UNIVERSITAS INDONESIA

KETUNGGALAN TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN PADA RUANG METRIK-G LENGKAP

Tesis

NURUL HUDA
1006734565

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

KETUNGGALAN TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN PADA RUANG METRIK-G LENGKAP

Tesis
diajukan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Magister Sains

NURUL HUDA
1006734565

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	**:**	**NURUL HUDA**
NPM	**:**	**1006734565**
Tanda Tangan	**:**	
Tanggal	**:**	**13 JANUARI 2012**

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama	:	Nurul Huda
NPM	:	1006734565
Program Studi	:	Magister Matematika
Judul Tesis	:	**KETUNGGALAN TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN PADA RUANG METRIK- G LENGKAP**

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Prof. Dr. Belawati H. Widjaja	( )
Penguji	: Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	: Dr. Hengki Tasman, M.Si.	( )
Penguji	: Dr. Kiki Ariyanti Sugeng	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	13 Januari 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji hanya bagi Allah SWT Tuhan yang Maha Kuasa, yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia-NYA sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Program Studi Magister Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya sadar bahwa penyelesaian tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tesis ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih tercurah kepada;

(1) Ibu Prof. Dr. Belawati Widjaja, selaku dosen pembimbing tesis yang teramat banyak memberikan nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini;
(2) Bapak Prof. Dr. Djati Kerami, selaku Ketua Program Studi Magister Matematika dan Ibu Bevina D Handari, P.HD selaku Sekretaris Program Studi Magister Matematika;
(3) Bapak Dr. Hengki Tasman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberi nasihat dan dorongan kepada penulis;
(4) Bapak Dr. Yudi Satria, M.T, selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Ibu Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech, selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI;
(5) Seluruh Staf Pengajar di Program Studi Magister Matematika FMIPA UI, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;
(6) Pemerintah melalui DIKTI yang telah memberikan beasiswa kepada penulis berupa beasiswa BPPS selama penulis melaksanakan pendidikan di Universitas Indonesia
(7) Bapak Drs. Heri Budi Santoso, M.Si, selaku Dekan FMIPA Unlam;
(8) Bapak Drs. Faisal, M.Si, selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA Unlam dan Ibu Naimah Hjriati, S.Si, M.Si, selaku Sekretaris Prodi Matematika FMIPA Unlam

yang telah memberi izin melanjutkan program Magister Matematika di FMIPA UI;

(9) Orangtua tercinta (H. Abdullah Idris dan Hj. Muchyati) dan Orangtua istri tercinta (Wiranto & Mardiyah Yuli T.) yang telah memberikan dukungan moral, materiil, serta doa yang tidak pernah berhenti;

(10) Istriku tercinta Agustin Eka Widyayanti, A.Md dan anak-anakku tersayang Annur Zahra Fuadiyah, Muhammad Shaquille Gibran, atas segala cinta, perhatian, dukungan, kesabaran, semangat, dan doa;

(11) Kakak-kakakku Mba Maisaroh, Mba Siti Mufidah, Mas Nur Hidayat, Mas Sobihan serta Adikku Novel Saputra Dwi Fuadillah yang senantiasa memberi semangat dan dukungan;

(12) Teman teman seperjuangan Muzayyin Ahmad, Zulfi Amri, M. Haryono, Subian Saidi, M. Aziz Abdillah, Supriadi, Sigit Supriadi, Setiawan yang senantiasa memberi semangat dan dorongan;

(13) Kepada semua teman-teman yang telah memberi semangat terutama teman-teman magister angkatan 2010 di Matematika UI.

(14) Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu, penulis ucapkan terima kasih.

Akhir kata, saya berharap kepada Alloh Yang Maha Kuasa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Nurul Huda
NPM	:	1006734565
Program Studi	:	Magister Matematika
Departeman	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia, Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalti Free Right*) atas karya ilmiah saya berjudul :

"KETUNGGALAN TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN PADA RUANG METRIK-*G* LENGKAP"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Non eksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada Tanggal : 13 Januari 2012
Yang menyatakan

(NURUL HUDA)

ABSTRAK

Nama : Nurul Huda
Program Studi : Magister Matematika
Judul Tesis : **Ketunggalan Titik Tetap Untuk Pemetaan Pada Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$ Lengkap**

Titik x disebut titik tetap dari pemetaan f jika dan hanya jika $f(x) = x$, sebagai contoh jika pemetaan f didefinisikan dengan $f(x) = x^2 - 3x + 4$, maka 2 adalah titik tetap dari f karena $f(2) = 2$. **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** adalah pasangan (X, G) dengan X adalah himpunan tak kosong dan G adalah metrik (jarak) pada X (didefinisikan pada $X \times X \times X$) dengan $G: X \times X \times X \to R^+$ sedemikian hingga untuk setiap $x, y, z, a \in X$, memenuhi syarat berikut:
(G1) $G(x, y, z) = 0$ jika $x = y = z$, (G2) $0 < G(x, x, y)$ dengan $x \neq y$,
(G3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ dengan $z \neq y$,(G4) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = G(y, x, z) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$, (G5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$. **Ruang Metrik$-\boldsymbol{G}$** (X, G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap jika setiap barisan G-Cauchy di (X, G)adalah G-konvergen di (X, G). Suatu pemetaan $T: X \to X$ pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap disebut pemetaan kontraktif jika terdapat konstanta $k, 0 \leq k < 1$ sedemikian hingga $G(T(x), T(y), T(z) \leq kG(x, y, z)$. Tidak semua pemetaan memiliki titik tetap. Dari hasil penelitian diperoleh sifat-sifat dari **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap dan syarat cukup agar diperoleh ketunggalan titik tetap untuk pemetaan kontraktif pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap.

Kata kunci : Ketunggalan, titik tetap, kontraktif, **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap
ix+78 halaman;
Daftar Pustaka: 7 (1999-2011)

ABSTRACT

Name : Nurul Huda
Study Program : Magister Of Mathematics
Judul Tesis : **The Uniqueness of Fixed Point for Mapping On Complete Metric-G Space**

Point x is called a fixed point of the mapping f if and only if $f(x) = x$, for example if the mapping f defined by $f(x) = x^2 - 3x + 4$, then 2 is a fixed point of f because $f(2) = 2$. **Metric-G Space** is a pair (X, G) where X is a nonempty set and G is a metric (distance) on X (defined on $X \times X \times X$) with $G: X \times X \times X \rightarrow R^+$ such that for every $x, y, z, a \in X$, satisfy the following requirement:(G1) $G(x, y, z) = 0$ if $x = y = z$, (G2) $0 < G(x, x, y)$ for $x \neq y$, (G3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ for $z \neq y$,(G4) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = G(y, x, z) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$, (G5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$. **Metric-$G$ Space** (X, G) is a complete **Metric-G Space** if every G-Cauchy sequence in (X, G) is G-convergent in (X, G). A mapping $T: X \rightarrow X$ on a complete **Metric-G Space** is called contractive mapping if there are constants $k, 0 \leq k < 1$, such that $G(T(x), T(y), T(z)) \leq kG(x, y, z)$. Not every mapping has a fixed point, from the research results obtained by the properties of the complete **Metric-G Space** and sufficient condition in order to obtain uniqueness of fixed point for contractive mapping in complete **Metric-G Space**.

Key words : Uniqueness, Fixed Point, Contractive, Complete **Metric-G Space**
ix+78 pages;
Bibliography : 7 (1999-2011)

DAFTAR ISI

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan perkembangan teknologi dalam era globalisasi saat ini, konsep-konsep matematika juga mengalami perkembangan. Hal ini dikarenakan munculnya berbagai masalah dan fenomena baik dunia nyata maupun abstrak yang semakin komplek, sehingga dibutuhkan pengembangan konsep-konsep matematis untuk menangani masalah-masalah tersebut. Sebagai contoh adalah teorema titik tetap. Titik $x \in X$ disebut titik tetap dari pemetaan f jika dan hanya jika $f: X \to X$ dengan $f(x) = x$. Sebagai contoh jika pemetaan $f: R \to R$ didefinisikan dengan $f(x) = x^2 - 3x + 4$, maka $2 \in R$ adalah sebuah titik tetap dari f karena $f(2) = 2$. Tidak semua pemetaan memiliki titik tetap, sebagai contoh jika $f: R \to R$ dengan $f(x) = x + 1$, maka f tidak memiliki titik tetap. Penggunaan teorema titik tetap diantaranya untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linear aljabar dan untuk menentukan solusi khusus persamaan differensial.

Sejarah teorema titik tetap berawal dari masa kira-kira tahun 1500 SM di Mesopotamia. Pertama kali muncul adalah masalah bagaimana menentukan nilai x yang memenuhi persamaan $x^2 = a$, untuk suatu a bilangan asli. Sebagai contoh jika $a = 4$ maka $x = 2$. Setelah itu muncul masalah lain yaitu untuk nilai a bilangan riil. Untuk memudahkan dalam penyelesaian, persamaan tersebut diubah dalam bentuk lain yaitu $x^2 - a = 0$ yang selanjutnya ditulis menjadi $x^2 + x - a = x$. Masalah terakhir tersebut yang kemudian melatarbelakangi munculnya masalah yang dikenal dengan *Fixed Point Problem (FPP)*.

Langkah-langkah untuk mendapatkan titik tetap adalah sebagai berikut: diambil sebarang titik x_0, kemudian untuk mendapatkan nilai x digunakan pendekatan $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - a$, langkah akan berakhir jika nilai x_n konvergen ke suatu titik x. Pada perkembangan selanjutnya muncul masalah yang lebih abstrak yaitu $f(x) = x$ untuk sebarang $f(x)$ pemetaan dalam x, untuk menyelesaikan masalah tersebut lahirlah teorema titik tetap (*fixed point theorem*).

Pada abad XIX seorang Matematikawan asal Prancis yang bernama H. Poincare (1854-1912) menemukan pendekatan titik tetap. Pada perkembangannya, L.E.Y. Brouwer (1881-1966) seorang Matematikawan asal Belanda berhasil membuktikan titik tetap untuk pemetaan dengan domain dan kodomain berupa interval, persegi, piringan, bola, dan titik tetap dalam dimensi-n. Pada masa berikutnya Spencer (1906-1980) berhasil membuktikan lemma kombinatorial pada penguraian segitiga yang sangat berguna dalam teorema titik tetap. Teorema ini telah banyak dikembangkan dalam analisis fungsional untuk menyelidiki ketunggalan titik tetap dari pemetaan-pemetaan dengan domain **Ruang Metrik**, **Ruang hasil kali dalam, Ruang Bernorm, Ruang Hilbert, Ruang Banach** serta perluasan pada masing-masing konsep ruang tersebut. (Suwarno, 2011)

Pada awalnya diperkenalkan **Metrik** d pada sebuah himpunan tidak kosong X, dan pasangan (X, d) disebut **Ruang Metrik** (*Metric Space*). Pada tahun enampuluhan Gahler memperkenalkan **Metrik** baru d^* pada sebuah himpunan tidak kosong X yang disebut **Metrik-2** (*2-Metric*) dan pasangan (X, d^*) disebut **Ruang Metrik-2** (*2-Metric Space*) . Pada tahun 1992 Led Baphure Dhage pada disertasinya memperkenalkan **Metrik** baru D pada himpunan tidak kosong X yang disebut **Metrik-*D*** ($D -$ *Metric*) dan pasangan (X, D) disebut **Ruang Metrik-*D***(D-*Metric Space*). Pada tahun 2006 Zead Mustafa dan Brailey Sims memperkenalkan **Metrik** yang lebih baru lagi pada himpunan tidak kosong X yang disebut **Metrik-*G*** ($G -$ *Metric*) dan pasangan (X, G)disebut **Ruang Metrik-*G***(G- *Metric Space*).

Dengan adanya pengertian jarak (metrik), maka dalam **Ruang Metrik** (X, d), (X, d^*), (X, D), maupun (X, G) dapat ditinjau pengertian kekonvergenan suatu barisan dalam masing-masing **Ruang Metrik** tersebut. Kemudian akan diperhatikan Ruang-ruang Metrik yang khusus, yaitu **Ruang Metrik** yang memiliki sifat istimewa yaitu **Ruang Metrik** yang lengkap. Selanjutnya akan diperhatikan pemetaan dari **Ruang Metrik** ke dirinya sendiri, maka timbul masalah keberadaannya titik tetap. Titik tetap adalah sebuah pemetaan dari **Ruang Metrik** ke dirinya sendiri, bisa ada atau tidak ada. Bila ada, bisa tunggal atau lebih dari satu.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan diteliti dalam penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat dari **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap
2. Apabila diberikan suatu pemetaan T pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap, syarat cukup apa yang harus dipenuhi agar pemetaan itu memiliki titik tetap tunggal pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah :

1. Membahas/ mengkaji sifat-sifat dari dari **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap
2. Membahas/ mengkaji syarat cukup agar suatu pemetaan T pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap memiliki ketunggalan titik tetap pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam perkembangan matematika dibidang matematika analisis terutama dalam penyelesaian masalah ketunggalan titik tetap.

1.5 Batasan Penelitian

Dalam penelitian tugas akhir ini, masalah yang akan diteliti dibatasi hanya pada konsep titik tetap dan pemetaan kontraktif pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, jurnal, makalah, tesis, disertasi ataupun artikel yang relevan dengan topik penelitian, kemudian berdasar konsep-konsep yang ada dilakukan pengembangan dari hasil yang sudah ada untuk pembuktikan teorema ketunggalan titik tetap pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini disajikan definisi-definisi tentang **Ruang Metrik, Ruang Metrik-2, Ruang Metrik-$\boldsymbol{D}$, Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, dan Pemetaan Kontraktif dan Pemetaan Ekspansif pada **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, serta definisi Titik Tetap.

2.1 Ruang Metrik $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$

Disini akan diberikan definisi dan contoh dari **Ruang Metrik** (X, d)

Definisi 2.1 (V.S. Pugachev and I.N. Sinitsyn, 1999)

Ruang Metrik adalah pasangan (X, d) dengan X adalah himpunan yang tidak kosong dan $d: X \times X \to R^+$ adalah Metrik (jarak) pada X sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$, terpenuhi:

(M1) $d(x, y) \geq 0$ dan $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Sifat Non Negatif)

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Sifat Simetri)

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Sifat Ketaksamaan Segitiga).

Contoh:

(1) $d: R \times R \to R^+$ dengan $d(x, y) = |x - y|$

Maka dapat dibuktikan bahwa (R, d) adalah **Ruang Metrik**, karena memenuhi sifat (M1), (M2) dan (M3).

(M1) Jelas $d(x, y) = |x - y| \geq 0$, $\forall\, x, y \in R$

$d(x, y) = |x - y| = |0| = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Sifat non negatif)

(M2) Karena $d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$

(Berdasarkan sifat Nilai Mutlak)

Maka $d(x, y) = d(y, x)$ (Sifat Simetri)

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$d(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$

Maka $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Sifat Ketaksamaan Segitiga)

(2) $d: R^n \times R^n \to R^+$ dengan

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + {(x_2 - y_{2)}}^2 + \cdots + {(x_n - y_{n)}}^n}$$

$\forall x \in R^n$ dan $\forall y \in R^n$ dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

Maka (R^n, d) adalah sebuah **Ruang Metrik**.

(3) X himpunan tak kosong, $d: X \times X \to R^+$

dengan $d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases} \quad \forall x, y \in X$

Maka (X, d) adalah sebuah **Ruang Metrik** yang disebut **Ruang Metrik** Diskrit.

2.2 Ruang Metrik-2

Disini akan diberikan definisi dan contoh dari **Ruang Metrik-2**

Definisi 2.2 (Z. Mustafa and B. Sims, 2006)

Misal X adalah sebuah himpunan tak kosong, pemetaan $d^*: X \times X \times X \to R^+$ yang bersifat bahwa untuk semua $x, y, z, a \in X$ berlaku:

(A1) Untuk $x, y \in X$, dengan $x \neq y$, terdapat $z \in X$, sedemikian sehingga $d^*(x,y,z) \neq 0$

(A2) $d^*(x,y,z) = 0$ jika $x = y$ atau $x = z$ atau $y = z$

(A3) $d^*(x,y,z) = d^*(x,z,y) = d^*(y,x,z) = d^*(y,z,x) = d^*(z,x,y) = d^*(z,y,x)$ (Sifat Simetri)

(A4) $d^*(x,y,z) \leq d^*(x,y,a) + d^*(x,a,z) + d^*(a,y,z)$

Maka pemetaan d^* disebut **Metrik-2** pada X, dan pasangan (X, d^*) disebut **Ruang Metrik-2**.

Contoh:

Ambil $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan

$d^*: X \times X \times X \to R^+$ sebagai berikut:

Bila $x \in X$, $y \in X$ dan $z \in X$ maka akan terbentuk segitiga xyz, dan definisikan $d^*(x,y,z) =$ luas Δxyz.

Maka dapat dibuktikan bahwa pemetaan d^* merupakan sebuah **Metrik-2** dan (X, d^*) adalah sebuah **Ruang Metrik-2** .

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa pemetaan d^* adalah sebuah **Metrik-2** maka harus memenuhi 4 sifat yaitu (A1), (A2), (A3) dan (A4) .

(A1) Untuk $x \in X$, $y \in X$ dengan $x \neq y$, maka pasti terdapat $z \in X$, sedemikian sehingga $d^*(x, y, z) \neq 0$

(A2)Jika $x = y$ atau $x = z$ atau $y = z$ maka $d^*(x, y, z) = 0$

(A3) $d^*(x, y, z) = d^*(x, z, y) = d^*(y, x, z) = d^*(y, z, x) = d^*(z, x, y) = d^*(z, y, x)$ (Sifat Simetri)

(A4) $d^*(x, y, z) \leq d^*(x, y, a) + d^*(x, a, z) + d^*(a, y, z)$ untuk sembarang $a \in X$.

Karena Sifat (A1), (A2), (A3) dan (A4) maka pemetaan d^* merupakan sebuah **Metrik-2** dan (X, d^*) adalah sebuah **Ruang Metrik-2**

2.3 Ruang Metrik-*D*

Disini akan diberikan definisi dan contoh dari **Ruang Metrik-*D***

Definisi 2.3 (Z. Mustafa and B. Sims, 2006)

Bila X adalah sebuah himpunan tidak kosong, pemetaan $D: X \times X \times X \to R^+$ yang bersifat bahwa untuk semua $x, y, z, a \in X$ berlaku:

(D1) $D(x, y, z) = 0$ jika dan hanya jika $x = y = z$

(D2) $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, x, z) = D(y, z, x) = D(z, x, y) = D(z, y, x)$ (Sifat Simetri)

(D3) $D(x, y, z) \leq D(x, y, a) + D(x, a, z) + D(a, y, z)$

(D4) $D(x, y, y) \leq D(x, z, z) + D(z, y, y)$.

Maka pemetaan D disebut **Metrik-*D*** pada X, dan pasangan (X, D) disebut **Ruang Metrik-*D***.

Contoh:

(1) Misal (X, d) adalah sebuah **Ruang Metrik** dan $D: R \times R \times R \to R^+$ dengan $D(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$ untuk $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$.

Maka dapat dibuktikan bahwa (R, D) adalah **Ruang Metrik-*D***.

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa D adalah sebuah **Metrik-*D***, maka harus memenuhi 4 sifat yaitu (D1), (D2), (D3) dan (D4).

(D1) $D(x, y, z) = 0$

$\Leftrightarrow d(x, y) = d(y, z) = d(z, x) = 0$

$\Leftrightarrow x = y = z$ (berdasarkan sifat (M1)

(D2) $D(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$

$D(x, z, y) = \max\{d(y, z), d(z, y), d(y, x)\}$

$D(y, x, z) = \max\{d(y, x), d(x, z), d(z, y)\}$

$D(y, z, x) = \max\{d(y, z), d(z, x), d(x, y)\}$

$D(z, x, y) = \max\{d(z, x), d(x, y), d(y, z)\}$

$D(z, y, x) = \max\{d(z, y), d(y, x), d(x, z)\}$

Maka berdasarkan sifat (M2) $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, x, z) =$

$D(y, z, x) = D(z, x, y) = D(z, y, x)$

(Sifat Simetri)

(D3) $D(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$

$D(x, y, a) = \max\{d(x, y), d(y, a), d(a, x)\}$

$D(x, a, z) = \max\{d(x, a), d(a, z), d(z, x)\}$

$D(a, y, z) = \max\{d(a, y), d(y, z), d(z, a)\}$

Kemungkinan nilai $D(x, y, z)$ adalah

(i) $D(x, y, z) = d(x, y)$

(ii) $D(x, y, z) = d(y, z)$

(iii) $D(x, y, z) = d(z, x)$

Untuk (i) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x, y) \leq 2d(x, y) = d(x, y) + (d(x, a) + d(a, y))$

$\leq D(x, y, a) + D(x, a, z) + D(a, y, z)$

Dengan cara serupa dapat pula dibuktikan (D3) untuk (ii) dan (iii).

Maka $D(x, y, z) \leq D(x, y, a) + D(x, a, z) + D(a, y, z)$.

Maka (D3) terbukti.

(D4) Berdasarkan sifat (M1) dan (M2) diperoleh:

$D(x, y, y) = \max\{d(x, y), d(y, y), d(y, x)\} = d(x, y)$

$D(x, z, z) = \max\{d(x, z), d(z, z), d(z, x)\} = d(x, z)$

$D(z, y, y) = \max\{d(z, y), d(y, y), d(y, z)\} = d(z, y)$

Berdasarkan sifat (M3) diperoleh:

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Maka $D(x, y, y) \leq D(x, z, z) + D(z, y, y)$.

Maka (D4) terbukti.

Karena Sifat (D1), (D2), (D3) dan (D4) terpenuhi, maka D merupakan **Metrik-$\boldsymbol{D}$**, dan (R, D) adalah sebuah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{D}$**.

(2) X himpunan tak kosong, dengan

$$D(x, y, z) = \begin{cases} 0 & ; x = y = z \\ 1 & ; x \neq y \neq z \end{cases} \text{ untuk } x, y, z \in X$$

Maka (X, D) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{D}$**

2.4 Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$

Definisi 2.4 (H. Obiedat and Z. Mustafa, 2010)

Bila X adalah himpunan tak kosong, dan $G: X \times X \times X \rightarrow R^+$ memenuhi syarat berikut, untuk semua $x, y, z, a \in X$:

(G1) $G(x, y, z) = 0$ jika $x = y = z$

(G2) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = G(y, x, z) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$ (Sifat Simetri)

(G3) $G(x, x, y) > 0$ untuk $x \neq y$

(G4) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ untuk $z \neq y$

(G5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ untuk semua $x, y, z, a \in X$ (Sifat Ketaksamaan Segiempat)

Maka pemetaan G disebut **Metrik-$\boldsymbol{G}$** pada X, dan pasangan (X, G) di sebut **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$.**

Contoh:

(1) Misalkan (R, d) adalah sebuah **Ruang Metrik**, dan $G: R \times R \times R \rightarrow R^+$ dengan $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$, untuk $x, y, z \in X$, maka dapat dibuktikan bahwa (R, G) adalah sebuah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**.

Bukti:

Untuk menunjukkan (R, G) adalah sebuah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, maka akan ditunjukkan bahwa $G: R \times R \times R \rightarrow R^+$ memenuhi lima sifat yaitu (G1), (G2), (G3), (G4), dan (G5)

(G1) Akan ditunjukkan bahwa $G(x, y, z) = 0$ jika $x = y = z$

Jika $x = y = z$ maka $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) = 0$ (Berdasarkan (M1))

Maka $G(x, y, z) = 0$ jika $x = y = z$.

Maka (G1) terpenuhi.

G2) Akan ditunjukkan bahwa Sifat Simetri berlaku pada (R, G)

$G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$

$G(x, z, y) = d(x, z) + d(z, y) + d(y, z)$

$G(y, x, z) = d(y, x) + d(x, z) + d(z, y)$

$G(y, z, x) = d(y, z) + d(z, x) + d(x, y)$

$G(z, x, y) = d(z, x) + d(x, y) + d(y, z)$

$G(z, y, x) = d(z, y) + d(y, x) + d(x, z)$

Berdasarkan sifat (M2) $d(x, y) = d(y, x)$, $d(y, z) = d(z, x)$ dan $d(z, x) = d(x, z)$

Maka diperoleh $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, x, z) = G(y, z, x)$
$= G(z, x, y) = G(z, y, x)$.

Jadi Sifat Simetri berlaku pada(R, G).

Jadi (G2) terpenuhi.

(G3) Akan ditunjukkan $G(x, x, y) > 0$ untuk $x \neq y$

$G(x, x, y) = d(x, x) + d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$

Berdasarkan sifat (M1) dan (M2), maka $2d(x, y) > 0$, bila $x \neq y$

Maka $G(x, x, y) > 0$, bila $x \neq y$

Jadi (G3) terpenuhi.

(G4) Akan ditunjukkan $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ untuk $z \neq y$

Berdasarkan sifat (M2) dan (M3) untuk $z \neq y$ diperoleh:

$G(x, x, y) = d(x, x) + d(x, y) + d(y, x) = 2\,d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \leq d(x, y) + \big(d(y, z) + d(z, x)\big) = G(x, y, z)$.

Maka $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ untuk $z \neq y$.

Jadi (G4) terpenuhi.

(G5) Akan ditunjukkan bahwa Sifat Ketaksamaan Segiempat berlaku pada (R, G)

$G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$

$G(x, a, a) = d(x, a) + d(a, a) + d(a, x) = 2d(x, a)$ sifat (M2)

$G(a, y, z) = d(a, y) + d(y, z) + d(z, a)$

Berdasarkan sifat (M3) $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$ dan $d(z, x) \leq d(z, a) + d(a, x)$

Maka $G(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \leq \big(d(x,a) + d(a,y)\big) + d(y,z) + (d(z,a) + d(a,x) = 2d(x,a) + d(a,y) + d(y,z) + d(z,a)$

$\leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$.

Maka $G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$

Maka Sifat Ketaksamaan Segiempat berlaku pada (R,G)

Maka (G5) terpenuhi.

Karena sifat (G1), (G2), (G3), (G4) dan (G5) terpenuhi, maka $G: R \times R \times R \to R^{+}$ adalah sebuah **Metrik-$\boldsymbol{G}$** dan (R,G) merupakan **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**.

(2) Misalkan (X,d) ruang sebuah **Ruang Metrik**, dan $G: R \times R \times R \to R^{+}$ dengan $G(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$ untuk $x,y,z \in R$. Maka dapat dibuktikan bahwa (R,G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**.

Bukti:

Untuk menunjukkan (R,G) adalah sebuah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, maka akan ditunjukkan bahwa $G: R \times R \times R \to R^{+}$ memenuhi lima sifat yaitu (G1), (G2), (G3), (G4), dan (G5)

(G1) Akan ditunjukkan bahwa $G(x,y,z) = 0$ jika $x = y = z$

Jika $x = y = z$ maka $G(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} = 0$ (Berdasarkan (M1))

Maka $G(x,y,z) = 0$ jika $x = y = z$.

Maka (G1) terpenuhi.

(G2) Akan ditunjukkan bahwa Sifat Simetri berlaku pada (R,G)

$G(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\}$

$G(x,z,y) = \max\{d(x,z), d(z,y), d(y,z)\}$

$G(y,x,z) = \max\{d(y,x), d(x,z), d(z,y)\}$

$G(y,z,x) = \max\{d(y,z), d(z,x), d(x,y)\}$

$G(z,x,y) = \max\{d(z,x), d(x,y), d(y,z)\}$

$G(z,y,x) = \max\{d(z,y), d(y,x), d(x,z)\}$

Berdasarkan sifat (M2) $d(x,y) = d(y,x)$, $d(y,z) = d(z,x)$ dan $d(z,x) = d(x,z)$

Maka diperoleh $G(x,y,z) = G(x,z,y) = G(y,x,z) = G(y,z,x)$

$$= G(z, x, y) = G(z, y, x) .$$

Jadi Sifat Simetri berlaku pada(R, G).

Jadi (G2) terpenuhi.

(G3) Akan ditunjukkan $G(x, x, y) > 0$ untuk $x \neq y$

$G(x, x, y) = \max\{d(x, x), d(x, y), d(y, x)\} = d(x, y)$

Berdasarkan sifat (M1) dan (M2), maka $d(x, y) > 0$, bila $x \neq y$

Maka $G(x, x, y) > 0$, bila $x \neq y$

Jadi (G3) terpenuhi.

(G4) Akan ditunjukkan $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ untuk $z \neq y$

Berdasarkan sifat (M2) dan (M3) untuk $z \neq y$ diperoleh:

$G(x, x, y) = \max\{d(x, x), d(x, y), d(y, x)\} = d(x, y)$

$G(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$

Untuk $z \neq y$ kemungkinan nilai $G(x, y, z)$ adalah:

(i) $\max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} = d(x, y)$

(ii) $\max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} = d(y, z)$

(iii) $\max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} = d(z, x)$

Untuk (i) $G(x, x, y) = d(x, y)$

$G(x, y, z) = d(x, y)$

Maka $d(x, y) \leq d(x, y)$

Maka $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$

Untuk (ii) Karena $z \neq y$ maka $d(y, z) \neq 0$

$G(x, x, y) = d(x, y)$

$G(x, y, z) = d(y, z)$

Maka $d(x, y) \leq d(y, z)$

Maka $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$

Untuk (iii) $G(x, x, y) = d(x, y)$

$G(x, y, z) = d(z, x)$

Maka $d(x, y) \leq d(z, x)$

Maka $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$.

Maka (G4) terpenuhi.

(G5) Akan ditunjukkan bahwa Sifat Ketaksamaan Segiempat berlaku pada (R, G)

$G(x, y, z)$ = max$\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$

$G(x, a, a)$ = max$\{d(x, a), d(a, a), d(a, x)\} = d(x, a)$ sifat (M2)

$G(a, y, z)$ = max$\{d(a, y), d(y, z), d(z, a)\}$

Kemungkinan nilai $G(x, y, z)$ adalah:

(i) max$\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} = d(x, y)$

(ii) max$\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} = d(y, z)$

(iii) max$\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\} = d(z, x)$

Kemungkinan nilai $G(a, y, z)$ adalah:

(iv) max$\{d(a, y), d(y, z), d(z, a)\} = d(a, y)$

(v) max$\{d(a, y), d(y, z), d(z, a)\} = d(y, z)$

(vi) max$\{d(a, y), d(y, z), d(z, a)\} = d(z, a)$

Untuk (i) dan (iv) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$

Diperoleh $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

Untuk (i) dan (v) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$

Maka $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, z)$, karena $d(a, y) \leq d(y, z)$

Diperoleh $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

Untuk (i) dan (vi) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$

Maka $d(x, y) \leq d(x, a) + d(z, a)$, karena $d(a, y) \leq d(z, a)$

Diperoleh $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$.

Untuk (ii) dan (iv) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$

Maka $d(y, z) \leq d(x, a) + d(a, y)$, karena $d(x, y) \leq d(y, z)$

Diperoleh $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

Untuk (ii) dan (v) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$

Maka $d(y, z) \leq d(x, a) + d(y, z)$, karena $d(x, y) \leq d(y, z)$

dan $d(a, y) \leq d(y, z)$

Diperoleh $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

Untuk (ii) dan (vi) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y)$

Maka $d(y,z) \leq d(x,a) + d(a,z)$, karena $d(x,y) \leq d(y,z)$ dan $d(a,y) \leq d(a,z)$

Diperoleh $G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$.

Untuk (iii) dan (iv) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,z)$

Maka $d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,y)$, karena $d(a,z) \leq d(a,y)$

Diperoleh $G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$

Untuk (iii) dan (v) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,z)$

Maka $d(x,z) \leq d(x,a) + d(y,z)$, karena $d(a,z) \leq d(y,z)$

Diperoleh $G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$

Untuk (iii) dan (vi) Berdasarkan sifat (M3)

$d(x,z) \leq d(x,a) + d(a,z)$

Diperoleh $G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$.

Maka (G5) terpenuhi.

Karena sifat (G1), (G2), (G3), (G4) dan (G5) terpenuhi, maka $G: R \times R \times R \to R^+$ adalah sebuah **Metrik-$\boldsymbol{G}$** dan (R, G) merupakan **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**.

(3) Misal $X = \{a, b, c\}$

$G: X \times X \times X \to R^+$

dengan $G(x,y,z) = 0$ jika $x = y = z$

$G(a,b,b) = G(b,a,b) = G(b,b,a) = G(b,a,a)$

$= G(a,b,a) = (a,a,b) = 22,$

$G(a,c,c) = G(c,a,c) = G(c,c,a) = G(c,a,a)$

$= G(a,c,a) = G(a,a,c) = 27,$

$G(b,c,c) = G(c,b,c) = G(c,c,b) = G(c,b,b)$

$= G(b,c,b) = G(b,b,c) = 30,$

$G(a,b,c) = G(a,c,b) = G(b,a,c) = G(b,c,a)$

$= G(c,a,b) = G(c,b,a) = 35,$

Maka dapat dibuktikan bahwa (X, G) adalah sebuah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**.

Bukti:

Untuk menunjukkan (X, G) adalah sebuah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, maka akan ditunjukkan bahwa $G: X \times X \times X \to R^{+}$ memenuhi lima sifat yaitu (G1), (G2), (G3), (G4), dan (G5)

(G1) Akan ditunjukkan jika $x = y = z$ maka $G(x, y, z) = 0$

Jika $x = y = z$, maka $G(x, y, z) = 0$ jika (diketahui)

Maka (G1) terpenuhi.

(G2) Akan ditunjukkan bahwa Sifat Simetri berlaku pada (X, G)

$G(a, b, c) = G(a, c, b) = G(b, a, c) = G(b, c, a) = G(c, a, b)$

$= G(c, b, a) = 35$

Maka $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = G(y, x, z) = G(z, x, y)$

$= G(z, y, x)$

Maka Sifat Simetri berlaku pada (X, G)

Jadi (G2) terpenuhi.

(G3) Akan ditunjukkan $G(x, x, y) > 0$ untuk $x \neq y$.

Untuk $x \neq y$, diperoleh:

$G(a, a, b) = 22 > 0$

$G(a, a, c) = 27 > 0$

$G(b, b, a) = 22 > 0$

$G(b, b, c) = 30 > 0$

$G(c, c, a) = 27 > 0$

$G(c, c, b) = 30 > 0$

Maka $G(x, x, y) > 0$, untuk $x \neq y$

Maka (G3) terpenuhi.

(G4) Akan ditunjukkan $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ untuk $z \neq y$

Untuk $z \neq y$, diperoleh:

$G(a, a, b) = 22 \leq G(a, b, c) = 35$

$G(a, a, b) = 22 \leq G(a, b, a) = 22$

$G(a, a, c) = 27 \leq G(a, c, a) = 27$

$G(a, a, c) = 27 \leq G(a, c, b) = 35$

$G(b, b, a) = 22 \leq G(b, a, c) = 35$

$G(b, b, a) = 22 \leq G(b, a, b) = 22$

$G(b,b,c)$ = 30 ≤ $G(b,c,a)$ = 35

$G(b,b,c)$ = 30 ≤ $G(b,c,b)$ = 30

$G(c,c,a)$ = 27 ≤ $G(c,a,b)$ = 35

$G(c,c,a)$ = 27 ≤ $G(c,a,c)$ = 27

$G(c,c,b)$ = 30 ≤ $G(c,b,a)$ = 35

$G(c,c,b)$ = 30 ≤ $G(c,b,c)$ = 30

Maka $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$ untuk $z \neq y$

Maka (G4) terpenuhi.

(G5) Akan ditunjukkan Sifat Ketaksamaan Segiempat berlaku pada (X,G)

$G(a,b,c)$ = 35 ≤ $G(a,a,a)$ + $G(a,b,c)$ = 35

$G(a,b,c)$ = 35 ≤ $G(a,b,b)$ + $G(b,b,c)$ = 22 + 30 = 52

$G(a,b,c)$ = 35 ≤ $G(a,c,c)$ + $G(c,b,c)$ = 27 + 30 = 57

$G(a,c,b)$ = 35 ≤ $G(a,a,a)$ + $G(a,c,b)$ = 35

$G(a,c,b)$ = 35 ≤ $G(a,b,b)$ + $G(b,c,b)$ = 22 + 30 = 52

$G(a,c,b)$ = 35 ≤ $G(a,c,c)$ + $G(c,c,b)$ = 27 + 30 = 57

$G(b,a,c)$ = 35 ≤ $G(b,a,a)$ + $G(a,a,c)$ = 22 + 27 = 49

$G(b,a,c)$ = 35 ≤ $G(b,b,b)$ + $G(b,a,c)$ = 35

$G(b,a,c)$ = 35 ≤ $G(b,c,c)$ + $G(c,a,c)$ = 30 + 27 = 57

$G(b,c,a)$ = 35 ≤ $G(b,a,a)$ + $G(a,c,a)$ = 22 + 27 = 49

$G(b,c,a)$ = 35 ≤ $G(b,b,b)$ + $G(b,c,a)$ = 35

$G(b,c,a)$ = 35 ≤ $G(b,c,c)$ + $G(c,c,a)$ = 30 + 27 = 57

$G(c,a,b)$ = 35 ≤ $G(c,a,a)$ + $G(a,a,b)$ = 27 + 22 = 49

$G(c,a,b)$ = 35 ≤ $G(c,b,b)$ + $G(b,a,b)$ = 30 + 22 = 52

$G(c,a,b)$ = 35 ≤ $G(c,c,c)$ + $G(c,a,b)$ = 35

$G(c,b,a)$ = 35 ≤ $G(c,a,a)$ + $G(a,b,a)$ = 27 + 22 = 49

$G(c,b,a)$ = 35 ≤ $G(c,b,b)$ + $G(b,b,a)$ = 30 + 22 = 52

$G(c,b,a)$ = 35 ≤ $G(c,c,c)$ + $G(c,b,a)$ = 35

Maka $G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z)$ untuk semua $x,y,z,a \in X$

Maka Sifat Ketaksamaan Segiempat berlaku pada (X,G)

Jadi (G5) terpenuhi.

Karena sifat (G1), (G2), (G3), (G4) dan (G5) terpenuhi, maka $G: X \times X \times X \to R^+$ adalah sebuah **Metrik-$\boldsymbol{G}$** dan (X,G) merupakan **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**.

Definisi 2.5 (Z. Mustafa, H. Obiedat and F. Awawdeh, 2008)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-*G***, maka (X, G) disebut **Simetri** jika $G(x, y, y) = G(x, x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

2.5 Pemetaan Kontraktif dan Pemetaan Ekspansif

2.5.1 Pemetaan Kontraktif

Definisi 2.6 (Suwarno, 2011)

Bila(X, G) adalah **Ruang Metrik-*G*** dan $T: X \to X$ adalah pemetaan. Maka T disebut **Pemetaan Kontraktif** jika terdapat konstanta $k, 0 \leq k < 1$ sehingga $G(T(x), T(y), T(z)) \leq kG(x, y, z)$.

Secara geometri, hal ini berarti bahwa jarak antara peta dari x, y dan z, jaraknya lebih dekat dari jarak antara x, y dan z itu sendiri.

Contoh:

Misal pada **Ruang Metrik-*G*** (X, G), didefinisikan

pemetaan $G(x, y, z) = \max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\}$

dan $T: (X, G) \to (X, G)$

dengan $T(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x & ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

untuk $X = [0,1]$

Maka T adalah Pemetaan Kontraktif pada **Ruang Metrik-*G*** (X, G).

2.5.1 Pemetaan Ekspansif

Definisi 2.7 (Z. Mustafa, F. Awawdeh and W. Shatanawi, 2010)

Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik-*G*** dan $T: R \to R$ adalah pemetaan. Maka T disebut **Pemetaan Ekspansif** jika terdapat konstanta $a, a \geq 1$ sedemikian hingga $G(T(x), T(y), T(z)) \geq aG(x, y, z)$.

Contoh:

Misal pada **Ruang Metrik-*G*** (R, G), didefinisikan

Pemetaan $G(x, y, z) = \max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\}$

dan $T: (R, G) \to (R, G)$

dengan $T(x) = \begin{cases} 5x & ; x \leq 3 \\ 5x + 2 & ; x > 3 \end{cases}$

Maka T adalah Pemetaan Ekspansif pada **Ruang Metrik-*G*** (R, G).

2.6 Titik Tetap

Definisi 2.8 (Suwarno, 2011)

Pemetaan $T: X \rightarrow X$ disebut mempunyai **Titik Tetap** x jika $T(x) = x$.

Contoh:

$T(x) = x^2 - 3x + 4$,

Maka 2 adalah Titik Tetap dari $T(x)$ karena $T(2) = 2$.

BAB 3
PEMBAHASAN

3.1 Sifat-Sifat Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$ Lengkap

Berikut akan dijabarkan sifat-sifat dari **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap

Proposisi 3.1.1 (Z. Mustafa and B. Sims, 2006)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, maka untuk semua $x, y, z, a \in X$ berlaku:

(1) Jika $G(x, y, z) = 0$ maka $x = y = z$

(2) $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$

(3) $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$

(4) $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$

(5) $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}(G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z))$

(6) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a)$

(7) $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq \max\ \{G(a, z, z), G(z, a, a)\}$

(8) $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq G(x, a, z)$

(9) $|G(x, y, z) - G(y, z, z)| \leq \max\ \{G(x, z, z), G(z, x, x)\}$

(10) $|G(x, y, y) - G(y, x, x)| \leq \max\ \{G(y, x, x), G(x, y, y)\}$.

Bukti:

(1) Akan dibuktikan jika $G(x, y, z) = 0$ maka $x = y = z$.

Bukti:

Misalkan $x = y = z$ tidak benar.

Maka kemungkinan yang ada adalah:

(i) $x \neq y,\ x = z,$ dan $y \neq z$

(ii) $x \neq y,\ x \neq z,$ dan $y = z$

(iii) $x \neq y,\ x \neq z,$ dan $y \neq z$

(iv) $x = y,\ x \neq z,$ dan $y \neq z$

Jika (i) atau (iii) yang terjadi, maka

berdasarkan sifat (G3) $x \neq y \rightarrow G(x, x, y) > 0$

berdasarkan sifat (G4) $y \neq z \rightarrow G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$

Jadi $G(x, y, z) > 0$

Ini bertentangan dengan $G(x, y, z) = 0$

Maka (i) dan (iii) tidak mungkin terjadi.

Jika (ii) yang terjadi, maka

berdasarkan sifat (G3) $x \neq y \rightarrow G(y, y, x) > 0$

berdasarkan sifat (G4) $x \neq z \rightarrow G(y, y, x) \leq G(y, x, z)$

berdasarkan sifat (G2) $G(y, x, z) = G(x, y, z)$

Maka $G(x, y, z) > 0$

Ini bertentangan dengan $G(x, y, z) = 0$

Maka (ii) tidak mungkin terjadi.

Jika (iv) yang terjadi, maka

berdasarkan sifat (G3) $x \neq z \rightarrow G(x, x, z) > 0$

berdasarkan sifat (G4) $y \neq z \rightarrow G(x, x, z) \leq G(x, z, y)$

berdasarkan sifat (G2) $G(x, z, y) = G(x, y, z)$

Maka $G(x, y, z) > 0$

Ini bertentangan dengan $G(x, y, z) = 0$

Maka (iv) tidak mungkin terjadi.

Jadi terbukti bahwa yang mungkin terjadi adalah $x = y = z$.

Terbukti.

(2) Akan dibuktikan $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$

Bukti:

Berdasarkan sifat (G5) untuk sembarang x, y, z dan a di X

berlaku $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

Maka dengan mengambil x sebagai a dan y, y sebagai x, dan z tetap,

diperoleh: $G(y, x, z) \leq G(y, x, x) + G(x, x, z)$

Dan berdasarkan sifat (G2) diperoleh: $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$.

Terbukti.

(3) Akan dibuktikan $G(x, y, y) = 2G(y, x, x)$

Bukti:

Berdasarkan sifat (G5) untuk sembarang x, y, z dan a di X berlaku

$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

Maka dengan mengambil y sebagai z dan x, dan x sebagai y dan a,

diperoleh: $G(y, x, y) \leq G(y, x, x) + G(x, x, y)$

Dan berdasarkan sifat (G2) diperoleh: $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$.

Terbukti.

(4) Akan dibuktikan $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$

Bukti:

Berdasarkan sifat (G5) untuk sembarang x, y, z dan a di X

berlaku $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

Sedangkan dari (G2) $G(x, a, a) = G(a, a, x)$

Dan berdasarkan sifat (G4) diperoleh: $G(a, a, x) \leq G(a, x, z)$ untuk $z \neq x$

Maka $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$ untuk $z \neq x$.

Bila $z = x$, $G(x, y, z) \leq G(x, a, x) + G(a, y, x)$.

Terbukti.

(5) Akan dibuktikan $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}\left(G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z)\right)$

Bukti:

Berdasarkan sifat (4) diperoleh:

$G(x, y, z) \leq G(a, y, z) + G(x, a, z)$

$G(y, z, x) \leq G(a, z, x) + G(y, a, x)$

$G(z, x, y) \leq G(a, x, y) + G(z, a, y)$

Berdasarkan sifat (G2) diperoleh:

$G(y, a, x) = G(a, x, y) = G(x, y, a)$

$G(a, z, x) = G(x, a, z)$ dan $G(a, y, z)$

Maka $3G(x, y, z) \leq 2(G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z))$

Jadi $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}\left(G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z)\right)$.

Terbukti.

(6) Akan dibuktikan $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a)$

Bukti:

Berdasarkan sifat (G5) untuk sembarang x, y, z dan a di X

berlaku $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

Berdasarkan sifat (G2) diperoleh: $G(a, y, z) = G(y, a, z)$

Berdasarkan sifat (G5) diperoleh: $G(y, a, z) \leq G(y, a, a) + G(a, a, z)$

Berdasarkan sifat (G2) diperoleh: $G(a, a, z) = G(z, a, a)$

Maka $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a)$

Terbukti.

(7) Akan dibuktikan $|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq \max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}$

Bukti:

Berdasarkan sifat nilai mutlak yang akan dibuktikan akan terbukti bila dapat dibuktikan:

$$-\max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\} \leq G(x,y,z) - G(x,y,a)$$
$$\leq \max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}$$

Atau $G(x,y,a) - \max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\} \leq G(x,y,z)$
$$\leq G(x,y,a) + \max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}$$

Sedangkan disini terdapat 2 kasus:

(i) $\max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\} = G(a,z,z)$

(ii) $\max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\} = G(z,a,a)$

Untuk kasus (i) harus dibuktikan:

(ia) $G(x,y,z) \leq G(x,y,a) + G(a,z,z)$ dan

(ib) $G(x,y,a) \leq G(x,y,z) + G(a,z,z)$

Untuk (ia) harus dibuktikan $G(x,y,z) \leq G(x,y,a) + G(z,a,a)$

Berdasarkan sifat (G5) $G(z,x,y) \leq G(z,a,a) + G(a,x,y)$

Berdasarkan sifat (G2) dapat diperoleh: $G(x,y,z) \leq G(z,a,a) + G(x,y,a)$

Sedangkan untuk kasus (i) $G(z,a,a) \leq G(a,z,z)$

Jadi $G(x,y,z) \leq G(a,z,z) + G(x,y,a)$ atau

$(x,y,z) \leq G(x,y,a) + G(a,z,z)$

Jadi (ia) terbukti.

Untuk (ib) gunakan sifat (G5) $G(a,x,y) \leq G(a,z,z) + G(z,x,y)$

Maka berdasarkan sifat (G2) diperoleh: $G(x,y,a) \leq G(a,z,z) + G(x,y,z)$

atau $G(x,y,a) \leq G(x,y,z) + G(a,y,z)$

Jadi (ib) terbukti.

Dengan demikian kasus (i) telah terbukti.

Untuk kasus (ii) harus dibuktikan:

(iia) $G(x,y,z) \leq G(x,y,a) + G(z,a,a)$ dan

(iib) $G(x,y,a) \leq G(x,y,z) + G(z,a,a)$

Untuk (iia) gunakan sifat (G5) pula $G(z,x,y) \leq G(z,a,a) + G(a,x,y)$

Maka berdasarkan sifat (G2) diperoleh: $G(x,y,z) \leq G(x,y,a) + G(z,a,a)$

Jadi (iia) terbukti.

Untuk (iib), gunakan sifat (G5) pula, $G(a,x,y) \leq G(a,z,z) + G(z,x,y)$

Maka berdasarkan sifat (G2) diperoleh: $G(x,y,a) \leq G(x,y,z) + G(a,z,z)$

Sedangkan pada kasus (ii), berlaku $G(a,z,z) \leq G(z,a,a)$

Maka $G(x,y,a) \leq G(x,y,z) + G(z,a,a)$

Maka (iib) terbukti.

Dengan demikian kasus (ii) juga telah terbukti.

(8) Akan dibuktikan $|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq G(x,a,z)$

Bukti:

Berdasarkan (7) $|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq \max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}$

Berdasarkan sifat (G4) diperoleh:

$G(a,z,z) = G(z,z,a) \leq G(z,a,x)$ untuk $x \neq a$

$G(z,a,a) = G(a,a,z) \leq G(a,z,x)$ untuk $z \neq x$

Maka $\max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\} \leq G(x,a,z)$

Maka $|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq G(x,a,z)$

Terbukti.

(9) Akan dibuktikan $|G(x,y,z) - G(y,z,z)| \leq \max\{G(x,z,z), G(z,x,x)\}$

Bukti:

Berdasarkan (7) $|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq \max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}$

Dengan mengganti x dengan y, y dengan z, z dengan x, dan a dengan z,

maka diperoleh: $|G(y,z,x) - G(y,z,z)| \leq \max\{G(z,x,x), G(x,z,z)\}$

Jadi $|G(x,y,z) - G(y,z,z)| \leq \max\{G(x,z,z), G(z,x,x)\}$

Terbukti.

(10) Akan dibuktikan $|G(x,y,y) - G(y,x,x)| \leq \max\{G(y,x,x), G(x,y,y)\}$

Bukti:

Berdasarkan (7) $|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq \max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}$

Dengan mengganti z dengan y, dan a dengan x,

maka diperoleh: $|G(x,y,y) - G(x,y,x)| \leq \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\}$

atau $|G(x,y,y) - G(y,x,x)| \leq \max\{G(y,x,x), G(x,y,y)\}$

Terbukti.

Definisi 3.1.2 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, maka barisan $(x_n) \subseteq X$ disebut **G-Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in N$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$, untuk setiap $n, m, l \geq n_0$ jika $lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$.

Definisi 3.1.3 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik$-\boldsymbol{G}$**, misal (x_n) adalah barisan dari titik-titik pada X, (x_n) dikatakan **G-konvergen** ke x jika $lim_{n,m\to\infty} G(x, x_n, x_m) = 0$ artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in N$ sedemikian hingga $G(x, x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq n_0$. Selanjutnya x disebut **titik limit** dari barisan (x_n) ditulis $x_n \overset{(G)}{\to} x$.

Proposisi 3.1.4 (Z. Mustafa and B. Sims, 2006)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, maka pernyataan berikut equivalen;

(1) (x_n) adalah G-konvergen ke x

(2) $lim_{n\to\infty} G(x_n, x_n, x) = 0$

(3) $lim_{n\to\infty} G(x_n, x, x) = 0$

Bukti:

$(1) \longrightarrow (2)$ Dari definisi 3.1.2 karena (x_n) adalah G-konvergen ke x maka $lim_{n,m\to\infty} G(x, x_n, x_m) = 0$ maka $lim_{n\to\infty} G(x_n, x_n, x) = 0$

$(2) \longrightarrow (3)$ dengan menggunakan sifat (G4) maka $lim_{n\to\infty} G(x_n, x, x) = 0$

$(3) \longrightarrow (1)$ karena $lim_{n\to\infty} G(x_n, x, x) = 0$ maka (x_n) adalah G-konvergen ke x.

Terbukti.

Proposisi 3.1.5 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$,** maka pernyataan berikut equivalen;

(1) Barisan(x_n) adalah G-Cauchy.

(2) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in N$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq N$.

Bukti:

$(1) \to (2)$Barisan (x_n) adalah G-Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m, l \geq n_0$ jika $lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$. Menurut (G3) $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$

Definisi 3.1.6 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X, G) dan (X', G') adalah **Ruang Metrik-*G*** dan misal $f: (X, G) \to (X', G')$ suatu pemetaan, maka f dikatakan **G-kontinu** pada titik $a \in X$ jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $G(a, x, y) < \delta$ $\forall x, y \in X$, mengakibatkan $G'(f(a), f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Pemetaan f dikatakan G-kontinu pada X jika dan hanya jika G-kontinu pada setiap $a \in X$.

Teorema 3.1.7

Suatu pemetaan kontraktif pada **Ruang Metrik-*G*** adalah pemetaan kontinu.

Bukti:

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-*G***

Misal $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan kontraktif.

Maka untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$G(T(x), T(y), T(z)) \leq kG(x, y, z)$ untuk $0 \leq k < 1$

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$

Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$

Jika $G(x, y, z) < \frac{\varepsilon}{k} = \delta$ mak $G\big(T(x), T(y), T(z)\big) \leq kG(x, y, z) = k.\frac{\varepsilon}{k} \leq \varepsilon$

Jadi jika $G(x, y, z) < \delta$ maka $G\big(T(x), T(y), T(z)\big) \leq \varepsilon$.

Maka T kontinu.

Terbukti.

Proposisi 3.1.8 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X, G) dan (X', G') adalah **Ruang Metrik-*G*** dan misal $f: X \to X'$ adalah G-kontinu pada titik $x \in X$ jika dan hanya jika kapanpun (x_n) adalah G-konvergen ke x, maka $\big(f(x_n)\big)$ adalah G-konvergen ke $f(x)$.

Proposisi 3.1.9 (Z. Mustafa and B. Sims, 2006)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$**, maka pemetaan $G(x, y, z)$ adalah kontinu bersama (Joinly continuous) di semua 3 variabel.

<u>Bukti:</u>

Misal $(x_k), (y_m), (z_n)$ adalah G-konvergen ke x, y dan z secara bersamaan (respectively)

Berdasarkan sifat (G5) diperoleh:

$G(x, y, z) \leq G(y, y_m, y_m) + G(y_m, x, z)$

$G(z, x, y_m) \leq G(x, x_k, x_k) + G(x_k, y_m, z)$

dan $G(z, x_k, y_m) \leq G(z, z_n, z_n) + G(z_n, y_m, x_k)$,

Jadi $G(x, y, z) - G(x_k, y_m, z_n) \leq G(y, y_m, y_m) + G(x, x_k, x_k) + G(z, z_n, z_n)$

Dan $G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z) \leq G(x_k, x, x) + G(y_m, y, y) + G(z_n, z, z)$

Dengan mengkombinasi (3) dari Proposisi 3.1.5 , diperoleh

$|G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z)| \leq 2(G(x, x_k, x_k) + G(y, y_m, y_m) + G(z, z_n, z_n))$

Jadi $G(x_k, y_m, z_n) \to G(x, y, z)$sepanjang $k, m, n \to \infty$ (proposisi 3.1.8)

Terbukti.

Definisi 3.1.10 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Sebuah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** (X, G) dikatakan **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$ lengkap** jika setiap barisan G-Cauchy di (X, G) adalah G-konvergen di (X, G).

3.2 Ketunggalan Titik Tetap Untuk Pemetaan Pada Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$ Lengkap

<u>Teorema 3.2.1</u> (Z. Mustafa,F. Awawdeh and W. Shatanawi, 2010)

Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik$-\boldsymbol{G}$** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq kG(x, y, z) \qquad (3.2.1)$$

dengan $k \in [0, 1)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u .

Bukti:

Misal T memenuhi syarat (3.2.1) dan misal $x_0 \in X$ adalah sebarang titik,untuk $n = 1,2,\dots$ didefinisikan barisan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.1)

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_n) \qquad (3.2.2)$$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \dots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq k\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^2\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq k\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^3\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\right) \leq k\, G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\, G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.3)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.3) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

⋮

dst

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3})$
$+ \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq k^n(x_0, x_1, x_1) + k^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + k^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$
$\leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1)$.

Karena $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ untuk $0 < k < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap dari (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) merupakan G-konvergen ke u.

Misalkan $T(u) \neq u$ maka:

$G(x_n, T(u), T(u)) \leq kG(x_{n-1}, u, u)$

dengan mengambil limit sepanjang $n \to \infty$ dan kenyataan bahwa pemetaan G kontinu pada semua variabelnya, maka diperoleh: $G(u, T(u), T(u)) \leq kG(u, u, u)$.

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < 1$. Maka $u = T(u)$.

Jadi u adalah titik tetap untuk pemetaan T.

Untuk membuktikan ketunggalan, Andaikan terdapat v dengan $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$ maka menurut (3.2.1) mengakibatkan $G(u,v,v) \leq kG(u,v,v)$

Jadi $G(u,v,v) \leq kG(u,v,v)$mengakibatkan $u = v$ jika $0 \leq k < 1$.

Jadi u tunggal.

Untuk melihat bahwa T adalah G-kontinu pada u,

Misal $(y_n) \subseteq X$ barisan, sedemikian hingga lim $(y_n) = u$, maka:

$G\big(T(y_n), T(u), T(y_n)\big) \leq k\ G(y_n, u, y_n)$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh

$$G\big(T(y_n), u, T(y_n)\big) \leq k\ G(y_n, u, y_n) \tag{3.2.4}$$

diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(T(y_n), u, T(y_n)) = 0$

Sesuai proposisi(3.1.4) maka barisan $\big(T(y_n)\big)$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

Teorema Akibat 3.2.2 (Penelitian)

Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq kG(x, y, z) \tag{3.2.5}$$

dengan $k \in [0, 1)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T^m G-kontinu pada u .

Bukti:

Dari teorema 3.2.1, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T\big(T^m(u)\big) = T^{m+1}(u) = T^m\big(T(u)\big)$. Jadi $T(u)$ adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

Teorema 3.2.3 (Z. Mustafa,F. Awawdeh and W. Shatanawi, 2010)
Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:
Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G(T(x), T(y), T(y) \leq kG(x, y, y) \tag{3.2.6}$$

dengan $k \in [0, 1)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u .

Bukti:

Misal T memenuhi syarat (3.2.6) dan misal $x_0 \in X$ adalah sebarang titik, untuk $n = 1,2, \ldots$ didefinisikan barisan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$
$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$
$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.6)

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_n, x_n) \tag{3.2.7}$$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \ldots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq k\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq k\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^3\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\right) \leq k\, G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^n\, G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.8)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.8) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3})$
$+ G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

⋮

dst

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3})$
$+ \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq k^n(x_0, x_1, x_1) + k^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + k^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$
$\leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0, x_1, x_1).$

Karena $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ untuk $0 < k < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap dari (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) merupakan G-konvergen ke u.

Misalkan $T(u) \neq u$ maka:

$G\big(x_n, T(u), T(u)\big) \leq k\, \mathrm{G}(x_{n-1}, u, u)$

dengan mengambil limit sepanjang $n \to \infty$ dan kenyataan bahwa pemetaan G kontinu pada semua variabelnya, maka diperoleh: $G\big(u, T(u), T(u)\big) \leq kG(u, u, u)$.

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < 1$. Maka $u = T(u)$.

Jadi u adalah titik tetap untuk pemetaan T.

Untuk membuktikan ketunggalan, Andaikan terdapat v dengan $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$ maka menurut (3.2.6) mengakibatkan $G(u, v, v) \leq kG(u, v, v)$

Jadi $G(u, v, v) \leq kG(u, v, v)$ mengakibatkan $u = v$ jika $0 \leq k < 1$.

Jadi u tunggal.

Untuk melihat bahwa T adalah G-kontinu pada u,

Misal $(y_n) \subseteq X$ barisan, sedemikian hingga lim $(y_n) = u$, maka:

$G\big(T(y_n), T(u), T(y_n)\big) \leq k\; G(y_n, u, y_n)$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh:

$$G\big(T(y_n), u, T(y_n)\big) \leq k\; G(y_n, u, y_n) \qquad (3.2.9)$$

diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(T(y_n), u, T(y_n)) = 0$

Sesuai proposisi(3.1.4) maka barisan $\big(T(y_n)\big)$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

<u>Teorema Akibat 3.2.4</u> (Penelitian)

Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(y)) \leq kG(x, y, y) \qquad (3.2.10)$$

dengan $k \in [0, 1)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T^m adalah G-kontinu pada u .

<u>Bukti</u>:

Dari teorema 3.2.3, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T\big(T^m(u)\big) = T^{m+1}(u) =$

$T^m(T(u))$. Jadi $T(u)$ adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

Teorema 3.2.5 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik-G** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x, y, z), G(x, T(x), T(x)), \\ G(y, T(y), T(y)), \\ G(z, T(z), T(z)), G(x, T(y), T(y)), \\ G(y, T(z), T(z)), G(z, T(x), T(x)) \end{array} \right\} \qquad (3.2.11)$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u .

Bukti:

Misal T memenuhi syarat (3.2.11) dan misal $x_0 \in X$ adalah sebarang titik, untuk $n = 1,2, \ldots$ didefinisikan barisan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.11)

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, x_n, x_n), \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, x_n, x_n) \end{array} \right\}$$

Maka

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq$

$k\, max\{G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k$ max$\{G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_n, x_n)\}$(3.2.12)

Berdasarkan sifat (G5), $(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

Maka (3.2.12) menjadi

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_n, x_n)\}$$

Sedangkan $G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\, \{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Ini mengakibatkan $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_n, x_n)$ (3.2.13)

Misal $q = \frac{k}{1-k}$, karena $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$,

$0 \leq k < \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{2} < 1 - k \leq 1 - 0$

$\frac{1}{2} < 1 - k \leq 1$

Karena $0 \leq k < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2} < 1 - k \leq 1$

Maka $\frac{0}{1} < \frac{k}{1-k} < \frac{1/2}{1/2}$

Maka $0 < \frac{k}{1-k} < 1$

maka $0 < q < 1$.

Dan pertaksamaan (3.2.14) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q\, G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \ldots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^2\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq q\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^3\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\right) \leq q\, G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n\, G\big(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\big)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.15)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.15) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

⋮

dst

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka
$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\quad + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq q^n(x_0, x_1, x_1) + q^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + q^{m-1}(x_0, x_1, x_1) \end{aligned}$$

Jadi
$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\quad + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1). \end{aligned}$$

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ untuk $0 < q < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap dari (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) merupakan G-konvergen ke u.

Misalkan $T(u) \neq u$ maka:

$$G\big(x_n, T(u), T(u)\big) \le k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x_{n-1}, u, u), G(x_{n-1}, x_n, x_n), G\big(u, T(u), T(u)\big) \\ G\big(u, T(u), T(u)\big), G\big(x_{n-1}, T(u), T(u)\big), \\ G\big(u, T(u), T(u)\big), G(u, x_n, x_n) \end{array} \right\}$$

Maka

$$G\big(x_n, T(u), T(u)\big) \le k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x_{n-1}, u, u), G(x_{n-1}, x_n, x_n), G\big(u, T(u), T(u)\big) \\ G\big(x_{n-1}, T(u), T(u)\big), G(u, x_n, x_n) \end{array} \right\}$$

dengan mengambil limit sepanjang $n \to \infty$ dan kenyataan bahwa pemetaan G kontinu pada semua variabelnya, maka diperoleh:

$$G\big(u, T(u), T(u)\big) \le k \max \left\{ \begin{array}{c} G(u, u, u), G(u, u, u), G\big(u, T(u), T(u)\big) \\ G\big(u, T(u), T(u)\big), G(u, u, u) \end{array} \right\}$$

Maka $G\big(u, T(u), T(u)\big) \le kG(u, T(u), T(u))$.

Ini kontradiksi jika $0 \le k < \frac{1}{2}$. Maka $u = T(u)$.

Jadi u adalah titik tetap untuk pemetaan T.

Untuk membuktikan ketunggalan, andaikan terdapat v dengan $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$ maka menurut (3.2.11) mengakibatkan $G(u, v, v) \le$

$$k \max \left\{ \begin{array}{c} G(u, v, v), G(u, u, u), G(v, v, v), \\ G(v, v, v), G(u, v, v), \\ G(v, v, v), G(v, u, u), \end{array} \right\}$$

Maka $G(u, v, v) \le k \max\{G(u, v, v), G(v, u, u)\}$

maka $G(u, v, v) \le kG(v, u, u)$.

dengan cara yang sama diperoleh $G(v, u, u) \le kG(u, v, v)$

Jadi $G(u, v, v) \le k^2 G(u, v, v)$mengakibatkan $u = v$ jika $0 \le k < \frac{1}{2}$.

Jadi u tunggal.

Untuk melihat bahwa T adalah G-kontinu pada u,

Misal $(y_n) \subseteq X$ barisan, sedemikian hingga $\lim\, (y_n) = u$, maka:

$$G(T(y_n),T(u),T(y_n)) \le k \max \left\{ \begin{matrix} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(u,T(u),T(u)), G(y_n,T(y_n),T(y_n)) \\ G(y_n,T(u),T(u)), \\ G(u,T(y_n),T(y_n)), G(y_n,T(y_n),T(y_n)) \end{matrix} \right\}$$

Maka

$$G(T(y_n),T(u),T(y_n)) \le k \max \left\{ \begin{matrix} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(u,T(u),T(u)), G(y_n,T(u),T(u)), \\ G(u,T(y_n),T(y_n)) \end{matrix} \right\}$$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh

$$G(T(y_n),u,T(y_n)) \le k \max \left\{ \begin{matrix} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(u,u,u), G(y_n,u,u), \\ G(u,T(y_n),T(y_n)) \end{matrix} \right\}$$

Maka $G(T(y_n),u,T(y_n)) \le k \max \left\{ \begin{matrix} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(y_n,u,u), G(u,T(y_n),T(y_n)) \end{matrix} \right\}$

Menurut sifat (G2) $G(T(y_n),u,T(y_n)) = G(u,T(y_n),T(y_n))$

Maka $G(T(y_n),u,T(y_n)) \le k \max \left\{ \begin{matrix} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(y_n,u,u) \end{matrix} \right\}$

Berdasarkan (G5) $G(y_n,T(y_n),T(y_n)) \le G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n))$

Maka $G(T(y_n),u,T(y_n)) \le k \max \left\{ \begin{matrix} G(y_n,u,y_n), \\ G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n)) \\ G(y_n,u,u) \end{matrix} \right\}$

Sedangkan $G(y_n,u,u) \le G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n))$

Maka $G(T(y_n),u,T(y_n)) \le k \max \left\{ \begin{matrix} G(y_n,u,y_n), \\ G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n)) \end{matrix} \right\}$ (3.2.16)

Dan (3.2.16) mengakibatkan beberapa kasus:

(1) $G(T(y_n),u,T(y_n)) \le kG(y_n,u,y_n)$,

(2) $G(T(y_n),u,T(y_n) \le kG(y_n,u,u)$,

(3) $G(T(y_n),u,T(y_n)) \le qG(y_n,u,u)$

Untuk masing-masing kasus diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(T(y_n),u,T(y_n)) = 0$

Sesuai proposisi(3.1.4) maka barisan $(T(y_n))$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

Teorema Akibat 3.2.6 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X,G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G\big(T^m(x), T^m(y), T^m(z)\big) \leq$$

$$kmax \left\{ \begin{matrix} G(x,y,z), G\big(x, T^m(x), T^m(x)\big) \\ G\big(y, T^m(y), T^m(y)\big), \\ G\big(z, T^m(z), T^m(z)\big), G\big(x, \ T^m(y), T^m(y)\big), \\ G\big(y, T^m(z), T^m(z)\big), G\big(z, T^m(x), T^m(x)\big) \end{matrix} \right\} \tag{3.2.17}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T^m G-kontinu pada u.

Bukti:

Dari teorema 3.2.5, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T\big(T^m(u)\big) = T^{m+1}(u) = T^m\big(T(u)\big)$. Jadi $T(u)$adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

Teorema 3.2.7 (Penelitian)

Misal(X,G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G\big(T(x), T(y), T(z)\big) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} G(x,y,z), G\big(x, T(x), T(x)\big), \\ G\big(y, T(y), T(y)\big), \\ G\big(z, T(z), T(z)\big), G\big(x, T(z), T(z)\big), \\ G\big(y, T(x), T(x)\big), G\big(z, T(y), T(y)\big). \end{matrix} \right\} \tag{3.2.18}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u .

Bukti:

Misal T memenuhi kondisi (3.2.18) dan misal $x_0 \in X$ adalah sebarang titik, dan didefinisikan barisan (x_n)dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.18)

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, x_n, x_n), \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), \\ G(x_n, x_n, x_n), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \end{array} \right\}$$

Maka

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq$

$k\, max\{G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max\{G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_n, x_n)\}$(3.2.19)

Menurut (G5), $G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

Maka (3.2.19) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

$\leq k \max\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_n, x_n)\}$

Sedangkan $G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Ini mengakibatkan $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_n, x_n)$ (3.2.20)

Misal $q = \frac{k}{1-k}$, karena $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$,

$0 \leq k < \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{2} < 1 - k \leq 1 - 0$

$\frac{1}{2} < 1 - k \leq 1$

Karena $0 \leq k < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2} < 1 - k \leq 1$

Maka $\frac{0}{1} < \frac{k}{1-k} < \frac{1/2}{1/2}$

Maka $0 < \frac{k}{1-k} < 1$

maka $0 < q < 1$.

Dan pertaksamaan (3.2.20) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q\ G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \dots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q\ G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^2\ G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq q\ G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^3\ G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\right) \leq q\ G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n\ G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.21)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.21) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$\vdots$

dst

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

$$\leq q^n(x_0, x_1, x_1) + q^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + q^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$

$$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$$

$$\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$$

$$\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1).$$

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ untuk $0 < q < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap dari (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) merupakan G-konvergen ke u.

Misalkan $T(u) \neq u$ maka:

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(x_{n-1}, u, u), G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(u, T(u), T(u)) \\ G(u, T(u), T(u)), G(x_{n-1}, T(u), T(u)), \\ G(u, x_n, x_n), G(u, T(u), T(u)) \end{Bmatrix}$$

Maka

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(x_{n-1}, u, u), G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(u, T(u), T(u)) \\ G(x_{n-1}, T(u), T(u)), G(u, x_n, x_n) \end{Bmatrix}$$

dengan mengambil limit sepanjang $n \to \infty$ dan kenyataan bahwa pemetaan G kontinu pada semua variabelnya, maka diperoleh:

$$G(u, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(u, u, u), G(u, u, u), G(u, T(u), T(u)) \\ G(u, T(u), T(u)), G(u, u, u) \end{Bmatrix}$$

Maka $G(u, T(u), T(u)) \leq kG(u, T(u), T(u))$.

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{2}$. Maka $u = T(u)$.

Jadi u adalah titik tetap untuk pemetaan T.

Untuk membuktikan ketunggalan, Andaikan terdapat v dengan $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$ maka menurut (3.2.18) diperoleh:

$$G(u,v,v) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(u,v,v), G(u,u,u), G(v,v,v), \\ G(v,v,v), G(u,v,v), \\ G(v,u,u), G(v,v,v) \end{Bmatrix}$$

Maka $G(u,v,v) \leq k \max\{G(u,v,v), G(v,u,u)\}$

Maka $G(u,v,v) \leq kG(v,u,u)$.

dengan cara yang sama diperoleh $G(v,u,u) \leq kG(u,v,v)$

Jadi $G(u,v,v) \leq k^2 G(u,v,v)$mengakibatkan $u = v$ jika $0 \leq k < \frac{1}{2}$.

Jadi u tunggal.

Untuk melihat bahwa T adalah G-kontinu pada u,

Misal $(y_n) \subseteq X$ barisan, sedemikian hingga lim $(y_n) = u$, maka:

$$G(T(y_n), T(u), T(y_n)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(y_n, u, y_n), G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \\ G(u, T(u), T(u)), G(y_n, T(y_n), T(y_n)) \\ G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \\ G(u, T(y_n), T(y_n)), G(y_n, T(u), T(u)) \end{Bmatrix}$$

Maka

$$G(T(y_n), T(u), T(y_n)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(y_n, u, y_n), G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \\ G(u, T(u), T(u)), G(u, T(y_n), T(y_n)), \\ G(y_n, T(u), T(u)), \end{Bmatrix}$$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh

$$G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(y_n, u, y_n), G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \\ G(u,u,u), G(u, T(y_n), T(y_n)) \\ G(y_n, u, u) \end{Bmatrix}$$

Maka $G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(y_n, u, y_n), G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \\ G(u, T(y_n), T(y_n)), G(y_n, u, u) \end{Bmatrix}$

Menurut sifat (G2) $G(T(y_n), u, T(y_n)) = G(u, T(y_n), T(y_n))$

Maka $G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(y_n, u, y_n), G(y_n, T(y_n), T(y_n)), \\ G(y_n, u, u) \end{Bmatrix}$

Berdasarkan (G5) $G(y_n, T(y_n), T(y_n)) \leq G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n))$

Maka $G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(y_n, u, y_n), \\ G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n)) \\ G(y_n, u, u) \end{Bmatrix}$

Sedangkan $G(y_n, u, u) \leq G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n))$

Maka $G\big(T(y_n), u, T(y_n)\big) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(y_n, u, y_n), \\ G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n)) \end{Bmatrix}$ (3.2.22)

Dan (3.2.22) mengakibatkan beberapa kasus:

(1) $G\big(T(y_n), u, T(y_n)\big) \leq kG(y_n, u, y_n)$,

(2) $G(T(y_n), u, T(y_n) \leq kG(y_n, u, u)$,

(3) $G(T(y_n), u, T(y_n)) \leq qG(y_n, u, u)$

Untuk masing-masing kasus diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(T(y_n), u, T(y_n)) = 0$

Sesuai proposisi(3.1.4) maka barisan $\big(T(y_n)\big)$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

Teorema Akibat 3.2.8 (Penelitian)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G\big(T^m(x), T^m(y), T^m(z)\big) \leq$$

$$kmax \begin{Bmatrix} G(x, y, z), G\big(x, T^m(x), T^m(x)\big) \\ G\big(y, T^m(y), T^m(y)\big), G\big(z, T^m(z), T^m(z)\big), \\ G\big(x,\ T^m(z), T^m(z)\big), G\big(y, T^m(x), T^m(x)\big), \\ G\big(z, T^m(y), T^m(y)\big) \end{Bmatrix} \quad (3.2.23)$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T^m G-kontinu pada u.

Bukti:

Dari teorema 3.2.7, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T\big(T^m(u)\big) = T^{m+1}(u) = T^m\big(T(u)\big)$. Jadi $T(u)$adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

Teorema 3.2.9 (Penelitian)

Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G\big(T(x), T(y), T(z)\big) \leq$$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} G(x,y,z), G\big(x,T(x),T(x)\big), G\big(y,T(y),T(y)\big), \\ G\big(z,T(z),T(z)\big), G\big(x,T(y),T(y)\big), \\ G\big(y,T(z),T(z)\big), G\big(z,T(x),T(x)\big), \\ G(x,T(z),T(z), G(y,T(x),T(x), G(z,T(y),T(y)) \end{matrix} \right\} \qquad (3.2.24)$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u .

Bukti:

Misal T memenuhi kondisi (3.2.24) dan misal $x_0 \in X$ adalah sebarang titik, dan didefinisikan barisan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.24)

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, x_n, x_n), \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, x_n, x_n) \\ G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, x_n, x_n) \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \end{matrix} \right\}$$

Maka

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq$

$k \max\{G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \{G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_n, x_n)\}$ (3.2.25)

Menurut (G5), $G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Maka (3.2.25) menjadi

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$$
$$\leq k \max \{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n-1}, x_n, x_n)\}$$

Sedangkan

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\,\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Ini mengakibatkan $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_n, x_n)$ (3.2.26)

Misal $q = \frac{k}{1-k}$, karena $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$,

$0 \leq k < \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{2} < 1 - k \leq 1 - 0$

$\frac{1}{2} < 1 - k \leq 1$

Karena $0 \leq k < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2} < 1 - k \leq 1$

Maka $\frac{0}{1} < \frac{k}{1-k} < \frac{1/2}{1/2}$

Maka $0 < \frac{k}{1-k} < 1$

maka $0 < q < 1$.

Dan pertaksamaan (3.2.26) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q\, G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \ldots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^2\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq q\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^3\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\big(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\big) \leq q\, G\big(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\big)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n\, G\big(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\big)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.27)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.27) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3})$
$+ G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$\vdots$

dst

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3})$
$+ \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq q^n(x_0, x_1, x_1) + q^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + q^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$
$\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1)$.

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ untuk $0 < q < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap dari (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) merupakan G-konvergen ke u.

Misalkan $T(u) \neq u$ maka:

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} G(x_{n-1}, u, u), G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(u, T(u), T(u)), \\ G(u, T(u), T(u)), G(x_{n-1}, T(u), T(u)), \\ G(u, T(u), T(u)), G(u, x_n, x_n), \\ G(x_{n-1}, T(u), T(u)), G(u, x_n, x_n), \\ G(u, T(u), T(u)) \end{matrix} \right\}$$

Maka

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} G(x_{n-1}, u, u), G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(u, T(u), T(u)) \\ G(x_{n-1}, T(u), T(u)), G(u, x_n, x_n) \end{matrix} \right\}$$

dengan mengambil limit sepanjang $n \to \infty$ dan kenyataan bahwa pemetaan G kontinu pada semua variabelnya, maka diperoleh:

$$G(u, T(u), T(u)) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} G(u, u, u), G(u, u, u), G(u, T(u), T(u)) \\ G(u, T(u), T(u)), G(u, u, u) \end{matrix} \right\}$$

Maka $G(u, T(u), T(u)) \leq kG(u, T(u), T(u))$.

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{2}$. Maka $u = T(u)$.

Jadi u adalah titik tetap untuk pemetaan T.

Untuk membuktikan ketunggalan, andaikan terdapat v dengan $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$ maka menurut (3.2.24) mengakibatkan $G(u, v, v) \leq$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} G(u, v, v), G(u, u, u), G(v, v, v), \\ G(v, v, v), G(u, v, v), \\ G(v, v, v), G(v, u, u), \\ G(u, v, v), G(v, u, u), G(v, v, v) \end{matrix} \right\}$$

Maka $G(u, v, v) \leq k \max\{G(u, v, v), G(v, u, u)\}$

maka $G(u, v, v) \leq kG(v, u, u)$.

dengan cara yang sama diperoleh $G(v, u, u) \leq kG(u, v, v)$

Jadi $G(u, v, v) \leq k^2 G(u, v, v)$mengakibatkan $u = v$ jika $0 \leq k < \frac{1}{2}$.

Jadi u tunggal.

Untuk melihat bahwa T adalah G-kontinu pada u,

Misal $(y_n) \subseteq X$ barisan, sedemikian hingga $\lim (y_n) = u$, maka:

$$G(T(y_n),T(u),T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(u,T(u),T(u)), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(y_n,T(u),T(u)), \\ G(u,T(y_n),T(y_n)), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(y_n,T(y_n),T(y_n)), G(u,T(y_n),T(y_n)), \\ G(y_n,T(u),T(u)) \end{array} \right\}$$

Maka

$$G(T(y_n),T(u),T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(u,T(u),T(u)), G(y_n,T(u),T(u)), \\ G(u,T(y_n),T(y_n)) \end{array} \right\}$$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh

$$G(T(y_n),u,T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(u,u,u), G(y_n,u,u), \\ G(u,T(y_n),T(y_n)) \end{array} \right\}$$

Maka $G(T(y_n),u,T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(y_n,u,u), G(u,T(y_n),T(y_n)) \end{array} \right\}$

Menurut sifat (G2) $G(T(y_n),u,T(y_n)) = G(u,T(y_n),T(y_n))$

Maka $G(T(y_n),u,T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n,u,y_n), G(y_n,T(y_n),T(y_n)), \\ G(y_n,u,u) \end{array} \right\}$

Berdasarkan (G5) $G(y_n,T(y_n),T(y_n)) \leq G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n))$

Maka $G(T(y_n),u,T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n,u,y_n), \\ G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n)) \\ G(y_n,u,u) \end{array} \right\}$

Sedangkan $G(y_n,u,u) \leq G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n))$

Maka $G(T(y_n),u,T(y_n)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G(y_n,u,y_n), \\ G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n)) \end{array} \right\}$ (3.2.28)

Dan (3.2.28) mengakibatkan beberapa kasus:

(1) $G(T(y_n),u,T(y_n)) \leq kG(y_n,u,y_n)$,

(2) $G(T(y_n),u,T(y_n) \leq kG(y_n,u,u)$,

(3) $G(T(y_n),u,T(y_n)) \leq qG(y_n,u,u)$

Untuk masing-masing kasus diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(T(y_n),u,T(y_n)) = 0$

Sesuai proposisi(3.1.4) maka barisan $(T(y_n))$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

Teorema Akibat 3.2.10 (Penelitian)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-G** lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G\big(T^m(x), T^m(y), T^m(z)\big) \leq$$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} G(x, y, z), G\big(x, T^m(x), T^m(x)\big) \\ G\big(y, T^m(y), T^m(y)\big), G\big(z, T^m(z), T^m(z)\big), \\ G\big(x, \ T^m(y), T^m(y)\big), G\big(y, T^m(z), T^m(z)\big), \\ G\big(z, T^m(x), T^m(x)\big), G\big(x, T^m(z), T^m(z)\big), \\ G\big(y, T^m(x), T^m(x)\big), G(z, T(y), T(y)) \end{matrix} \right\} \tag{3.2.29}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T^m G-kontinu pada u.

Bukti:

Dari teorema 3.2.9, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T\big(T^m(u)\big) = T^{m+1}(u) = T^m\big(T(u)\big)$. Jadi $T(u)$adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

Teorema 3.2.11 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik-G** lengkap, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G\big(T(x), T(y), T(z)\big) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} \big[G\big(x, T(y), T(y)\big) + G\big(y, T(x), T(x)\big)\big], \\ \big[G\big(y, T(z), T(z)\big) + G\big(z, T(y), T(y)\big)\big], \\ \big[G\big(z, T(x), T(x)\big) + G(x, T(z), T(z))\big] \end{matrix} \right\} \tag{3.2.30}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, dan T G-kontinu pada u.

Bukti:

Misalkan T memenuhi kondisi (3.2.30) dan misal $x_0 \in X$ sebarang titik, dan didefinisikan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.30)

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} [G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_n, x_n)], \\ [G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})], \\ [G(x_n, x_n, x_n) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})] \end{array} \right\}$$

$$= k \max\{G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), 2G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max\{G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), 2G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Jika $0 \leq k < \frac{1}{2}$, maka ini jadi kasus khusus bahwa

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \quad (3.2.31)$$

Menurut (G5), $G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

Jadi (3.2.31) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\, \{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Ini mengakibatkan $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_n, x_n)$ (3.2.32)

Misal $q = \frac{k}{1-k}$, karena $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$,

$0 \leq k < \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{2} < 1 - k \leq 1 - 0$

$\frac{1}{2} < 1 - k \leq 1$

Karena $0 \leq k < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2} < 1 - k \leq 1$

Maka $\frac{0}{1} < \frac{k}{1-k} < \frac{1/2}{1/2}$

Maka $0 < \frac{k}{1-k} < 1$

maka $0 < q < 1$.

Dan pertaksamaan (3.2.32) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q\ G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \dots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q\ G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^2\ G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq q\ G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^3\ G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\right) \leq q\ G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n\ G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.33)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.33) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$\vdots$

dst

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

$$\leq q^n(x_0, x_1, x_1) + q^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + q^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$

$$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$$

$$\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$$

$$\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1).$$

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ untuk $0 < q < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap dari (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) adalah G-konvergen ke u.

Misal $T(u) \neq u$, maka:

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(x_{n-1}, T(u), T(u)) + G(u, x_n, x_n)], \\ [G(u, T(u), T(u)) + G(u, T(u), T(u))], \\ [G(u, x_n, x_n) + G(x_{n-1}, T(u), T(u))] \end{Bmatrix}$$

Ambil limit sepanjang $n \to \infty$, dengan menggunakan fakta bahwa G kontinu di semua variabelnya, diperoleh:

$$G(u, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(u, T(u), T(u)) + G(u, u, u)], \\ [G(u, T(u), T(u)) + G(u, T(u), T(u))], \\ [G(u, u, u) + G(u, T(u), T(u))] \end{Bmatrix}$$

$$G(u, T(u), T(u)) \leq k \max\{2G(u, T(u), T(u)), G(u, T(u), T(u))\}$$

Maka $G(u, T(u), T(u)) \leq 2k\, G(u, T(u), T(u))$

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{2}$. Maka $u = T(u)$

Untuk membuktikan ketunggalan, andaikan terdapat titik tetap yang lain, misal v , dengan $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$.

Maka $G(u,v,v) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(u,v,v)+G(v,u,u)], \\ [G(v,v,v)+G(v,v,v)], \\ [G(v,u,u)+G(u,v,v)] \end{Bmatrix}$

Maka diperoleh $G(u,v,v) \leq k[G(u,v,v)+G(v,u,u)]$.

Ini mengakibatkan $G(u,v,v) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right) G(v,u,u)$

Dan dengan argumen yang sama diperoleh $G(v,u,u) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right) G(u,v,v)$.

Maka $G(u,v,v) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^2 G(v,u,u)$ jika $0 \leq \frac{k}{1-k} < 1$,

Ini kontradiksi , mengakibatkan $u = v$

Untuk menunjukkan bahwa T adalah G-kontinu pada u, misal $(y_n) \subseteq X$ adalah barisan sedemikian hingga lim $(y_n) = u$ di (X,G)

Maka

$$G\big(T(y_n),T(u),T(u)\big) \leq k \max \begin{Bmatrix} \left[G\big(y_n,T(u),T(u)\big)+G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big)\right], \\ \left[G\big(u,T(u),T(u)\big),G\big(u,T(u),T(u)\big)\right], \\ \left[G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big)+G\big(y_n,T(u),T(u)\big)\right] \end{Bmatrix} \tag{3.2.34}$$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh

$$G(T(y_n),u,u) \leq k \max \begin{Bmatrix} \left[G(y_n,u,u)+G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big)\right], \\ [G(u,u,u),G(u,u,u)], \\ \left[G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big)+G(y_n,u,u)\right] \end{Bmatrix}$$

Maka $G(T(y_n),u,u) \leq k[G(y_n,u,u)+G(u,T(y_n),T(y_n))]$ (3.2.35)

Berdasarkan sifat (G5) $G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big) \leq G(u,T(y_n),u) + G(u,u,T(y_n))$

Maka $G(u,T(y_n),T(y_n)) \leq 2G(T(y_n),u,u)$

Maka pertaksamaan (3.2.35) menjadi

$G(T(y_n),u,u) \leq k[G(y_n,u,u)+2G(T(y_n),u,u)]$

$G(T(y_n),u,u) \leq kG(y_n,u,u)+2kG(T(y_n),u,u)$

Maka $G(T(y_n),u,u) \leq \frac{k}{1-2k} G(y_n,u,u)$ (3.2.36)

Maka diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(T(y_n),u,u) = 0$

Sesuai proposisi(3.1.4) maka barisan $\big(T(y_n)\big)$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

Teorema Akibat 3.2.12 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk semua $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G\big(T^m(x), T^m(y), T^m(z)\big) \leq$$

$$k \max \left\{ \begin{array}{c} \left[G\big(x, T^m(y), T^m(y)\big) + G\big(y, T^m(x), T^m(x)\big)\right], \\ \left[G\big(y, T^m(z), T^m(z)\big) + G\big(z, T^m(y), T^m(y)\big)\right], \\ \left[G\big(z, T^m(x), T^m(x)\big) + G\big(x, T^m(z), T^m(z)\big)\right] \end{array} \right\} \tag{3.2.37}$$

dimana $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, dan T^m G-kontinu pada u.

Bukti:

Dari teorema 3.2.11, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T\big(T^m(u)\big) = T^{m+1}(u) = T^m\big(T(u)\big)$. Jadi $T(u)$adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

Teorema 3.2.13 (Penelitian)

Misal(X, G) adalah **Ruang Metrik-$\boldsymbol{G}$** lengkap, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G\big(T(x), T(y), T(z)\big) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} \left[G\big(x, T(y), T(y)\big) + G\big(z, T(x), T(x)\big)\right], \\ \left[G\big(y, T(z), T(z)\big) + G\big(x, T(y), T(y)\big)\right], \\ \left[G\big(z, T(x), T(x)\big) + G(y, T(z), T(z))\right] \end{array} \right\} \tag{3.2.38}$$

dimana $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, dan T G-kontinu pada u.

Bukti:

Misalkan T memenuhi kondisi (3.2.38) dan misal $x_0 \in X$ sebarang titik, dan didefinisikan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.38)

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_n, x_n)], \\ [G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})], \\ [G(x_n, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})] \end{Bmatrix}$$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}), \\ [G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})], \\ G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \end{Bmatrix}$

Sedangkan $G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})$

dan $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})$

Maka $(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\ \{(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})\}$ (3.2.39)

Berdasarkan sifat (G5),

$G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$.

Maka (3.2.39) menjadi

$(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\{G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq k\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + 2G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-2k} G(x_{n-1}, x_n, x_n)$ (3.2.40)

Misal $q = \frac{k}{1-2k}$, karena $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$,

$0 \leq k < \frac{1}{3}$

$0 \leq 2k < \frac{2}{3}$

$1 - \frac{2}{3} < 1 - 2k \leq 1 - 0$

$\frac{1}{3} < 1 - 2k \leq 1$

Karena $0 \leq k < \frac{1}{3}$ dan $\frac{1}{3} < 1 - 2k \leq 1$

Maka $\frac{0}{1} < \frac{k}{1-2k} < \frac{1/3}{1/3}$

Maka $0 < \frac{k}{1-2k} < 1$

maka $0 < q < 1$.

Dan pertaksamaan (3.2.40) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q\ G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \dots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q\ G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^2\ G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq q\ G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^3\ G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\right) \leq q\ G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n\ G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.41)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.41) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$\vdots$

dst

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+ G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$

$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

$\leq q^n(x_0, x_1, x_1) + q^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + q^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$

$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

$\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$

$\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1).$

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ untuk $0 < q < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap dari (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) adalah G-konvergen ke u.

Misal $T(u) \neq u$, maka:

$$G(x_n, T(u), T(u) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} [G(x_{n-1}, T(u), T(u)) + G(u, x_n, x_n)], \\ [G(u, T(u), T(u)) + G(x_{n-1}, T(u), T(u))], \\ [G(u, x_n, x_n) + G(u, T(u), T(u))] \end{matrix} \right\}$$

Ambil limit sepanjang $n \to \infty$, dengan menggunakan fakta bahwa G kontinu di semua variabelnya, diperoleh:

$$G(u, T(u), T(u) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} [G(u, T(u), T(u)) + G(u, u, u)], \\ [G(u, T(u), T(u)) + G(u, T(u), T(u))], \\ [G(u, u, u) + G(u, T(u), T(u))] \end{matrix} \right\}$$

Maka $G(u, T(u), T(u) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} G(u, T(u), T(u)), \\ 2(G(u, T(u), T(u))), \\ G(u, T(u), T(u)) \end{matrix} \right\}$

Maka $G\big(u, T(u), T(u)\big) \leq k \max \left\{2G\big(u, T(u), T(u)\big), G(u, T(u), T(u))\right\}$

Sedangkan $G(u, T(u), T(u)) \leq 2G(u, T(u), T(u))$

Maka $G\big(u, T(u), T(u)\big) \leq 2kG(u, T(u), T(u))$

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{3}$. Maka $u = T(u)$.

Untuk membuktikan ketunggalan, andaikan terdapat titik tetap yang lain, misal v , dengan $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$.

Maka $G(u,v,v) \leq k$ max $\begin{Bmatrix} [G(u,v,v) + G(v,u,u)], \\ [G(v,v,v) + G(u,v,v)], \\ [G(v,u,u) + G(v,v,v)] \end{Bmatrix}$

Maka $G(u,v,v) \leq k$ max $\begin{Bmatrix} [G(u,v,v) + G(v,u,u)], \\ G(u,v,v), \\ G(v,u,u) \end{Bmatrix}$

Sedangkan $G(u,v,v) \leq G(u,v,v) + G(v,u,u)$

dan $G(v,u,u) \leq G(u,v,v) + G(v,u,u)$

Maka diperoleh $G(u,v,v) \leq k[G(u,v,v) + G(v,u,u)]$.

Ini mengakibatkan $G(u,v,v) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right) G(v,u,u)$

Dan dengan argumen yang sama diperoleh $G(v,u,u) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right) G(u,v,v)$.

Maka $G(u,v,v) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^2 G(v,u,u)$ jika $0 \leq \frac{k}{1-k} < 1$,

Ini kontradiksi , mengakibatkan $u = v$

Untuk menunjukkan bahwa T adalah G-kontinu pada u, misal $(y_n) \subseteq X$ adalah barisan sedemikian hingga lim $(y_n) = u$ di (X, G)

Maka

$$G\big(T(y_n), T(u), T(u)\big) \leq k \text{ max} \begin{Bmatrix} \big[G\big(y_n, T(u), T(u)\big) + G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big)\big], \\ \big[G\big(u, T(u), T(u)\big) + G\big(y_n, T(u), T(u)\big)\big], \\ \big[G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) + G\big(u, T(u), T(u)\big)\big] \end{Bmatrix} \tag{3.2.42}$$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh:

$$G(T(y_n), u, u) \leq k \text{ max} \begin{Bmatrix} \big[G(y_n, u, u) + G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big)\big], \\ [G(u,u,u) + G(y_n, u, u)], \\ \big[G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) + G(u,u,u)\big] \end{Bmatrix}$$

$$G(T(y_n), u, u) \leq k \text{ max} \begin{Bmatrix} \big[G(y_n, u, u) + G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big)\big], \\ G(y_n, u, u), \\ G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) \end{Bmatrix}$$

Sedangkan $G(y_n, u, u) \leq G(y_n, u, u) + G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big)$

dan $G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) \leq G(y_n, u, u) + G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big)$

Maka diperoleh $G(T(y_n),u,u) \leq k[G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n))]$

(3.2.43)

Berdasarkan sifat (G5) $G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big) \leq G(u,T(y_n),u) + G(u,u,T(y_n))$

Maka $G(u,T(y_n),T(y_n)) \leq 2G(T(y_n),u,u)$ (3.2.44)

Maka pertaksamaan (3.2.43) menjadi

$G(T(y_n),u,u) \leq k[G(y_n,u,u) + 2G(T(y_n),u,u)]$

$G(T(y_n),u,u) \leq kG(y_n,u,u) + 2kG(T(y_n),u,u)$

Maka $G(T(y_n),u,u) \leq \frac{k}{1-2k} G(y_n,u,u)$ (3.2.45)

Maka diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(T(y_n),u,u) = 0$

Sesuai proposisi(3.1.4) maka barisan $\big(T(y_n)\big)$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

Teorema Akibat 3.2.14 (Penelitian)

Misal (X,G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk semua $x,y,z \in X$ berlaku:

$G\big(T^m(x),T^m(y),T^m(z)\big) \leq$

$$k\, max \begin{Bmatrix} \big[G\big(x,T^m(y),T^m(y)\big) + G\big(z,T^m(x),T^m(x)\big)\big], \\ \big[G\big(y,T^m(z),T^m(z)\big) + G\big(x,T^m(y),T^m(y)\big)\big], \\ \big[G\big(z,T^m(x),T^m(x)\big) + G\big(y,T^m(z),T^m(z)\big)\big] \end{Bmatrix} \quad (3.2.46)$$

dengan $k \in \left[0,\frac{1}{3}\right)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, dan T^m G-kontinu pada u.

Bukti:

Dari teorema 3.2.13, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T\big(T^m(u)\big) = T^{m+1}(u) = T^m\big(T(u)\big)$. Jadi $T(u)$adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

Teorema 3.2.15 (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X,G) adalah **Ruang Metrik-G** lengkap, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk semua $x, y \in X$ berlaku:

$$G(T(x),T(y),T(y)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(y,T(y),T(y)) + G(x,T(y),T(y))], \\ 2G(y,T(x),T(x)) \end{Bmatrix} \quad (3.2.47)$$

dengan $k \in \left[0,\frac{1}{3}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u.

Bukti:

Misal T memenuhi kondisi (3.2.47) dan misal $x_0 \in X$ sebarang titik, dan didefinisikan barisan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.47)

$$G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) + G(x_{n-1},x_{n+1},x_{n+1})], \\ 2G(x_n,x_n,x_n) \end{Bmatrix}$$

Maka $G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \leq k\,\{G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) + G(x_{n-1},x_{n+1},x_{n+1})\}$

Berdasarkan sifat (G5) $(x_{n-1},x_{n+1},x_{n+1}) \leq G(x_{n-1},x_n,x_n) + G(x_n,x_{n+1},x_{n+1})$

Maka $G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \leq k \begin{Bmatrix} G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) + G(x_{n-1},x_n,x_n) \\ +G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \end{Bmatrix}$

Maka $G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \leq k\,\{G(x_{n-1},x_n,x_n) + 2G(x_n,x_{n+1},x_{n+1})\}$

Maka $G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \leq \frac{k}{1-2k} G(x_{n-1},x_{n+1},x_{n+1})$ (3.2.48)

Misal $q = \frac{k}{1-2k}$, karena $k \in \left[0,\frac{1}{3}\right)$,

$0 \leq k < \frac{1}{3}$

$0 \leq 2k < \frac{2}{3}$

$1 - \frac{2}{3} < 1 - 2k \leq 1 - 0$

$\frac{1}{3} < 1 - 2k \leq 1$

Karena $0 \leq k < \frac{1}{3}$ dan $\frac{1}{3} < 1 - 2k \leq 1$

Maka $\frac{0}{1} < \frac{k}{1-2k} < \frac{1/3}{1/3}$

Maka $0 < \frac{k}{1-2k} < 1$

maka $0 < q < 1$.

Dan pertaksamaan (3.2.48) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q\ G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \dots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q\ G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^2\ G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq q\ G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^3\ G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\right) \leq q\ G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n\ G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.49)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.49) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$\vdots$

dst

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq q^n(x_0, x_1, x_1) + q^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + q^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$
$\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1).$

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ untuk $0 < q < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap pada (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) adalah G-konvergen ke u .

Misalkan $T(u) \neq u$, maka

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(u, T(u), T(u)) + G(x_{n-1}, T(u), T(u))], \\ 2G(u, x_n, x_n) \end{Bmatrix}$$

Dengan mengambil limit sepanjang $n \to \infty$ dan dengan menggunakan fakta bahwa G kontinu di setiap variabelnya, diperoleh:

$$G(u, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(u, T(u), T(u)) + G(u, T(u), T(u))], \\ 2G(u, u, u) \end{Bmatrix}$$

Maka $G(u, T(u), T(u)) \leq 2kG(u, T(u), T(u))$.

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{3}$. Maka $u = T(u)$.

Untuk membuktikan ketunggalan, andaikan terdapat $v,\ v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$ maka menurut (3.2.47)

$$G(u,v,v) \leq k \max\begin{Bmatrix}[G(v,v,v) + G(u,v,v)], \\ 2G(v,u,u)\end{Bmatrix}$$

Maka $G(u,v,v) \leq k \max\begin{Bmatrix}G(u,v,v), \\ 2G(v,u,u)\end{Bmatrix}$

Maka $G(u,v,v) \leq k \max\{G(u,v,v), 2G(v,u,u)\}$

Maka $G(u,v,v) \leq 2kG(v,u,u)$

Dengan argumen yang sama diperoleh:

$G(v,u,u) \leq 2kG(u,v,v)$

Sehingga $G(u,v,v) \leq 4k^2G(u,v,v)$.

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq 4k^2 < 1$

Maka $u = v$.

Untuk menunjukkan bahwa T adalah G-kontinu ke u, misal $(y_n) \subseteq X$ adalah barisan sedemikian hingga $\lim y_n = u$, maka:

$$G\big(T(u),T(y_n),T(y_n)\big) \leq k \max\begin{Bmatrix}\big[G\big(y_n,T(y_n),T(y_n)\big) + G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big)\big], \\ 2G(y_n,T(u),T(u))\end{Bmatrix} \tag{3.2.50}$$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh:

$$G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big) \leq k \max\begin{Bmatrix}\big[G\big(y_n,T(y_n),T(y_n)\big) + G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big)\big], \\ 2G(y_n,u,u)\end{Bmatrix}$$

Berdasarkan sifat (G5) $G\big(y_n,T(y_n),T(y_n)\big) \leq G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n))$

Maka $G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big) \leq$

$$k \max\begin{Bmatrix}\big[G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n)) + G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big)\big], \\ 2G(y_n,u,u)\end{Bmatrix}$$

Maka $G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big) \leq k \max\begin{Bmatrix}[G(y_n,u,u) + 2G(u,T(y_n),T(y_n))], \\ 2G(y_n,u,u)\end{Bmatrix}$

Maka ini mengakibatkan 2 kasus:

(kasus 1) $G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big) \leq 2kG(y_n,u,u)$

(kasus 2) $G\big(u,T(y_n),T(y_n)\big) \leq \left(\frac{k}{1-2k}\right) G(y_n,u,u) = qG(y_n,u,u)$

Maka untuk masing-masing kasus diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(u,T(y_n),\mathrm{T}(y_n)) = 0$

Sesuai proposisi(3.1.4) maka barisan $\big(T(y_n)\big)$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

<u>Teorema Akibat 3.2.16</u> (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal(X,G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk semua $x, y \in X$ berlaku:

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(y) \leq$$
$$k \max \left\{ \begin{matrix} [G(y, T^m(y), T^m(y)) + G(x, T^m(y), T^m(y))], \\ 2G(y, T^m(x), T^m(x)) \end{matrix} \right\} \tag{3.2.51}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, dan T^m G-kontinu pada u.

<u>Bukti:</u>

Dari teorema 3.2.15, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T(T^m(u)) = T^{m+1}(u) = T^m(T(u))$. Jadi $T(u)$adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

<u>Teorema 3.2.17</u> (Z. Mustafa and B. Sims, 2009)

Misal (X,G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap dan misal $T: X \to X$ suatu pemetaan. Jika T memenuhi syarat:

Untuk semua $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} [G(x, T(y), T(y)) + G(z, T(y), T(y))], \\ [G(y, T(z), T(z)) + G(x, T(z), T(z))], \\ [G(z, T(x), T(x)) + G(y, T(x), T(x))] \end{matrix} \right\} \tag{3.2.52}$$

dimana $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u.

<u>Bukti:</u>

Ambil $z = y$ dari pertaksamaan (3.2.52)

Maka pertaksamaan (3.2.52) menjadi

$$G\big(T(x),T(y),T(y)\big) \le k \max \begin{Bmatrix} \big[G\big(x,T(y),T(y)\big) + G\big(y,T(y),T(y)\big)\big], \\ \big[G\big(y,T(y),T(y)\big) + G\big(x,T(y),T(y)\big)\big], \\ \big[G\big(y,T(x),T(x)\big) + G\big(y,T(x),T(x)\big)\big] \end{Bmatrix} \tag{3.2.53}$$

Maka (3.2.53) menjadi

$$G\big(T(x),T(y),T(y)\big) \le k \max \begin{Bmatrix} \big[G\big(y,T(y),T(y)\big) + G\big(x,T(y),T(y)\big)\big], \\ 2G\big(y,T(x),T(x)\big) \end{Bmatrix} \tag{3.2.54}$$

Maka (3.2.54) sama dengan pertaksamaan (3.2.47)

Misal T memenuhi kondisi (3.2.54) dan misal $x_0 \in X$ sebarang titik, dan didefinisikan barisan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.54)

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le k \max \begin{Bmatrix} [G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})], \\ 2G(x_n, x_n, x_n) \end{Bmatrix}$$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le k\,\{G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Berdasarkan sifat (G5) $(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \le G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le k \begin{Bmatrix} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n-1}, x_n, x_n) \\ +G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \end{Bmatrix}$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le k\,\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + 2G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le \frac{k}{1-2k} G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})$ (3.2.55)

Misal $q = \frac{k}{1-2k}$, karena $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$,

$0 \le k < \frac{1}{3}$

$0 \le 2k < \frac{2}{3}$

$1 - \frac{2}{3} < 1 - 2k \le 1 - 0$

$\frac{1}{3} < 1 - 2k \leq 1$

Karena $0 \leq k < \frac{1}{3}$ dan $\frac{1}{3} < 1 - 2k \leq 1$

Maka $\frac{0}{1} < \frac{k}{1-2k} < \frac{1/3}{1/3}$

Maka $0 < \frac{k}{1-2k} < 1$

maka $0 < q < 1$.

Dan pertaksamaan (3.2.55) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q\, G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \dots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^2\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq q\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^3\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G\left(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}\right) \leq q\, G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n\, G\left(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}\right)$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.56)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.56) maka diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$\vdots$

dst

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq q^n(x_0, x_1, x_1) + q^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + q^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$
$\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$
$\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1).$

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ untuk $0 < q < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap pada (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) adalah G-konvergen ke u .

Misalkan $T(u) \neq u$, maka

$$G\big(x_n, T(u), T(u)\big) \leq k \max \begin{Bmatrix} \big[G\big(u, T(u), T(u)\big) + G\big(x_{n-1}, T(u), T(u)\big)\big], \\ 2G(u, x_n, x_n) \end{Bmatrix}$$

Dengan mengambil limit sepanjang $n \to \infty$ dan dengan menggunakan fakta bahwa G kontinu di setiap variabelnya, diperoleh:

$$G\big(u, T(u), T(u)\big) \leq k \max \begin{Bmatrix} \big[G\big(u, T(u), T(u)\big) + G\big(u, T(u), T(u)\big)\big], \\ 2G(u, u, u) \end{Bmatrix}$$

Maka $G\big(u, T(u), T(u)\big) \leq 2kG\big(u, T(u), T(u)\big)$.

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{3}$. Maka $u = T(u)$.

Untuk membuktikan ketunggalan, andaikan terdapat v, $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$ maka menurut (3.2.54)

$$G(u,v,v) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(v,v,v) + G(u,v,v)], \\ 2G(v,u,u) \end{Bmatrix}$$

Maka $G(u,v,v) \leq k \max \begin{Bmatrix} G(u,v,v), \\ 2G(v,u,u) \end{Bmatrix}$

Maka $G(u,v,v) \leq k \max \{G(u,v,v), 2G(v,u,u)\}$

Maka $G(u,v,v) \leq 2kG(v,u,u)$

Dengan argumen yang sama diperoleh:

$G(v,u,u) \leq 2kG(u,v,v)$

Sehingga $G(u,v,v) \leq 4k^2 G(u,v,v)$.

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq 4k^2 < 1$

Maka $u = v$.

Untuk menunjukkan bahwa T adalah G-kontinu ke u, misal $(y_n) \subseteq X$ adalah barisan sedemikian hingga $\lim y_n = u$, maka:

$$G\big(T(u), T(y_n), T(y_n)\big) \leq k \max \begin{Bmatrix} \big[G\big(y_n, T(y_n), T(y_n)\big) + G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big)\big], \\ 2G(y_n, T(u), T(u)) \end{Bmatrix} \tag{3.2.57}$$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh:

$$G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) \leq k \max \begin{Bmatrix} \big[G\big(y_n, T(y_n), T(y_n)\big) + G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big)\big], \\ 2G(y_n, u, u) \end{Bmatrix}$$

Berdasarkan sifat (G5) $G\big(y_n, T(y_n), T(y_n)\big) \leq G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n))$

Maka $G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) \leq$

$$k \max \begin{Bmatrix} \big[G(y_n, u, u) + G(u, T(y_n), T(y_n)) + G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big)\big], \\ 2G(y_n, u, u) \end{Bmatrix}$$

Maka $G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(y_n, u, u) + 2G(u, T(y_n), T(y_n))], \\ 2G(y_n, u, u) \end{Bmatrix}$

Maka ini mengakibatkan 2 kasus:

(kasus 1) $G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) \leq 2kG(y_n, u, u)$

(kasus 2) $G\big(u, T(y_n), T(y_n)\big) \leq \left(\frac{k}{1-2k}\right) G(y_n, u, u) = qG(y_n, u, u)$

Maka untuk masing-masing kasus diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(u, T(y_n), \mathrm{T}(y_n)) = 0$

Sesuai proposisi (3.1.4) maka barisan $\big(T(y_n)\big)$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

Teorema Akibat 3.2.18 (Penelitian)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-G** lengkap dan misal $T: X \to X$ suatu pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk suatu $m \in N$ dan semua $x, y, z \in X$ berlaku:

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{l} [G(x, T^m(y), T^m(y)) + G(z, T^m(y), T^m(y))], \\ [G(y, T^m(z), T^m(z)) + G(x, T^m(z), T^m(z))], \\ [G(z, T^m(x), T^m(x)) + G(y, T^m(x), T^m(x))] \end{array} \right\} \quad (3.2.58)$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, maka T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T^m G-kontinu pada u.

Bukti:

Ambil $z = y$ dari pertaksamaan (3.2.58)

Maka pertaksamaan (3.2.58) menjadi

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(y)) \leq k \max \left\{ \begin{array}{l} [G(x, T^m(y), T^m(y)) + G(y, T^m(y), T^m(y))], \\ [G(y, T^m(y), T^m(y)) + G(x, T^m(y), T^m(y))], \\ [G(y, T^m(x), T^m(x)) + G(y, T^m(x), T^m(x))] \end{array} \right\} \quad (3.2.59)$$

Maka (3.2.59) menjadi

$$G(T^m(x), T^m(y), T^m(y) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} [G(y, T^m(y), T^m(y)) + G(x, T^m(y), T^m(y))], \\ [2G(y, T^m(x), T^m(x))] \end{array} \right\} \quad (3.2.60)$$

Maka (3.2.60) sama dengan pertaksamaan (3.2.51) pada teorema akibat 3.2.16

Dari teorema akibat 3.2.16, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T(T^m(u)) = T^{m+1}(u) = T^m(T(u))$. Jadi $T(u)$ adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

<u>Teorema 3.2.19</u> (Penelitian)

Misal (X, G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk semua $x, y \in X$ berlaku:

$$G\big(T(x), T(y), T(y)\big) \le k \max \left\{ \begin{matrix} \big[G\big(y, T(x), T(x)\big) + G\big(x, T(y), T(y)\big)\big], \\ 2G(y, T(x), T(x)) \end{matrix} \right\} \quad (3.2.61)$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u.

<u>Bukti:</u>

Misal T memenuhi kondisi (3.2.61) dan misal $x_0 \in X$ sebarang titik, dan didefinisikan barisan (x_n) dengan

$x_1 = T(x_0)$

$x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$

$\vdots$

$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$.

Maka untuk $x = x_{n-1}$, $T(x) = x_n$

$y = x_n$, $T(y) = x_{n+1}$

$z = x_n$, $T(z) = x_{n+1}$

Maka menurut (3.2.61)

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le k\, max \left\{ \begin{matrix} [G(x_n, x_n, x_n) + G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})], \\ 2G(x_n, x_n, x_n) \end{matrix} \right\}$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le kG(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1})$

Berdasarkan (G5) $G(x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \le G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le k\{G(x_{n-1}, x_n, x_n) + G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$

Maka $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le \frac{k}{1-k} G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Misal $q = \frac{k}{1-k}$, karena $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$,

$0 \le k < \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{2} < 1 - k \le 1 - 0$

$\frac{1}{2} < 1 - k \le 1$

Karena $0 \le k < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2} < 1 - k \le 1$

Maka $\frac{0}{1} < \frac{k}{1-k} < \frac{1/2}{1/2}$

Maka $0 < \frac{k}{1-k} < 1$

maka $0 < q < 1$.

Dan pertaksamaan (3.2.61) menjadi

$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q\, G(x_{n-1}, x_n, x_n)$

Berarti untuk $n = 1,2,3, \dots, n$

$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^2\, G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$

$G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \leq q\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^3\, G(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-2})$

$\vdots$

dst

$G(x_{n-(n-1)}, x_{n-n}, x_{n-n}) \leq q\, G(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)})$

atau $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n\, G(x_{n-n}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)})$

Jadi $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G(x_0, x_1, x_1)$ (3.2.62)

Maka, untuk semua $n, m \in N, n < m$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat dan (3.2.62) maka diperoleh

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+1}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_m, x_m)$

dan $G(x_{n+2}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{n+3}, x_m, x_m) \leq G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + G(x_{n+3}, x_m, x_m)$

$\vdots$

dst

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-2}, x_m, x_m)$$

dan $G(x_{m-2}, x_m, x_m) \leq G(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}) + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$
$+ G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

Maka $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$

$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

$\leq q^n(x_0, x_1, x_1) + q^{n+1}(x_0, x_1, x_1) + \cdots + q^{m-1}(x_0, x_1, x_1)$

Jadi $G(x_n, x_m, x_m) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$

$+G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots + G(x_{m-1}, x_m, x_m)$

$\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})G(x_0, x_1, x_1)$

$\leq \frac{q^n}{1-q} G(x_0, x_1, x_1).$

Karena $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ untuk $0 < q < 1$

Maka $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = 0$

Maka $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$

Untuk $n, m, l \in N$ berdasarkan (G5) diperoleh:

$G(x_n, x_m, x_l) \leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l)$

Karena $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ dan $\lim_{(n,m)\to\infty} G(x_m, x_m, x_l) = 0$

Maka $\lim_{(n,m,l)\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$

Jadi (x_n) adalah barisan G-Cauchy.

Dengan menggunakan sifat lengkap pada (X, G), maka terdapat $u \in X$ sedemikian hingga (x_n) adalah G-konvergen ke u .

Misalkan $T(u) \neq u$, maka

$$G(x_n, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(u, x_n, x_n) + G(x_{n-1}, T(u), T(u))], \\ 2G(u, x_n, x_n)) \end{Bmatrix}$$

Dengan mengambil limit sepanjang $n \to \infty$ dan dengan menggunakan fakta bahwa G kontinu di setiap variabelnya, diperoleh:

$$G(u, T(u), T(u)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(u, u, u) + G(u, T(u), T(u))], \\ 2G(u, u, u) \end{Bmatrix}$$

$G(u, T(u), T(u)) \leq kG(u, T(u), T(u)).$

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{2}$. Maka $u = T(u)$.

Untuk membuktikan ketunggalan, andaikan terdapat v, $v \neq u$ sedemikian hingga $T(v) = v$ maka

$$G(u, v, v) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(v, u, u) + G(u, v, v)], \\ 2G(v, u, u) \end{Bmatrix}$$

Maka ini mengakibatkan 2 kasus:

(kasus 1) $G(u,v,v) \leq k\{G(v,u,u) + G(u,v,v)\}$

(kasus 2) $G(u,v,v) \leq 2G(u,v,v)$

Karena $0 \leq k < \frac{1}{2}$, maka (kasus 2) terpenuhi

Untuk (kasus 1) $G(u,v,v) \leq k\{G(v,u,u) + G(u,v,v)\}$

Dengan argumen yang sama, diperoleh:

$G(v,u,u) \leq k\{G(u,v,v) + G(v,u,u)\}$

Maka $G(u,v,v) \leq k\{k(G(u,v,v) + G(v,u,u)) + G(u,v,v)\}$

Atau $G(u,v,v) \leq kG(v,u,u) + kG(u,v,v) + k^2G(u,v,v)$

Maka $G(u,v,v) \leq kG(v,u,u) + \frac{k}{1-k}G(u,v,v)$

Ini kontradiksi jika $0 \leq k < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{k}{1-k} < 1$. Maka $u = v$.

Untuk menunjukkan bahwa T adalah G-kontinu ke u, misal $(y_n) \subseteq X$ adalah barisan sedemikian hingga lim $y_n = u,$ maka:

$$G(T(u),T(y_n),T(y_n)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(y_n,T(u),T(u)) + G(u,T(y_n),T(y_n))], \\ 2G(y_n,T(u),T(u)) \end{Bmatrix} \tag{3.2.63}$$

Dengan mengganti $T(u) = u$, diperoleh:

$$G(u,T(y_n),T(y_n)) \leq k \max \begin{Bmatrix} [G(y_n,u,u) + G(u,T(y_n),T(y_n))], \\ 2G(y_n,u,u) \end{Bmatrix}$$

Maka ini mengakibatkan 2 kasus:

(kasus 1) $G(u,T(y_n),T(y_n)) \leq 2kG(y_n,u,u)$

(kasus 2) $G(u,T(y_n),T(y_n)) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)G(y_n,u,u) = qG(y_n,u,u)$

Maka untuk masing-masing kasus diperoleh $\lim_{n\to\infty} G(u,T(y_n),T(y_n)) = 0$

Sesuai proposisi (3.1.4) maka barisan $(T(y_n))$ adalah G-konvergen ke $u = T(u)$.

Sesuai proposisi (3.1.8) mengakibatkan T adalah G-kontinu pada u.

<u>Teorema Akibat 3.2.20</u> (Penelitian)

Misal (X,G) adalah **Ruang Metrik-*G*** lengkap, dan misal $T: X \to X$ adalah pemetaan. Jika T memenuhi syarat berikut:

Untuk suatu $m \in N$ dan untuk semua $x, y \in X$ berlaku:

$G\left(T^m(x), T^m(y), T^m(y)\right) \leq$

$$k \max \begin{Bmatrix} \left[G\left(y, T^m(x), T^m(x)\right) + G\left(x, T^m(y), T^m(y)\right)\right], \\ 2G(y, T^m(x), T^m(x)) \end{Bmatrix} \quad (3.2.64)$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ dan T G-kontinu pada u.

Bukti:

Dari teorema 3.2.19, diperoleh T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$, sedemikian hingga $T^m(u) = u$. Tetapi $T(u) = T\left(T^m(u)\right) = T^{m+1}(u) = T^m\left(T(u)\right)$. Jadi $T(u)$ adalah titik tetap yang lain untuk T^m dan karena ketunggalan $T(u) = u$.

Dari teorema 3.1.7, bahwa suatu pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik-G adalah pemetaan kontinu, maka T^m G-kontinu pada u.

BAB 4
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan di Bab 3 diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Sifat- sifat dari **Ruang Metrik-*G*** lengkap antara lain:
   a. Jika $G(x, y, z) = 0$ maka $x = y = z$
   b. $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$
   c. $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$
   d. $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$
   e. $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}(G(x, y, a) + G(x, a, z) + G(a, y, z)$
   f. $G(x, y, z) \leq (G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a)$
   g. $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq \max\{G(a, z, z), G(z, a, a)\}$
   h. $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq G(x, a, z)$
   i. $|G(x, y, z) - G(y, z, z)| \leq \max\{G(x, z, z), G(z, x, x)\}$
   j. $|G(x, y, y) - G(y, x, x)| \leq \max\{G(y, x, x), G(x, y, y)\}$

2. Syarat cukup agar diperoleh ketunggalan titik tetap untuk pemetaan kontraktif pada **Ruang Metrik-*G*** lengkap adalah suatu pemetaan T atau pemetaan T^m mempunyai titik tetap tunggal $u \in X$ pada **Ruang Metrik-*G*** lengkap (X, G) untuk $T: X \to X$ jika salah satu dipenuhi;
   a. $G(T(x), T(y), T(z)) \leq kG(x, y, z)$
   dengan $k \in [0, 1)$, untuk setiap $x, y, z \in X$.
   b. $G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq kG(x, y, z)$
   dengan $k \in [0, 1)$, untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x, y, z \in X$.
   c. $G(T(x), T(y), T(y)) \leq kG(x, y, y)$
   dengan $k \in [0, 1)$, untuk setiap $x, y \in X$.
   d. $G(T^m(x), T^m(y), T^m(y)) \leq kG(x, y, y)$
   dengan $k \in [0, 1)$, untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x, y \in X$.

e. $\left(T(x),T(y),T(z)\right) \le$

$$k \max \begin{Bmatrix} G(x,y,z), G\big(x,T(x),T(x)\big), G\big(y,T(y),T(y)\big), \\ G\big(z,T(z),T(z)\big), G\big(x,T(y),T(y)\big), \\ G\big(y,T(z),T(z)\big), G\big(z,T(x),T(x)\big). \end{Bmatrix}$$

dengan $k \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, dan untuk setiap $x,y,z \in X$.

f. $G\big(T^m(x),T^m(y),T^m(z)\big) \le$

$$k \max \begin{Bmatrix} G(x,y,z), G\big(x,T^m(x),T^m(x)\big) \\ G\big(y,T^m(y),T^m(y)\big), G\big(z,T^m(z),T^m(z)\big), \\ G\big(x,\ T^m(y),T^m(y)\big), G\big(y,T^m(z),T^m(z)\big), \\ G\big(z,T^m(x),T^m(x)\big) \end{Bmatrix}$$

dengan $k \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x,y,z \in X$.

g. $G\big(T(x),T(y),T(z)\big) \le$

$$k \max \begin{Bmatrix} G(x,y,z), G\big(x,T(x),T(x)\big), G\big(y,T(y),T(y)\big), \\ G\big(z,T(z),T(z)\big), G\big(x,T(z),T(z)\big), \\ G\big(y,T(x),T(x)\big), G\big(z,T(y),T(y)\big). \end{Bmatrix}$$

dengan $k \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, untuk setiap $x,y,z \in X$.

h. $G\big(T^m(x),T^m(y),T^m(z)\big) \le$

$$k \max \begin{Bmatrix} G(x,y,z), G\big(x,T^m(x),T^m(x)\big) \\ G\big(y,T^m(y),T^m(y)\big), G\big(z,T^m(z),T^m(z)\big), \\ G\big(x,\ T^m(z),T^m(z)\big), G\big(y,T^m(x),T^m(x)\big), \\ G\big(z,T^m(y),T^m(y)\big), \end{Bmatrix}$$

dengan $k \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, untuk suatu $m \in N$ dan setiap $x,y,z \in X$.

i. $G\big(T(x),T(y),T(z)\big) \le$

$$k \max \begin{Bmatrix} G(x,y,z), G\big(x,T(x),T(x)\big), G\big(y,T(y),T(y)\big), \\ G\big(z,T(z),T(z)\big), G\big(x,T(y),T(y)\big), \\ G\big(y,T(z),T(z)\big), G\big(z,T(x),T(x)\big), \\ G(x,T(z),T(z)), G(y,T(x),T(x)), G(z,T(y),T(y)) \end{Bmatrix}$$

dengan $k \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, dan untuk setiap $x,y,z \in X$.

j. $G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} G(x,y,z), G(x, T^m(x), T^m(x)) \\ G(y, T^m(y), T^m(y)), G(z, T^m(z), T^m(z)), \\ G(x,\ T^m(y), T^m(y)), G(y, T^m(z), T^m(z)), \\ G(z, T^m(x), T^m(x)), G(x, T^m(z), T^m(z)), \\ G(y, T^m(x), T^m(x)), G(z, T(y), T(y)) \end{matrix} \right\}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, untuk suatu $m \in N$ dan untuk setiap $x, y, z \in X$.

k. $G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} [G(x, T(y), T(y)) + G(y, T(x), T(x))], \\ [G(y, T(z), T(z)) + G(z, T(y), T(y))], \\ [G(z, T(x), T(x)) + G(x, T(z), T(z))] \end{matrix} \right\}$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

l. $G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} [G(x, T^m(y), T^m(y)) + G(y, T^m(x), T^m(x))], \\ [G(y, T^m(z), T^m(z)) + G(z, T^m(y), T^m(y))], \\ [G(z, T^m(x), T^m(x)) + G(x, T^m(z), T^m(z))] \end{matrix} \right\}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, untuk suatu $m \in N$ dan untuk semua $x, y, z \in X$.

m. $G(T(x), T(y), T(z)) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} [G(x, T(y), T(y)) + G(z, T(x), T(x))], \\ [G(y, T(z), T(z)) + G(x, T(y), T(y))], \\ [G(z, T(x), T(x)) + G(y, T(z), T(z))] \end{matrix} \right\}$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, untuk semua $x, y, z \in X$.

n. $G(T^m(x), T^m(y), T^m(z)) \leq$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} [G(x, T^m(y), T^m(y)) + G(z, T^m(x), T^m(x))], \\ [G(y, T^m(z), T^m(z)) + G(x, T^m(y), T^m(y))], \\ [G(z, T^m(x), T^m(x)) + G(y, T^m(z), T^m(z))] \end{matrix} \right\}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, untuk suatu $m \in N$ dan setiap $x, y, z \in X$.

o. $G(T(x), T(y), T(y)) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} [G(y, T(y), T(y)) + G(x, T(y), T(y))], \\ 2G(y, T(x), T(x)) \end{matrix} \right\}$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, dan untuk semua $x, y \in X$.

p. $G(T^m(x), T^m(y), T^m(y) \leq$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} \left[G\big(y, T^m(y), T^m(y)\big) + G\big(x, T^m(y), T^m(y)\big)\right], \\ 2G(y, T^m(x), T^m(x)) \end{matrix} \right\}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, untuk suatu $m \in N$ dan untuk semua $x, y \in X$.

q. $$G\big(T(x), T(y), T(z)\big) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} \left[G\big(x, T(y), T(y)\big) + G(z, T(y), T(y))\right], \\ \left[G\big(y, T(z), T(z)\big) + G\big(x, T(z), T(z)\big)\right], \\ \left[G\big(z, T(x), T(x)\big) + G\big(y, T(x), T(x)\big)\right] \end{matrix} \right\}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, untuk semua $x, y, z \in X$.

r. $G\big(T^m(x), T^m(y), T^m(z)\big) \leq$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} \left[G\big(x, T^m(y), T^m(y)\big) + G\big(z, T^m(y), T^m(y)\big)\right], \\ \left[G\big(y, T^m(z), T^m(z)\big) + G\big(x, T^m(z), T^m(z)\big)\right], \\ \left[G\big(z, T^m(x), T^m(x)\big) + G\big(y, T^m(x), T^m(x)\big)\right] \end{matrix} \right\}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, untuk suatu $m \in N$ dan untuk semua $x, y, z \in X$.

s. $$G\big(T(x), T(y), T(y)\big) \leq k \max \left\{ \begin{matrix} \left[G\big(y, T(x), T(x)\big) + G\big(x, T(y), T(y)\big)\right], \\ 2G\big(y, T(x), T(x)\big) \end{matrix} \right\}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, untuk semua $x, y \in X$.

t. $G\big(T^m(x), T^m(y), T^m(y)\big) \leq$

$$k \max \left\{ \begin{matrix} \left[G\big(y, T^m(x), T^m(x)\big) + G\big(x, T^m(y), T^m(y)\big)\right], \\ 2G\big(y, T^m(x), T^m(x)\big) \end{matrix} \right\}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, untuk suatu $m \in N$ dan untuk semua $x, y \in X$.

4.2. Saran

Dari beberapa kesimpulan diatas, perlu adanya penelitian untuk menyelidiki ketunggalan titik tetap pada tipe pemetaan yang lain yaitu pemetaan ekspansif ataupun pada ruang yang lain seperti **Ruang Quazy Metrik**, **Ruang Fuzzy Metrik**, dll.

DAFTAR REFERENSI

H. Obiedat and Z. Mustafa. (2010). Fixed Point Result On A Nonsymmetric G-Metric Spaces. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS)* (vol.3, no.2, pp. 65-79).

Suwarno. (2011). "*Teorema Titik Tetap Bersama Dari Pemetaan-Pemetaan Pada Ruang Seragam*". Tesis. Universitas Gajah Mada Yogyakarta.

V.S. Pugachev and I.N. Sinitsyn. (1999). *Lectures on Functional Analysis and Applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore.

Z. Mustafa and B. Sims. (2006). A New Approach to Generalized Metric Space. *Journal of Non Linier and Convex Analysis* (vol.7, no. 2,pp.289-297).

Z. Mustafa, H. Obiedat and F. Awawdeh. (2008). Some fixed Point Theorem for Mapping on Complete G-Metric Space. *Research Article: Fixed Point Theory and Applications* (vol. 2008). Hindawi Publishing Corporation.

Z. Mustafa and B. Sims. (2009). Fixed Point Theorem for Contractive Mappings in Complete G-Metric Spaces. *Research Article: Fixed Point Theory and Applications* (vol.2009). Hindawi Publishing Corporation.

Z. Mustafa, F. Awawdeh and W. Shatanawi.(2010). Fixed Point Theorem for Expansive Mappings in G-Metric Spaces. *Math. Sciences* (vol. 5, no. 50, pp.2463 – 2472). Int. J. Contemp.