{n-1}, {u^1}_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul berderajat 1 pada graf kaki seribu, dimana $E = \{v_i u_i,\ v_i {v^1}_i,\ u_i {u^1}_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1},\ u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ seperti pada Gambar 3.9. Graf kaki seribu $L_n \odot K_1$ memiliki banyak simpul $4n$ dan banyak busur $5n-2$.



Gambar 3.9. Notasi simpul graf kaki seribu $L_n \odot K_1$.

Teorema 3.6 memberikan konstruksi pelabelan graf jumlah eksklusif pada graf kaki seribu dengan bilangan jumlah eksklusif $\varepsilon(L_n \odot K_1) = 4$.

Teorema 3.6 $\varepsilon(L_n \odot K_1) = 4,\ n \geq 3$.

Bukti.

Misalkan notasi simpul graf kaki seribu $L_n \odot K_1,\ n \geq 3$ mengikuti Gambar 3.12.

Nyatakan simpul terisolasi sebagai $w_a, a = 1,2,3,4$. Untuk sebarang bilangan genap positif d, ambil bilangan positif ganjil $x > \frac{d}{2}$.

Untuk $1 \leq i \leq n$ label simpul-simpul graf $L_n \odot K_1$ dengan,

$$f(v_i) = \begin{cases} x + d(i-1) & , i \text{ ganjil} \\ x + d(2n-i) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} x + d(2n-i) & , i \text{ ganjil} \\ x + d(i-1) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v^1{}_i) = \begin{cases} 5x + d(6n-i-1) & , i \text{ ganjil} \\ 5x + d(4n+i-2) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u^1{}_i) = \begin{cases} 5x + d(4n+i-2) & , i \text{ ganjil} \\ 5x + d(6n-i-1) & , i \text{ genap} \end{cases}.$$

Untuk $1 \leq i \leq n$ jumlah label simpul-simpul yang bertetangga pada graf $L_n \odot K_1$ adalah sebagai berikut.

$$f(v_i) + f(v_{i+1}) = \begin{cases} 2x + d(2n-2) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + 2dn & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u_i) + f(u_{i+1}) = \begin{cases} 2x + 2dn & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n-2) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_i) + f(u_i) = \begin{cases} 2x + d(2n-1) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n-1) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_i) + f({v^1}_i) = \begin{cases} 6x + d(6n-2) & , i \text{ ganjil} \\ 6x + d(6n-2) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u_i) + f({u^1}_i) = \begin{cases} 6x + d(6n-2) & , i \text{ ganjil} \\ 6x + d(6n-2) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

Maka label empat simpul terisolasi adalah $f(w_1) = 2x + d(2n-2)$, $f(w_2) = 2x + d(2n-1)$, $f(w_3) = 2x + 2dn$, dan $f(w_4) = 6x + d(6n-2)$.

Untuk menunjukkan f merupakan pelabelan jumlah eksklusif pada graf $L_n \odot K_1$, $n \geq 3$, maka akan ditunjukkan bahwa tidak ada busur tambahan pada $L_n \odot K_1$ dengan langkah-langkah sebagai berikut

1) Tidak ada busur antara v_i dengan u_j jika $i \neq j$.

$$f(v_i) + f(u_j) = \begin{cases} 2x + d(2n + i - j - 1) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & , i \text{ genap} \end{cases}.$$

Nilai $f(v_i) + f(u_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi $f(w_a)$, $a = 1, 2, 3, 4$ pada saat $i = j$, yaitu $f(w_2) = 2x + d(2n-1)$.

2) Tidak ada busur antara v_i dengan ${v^1}_j$ jika $i \neq j$.

Jumlah label $f(v_i)$ dan $f({v^1}_j)$ adalah

$$f(v_i) + f({v^1}_j) = \begin{cases} 6x + d(6n + i - j - 2) & , i \text{ ganjil} \\ 6x + d(6n - i + j - 2) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

Nilai $f(v_i) + f({v^1}_i)$ akan menjadi label simpul terisolasi $f(w_a)$, $a = 1,2,3,4$ pada saat $i = j$, yaitu $f(w_4) = 6x + d(6n-2)$.

3) Tidak ada busur antara u_i dengan ${u^1}_j$ jika $i \neq j$.

Jumlah label $f(u_i)$ dan $f({u^1}_j)$ adalah

$$f(u_i) + f({u^1}_j) = \begin{cases} 6x + d(6n - i + j - 2) & , i \text{ ganjil} \\ 6x + d(6n + i - j - 2) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

Nilai $f(u_i) + f({u^1}_i)$ akan menjadi label simpul terisolasi pada saat $i = j$, yaitu $f(w_4) = 6x + d(6n-2)$.

4) Tidak ada busur antara v_i dan v_j, jika $i - j \geq 2$.

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(v_j)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

$$f(v_i) + f(v_j) = \begin{cases} 2x + d(i + j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i - j) & , i, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Karena d genap maka penjumlahan label-label simpul pada graf $L_n \odot K_1$ adalah genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Nilai $f(v_i) + f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2n - 2)$ atau $f(w_3) = 2x + 2dn$.

5) Tidak ada busur antara ${v^1}_i$ dengan ${v^1}_j$ untuk setiap i, j.

   Jumlah dari label $f({v^1}_i)$ dan $f({v^1}_j)$ adalah

$$f({v^1}_i) + f({v^1}_j) = \begin{cases} 10x + d(12n - i - j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 10x + d(8n + i + j - 4) & , i, j \text{ genap} \\ 10x + d(10n - i + j - 3) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 10x + d(10n + i - j - 3) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

   Nilai $f({v^1}_i) + f({v^1}_j)$ bukan label simpul-simpul terisolasi untuk setiap i, j.

6) Tidak ada busur antara ${u^1}_i$ dengan ${u^1}_j$, untuk setiap i, j.

   Jumlah dari label $f({u^1}_i)$ dan $f({u^1}_j)$ adalah

$$f({u^1}_i) + f({u^1}_j) = \begin{cases} 10x + d(8n + i + j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 10x + d(12n - i - j - 2) & , i, j \text{ genap} \\ 10x + d(10n + i - j - 3) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 10x + d(10n - i + j - 3) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

   Nilai $f({u^1}_i) + f({u^1}_j)$ bukan label simpul-simpul terisolasi untuk setiap i, j.

7) Tidak ada busur antara v_i dengan ${u^1}_j$ untuk setiap i, j.

   Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f({u^1}_j)$ adalah

$$f(v_i) + f({u^1}_j) = \begin{cases} 6x + d(4n + i + j - 3) & , i, j \text{ ganjil} \\ 6x + d(8n - i - j - 1) & , i, j \text{ genap} \\ 6x + d(6n + i - j - 2) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 6x + d(6n - i + j - 2) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

   Nilai $f(u_i) + f({v^1}_i)$ bukan label simpul-simpul terisolasi untuk sembarang i, j.

8) Tidak ada busur antara u_i dengan ${v^1}_j$ untuk setiap i, j.

   Jumlah dari label $f(u_i)$ dan $f({v^1}_j)$ adalah

$$f(u_i) + f(v^1{}_j) = \begin{cases} 6x + d(8n - i - j - 1) & , i, j \text{ ganjil} \\ 6x + d(4n + i + j - 3) & , i, j \text{ genap} \\ 6x + d(6n - i + j - 2) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 6x + d(6n + i - j - 2) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(u_i) + f(v^1{}_i)$ bukan label simpul-simpul terisolasi untuk setiap i, j.

9) Tidak ada busur antara $v^1{}_j$ dengan $u^1{}_j$ untuk setiap i, j.

Jumlah dari label $f(v^1{}_i)$ dan $f(u^1{}_j)$ adalah

$$f(v^1{}_i) + f(u^1{}_j) = \begin{cases} 10x + d(10n - i + j - 3) & , i, j \text{ ganjil} \\ 10x + d(10n + i - j - 3) & , i, j \text{ genap} \\ 10x + d(12n - i - j - 2) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 10x + d(8n + i + j - 4) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(v^1{}_i) + f(u^1{}_j)$ bukan label simpul-simpul terisolasi untuk setiap i, j.

10) Tidak ada busur antara v_i,u_i, $v^1{}_i$, $u^1{}_i$ dengan w_a.

Akan ditunjukkan bahwa $f(w_a) + f(v_i)$, $f(w_a) + f(v^1{}_i)$, $f(w_a) + f(u_i)$ atau $f(w_a) + f(u^1{}_i)$, untuk $a = 1,2,3,4$ bukan merupakan label simpul pada graf $L_n \odot K_1$. Label simpul terisolasi terkecil graf $L_n \odot K_1$ adalah $f(w_1) = 2x + d(2n - 2)$, label terkecil simpul berderajat 1 pada graf $L_n \odot K_1$ adalah $f(u^1{}_1) = 5x + d(4n - 1)$ dan label terbesar simpul terisolasi adalah $2x + d(2n - 2) + 5x + d(4n - 1) = 7x + d(6n - 3) = (2x - d) + (5x + d(6n - 1))$. Karena $x > \frac{d}{2}$ maka $(2x - d) + (5x + d(6n–1) > 5x + d(6n–1)$ dan $5x+6n–1d$ adalah label simpul terbesar pada graf $L_n \odot K_1$.

Hal ini berarti tidak ada label simpul-simpul pada graf $L_n \odot K_1$ yang merupakan jumlah dari label simpul-simpul terisolasi dengan label simpul-simpul pada graf $L_n \odot K_1$.

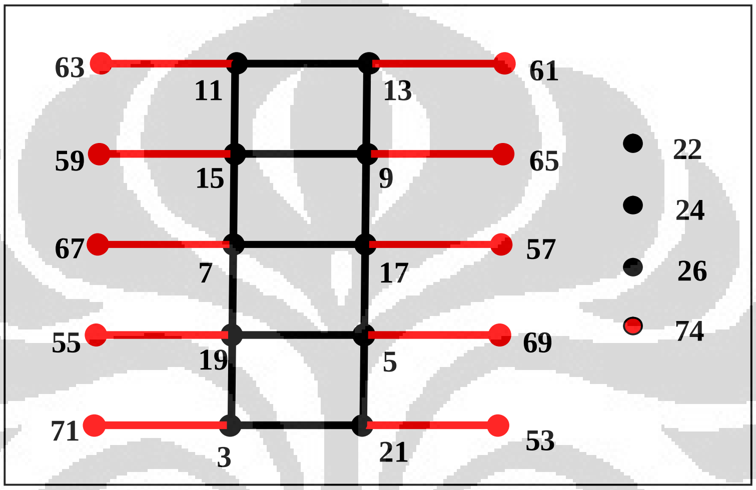
11) Tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi.

Terlihat bahwa jumlah $f(w_1) + f(w_2) \neq f(w_1) + f(w_3) \neq f(w_1) + f(w_4) \neq f(w_2) + f(w_3) \neq f(w_2) + f(w_4) \neq f(w_3) + f(w_4)$ atau $4x + d(4n - 3) \neq 4x + d(4n - 2) \neq 8x + d(8n - 4) \neq \big(4x + d(4n - 1)\big) \neq 8x + d(8n - 3) \neq 8x + d(8n - 2)$.

Sehingga, dapat dikatakan tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi.

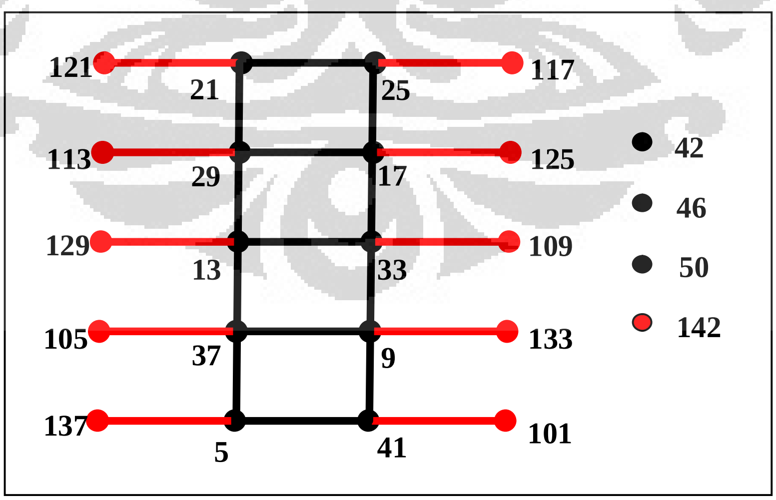
Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa bilangan jumlah eksklusif graf kaki seribu $\varepsilon(L_n \odot K_1) \leq 4$. Sebarang graf G berlaku $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$ (Miller, dkk., 2010), maka $\varepsilon(L_n \odot K_1) = 4$ merupakan bilangan eksklusif optimal pada graf kaki seribu $L_n \odot K_1$, $n \geq 3$. ■

Contoh pelabelan graf kaki seribu $L_5 \odot K_1$ untuk $d = 2$ (2 (mod 4)) dan $x = 3$ ditunjukkan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10. Pelabelan graf kaki seribu $L_5 \odot K_1$, $d = 2, x = 3$.

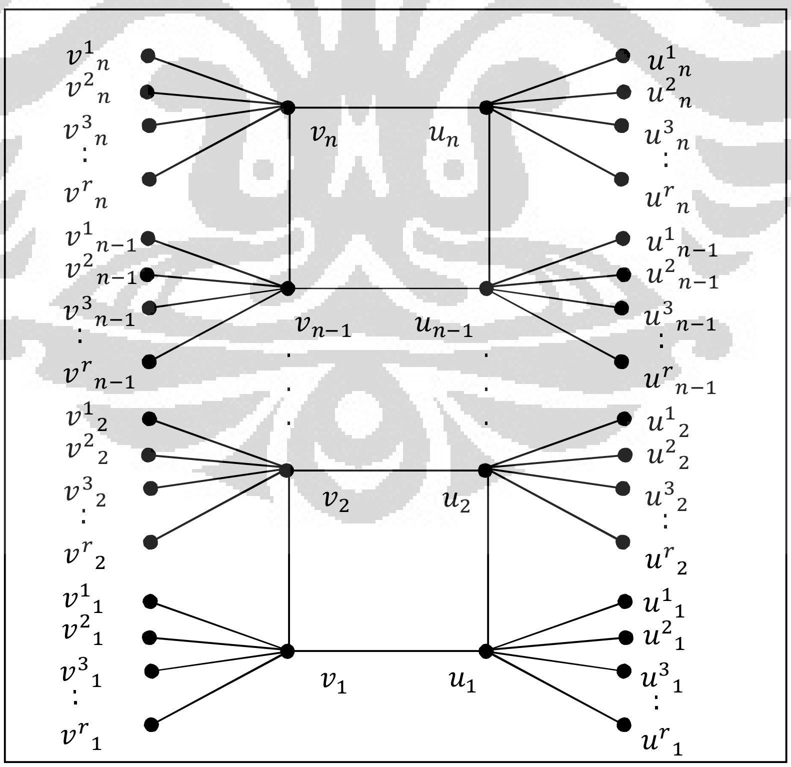
Contoh pelabelan graf kaki seribu $L_5 \odot K_1$ untuk $d = 4$ (0 (mod 4)) dan $x = 5$ ditunjukkan pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11. Pelabelan graf kaki seribu $L_5 \odot K_1$, $d = 4, x = 5$.

Pembahasan graf kaki seribu dapat dilanjutkan pada graf $L_n \odot \overline{K_r},\ r \geq 1$, dengan r banyak simpul yang berderajat 1 yang ditambahkan pada setiap simpul dari graf tangga. Seperti yang diperlihatkan pada Gambar 3.12.

Untuk mengkonstruksi pelabelan eksklusif pada graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ himpunan simpul-simpul V dibagi $2(n+r)$ himpunan yang terdiri dari himpunan simpul $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul graf tangga L_n, $\{v^1{}_1, v^1{}_2, v^1{}_3, \ldots, v^1{}_n\}$ dan $\{u^1{}_1, u^1{}_2, u^1{}_3, \ldots, u^1{}_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul berderajat 1 pertama dan $\{v^2{}_1, v^2{}_2, v^2{}_3, \ldots, v^2{}_n\}$ dan $\{u^2{}_1, u^2{}_2, u^2{}_3, \ldots, u^2{}_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul berderajat 1 kedua dan seterusnya sampai $\{v^r{}_1, v^r{}_2, v^r{}_3, \ldots, v^r{}_n\}$ dan $\{u^r{}_1, u^r{}_2, u^r{}_3, \ldots, u^r{}_n\}$ sebagai notasi simpul-simpul berderajat 1 ke-r pada graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ dimana $E = \{v_i u_i,\ v_i v^l{}_i,\ u_i u^l{}_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}, 1 \leq l \leq r$. Setiap himpunan simpul mewakili simpul-simpul pada graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$. Graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ memiliki banyak simpul $2(n+r)$ dan banyak busur $(2r+3)n - 2$.



Gambar 3.12. Konstruksi graf kaki seribu $(L_n \odot \overline{K_r})$

Pada Teorema 3.8 diberikan bilangan jumlah eksklusif pada graf kaki seribu dengan bilangan jumlah eksklusif $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r})$, dengan jumlah kaki $r \geq 1$.

Teorema 3.8 $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = 3 + r$, $n \geq 3$, $r \geq 1$.

Bukti.

Misalkan notasi simpul graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$, $n \geq 3$, $r \geq 1$ mengikuti Gambar 3.12.

Untuk sebarang bilangan positif genap d, ambil bilangan ganjil positif $x > \frac{d}{2}$.

Nyatakan simpul terisolasi sebagai w_a, $a = 1,2,3,\ldots,r+3$.

Untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq l \leq r$ label simpul-simpul graf $L_n \odot \overline{K_r}$ diberikan sebagai berikut

$$f(v_i) = \begin{cases} x + d(i-1) & ,i \text{ ganjil} \\ x + d(2n-i) & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} x + d(2n-i) & ,i \text{ ganjil} \\ x + d(i-1) & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v^l{}_i) = \begin{cases} 5x + d(2(l+2)n - i - 1) & ,i \text{ ganjil} \\ 5x + d(2(l+1)n + i - 2) & ,i \text{ genap} \end{cases}, l = 1,2,\ldots,r$$

$$f(u^l{}_i) = \begin{cases} 5x + d(2(l+1)n + i - 2) & ,i \text{ ganjil} \\ 5x + d(2(l+2)n - i - 1) & ,i \text{ genap} \end{cases}, l = 1,2,\ldots,r$$

Jumlah simpul-simpul yang bertetangga dari graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ adalah sebagai berikut

$$f(v_i) + f(v_{i+1}) = \begin{cases} 2x + d(2n-2) & ,i \text{ ganjil} \\ 2x + 2dn & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_i) + f(u_i) = \begin{cases} 2x + d(2n-1) & ,i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n-1) & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u_i) + f(u_{i+1}) = \begin{cases} 2x + 2dn & ,i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n-2) & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_i) + f(v^l{}_i) = \begin{cases} 6x + d(2(l+2)n - 2) & ,i \text{ ganjil} \\ 6x + d(2(l+2)n - 2) & ,i \text{ genap} \end{cases}, l = 1,2,\ldots,r$$

$$f(u_i) + f(u^l{}_i) = \begin{cases} 6x + d(2(l+2)n - 2) & ,i \text{ ganjil} \\ 6x + d(2(l+2)n - 2) & ,i \text{ genap} \end{cases}, l = 1,2,\ldots,r$$

Maka label $3 + r$ simpul-simpul terisolasi adalah $f(w_1) = 2x + d(2n - 2)$, $f(w_2) = 2x + d(2n - 1)$, $f(w_3) = 2x + 2dn$, dan $f(w_l) = 6x + d(2n(l - 1) - 2)$, $4 \leq l \leq r + 3$.

Untuk menunjukkan f merupakan pelabelan jumlah eksklusif pada graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$, maka akan ditunjukkan bahwa tidak ada busur-busur tambahan pada $L_n \odot \overline{K_r}$ dengan langkah-langkah sebagai berikut,

1) Tidak ada busur antara v_i dengan u_j jika $i \neq j$.

   $$f(v_i) + f(u_j) = \begin{cases} 2x + d(2n + i - j - 1) & , i \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

   Nilai $f(v_i) + f(u_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi $f(w_a)$, $a = 1, 2, \dots, r + 3$ pada saat $i = j$, yaitu $f(w_2) = 2x + d(2n - 1)$

2) Tidak ada busur antara v_i dan v_j, jika $i - j \geq 2$,

   Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(v_j)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

   $$f(v_i) + f(v_j) = \begin{cases} 2x + d(i + j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i - j) & , i, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

   Karena d genap maka penjumlahan label-label simpul pada graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ adalah genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Nilai $f(v_i) + f(v_j)$ merupakan label simpul terisolasi jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2n - 2)$ atau $f(w_3) = 2x + 2dn$.

3) Tidak ada busur antara u_i dan u_j, jika $i - j \geq 2$,

   Jumlah dari label $f(u_i)$ dan $f(u_j)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

   $$f(u_i) + f(u_j) = \begin{cases} 2x + d(i + j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i - j) & , i, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

   Karena d genap maka penjumlahan label-label simpul pada graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ adalah genap, jadi kemungkinannya hanya akan sama dengan label-label simpul terisolasi. Nilai $f(u_i) + f(u_j)$ merupakan label simpul terisolasi jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 2x + d(2n - 2)$ atau $f(w_3) = 2x + 2dn$

4) Tidak ada busur antara v_i dengan ${v^l}_j$ jika $i \neq j$.

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(v^l{}_j)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

$$f(v_i) + f(v^l{}_j) = \begin{cases} 6x + d(2n(l+2) + i - j - 2) & , i \text{ ganjil} \\ 6x + d(2n(l+2) - i + j - 2) & , i \text{ genap} \end{cases}$$

Nilai $f(v_i) + f(v^l{}_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi $f(w_l)$ pada saat $i = j$, yaitu $f(w_l) = 6x + d(2n(l-1) - 2)$, $4 \le l \le r + 3$.

5) Tidak ada busur antara u_i dengan $u^l{}_j$ jika $i \ne j$.

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(v^l{}_j)$ haruslah salah satu dari hasil berikut

$$f(u_i) + f(u^l{}_j) = \begin{cases} 6x + d(2n(l+2) - i + j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 6x + d(2n(l+2) - i + j - 2) & , i, j \text{ genap} \end{cases}$$

Nilai $f(u_i) + f(u^l{}_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi $f(w_l)$ pada saat $i = j$, yaitu $f(w_l) = 6x + d(2n(l-1) - 2)$, $4 \le l \le r + 3$.

6) Tidak ada busur antara v_i dengan $u^l{}_j$ untuk setiap i, j.

Jumlah $f(v_i)$ dan $f(u^l{}_j)$ sebagai berikut

$$f(v_i) + f(u^l{}_j) = \begin{cases} 6x + d(2n(l+1) + i + j - 3) & , i, j \text{ ganjil} \\ 6x + d(2n(l+3) - i - j - 1) & , i, j \text{ genap} \\ 6x + d(2n(l+2) + i - j - 2) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 6x + d(2n(l+2) - i + j - 2) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(v_i) + f(u^l{}_j)$ bukan merupakan simpul terisolasi $f(w_l)$ untuk setiap i, j, yaitu $f(w_l) = 6x + d(2n(l-1) - 2)$, $4 \le l \le r + 3$.

7) Tidak ada busur antara u_i dengan $v^l{}_j$ untuk setiap i, j.

Jumlah $f(u_i)$ dan $f(v^l{}_j)$ sebagai berikut

$$f(u_i) + f(v^l{}_j) = \begin{cases} 6x + d(2n(l+3) - i - j - 1) & , i, j \text{ ganjil} \\ 6x + d(2n(l+1) + i + j - 3) & , i, j \text{ genap} \\ 6x + d(2n(l+2) - i + j - 2) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 6x + d(2n(l+2) + i - j - 2) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(u_i) + f(v^l{}_j)$ bukan merupakan simpul terisolasi $f(w_l)$ untuk setiap i, j, yaitu $f(w_l) = 6x + d(2n(l-1) - 2)$, $4 \le l \le r + 3$.

8) Tidak ada busur antara $v^l{}_i$ dengan $v^l{}_j$ untuk setiap i, j

Jumlah label simpul $f(v^l{}_i)$ dan $f(v^l{}_j)$ adalah

$$f(v^l{}_i) + f(v^l{}_j) = \begin{cases} 10x + d(4n(l+2) - i - j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 10x + d(4n(l+1) + i + j - 4) & , i, j \text{ genap} \\ 10x + d(2n(2l+3) - i + j - 3) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 10x + d(2n(2l+3) + i - j - 3) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(v^l{}_i) + f(v^l{}_j)$ bukan merupakan simpul terisolasi $f(w_l)$ untuk setiap i, j, yaitu $f(w_l) = 6x + d(2n(l-1)-2),\ 4 \le l \le r+3$.

9) Tidak ada busur antara $u^l{}_i$ dengan $u^l{}_j$, untuk setiap i, j

Jumlah label simpul $f(u^l{}_i)$ dan $f(u^l{}_j)$ adalah

$$f(u^l{}_i) + f(u^l{}_j) = \begin{cases} 10x + d(4n(l+1) + i + j - 4) & , i, j \text{ ganjil} \\ 10x + d(4n(l+2) - i - j - 2) & , i, j \text{ genap} \\ 10x + d(2n(2l+3) + i - j - 3) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 10x + d(2n(2l+3) - i + j - 3) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(u^l{}_i) + f(u^l{}_j)$ bukan merupakan simpul terisolasi $f(w_l)$ untuk setiap i, j, yaitu $f(w_l) = 6x + d(2n(l-1)-2),\ 4 \le l \le r+3$.

10) Tidak ada busur antara $v^k{}_i$ dengan $v^l{}_j$ untuk setiap i, j dan k, l

Jumlah label simpul $f(v^k{}_i)$ dan $f(v^l{}_j)$ adalah

$$f(v^k{}_i) + f(v^l{}_j) = \begin{cases} 10x + d(2n(k+l+4) - i - j - 2) & , i, j \text{ ganjil} \\ 10x + d(2n(k+l+2) + i + j - 4) & , i, j \text{ genap} \\ 10x + d(2n(k+l+3) - i + j - 3) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 10x + d(2n(k+l+3) + i - j - 3) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(v^k{}_i) + f(v^l{}_j)$ bukan merupakan simpul terisolasi $f(w_l)$ untuk setiap i, j, yaitu $f(w_l) = 6x + d(2n(l-1)-2),\ 4 \le l \le r+3$.

11) Tidak ada busur antara $u^k{}_i$ dengan $u^l{}_j$, untuk setiap i, j dan k, l

Jumlah label simpul $f(u^k{}_i)$ dan $f(u^l{}_j)$ adalah

$$f(u^k{}_i) + f(u^l{}_j) = \begin{cases} 10x + d(2n(k+l+2) + i + j - 4) & , i, j \text{ ganjil} \\ 10x + d(2n(k+l+4) - i - j - 2) & , i, j \text{ genap} \\ 10x + d(2n(k+l+3) + i - j - 3) & , i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 10x + d(2n(k+l+3) - i + j - 3) & , i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Nilai $f(u^k{}_i) + f(u^l{}_j)$ bukan merupakan simpul terisolasi $f(w_l)$ untuk setiap i, j, yaitu $f(w_l) = 6x + d(2n(l-1)-2),\ 4 \le l \le r+3$.

12) Tidak ada busur antara $v_i, u_i, v^l{}_i, u^l{}_i$ dengan w_a, $i = 1, 2, \dots, n$

Akan ditunjukkan bahwa $f(w_a) + f(v_i)$, $f(w_a) + f(v^l{}_i)$, $f(w_a) + f(u_i)$ atau $f(w_a) + f(u^l{}_i)$, untuk $a = 1, 2, 3, \dots, r+3$, $1 \le l \le r$ bukan merupakan label simpul pada graf $L_n \odot \overline{K_r}$. Label simpul terisolasi terkecil graf $L_n \odot \overline{K_r}$ adalah $f(w_1) = 2x + d(2n-2)$, label terkecil simpul berderajat 1 ke-r pada graf $L_n \odot \overline{K_r}$ adalah $f(u^r{}_1) = 5x + d(2(r+1)n - 1)$. Jumlah label terkecil simpul terisolasi dan label terkecil simpul berderajat 1 adalah

$2x + d(2n - 2) + 5x + d(2(r + 1)n - 1) = 7x + d(2(r + 3)n - 3) =$

$(2x - d) + \left(5x + d(2(r + 3)n - 2)\right)$, karena $x > \frac{d}{2}$ maka

$(2x - d) + \left(5x + d(2(r + 3)n - 2)\right) > 5x + d(2(r + 3)n - 2)$ dan

$5x + d(2(r + 3)n - 2)$ merupakan label simpul terbesar pada graf $L_n \odot \overline{K_r}$ yaitu $f({v^r}_1)$.

Hal ini berarti tidak ada label simpul-simpul pada graf $L_n \odot \overline{K_r}$ yang merupakan jumlah dari label simpul-simpul terisolasi $f(w_a)$ dengan label simpul-simpul pada graf $L_n \odot \overline{K_r}$.

13) Tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi.

Jumlah dua label terisolasi yang berbeda $f(w_a) + f(w_b),\ a \neq b$ adalah

$f(w_1) + f(w_2) = 4x + d(4n - 3)$

$f(w_1) + f(w_3) = 4x + d(4n - 2)$

$f(w_1) + f(w_a) = 8x + d(2an - 4),\ 4 \leq a \leq r + 3$

$f(w_2) + f(w_3) = 4x + d(4n - 1)$

$f(w_2) + f(w_a) = 8x + d(2an - 3),\ 4 \leq a \leq r + 3$

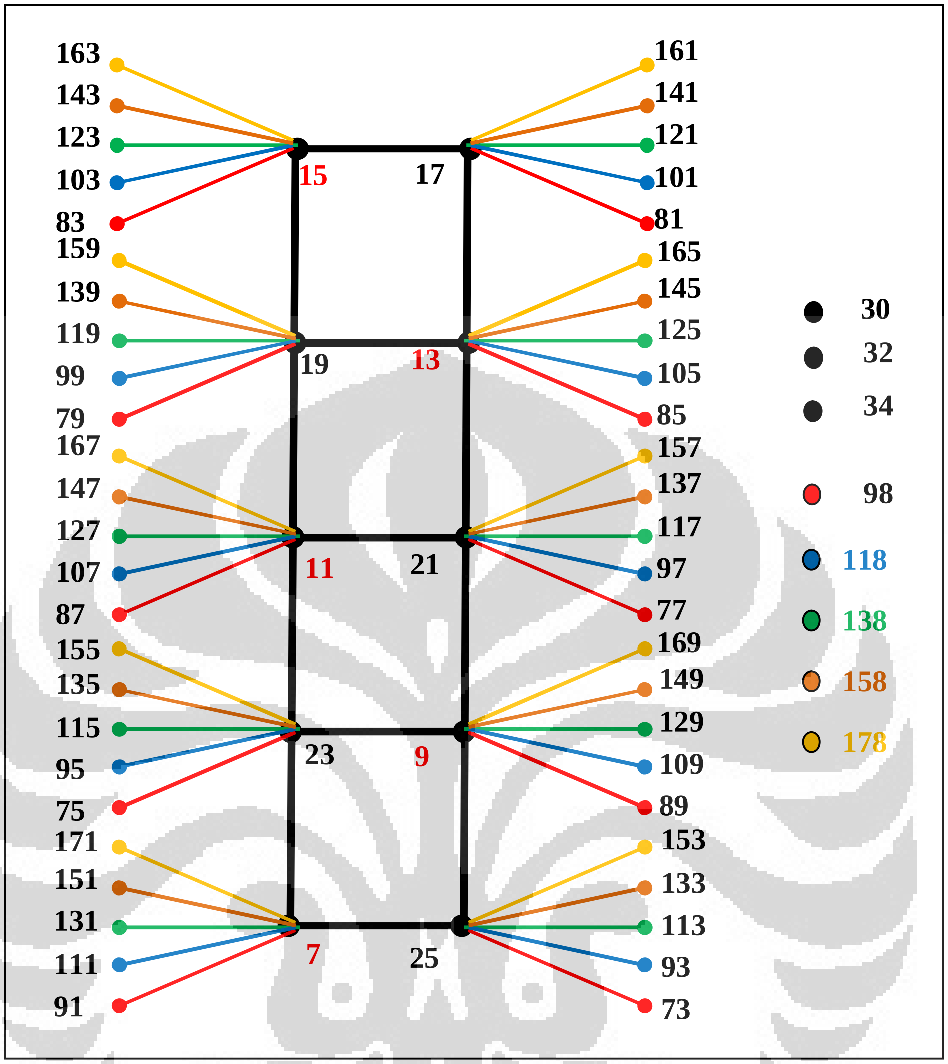
$f(w_3) + f(w_a) = 8x + d(2an - 2),\ 4 \leq a \leq r + 3$

$f(w_{a-1}) + f(w_a) = 12x + d\left(4an - 2(3n + 2)\right),\ 4 \leq a \leq r + 3.$

Penjumlahan label terisolasi $f(w_i) + f(w_j)$ bukan merupakan label simpul terisolasi untuk setiap $i \neq j$ dengan $i, j = 1, 2, \dots, r + 3$. Sehingga, dapat dikatakan tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi.

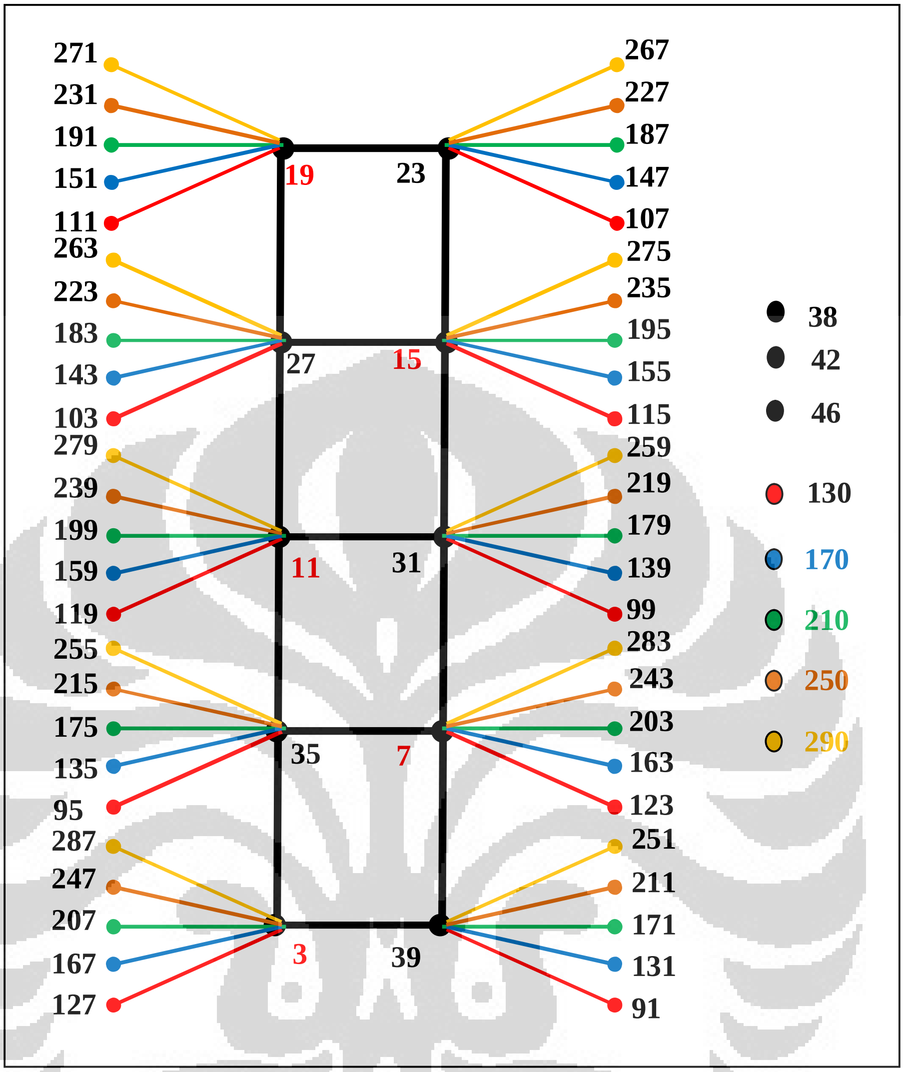
Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa bilangan jumlah eksklusif graf kaki seribu atau $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) \leq r + 3$. Menurut Miller, dkk (2005) untuk sebarang graf G berlaku $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$, maka $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = r + 3$ merupakan bilangan eksklusif optimal graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r},\ n \geq 2,\ r \geq 1$. ■

Contoh pelabelan graf kaki seribu $L_5 \odot \overline{K_5}$ dengan $d = 2\ (2\ (\text{mod}\ 4))$ dan $x = 7\ (3\ (\text{mod}\ 4))$ ditunjukkan pada Gambar 3.13



Gambar 3.13. Pelabelan graf kaki seribu $L_5 \odot \overline{K_5}$, $d = 2$, $x = 7$.

Contoh pelabelan graf kaki seribu $(L_5 \odot \overline{K_5})$ dengan $d = 4\ (0\ (\mathrm{mod}\ 4))$ dan $x = 3\ (3\ (\mathrm{mod}\ 4))$ ditunjukkan pada Gambar 3.14



Gambar 3.14. Pelabelan graf kaki seribu $L_5 \odot \overline{K_5}$, $d = 4$, $x = 3$

Pada bab ini telah ditunjukkan bilangan jumlah eksklusif pada graf tangga, gabungan graf tangga, dan graf kaki seribu. Pembahasan konstruksi pelabelan graf tangga dan modifikasinya serta telah menunjukkan bilangan jumlah eksklusif optimal yaitu $\varepsilon(L_n) = 3$, $n \geq 2$, gabungan m graf tangga yang isomorfik $\varepsilon(mL_n) = 3$, $n \geq 3$, $m \geq 1$, gabungan graf tangga yang tak perlu isomorfik $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) = 3$, untuk setiap $n_i \geq 3$, $m \geq 1$, dan graf kaki seribu $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = 3 + r$, $n \geq 3$, $r \geq 1$.

BAB 4

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini akan disampaikan kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan pelabelan jumlah eksklusif pada graf tangga, gabungan graf tangga, dan graf kaki seribu.

4.1. Kesimpulan

Dari pembahasan telah ditunjukkan bilangan jumlah eksklusif optimal pada graf tangga, gabungan graf tangga isomorfik, gabungan graf tangga tak isomorfik, dan graf kaki seribu yaitu,

a. graf tangga $\varepsilon(L_n) = 3,\ n \geq 2$,
b. gabungan m graf tangga isomorfik $\varepsilon(mL_n) = 3,\ n \geq 3,\ m \geq 1$
c. gabungan m graf tangga tak isomorfik $\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} L_{n_i}\right) = 3$, untuk setiap $n_i \geq 3,\ m \geq 1$,
d. graf kaki seribu $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = 3 + r,\ n \geq 3,\ r \geq 1$.

4.2. Saran

Penelitian ini masih dapat dilanjutkan untuk menunjukkan bilangan jumlah eksklusif gabungan graf kaki seribu dan graf grid.

DAFTAR PUSTAKA

Bergstrand, D., Harary, F., Hodges, K., Jennings, G., Kuklinski, L. & Wiener, J. (1989). The sum number of a complete graph. *Bull. Malaysian Mathematics. Soc.* 12, 25-28.

Bača, M., and Miller, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs*: *A Wealth of Problems and Some Solution*. USA: Brown Walker Press.

Gallian, J. A. (2010). Dynamic survey of graph labeling (13th ed.). *Electronic Journal of Combinatorial*,17, #DS6.

Gould, R. and Rould, V. (1991). Bound on the number of isolated vertices in sum graph. *Graph Theory, Combinatorics and Applications* (edited by Y. Alevi, G. Chartrand, O.R Oellermann and A.J. Schwenk) John Wiley and Sons. 553-562.

Harary, F. (1995). *Graph Theory*. USA: Addison-Wesley Publishing Company.

Hartsfield, N. & Smyth, W. F. (1992). The sum number of complete bipartite graphs. *Graphs and Matrices* (edited by Rolf Rees). Marcel Dekker.

Miller, M., Patel, Ryan, J., Sugeng, K. A., Slamin, and Tuga, M. (2005). Exclusive sum labeling of graph. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55, 149-158.

Rosen, K. H. (2007). *Discrete Mathematics and Its Applications* (6th ed.). Toronto: McGraw-Hill.

Sanjaya, D., John, P., Haryono, M. (2011, Mei). Pelabelan Jumlah Eksklusif pada graf tangga (L_n). *Prosiding Seminar Nasional, UNY, Yogyakarta*. M299-M302.

Tuga, M., Miller, M., Ryan, J., and Ryjáček, Z. (2005). Exclusive Sum Labeling of Trees. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 28, 109-121.