UNIVERSITAS INDONESIA

PENGGUNAAN METODE TRANSPORTASI PADA JARINGAN DISTRIBUSI BARANG DALAM RANTAI PASOKAN

TESIS

INDRIYANI REBET

0906495375

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PENGGUNAAN METODE TRANSPORTASI PADA JARINGAN DISTRIBUSI BARANG DALAM RANTAI PASOKAN

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

INDRIYANI REBET

0906495375

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
JANUARI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	**: Indriyani Rebet**
NPM	**: 0906495375**
Tanda Tangan	**:**
Tanggal	**: 13 Januari 2012**

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh

Nama	: Indriyani Rebet
NPM	: 0906495375
Program Studi	: Matematika
Judul Tesis	: Penggunaan Metode Transportasi Pada Jaringan Distribusi Barang Dalam Rantai Pasokan

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji 1	: Dr.rer.nat.Hendri Murfi, M.Kom	( )
Penguji 2	: DR.Sri Mardiyati,M.Kom	(Sri Mardiyati)
Penguji 3	: Dr. Hengki Tasman	(Hengki)
Penguji 4	: Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom	( )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 13 Januari 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.Tesis ini dibuat sebagai salah satu syarat bagi penulis untuk memperoleh gelar Magister Sains di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Indonesia (UI).

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Bapak Prof. DR. Djati Kerami selaku ketua Program Magister Matematika FMIPA-UI dan Bapak Hendri Murfi,M.Kom.,Dr.rer.nat selaku sekretaris sekaligus pembimbing akademis pada Program Magister Matematika FMIPA-UI yang telah banyak memberikan saran dan arahan kepada penulis selama masa perkuliahan;

(2) Bapak Prof. DR. Djati Kerami sebagai Pembimbing yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam menyelesaikan tesis ini;

(3) Bapak DR. Yudi Satria, M.T selaku ketua Departemen Matematika FMIPA-UI dan Ibu Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku sekretaris Departemen Matematika FMIPA-UI;

(4) Bapak dan Ibu dosen Program Magister Matematika FMIPA-UI yang telah memberikan didikan, arahan, dan bimbingan kepada penulis selama masa perkuliahan;

(5) Ibu Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom yang telah membantu dalam menyelesaikan tesis ini;

(6) Teman-teman progran S2 Matematika terutama sdr Pieter John yang telah banyak memberi masukan;

(7) para staf Tata Usaha (TU) Departemen Matematika FMIPA-UI (Bapak Irwan, Ibu Juriah, Bapak Saliman, Ibu Santy N, dan Bapak Turino) yang

telah membantu penulis dalam pengurusan administrasi selama perkuliahan maupun selama proses pembuatan tesis ini;

(8) para staf perpustakaan Departemen Matematika FMIPA-UI (Bapak Ansori dan Ibu Via) yang telah membantu penulis dalam pencarian daftar pustaka selama proses pembuatan tesis ini hingga selesai;

(9) berbagai pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah membantu dalam penulisan tesis ini.

Akhir kata, penulis berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 13 Januari 2012

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

===
===

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah
ini:

Nama : Indriyani Rebet
NPM : 0906495375
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :
PENGGUNAAN METODE TRANSPORTASI PADA JARINGAN DISTRIBUSI BARANG DALAM RANTAI PASOKAN.

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Non eksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : **13 Januari 2012**
Yang menyatakan

(Indriyani Rebet)

ABSTRAK

Nama : Indriyani Rebet

Program Studi : Matematika

Judul : Penggunaan Metode Transporasi pada Jaringan Distribusi Barang dalam Rantai Pasokan

Produk yang dihasilkan oleh pabrik akan didistribusikan ke pengecer melalui distributor. Sehingga perlu ditentukan strategi terbaik untuk mendistribusikan produk dari pabrik ke distributor dan dari distributor ke pelanggan sesuai kebutuhan pelanggan. Masalah pendistribusian produk ini merupakan bagian dari masalah pengelolaan rantai pasokan.

Pada tesis ini dibahas pengelolaan rantai pasokan yang terdiri dua tahap. Pertama, tahap dimana produk yang dihasilkan pabrik didistribusikan ke distributor. Kedua, tahap dimana distributor mendistribusikan produk ke pengecer. Untuk menentukan penyelesaian pada setiap tahap digunakan metode transportasi. Selanjutnya untuk mencari penyelesaian secara keseluruhan dapat digunakan prinsip keoptimuman Bellman. Solusi optimal secara keseluruhan merupakan gabungan dari solusi optimal setiap tahap.

Kata kunci: Rantai pasokan, metode transportasi, prinsip ke optimuman Bellman.

ix + 66 halaman; 20 gambar; 10 tabel

DaftarPustaka : 8 (1980-2010)

ABSTRACT

Name : Indriyani Rebet

Study Program : Mathematics

Title : The Application of Transportation Method in Product Distribution Network of Supply Chain

Products that produced by a manufacturers are to be distributed to retailer through distributor. It is necessary to establish a best strategy to distribute the product from the manufacturer to the distributor and from the distributor to customer in line with customer's need. Product distribution problem is apparently a part of the management of supply chain problem.

In this thesis, it is described the management of supply chain which can be divided into two phases. The first phase is how the products produced by manufacturer are distributed to ditributors. The second phase is how the distributor distributes the products to retailers. To solve the problem in each phace, the transportation method is used futhermore, to fine the solution of the entire phases. Bellman Optimizing Principle is adopted. The optimal solutionof the whole problem is the combination of the optimal solution of each phase.

Keyword: Supply chain, transportation method, Bellman optimizing principle.

ix + 66 pages; 20 pictures; 10 tables

References : 8 (1980-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengelolaan rantai pasokan merupakan masalah yang sangat penting. Tujuan pengelolaan rantai pasokan adalah menentukan strategi yang paling baik untuk mengorganisasikan pabrik, transportasi, persediaan, jadwal produksi maupun jadwal pengiriman dapat berlangsung dengan biaya yang minimum.

Salah satu masalah terpenting dalam pengelolaan rantai pasokan adalah masalah perancangan jaringan distribusi sistem yang melibatkan penempatan pabrik dan gudang distribusi, dan menentukan strategi terbaik untuk mendistribusikan produk dari pabrik ke gudang dan dari gudang ke pelanggan (Rahimi, dkk., 2010).

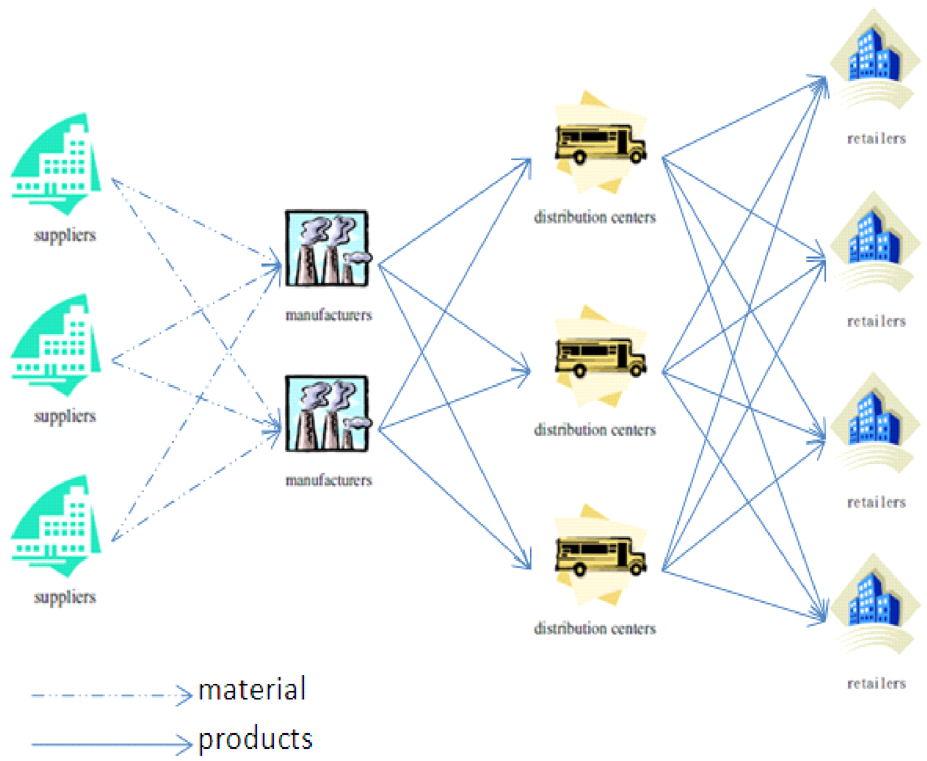
Beberapa penelitian tentang penyelesaian masalah rantai pasokan telah dilakukan diantaranya dengan pendekatan heuristik menggunakan *harmony search* dan pemrograman linier (Rahimi, dkk., 2010), algoritma genetika (Toni, 2009), co-*evolutional genetic algorithm* (Ying-Hua, dkk., 2008), maupun *mixed integer linear programming* (Vismanathan, Balasubramanian), dan lain-lain.

Dalam tesis ini menggunakan asumsi bahwa setiap tahap dalam rantai pasokan dapat diselesaikan secara tersendiri tahap pertahap menggunakan metode transportasi.

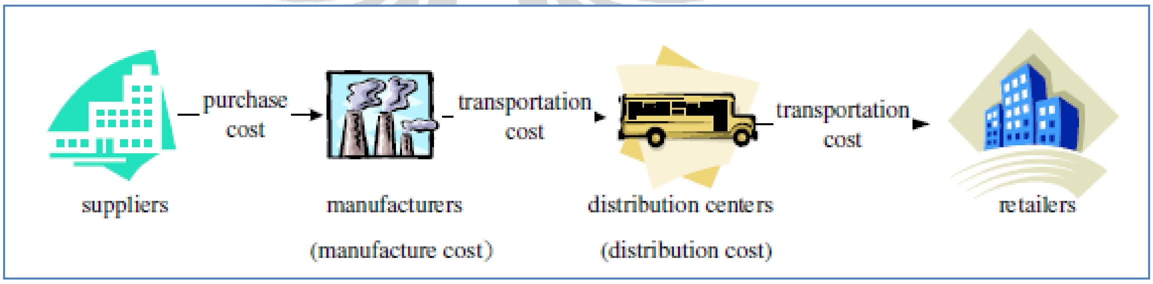
Pada Gambar 1.1 diberikan contoh rantai pasokan yang terdiri dari *supplier* (pemasok bahan baku), *manufacturer* (pabrik yang membuat produk), distributor (pendistribusi produk), dan *retailer* (pengecer) yang mendistribusikan produk ke konsumen.

Ilustrasi Gambar 1.1 memperlihatkan bahwa rantai pasokan dapat dibagi menjadi tiga tahap. Pertama adalah tahap dimana bahan baku didistribusikan ke pabrik. Selanjutnya tahap dimana pabrik mendistribusikan produk yang dihasilkannya ke distributor.Terakhir adalah tahap pendistribusian produk dari distributor ke pengecer.

Dalam setiap tahap tersebut dibutuhkan biaya-biaya, misalnya biaya pembelian bahan baku, biaya produksi, biaya transportasi, biaya penyimpanan, dan sebagainya. Biaya-biaya tersebut harus diminimalkan. Pada Gambar 1.2 diberikan ilustrasi biaya-biaya yang dapat terlibat dalam rantai pasokan.



Gambar 1.1 Contoh rantai pasokan dengan 3 pemasok bahan baku, 2 pabrik, 2 distributor dan 4 pengecer



Gambar1.2 Ilustrasi biaya dalam rantai pasokan

Tesis ini membahas masalah transportasi, yang melibatkan dua tahap yaitu pendistribusian produk dari pabrik ke distributor dan dari distributor ke pengecer. Setiap tahap dilihat sebagai sub masalah yang dapat diselesaikan dengan mempertimbangkan keadaan yang mungkin dan terkait pada tahap berikutnya hanya oleh keadaan akhir pada tahap sebelumnya. Dalam hal ini prinsip keoptimalan Bellman dapat dipergunakan. Setiap sub masalah akan diselesaikan dengan menggunakan metode transportasi.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah dalam tesis ini adalah bagaimana perusahaan merencanakan transportasi produk dari pabrik ke pengecer melalui jaringan distributor agar dapat melayani permintaan pelanggan sesuai dengan kapasitas produksi menggunakan biaya transportasi minimum pada setiap tahap.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tesis ini mencari perencanaan transportasi produk dari pabrik ke pengecer pada setiap tahap melalui jaringan distributor agar dapat melayani permintaan pelanggan sesuai dengan kapasitas produksi menggunakan biaya transportasi minimum.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam tesis ini adalah:

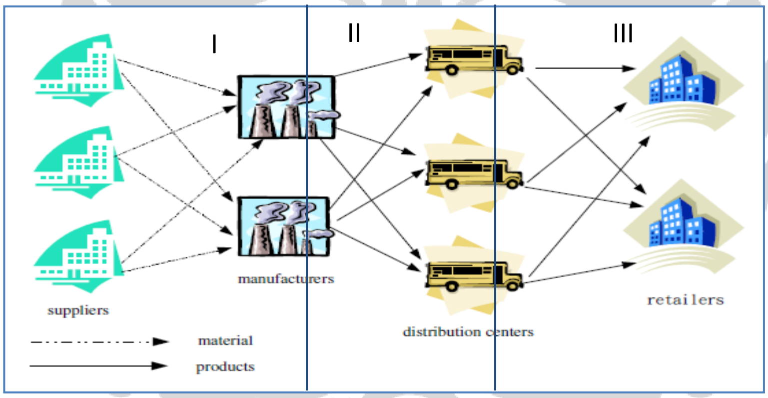
1. Biaya transportasi minimum yang dibahas adalah biaya transportasi dari pabrik ke pengecer melalui jalur distributor dengan satu jenis produk.
2. Model transportasi yang digunakan adalah model transportasi seimbang (total kapasitas pabrik, total kapasitas distributor dan total kapasitas pengecer adalah sama).

BAB 2

PENGERTIAN DASAR

2.1 Rantai Pasokan

Aliran pengadaan barang (produk) yang dimulai dari pemasok bahan baku, yang memasok bahan baku ke pabrik untuk diolah, kemudian didistribusikan ke gudang-gudang distributor untuk selanjutnya dikirim ke pengecer dinamakan rantai pasokan. Terdapat 3 tahap dalam rantai pasokan yaitu tahap distribusi bahan baku dari pemasok ke pabrik, tahap berikutnya adalah pendistribusian produk dari pabrik yang akan dikirimkan ke gudang-gudang distributor. Tahap selanjutnya produk yang disimpan di gudang akan di distribusikan kepengecer-pengecer. Pada Gambar 2.1 diberikan contoh rantai pasokan dengan 3 pemasok bahan baku, 2 pabrik, 3 distributor dan 2 pengecer.



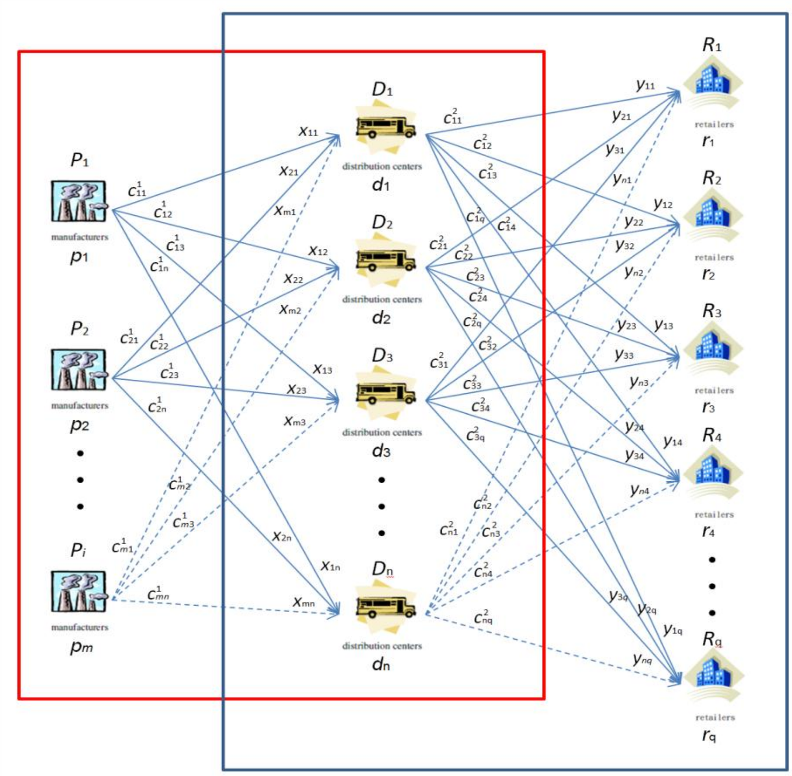
Gambar 2. 1 Contoh rantai pasokan dengan 3 pemasok bahan baku, 2 pabrik, 3 distributor dan 2 pengecer

Contoh rantai pasokan dua tahap diberikan pada Gambar 2.2. Tahap I ditunjukkan oleh kotak berwarna merah, yaitu distribusi produk dari pabrik ke distributor P_1, P_2, …, P_i menunjukkan pabrik ke-i, dengan kapasitas masing-masing p_i, i= 1, 2,…, m dan D_j menunjukkan distributor ke-j dengan kapasitas masing-masing d_j, j=1, 2,…, n kapasitas tiap pabrik. Banyaknya produk yang diangkut dari sumber (pabrik) ke-i ke tujuan distributor ke-j, i= 1, 2, …, m, j= 1. 2, …, n, adalah x_{ij} dan c_{ij}^1 menunjukkan biaya transportasi persatuan produk yang diangkut dari sumber ke-i ke tujuan ke-j.

Tahap II ditunjukkan oleh kotak berwarna biru, yaitu distribusi produk dari distributor ke pengecer R_k dengan kapasitas r_k , k=1, 2, ..., q.

Banyaknya produk yang diangkut dari distributor ke-j ke pengecer ke-k. j= 1, 2, ..., n; k= 1, 2,…, q, adalah y_{jk} dan c^2_{jk} menunjukkan biaya transportasi persatuan produk yang diangkut dari distributor ke-j ke pengecer ke-k. j= 1, 2, ..., n; k=1, 2,…, q.

Contoh rantai pasokan dua tahap:



Gambar 2. 2 Rantai pasokan dengan m pabrik, n distributor dan q pengecer beserta biaya-biaya dan kapasitasnya

Biaya transportasi pada tahap I yang digunakan untuk membiayai pengangkutan produk dari semua pabrik ke semua distributor dinyatakan sebagai

$$f = c^1_{11}x_{11} + c^1_{12}x_{12} + ... + c^1_{21}x_{21} + c^1_{22}x_{22} + ... + c^1_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c^1_{ij}x_{ij} .$$

Biaya transportasi pada tahap II yang digunakan untuk membiayai pengangkutan produk dari semua distributor ke semua pengecer dinyatakan sebagai

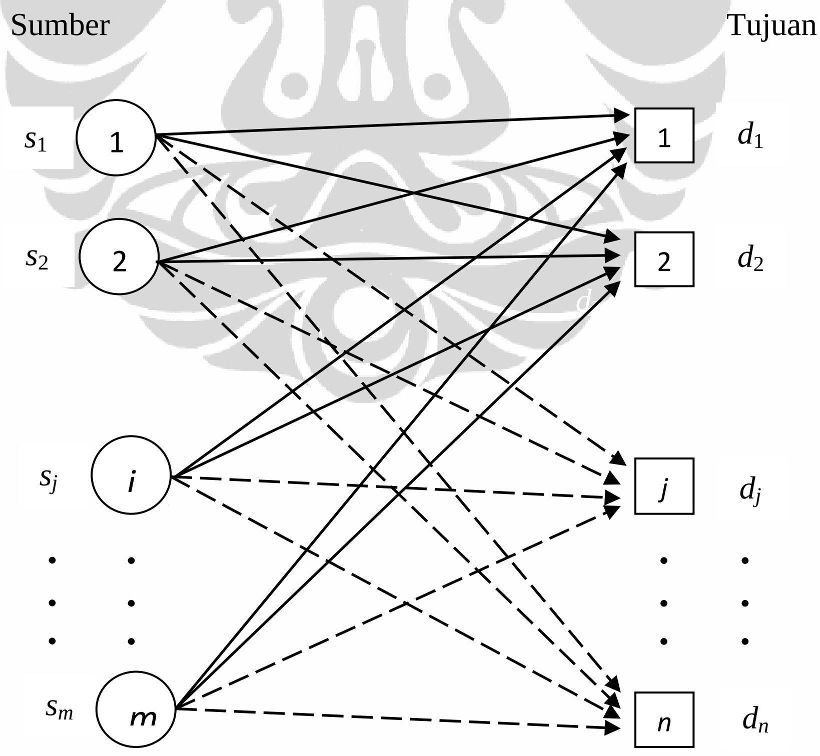
$$g = c^2_{11}y_{11} + c^2_{12}y_{12} + ... + c^2_{21}y_{21} + c^2_{22}y_{22} + ... + c^2_{mn}y_{mn} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} c^2_{ij}y_{ij} .$$

Oleh karena setiap tahap dapat dilihat sebagai sub masalah yang dapat diselesaikan dengan mempertimbangkan keadaan yang mungkin dan terkait pada tahap berikutnya hanya oleh keadaan akhir pada tahap sebelumnya, maka untuk menentukan keoptimuman dari masalah transportasi *n* tahap digunakan prinsip keoptimuman Bellman (1959). Prinsip keoptimuman Bellman akan dibahas pada sub bab 2.5.

Masalah rantai pasokan dapat dibagi menjadi beberapa tahap yaitu tahap distribusi bahan baku dari pemasok bahan baku ke pabrik, selanjutnya tahap distribusi produk yang telah dibuat oleh pabrik ke distributor dan tahap distribusi produk yang diangkut dari distributor ke pengecer-pengecer. Dalam tesis ini untuk mencari penyelesaian tiap tahap tidak digunakan program dinamik, melainkan menggunakan metode transportasi.

2.2 Masalah Transportasi

Model transportasi berkaitan dengan rencana penentuan biaya transportasi minimum untuk suatu produk dari sejumlah sumber ke sejumlah tujuan. Misalnya terdapat *m* sumber dan *n* tujuan yang meminta produk. Permasalahan ini dapat diperjelas melalui Gambar 2.3 berikut



Gambar 2.3 Model transportasi

Pada sumber ke-*i*, dengan *i*=1, 2, ..., *m*, terdapat s_i unit produk yang tersedia. Permintaan pada tujuan ke-*j*, dengan *j*=1, 2, ..., *n*, ditunjukkan oleh d_j.

Biaya transportasi satu unit produk dari sumber ke-*i* tujuan ke-*j* adalah c_{ij} . Misalkan $x_{ij}, i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n$, adalah jumlah produk yang dikirim dari sumber ke-*i* ke tujuan ke-*j*. Masalahnya adalah menentukan nilai x_{ij} yang akan meminimumkan keseluruhan biaya transportasi. Solusi optimal pada masalah transportasi disebut sebagai perencanaan transportasi(*transportation plan*).

Fungsi tujuan dari masalah transportasi ini adalah

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{1} x_{ij} .$$

Kendala pada masalah transportasi berkaitan dengan keterbatasan persediaan dan permintaan. Dengan memandang sumber ke-*i*, diperoleh kendala sumber ke-*i* yaitu

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i , \quad i = 1,2,...,m. \tag{2.1}$$

Dan dengan memandang tujuan ke-*j*, diperoleh kendala tujuan ke-*j* yaitu

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j , \quad j = 1,2,...,n. \tag{2.2}$$

Sehingga masalah transportasi dapat ditulis dalam Program Linier berikut ini

$$\min x_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{1} \ x_{ij} .$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i , i = 1,2,...,m. \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j , j = 1,2,...,n. \\ &x_{ij} \geq 0, i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,m. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Jika total permintaan sama dengan total produk yang dikirim maka diperoleh persamaan transportasi seimbang yaitu

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j .$$

Jika tidak seimbang digunakan cara rekaan (*dummy*). Namun yang dibahas pada tesis ini adalah model transportasi seimbang.

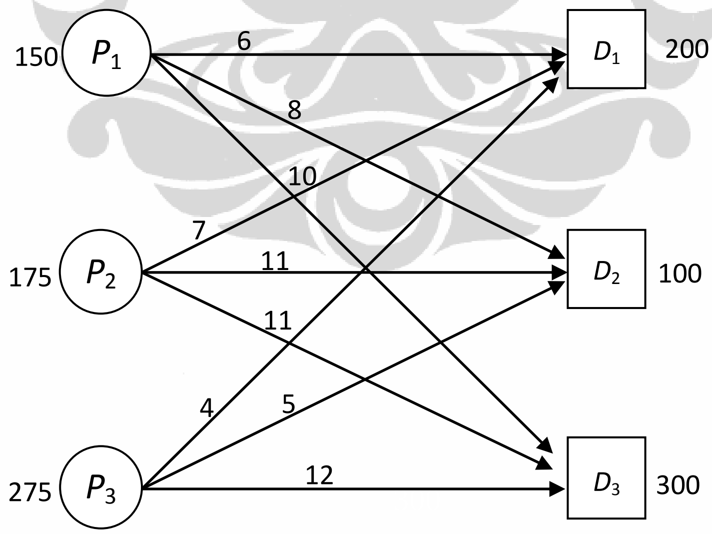
Berikut ini contoh masalah transportasi.

Contoh 2.1 Suatu perusahaan mempunyai 3 pabrik (P_1, P_2, P_3) yang membuat suatu produk tertentu. Produk yang dihasilkan dikirim ke distributor yang terletak di tiga kota yaitu D_1, D_2, D_3. Biaya transportasi persatuan produk dari pabrik ke distributor (dalam ribuan rupiah), banyaknya permintaan pada setiap distributor dan banyaknya persediaan pada setiap pabrik diberikan pada Tabel 2.1. Pertanyaannya adalah bagaimana perusahaan tersebut melakukan perencanaan transportasi produk dari pabrik ke distributor sesuai dengan kapasitas produksi menggunakan biaya transportasi minimum?

Tabel 2. 1 Tabel permintaan distributor dan kapasitas produksi dari pabrik beserta biaya transportasi perunit (dalam ribuan rupiah).

Pabrik	Distributor			Kapasitas Pabrik
	D_1	D_2	D_3	
P_1	6	8	10	150
P_2	7	11	11	175
P_3	4	5	12	275
Permintaan	200	100	300	600

Masalah pada contoh 2.1 secara diagram diberikan pada Gambar 2.4.



Gambar 2. 4 Diagram transportasi

Misalnya x_{ij} adalah banyaknya produk yang diangkut dari pabrik P_i ke distributor D_j, dengan i=1, 2, 3 dan j= 1, 2, 3. Biaya pengangkutan dari pabrik Pi ke distributor D_j adalah hasil kali biaya pengangkutan dengan banyaknya produk yang diangkut dari pabrik P_i ke distributor D_j sehingga total biaya transportasi dinyatakan dengan

$$f = 6x_{11} + 8x_{12} + 10x_{13} + 7x_{21} + 11x_{22} + 11x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 12x_{33}$$

dan fungsi tujuan adalah

$$\text{Min } f = 6x_{11} + 8x_{12} + 10x_{13} + 7x_{21} + 11x_{22} + 11x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 12x_{33}.$$

Kendala pabrik (asal)

$$P_1 : x_{11} + x_{12} + x_{13} = 150$$
$$P_2 : x_{21} + x_{22} + x_{23} = 175$$
$$P_3 : x_{31} + x_{32} + x_{33} = 275$$

Kendala distributor (tujuan)

$$D_1 : x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200$$
$$D_2 : x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100$$
$$D_3 : x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300$$

Kepositifan

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3$$

Karena pada kasus ini

$$\sum_{i=1}^{3} s_i = 150 + 175 + 275 = 600.$$

$$\sum_{j=1}^{3} d_j = 200 + 100 + 300 = 600.$$

Maka masalah transportasi pada Contoh 2.1 adalah transportasi seimbang.

2.3 Sifat-sifat Dari Masalah Transportasi

Dengan menggunakan notasi vektor

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} = \left[x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n,} x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}\right]^T$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \left[c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots, c_{1n,} c_{21}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mn}\right]^T$$

$$\mathbf{b}^{\mathbf{T}} = [s_1, s_2, \dots, s_m, d_1, d_2, \dots, d_n]^T$$

maka model transportasi pada persamaan (2.4) dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\min x_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

$$\text{Kendala} \begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

(2.5)

Dengan matriks A adalah matriks berukuran $(m+n)\times(mn)$ sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \cdots & & & \ddots & \cdots & & & \ddots \\ 0 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Terlihat bahwa *A* merupakan matriks dengan entri 0 dan 1 dimana pada setiap kolomnya muncul tepat 2 kali angka 1, sedangkan entri yang lain 0.

Misalkan e_i menyatakan vektor satuan yang seluruh entrinya 0 kecuali pada entri ke-i

Jika a_{ij} menyatakan vektor kolom ke- $[(i-1)n+j]$ dari matriks *A* maka

$$a_{ij} = e_i + e_{m+j}, i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n \quad (2.7)$$

Sebagai ilustrasi, perhatikan model pemrograman linier dari Contoh 2.1. Pada contoh tersebut terdapat 3 sumber dan 3 tujuan sehingga secara vektor

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} = [x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}]^T$$

$$\mathbf{c}^{\mathbf{T}} = [c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, c_{33}]^T$$

$$\mathbf{b}^{\mathbf{T}} = [s_1, s_2, s_3, d_1, d_2, d_3]^T$$

dengan fungsi tujuan adalah

$$\min x_0 = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \left(c_{11}^1, c_{12}^1, c_{13}^1, c_{21}^1, c_{22}^1, c_{23}^1, c_{31}^1, c_{32}^1, c_{33}^1\right)\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \left(c_{11}^1 x_{11} + c_{12}^1 x_{12} + c_{13}^1 x_{13}\right) + \left(c_{21}^1 x_{21} + c_{22}^1 x_{22} + c_{23}^1 x_{23}\right) + (c_{31}^1 x_{31} + (c_{31}^1 x_{31} + c_{32}^1 x_{32} + c_{33}^1 x_{33})$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\left(c_{i1}^1 x_{i1} + c_{i2}^1 x_{i2} + c_{i3}^1 x_{i3}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^1 x_{ij}.$$

dan kendala:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \end{pmatrix}$$

dimana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = e_i + e_{m+j}, i = 1,2,3; j = 1,2,3$$

$$a_{11} = e_1 + e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$a_{12} = e_1 + e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$a_{13} = e_1 + e_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Pada bagian ini akan diberikan sifat-sifat dari masalah transportasi. Namun sebelumnya akan diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan matriks.

Definisi 2.1

Misalnya A adalah matriks $m \times n$, dan nyatakan baris dari A dengan $r_1, r_2, ..., r_m$. Jika $R = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$, maka ***Rank*** dari A adalah jumlah maksimum banyaknya vektor pada sub himpunan R yang bebas linier (Winston, 1995, hal.29).

Definisi 2.

Jika $S = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor, dengan $v_i \neq \bar{0}$ maka persamaan vektor $k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_rv_r = 0$ memiliki paling tidak satu solusi, yaitu $k_1 = 0, k_2 = 0, ..., k_r = 0$.

Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan bebas linier.

Jika terdapat solusi-solusi lain maka S disebut himpunan tidak bebas linier (Anton, 2004, hal.249).

Telah diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan matriks, dan Misalkan A adalah matriks pada persamaan (2.5) setiap *minor* dari A hanya dapat bernilai salah satu diantara +1, -1, atau 0. Jika definisi tersebut akan digunakan untuk menjelaskan sifat-sifat masalah transportasi yang modelnya telah diberikan pada persamaan (2.5)

Teorema 2.1

Misalnya A adalah matriks $(m+n)\times(mn)$ yang merupakan matriks koefisien dari kendala sembarang masalah transportasi seimbang, maka ***Rank*** dari matrik $A = m+n-1$.(http//www.math.cuhk.edu.hk/~wei/ipch6.pdf, hal.3)

Bukti dari Teorema 2.1 dapat dilihat pada Lampiran 1.

Definisi 2.3

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka *minor* dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari sub matriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A (Anton, 2004, hal.115).

Teorema 2.2

Misalnya A adalah matriks $(m+n) \times (mn)$ yang merupakan matriks koefisien dari kendala sembarang masalah transportasi seimbang, maka setiap minor dari A hanya dapat bernilai salah satu diantara +1, -1, atau 0. Jika diberikan sebarang matriks A_k suatu sub matriks berukuran $k \times k$ diperoleh det $A_k = \pm 1$ atau 0.

(http//www.math.cuhk.edu.hk/~wei/ipch6.pdf, hal.3).

Bukti dari Teorema 2.2 dapat dilihat pada Lampiran 2.

Definisi 2.4

Suatu matriks A dikatakan ***unimodular*** jika setiap minor dari A bernilai salah satu diantara +1, -1 atau 0 (http//www.math.cuhk.edu.hk/~wei/ipch6.pdf, hal.3).

Selanjutnya matriks koefisien masalah transportasi adalah *totally unimodular*.

Dengan menggunakan sifat-sifat diatas dapat ditunjukkan bahwa masalah transportasi pasti memiliki solusi optimal. Misalkan diberikan masalah transportasi seperti persamaan (2.5), dapat dibuat

$$x_{ij} = \frac{s_i d_j}{\alpha}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j .$$

Yang merupakan solusi dari $Ax = b$. Dengan demikian masalah transportasi selalu mempunyai solusi layak. Karena x_{ij} dan c_{ij} non negatif,maka $x_0 \ge 0$, artinya fungsi obyektif dari masalah transportasi terbatas dibawah, dengan demikian masalah transportasi mempunyai solusi optimum.

Misalnya masalah persamaan (2.3) diselesaikan dengan metode simpleks. Karena *rank* $A = m + n - 1$ maka solusi dasar optimal, dari persamaan (2.3) hanya mempunyai $m + n - 1$ variabel dasar. Artinya tidak lebih dari $m + n - 1$ x_{ij} yang nilainya tidak 0. Untuk menyelesaikan persamaan (2.3) dengan metode simpleks, ubah terlebih dahulu menjadi bentuk standar dengan menambahkan $m+n$ variabel *artificial* ke persamaan (2.3). Maka diperoleh

$$\min x_0 = c^T x + M1^T x_\alpha$$

dengan kendala

$$[A, I]\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = b \qquad (2.8)$$

$$x, x_a \ge a$$

dengan x_a adalah variabel *artificial*. Karena solusi dasar layak ada, variabel *artificial* untuk masalah ini diarahkan ke-0. Karena persamaan (2.5) dan persamaan (2.8) mempunyai solusi optimal yang sama, solusi dasar optimal pada persamaan (2.8) mempunyai tidak lebih dari $m + n - 1$ variabel yang tidak 0, yaitu solusi dasar optimum pada persamaan (2.8) harus mempunyai paling sedikit 1 variabel buatan didalam basis pada tingkat nol (variabel buatan pada tingkat nol menunjukkan kelebihan persamaan). Misalkan ditemukan solusi dasar layak pada persamaan (2.8) juga solusi layak pada persamaan (2.5). Misalkan *B* adalah matriks dasar berukuran *m+n* dari [*A, I*] maka *B* memuat $m+n-1$ kolom dari *A* dan 1 vektor *artificial* yang bersesuaian dengan variabel *artificial* pada tingkat 0. Oleh karena itu dipertimbangkan $m+n-1$ vektor yang ditunjukkan oleh $a_{\alpha\beta}^{B}$ dan variabel dasar yang bersesuaian ditunjukkan oleh $x_{\alpha\beta}^{B}$.

Jika *B* = $\left[a_{\alpha\beta}^{B}, q\right]$ adalah matriks dasar untuk persamaan (2.8), maka didefinisikan *B*= $\left[a_{\alpha\beta}^{B}\right]$ sebagai matriks dasar untuk persamaan (2.5). Sembarang vektor kolom dari *B*, yaitu

$$a_{ij} = \sum_{\alpha\beta} y_{(\alpha\beta)(ij)} a_{\alpha\beta}^{B} \tag{2.9}$$

Dengan $\sum_{\alpha\beta}$ menyatakan penjumlahan atas semua vektor di basis.

Persamaan (2.9) hanya pengubahan persamaan

$$a_{ij} = By_{ij} \tag{2.10}$$

dengan B berukuran $(m+n)\times(m+n-1)$ yang berisi kolom $a_{\alpha\beta}^{B}$.

Dalam metode simpleks $y_{(\alpha\beta)(ij)}$ hanya entri didalam tabel simpleks pada iterasi terakhir.

Teorema 2.3

Koefisien-koefisien dari $y_{(\alpha\beta)(ij)}$ hanya bisa bernilai 1, -1, atau 0. (http//www. math.cuhk.edu.hk/~wei/ipch6.pdf, hal.3)

Bukti dari Teorema 2.3 dapat dilihat pada Lampiran 3.

Teorema 2.4 (Teorema *stepping stones*)

Misalnya *B*= { $a_{\alpha\beta}$} adalah himpunan *(m+n*-1) kolom-kolom yang bebas linier dari *A*. Maka untuk semua vektor kolom a_{ij} dari *A*, 1≤ *i*≤*m* ,1≤*j*≤*n* diperoleh

$$a_{ij} = a_{ii_1} - a_{i_2 i_1} + a_{i_2 i_3} - a_{1_4 i_3} - \ldots (-1)^k a_{i_k j}, \tag{2.11}$$

dimana $\boldsymbol{a_{ii_1}}$, $\boldsymbol{a_{i_1, i_{1+1}}}$; $\boldsymbol{a_{i_k j}}$ di B untuk $l = 1,\ldots,k-1$ Persamaan (2.8) unik (http//www. math.cuhk.edu.hk/~wei/ipch6, hal.5).

2.4 Metode Penyelesaian Masalah Transportasi

Metode penyelesaian masalah transportasi dapat dibagi dalam dua tahap penyelesaian yaitu penyelesaian awal yang layak dan pemeriksaan keoptimuman dan perbaikan penyelesaian untuk memperoleh penyelesaian yang optimum.

2.4.1 Penyelesaian Awal

Terdapat beberapa metode untuk mencari penyelesaian awal diantaranya: Pojok Kanan Atas (PKA), Tabel Minimum dan Aproksimasi Vogel (AV). Untuk mencari penyelesaian awal, pada tesis ini digunakan metode AV. Dibandingkan dengan dua cara yang lain, metode ini mempertimbangkan selisih biaya terkecil pada permintaan maupun persediaan. Penggunaan metode AV terdapat pada Tabel 2.2 .

Isi nilai $x_{ij}, i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,m$ pada sel-sel yang terdapat pada tabel 2.2

Pengisian tersebut dilakukan sedemikian hingga

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

dan

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j .$$

Tabel 2.2 Tabel masalah transportasi

Pabrik	Distributor				Kapasitas Pabrik
	D_1	D_2	$\cdots$	D_n	
P_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
P_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2m}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
P_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Permintaan	b_1	b_2	...	b_n	

Untuk melakukan pengisian pada sel-sel pada tabel digunakan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Untuk setiap baris, hitung penalti baris dan untuk setiap kolom isi penalti kolom, yaitu selisih antara biaya termurah pertama dengan biaya termurah kedua.

Langkah 2

Cari baris atau kolom dengan penalti terbesar. Pada baris atau kolom ini carilah biaya terkecil. Isi sel tersebut dengan minimum baris persediaan dan kolom permintaan. Bilangan yang diisikan pada sel tersebut disebut peubah basis. Kurangi baris persediaan dan kolom permintaan dengan nilai sel tersebut.

Langkah 3

Jika kolom permintaan menjadi 0 keluarkan kolom ini dari pertimbangan selanjutnya. Jika baris persediaan menjadi 0, keluarkan baris ini dari pertimbangan selanjutnya. Kemudian hitung penalti yang baru. Ulangi langkah ke dua sampai ketiga hingga semua baris dan kolom teralokasikan. Sel yang tidak terisi disebut peubah bukan dasar (peubah bukan basis). Untuk memperjelas langkah awal diberikan contoh untuk mencari penyelesaian awal dari masalah transportasi pada Contoh 2.1. Pada Contoh 2.1 penyelesaian awal yang layak dicari dengan menggunakan aproksimasi Vogel.

Langkah 1

Untuk setiap baris, hitung penalti baris dan untuk setiap kolom isi penalti kolom, yaitu selisih antara biaya termurah pertama dengan biaya termurah kedua. Hasilnya diberikan pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Tabel pertama penggunaan metode AV

Pabrik	Distributor			Kapasitas Pabrik	Penalti baris
	D_1	D_2	D_3		
P_1	6	8	10	150	2
P_2	7	11	11	175	4
P_3	4	5	12	275	1
Permintaan	200	100	300	600	
Penalti kolom	2	3	1		

Langkah 2

Cari baris atau kolom dengan penalti terbesar. Penalti terbesar adalah 4 terletak pada baris P_2. Biaya terkecil 7 terdapat pada kolom D_1, maka pada sel (P_2, D_1) isi dengan minimum (200, 175)=175. Persediaan di kolom D_1 tinggal 25 dan kapasitas pabrik P_2 teralokasikan seluruhnya.
Baris P_2 keluarkan dari pertimbangan berikutnya. Bilangan yang diisikan pada sel (P_2, D_1) disebut peubah basis.

Selanjutnya hitung penalti baris dan kolom yang baru, pilih penalti terbesar, pilih harga terkecil pada baris /kolom dengan penalti terbesar. Penalti terbesar terletak pada kolom D_2. Pada baris ini harga terkecil adalah 3, terletak pada baris P_3. Isi sel (P_3, D_2) dengan minimum (100, 275)=100. Kolom permintaan D_2 menjadi 0, dan baris persediaan P_3 tinggal 175. Keluarkan kolom D_2 dari pertimbangan selanjutnya.

Tabel 2.4 Tabel kedua penggunaan metode AV

Pabrik	Distributor			Kapasitas Pabrik	Penalti baris
	D_1	D_2	D_3		
P_1	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$ 150	~~150~~ 0	~~222~~
P_2	$\boxed{7}$ 175	$\boxed{11}$	$\boxed{11}$	~~175~~ 0	4
P_3	$\boxed{4}$ 25	$\boxed{5}$ 100	$\boxed{12}$ 150	~~275~~ ~~175150~~ 0	~~118~~
Permintaan	~~200~~ ~~25~~ 0	~~100~~ 0	300	600	
Penalti kolom	~~222~~	~~33~~	~~11 1~~		

Hitung kembali penalti baris dan kolom. Penalti terbesar 8 terdapat pada baris P_3, biaya terkecil 4 terdapat pada sel (P_3, D_1). Isi sel (P_3, D_1) dengan min (25, 175)=25. Permintaan pada kolom D_1 teralokasikan seluruhnya. Tinggal 2 sel yang belum terisi, sekarang sel (P_1, D_3) dapat diisi langsung dengan 150, dan sel (P_3, D_3) diisi dengan 150.

Tabel 2.5 Tabel penyelesaian awal yang diperoleh dari metode AV

Pabrik	Distributor D_1	D_2	D_3	Kapasitas Pabrik
P_1	6	8	10 150	150
P_2	7 175	11	11	175
P_3	4 25	5 100	12 150	275
Permintaan	200	100	300	600

Solusi pada tahap awal x_{13}=150, x_{21}=175, x_{31}=25, x_{32}=100, x_{33}=150, dan x_{ij}=0 untuk *i* dan *j* yang lain dengan *f* = 5.125.000,-

2.4.2 Pemeriksaan keoptimuman dan perbaikan penyelesaian.

Setelah diperoleh solusi awal akan diperiksa apakah solusi tersebut sudah optimal. Keoptimuman penyelesaian awal diperiksa melalui biaya reduksi dari peubah bukan basis, yaitu peubah x_{ij} yang berada dalam sel kosong, jika semua biaya reduksi peubah bukan basis bernilai positif maka penyelesaian awal merupakan penyelesaian yang optimum. Jika biaya reduksi dari peubah bukan basis negatif maka perlu dilakukan perbaikan penyelesaian.

Langkah-langkah pemeriksaan keoptimuman:

Langkah 1

Pastikan terdapat $m+n-1$ peubah basis.

Langkah 2

Biaya reduksi dihitung dengan menentukan indeks baris dan indeks kolom.

Indeks baris $u_i, i = 1,2,...,m$ dan indeks kolom $v_j, j = 1,2,...,n$.

Untuk setiap peubah basis $u_i + v_j = c_{ij}, c_{ij}$ biaya pada sel ij .

Langkah 3

Jika nilai indeks baris dan indeks kolom sudah diperoleh, hitung biaya reduksi dari peubah bukan basis. Biaya reduksi pada sel *i,j* adalah $c_{ij} - (u_i + v_j)$.

Langkah 4

Jika seluruh biaya reduksi positif, maka penyelesaian sekarang adalah penyelesaian optimum. Jika tidak seluruhnya positif, maka dilakukan perbaikan penyelesaian, kembali ke langkah 2.

Jika terdapat ke tidak optimuman pada penyelesaiannya, maka akan digunakan proses perbaikan penyelesaian dengan metode distribusi modifikasi. Perbaikan penyelesaian dilakukan dengan pergantian peubah basis,yaitu x_{ij} yang berada dalam sel terisi dalam tabel transportasi.

Proses ini dilakukan dengan memilih peubah yang masuk menjadi peubah basis dan peubah basis yang keluar menjadi peubah bukan basis.

Peubah bukan basis yang akan masuk menjadi peubah basis adalah peubah bukan basis dengan biaya tereduksi negatif.

Peubah basis yang keluar adalah peubah yang bernilai 0 setelah dilakukan modifikasi perubahan nilai. Ini dilakukan pada lintasan tertutup yang ditentukan lebih dulu.

Lintasan tertutup dibentuk dengan cara sebagai berikut. Sel dengan biaya tereduksi negatif diberi tanda “+”. Kemudian beri tanda “–” pada sel peubah basis, sehingga baris atau kolom dari peubah yang akan menjadi peubah basis tersebut seimbang. Urutan sel yang bertanda “+” lalu “–” membentuk lintasan tertutup. Hubungkan sel bertanda “+” dan “–”. Proses perubahan basis dilakukan dengan menentukan nilai terkecil dari sel dengan tanda negatif. Kurangi sel bertanda negatif dengan nilai terkecil tersebut dan tambahkan nilai sel bertanda positif dengan nilai yang sama. Peubah yang keluar dari peubah basis adalah yang bertanda negatif dengan nilai terkecil. Peubah yang masuk menjadi peubah basis adalah yang bertanda positif yang nilainya sama dengan nilai terkecil dari sel bertanda negatif.

Dengan demikian perbaikan penyelesaian sudah diperoleh. Langkah selanjutnya dilakukan pemeriksaan keoptimuman (kembali ke langkah2).

Sebagai ilustrasi akan dilakukan langkah perbaikan penyelesaian awal pada Contoh 2.1. Telah diperoleh solusi awal seperti yang terdapat pada Tabel 2.4

Langkah 1

Perhatikan kembali Tabel 2.4 Pastikan terdapat $(m+n-1)$ peubah basis (sel yang berisi). Pada masalah ini terdapat 3+3-1=5 sel terisi (5 peubah basis).

Langkah 2

Perhatikan peubah basis. Tentukan indeks baris $u_i, i = 1,2,...,m$ dan indeks kolom $v_j, j = 1,2,...,n$ dari setiap baris dan setiap kolom. Untuk setiap peubah basis $c_{ij} = u_i + v_j$ dimulai dengan memberikan nilai 0 untuk u_i.

Oleh karena x_{13} peubah dasar maka $u_1 + v_3 = 10$ atau 0+ v_3 = 10, memberikan v_3 =10.

Untuk $x_{21}, u_2 + v_1 = 7$

Untuk $x_{31}, u_3 + v_1 = 4$

Karena nilai u_3 dan v_1 belum diketahui maka hubungan ini akan digunakan kemudian.

Untuk $x_{33}, u_3 + v_3 = 12$ atau $u_3 + 10 = 12$, memberikan $u_3 = 2$

Kembali ke x_{32}, $u_3 + v_2 = 5$ atau 2+ $v_2 = 5$ memberikan $v_2 = 3$

Kembali ke $x_{31}, u_3 + v_1 = 4$, karena u_3 =2 maka $v_1 = 2$

Kembali ke x_{21}, $u_2 + v_1$ =7. u_2 +2=7, memberikan $u_2 = 5$

Dengan demikian seluruh nilai u_i dan v_j sudah diketahui. Indeks baris dan indeks kolom yang telah diperoleh dinyatakan dalam baris dan kolom tambahan seperti diberikan pada Tabel 2.6.

Tabel 2.6 Tabel pemeriksaan keoptimuman

Pabrik	Distributor			Kapasitas Pabrik	u_i
	D_1	D_2	D_3		
P_1	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{10}$ 150	150	0
P_2	$\boxed{7}$ 175	$\boxed{11}$ 3	$\boxed{11}$ -4	175	5
P_3	$\boxed{4}$ 25	$\boxed{5}$ 100	$\boxed{12}$ 150	275	2
v_j	2	3	10		

Langkah 3

Tentukan biaya reduksi untuk peubah bukan basis sebagai berikut.

Peubah bukan basis x_{11}, biaya reduksinya adalah $c_{11} - (u_1 + v_1) = 6 - 2 = 4$

Peubah bukan basis x_{12}, biaya reduksinya adalah c_{12} - $(u_1 + v_2) = 8 - 3 = 5$

Peubah bukan basis x_{22}, biaya reduksinya adalah $c_{22} - (u_2 + v_2) = 11 - 8 = 3$

Peubah bukanbasis x_{23}, biaya reduksinya adalah $c_{23} - (u_2 + v_3) = 11 - 15 = -4$

Biaya-biaya tersebut diletakkan pada pojok kanan bawah sel, seperti ditunjukkan pada Tabel 2.7.

Langkah 4

Pemeriksaan keoptimuman dilakukan sebagai berikut. Pilih peubah basis dengan biaya reduksi negatif. Peubah bukan basis dengan biaya negatif. Terdapat pada $c_{31} - z_{31} = -4$. Jadi keoptimuman belum tercapai. Oleh karena itu perlu dilakukan perbaikan penyelesaian.

Perbaikan penyelesaian dilakukan melalui proses pergantian peubah basis. Didalamnya terdapat proses pemilihan peubah yang masuk menjadi peubah basis dan peubah basis yang keluar menjadi peubah bukan basis. Peubah yang masuk menjadi peubah basis adalah peubah bukan basis yang dengan biaya reduksi ternegatif. Dalam contoh diatas hanya terdapat satu biaya reduksi yang negatif, yaitu biaya reduksi dari x23. Ini berarti x23 akan masuk menjadi peubah basis.

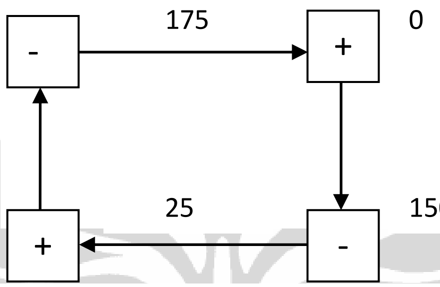
Tabel 2.7 Tabel pemeriksaan keoptimuman

Pabrik	Distributor			Kapasitas Pabrik
	D_1	D_2	D_3	
P_1	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{10}$ 150	150
P_2	$\boxed{7}$ 175	$\boxed{11}$ 3	$\boxed{11}$ -4	175
P_3	$\boxed{4}$ 25	$\boxed{5}$ 100	$\boxed{12}$ 150	275
Permintaan	200	100	300	600

Peubah basis yang akan keluar menjadi peubah bukan basis adalah yang bernilai 0 setelah dilakukan modifikasi perubahan nilai. Proses modifikasi ini dilakukan dengan membuat lintasan tertutup yang ditentukan lebih dahulu.

Sel dengan peubah bukan basis dengan biaya reduksi ternegatif diberi tanda “+”.Dalam hal ini adalah sel (P_2, D_3). Lanjutkan dengan memberi tanda “–” pada sel peubah basis (P_3, D_3), selanjutnya sel (P_3, D_1) diberi tanda positif, dan sel (P_2, D_1) diberi tanda " – " sehingga baris dari peubah bukan basis (P_2, D_3) tersebut seimbang. Tanda "–" menandakan nilai peubah didalamnya akan berkurang. Urutan sel-sel yang bertanda selang-seling "+", "–" membentuk lintasan tertutupyang disebut batu-lompatan. Tanda "+" menandakan bahwa nilai x_{31} dalam sel ini akan bertambah.

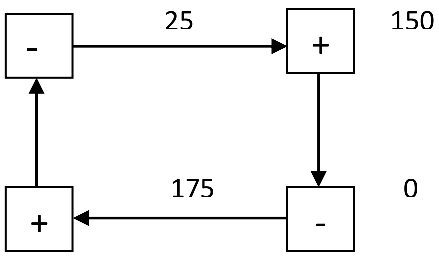
Pada setiap kolom terdapat sepasang tanda "+" dan " –". Hubungkan sel-sel yang bertanda berbeda akan terdapat lintasan tertutup seperti pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Lintasan tertutup

Peubah yang akan keluar adalah yang bertanda "–" dengan nilai paling kecil. Pada lintasan tertutup diatas terdapat dua sel bertanda "–" yaitu sel (P_2, D_1) dan (P_3, D_3) yang bernilai 175 dan 150, kurangi sel bertanda" – " dengan 150. Sel (P_3, D_3) menjadi 0 sehingga harus keluar dari peubah dasar.

Proses pergantian peubah bukan dasar menjadi peubah dasar dilakukan dengan cara menambahkan sebesar nilai peubah yang keluar dari peubah dasar yaitu 150 ke setiap sel yang bertanda "+". Dengan demikian peubah bukan dasar (P_2, D_3) menjadi bernilai 150 dan masuk menjadi peubah dasar. Lintasan tertutupnya setelah dilakukan perubahan, menjadi seperti ditunjukkan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Proses perubahan nilai x_{ij}

Menggunakan tabel transportasi, proses pergantian basis ini dapat dilihat pada Tabel 2.8.

Penyelesaian setelah distribusi modifikasi adalah

$x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 150, x_{21} = 25, x_{22} = 0, x_{23} = 150, x_{31} = 175, x_{32} = 100, x_{33} = 0$

Dengan total biaya transportasi Rp 4.525.000.-

Penyelesaian yang baru diperoleh diatas masih harus diperiksa kembali keoptimumannya.

Tabel 2.8 Tabel proses pergantian basis

Pabrik	Distributor			Kapasitas Pabrik
	D_1	D_2	D_3	
P_1	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$ 150	150
P_2	$\boxed{7}$ ~~175~~25 -	$\boxed{11}$	$\boxed{11}$ 150 + -4	175
P_3	$\boxed{4}$ ~~25~~175 +	$\boxed{5}$ 100	$\boxed{12}$ ~~150~~ -	275
Permintaan distributor	200	100	300	600

Pemeriksaan keoptimuman.

Untuk menentukan biaya reduksi pada peubah bukan dasar, tentukan terlebih dahulu indeks baris dan indeks kolom. Karena x_{11} peubah dasar, dengan cara memilih indeks baris u_i atau indeks kolom v_j yang bernilai 0, ambil v_j bernilai 0, maka u_i +0=6, dan diperoleh u_i =6.

Karena x_{13} peubah dasar, maka $u_1 + v_3 = 10$, diperoleh $v_3 = 4$

Karena x_{23} peubah dasar, maka $u_2 + v_3 = 11$, diperoleh $u_2 = 7$

Karena x_{31} peubahdasar , maka $u_3 + v_1 = 4$, diperoleh $u_3 = 4$

Karena x_{32} peubahdasar, maka $u_3 + v_2 = 5$, diperoleh $v_2 = 1$

Indeks baris dan indeks kolom disajikan dalam Tabel 2.9.

Tabel 2.9 Tabel pemeriksaan keoptimuman

Pabrik	Distributor			Kapasitas Pabrik	u_i
	D_1	D_2	D_3		
P_1	6 0	8 1	10 150	150	6
P_2	7 25	11 3	11 150	175	7
P_3	4 175	5 100	12 4	275	4
Permintaan Distributor	200	100	300	600	
v_j	0	1	4		

Perhitungan biaya reduksi.

Biaya reduksi sel (P_1, D_1) adalah 6-(6+0)=0

Biaya reduksi sel (P_1, D_2) adalah 8-(6+1)=1.

Biaya reduksi sel (P_2, D_2) adalah 11-(7+1)=3.

Biaya reduksi sel (P_3, D_3) adalah 12-(4+4)=4.

Karena semua biaya reduksi sudah positif atau 0 maka penyelesaian terakhir sudah optimum.

Setelah dilakukan pemeriksaan keoptimuman pada proses perbaikan penyelesaian ternyata hasil yang diperoleh sudah optimum. Sehingga penyelesaian masalah transportasinya adalah

$$x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 150, x_{21} = 25, x_{22} = 0, x_{23} = 150, x_{31} = 175, x_{32} = 100, x_{33} = 0\,.$$

Total biaya transportasi Rp 4.525.000,-

Ini berarti bahwa agar permintaan distributor di kota D_1, D_2, D_3 dapat dilayani sesuai kapasitas pabrik P_1, P_2, P_3 dengan biaya transportasi yang minimum. Dari P_1 diangkut sebanyak 150 produk ke D_3, dari P_2 diangkut 25 produk ke D_1, 150 produk P_2 diangkut ke distributor D_3, 175 produk P_3 diangkut ke D_1 dan sisanya 100 produk diangkut ke D_2.

Tabel 2.10 Tabel hasil akhir distribusi produk dari pabrik ke pengecer

Pabrik	Distributor			Kapasitas Pabrik
	D_1	D_2	D_3	
P_1	6	8	10 150	150
P_2	7 25	11	11 150	175
P_3	4 175	5 100	12	275
Permintaan distributor	200	100	300	

Untuk merencanakan transportasi produk dari pabrik kegudang distributor, dan dari gudang ke pelanggan, rantai pasokan dibagi menjadi beberapa tahap. Pada setiap tahap, produk yang akan dikirim ke bagian lain dihitung dengan metode transportasi. Seperti telah diuraikan sebelumnya masalah transportasi memiliki solusi optimal. Selanjutnya untuk menentukan keoptimuman masalah transportasi dari keseluruhan tahap akan dibahas prinsip keoptimuman Bellman.

2.5 Prinsip Keoptimuman Bellman

Prinsip keoptimuman Bellman merupakan dasar dalam pemecahan masalah keoptimuman menggunakan pendekatan pemrograman dinamik. Dalam hal ini masalah dibagi menjadi barisan beberapa sub masalah keoptimuman.

Adapun prinsip keoptimuman Bellman adalah: apapun keadaan awal dan keputusan awal, keputusan optimum selanjutnya membentuk kebijakan optimum dengan memperhatikan keadaan yang dihasilkan oleh keputusan awal (Wayne L.Winston, 1995, hal.772).

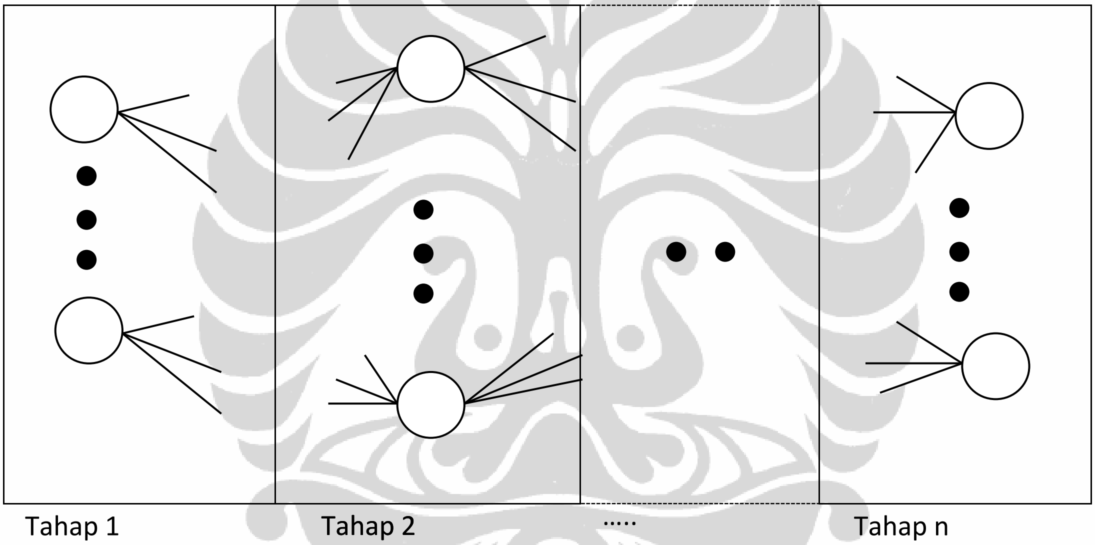
Prinsip keoptimuman tersebut berdasarkan pada pemrograman dinamik, sehingga permasalahan yang akan diselesaikan harus memenuhi karakteristik program dinamik. Adapun karakteristik program dinamik adalah :

1. Permasalahan dapat dibagi menjadi tahapan dimana pada setiap tahap keputusan akan diambil.
2. Tiap tahap mempunyai sejumlah keadaan terkait.

3. Keputusan yang diambil pada setiap tahap menjelaskan bagaimana keadaan pada tahap ini ditransformasikan ke keadaan pada tahap selanjutnya.
4. Diberikan keadaan sekarang kebijakan optimal pada setiap tahap yang tersisa tidak bergantung pada keadaan yang dicapai sebelumnya atau kebijakan yang telah diambil sebelumnya.
5. Hubungan rekursif untuk memperoleh solusi optimum untuk tahap t, dengan solusi optimum untuk tahap t+1, t+2,… telah diketahui. Rumusnya menjadi

$$f_{t+1}(i) = \min_{j} \{ c_{ij} + f_{t+2}(i) \}$$

Prinsip tersebut digunakan dalam masalah keoptimuman dalam jaringan multitahap. (Perhatikan Gambar 2.7).



Gambar 2.7 Jaringan *n* tahap

keseluruhan jaringan terbentuk dengan mempertimbangkan keputusan optimum yang dihasilkan pada tahap awal. Dengan perkataan lain, keputusan optimum tahap akhir merupakan keputusan optimum dari jaringan seluruh tahap. Dalam hal ini dalam jaringan n–1 tahap, keputusan optimum tahap ke-n dibentuk dengan mempertimbangkan keputusan optimum tahap ke-(n-1). Keputusan optimum tahap ke-(n-1) dibentuk dengan mempertimbangkan keputusan optimum tahap ke-(n-2). Demikian seterusnya, keputusan tahap ke-2 dibuat dengan keputusan optimum tahap ke-1(tahap awal) sebagai keputusan awal.

Dengan prinsip keoptimuman tersebut, rumus matematis yang terbentuk merupakan rumus rekursif

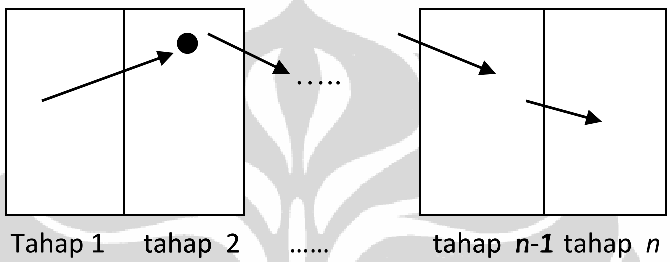
Optimum f = optimum(f_n(Optimum f_{n-1}(…..(optimum(f_0))…))

dengan, f : fungsi keputusan seluruh tahap.

f_i: fungsi keputusan tahap ke-i, i= 0, 1, 2,…, n.

Masalah dalam jaringan yang banyak dikenal menggunakan pemrograman dinamik adalah masalah menentukan lintasan terpendek dari suatu simpul (tahap awal) ke suatu simpul akhir (tahap n). Dalam setiap tahap dibentuk lintasan terpendek (optimum) dengan mempertimbangkan keoptimuman lintasan dari tahap sebelumnya.

Adapun skema lintasan terpendek pada seluruh tahap adalah sebagai berikut.



Gambar 2.8 Skema lintasan terpendek

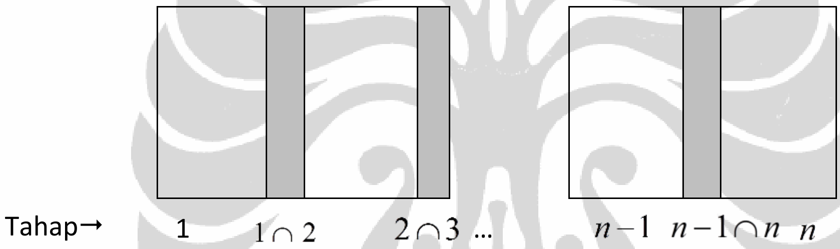
Pada skema Gambar 2.8 diatas, tahap ke-1 dihasilkan busur awal, pada tahap ke-2 dihasilkan busur kedua sebagai sebagai kelanjutan busur awal, demikian seterusnya sampai tahap ke-n, sehingga terbentuk lintasan terpendek. Pada tesis ini, jaringan yang dibahas merupakan jaringan transportasi distribusi barang dalam suatu rantai pasokan. Jaringan ini terbagi menjadi beberapa tahap transportasi.

BAB 3
PEMBAHASAN

3.1 JaringanTransportasi Distribusi Barang Pada Rantai Pasokan.

Pada bagian ini akan dibahas asumsi-asumsi agar rancangan transportasi barang dari pabrik– distributor -pengecer yang meminimumkan biaya dapat diperoleh, dan ilustrasi beberapa kasus yang diikuti dengan penyelesaian masalahnya dengan bantuan program komputer.

Secara skematis,jaringan transportasi distribusi barang pada rantai pasokan dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1 Skema 1 transportasi

Pada skema Gambar 3.1 di atas, terdapat bagian 2 tahapan yang saling tumpang tindih. Hal ini karena pada bagian tersebut terdapat aktivitas penurunan dan pemuatan barang. Berbeda dengan skema pada Gambar 2.8 sebelumnya, dimana tidak ada kegiatan penurunan dan pemuatan barang. Kendaraan yang digunakan langsung melewati tempat-tempat antara, karena yang dipertimbangkan adalah lintasan terpendeknya.

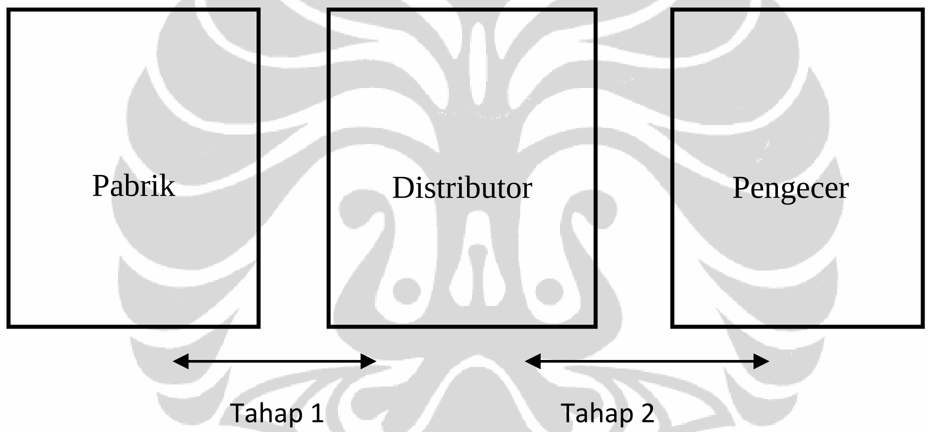
Oleh karena itu perlu ditambahkan asumsi agar skema 1 dianggap sebagai skema 2 (Gambar 3.2) sehingga prinsip keoptimuman Bellman berlaku.
Dengan mempertimbangkan masalah dalam jaringan distribusi barang pada rantai pasokan berhubungan dengan biaya, maka asumsi yang ditambahkan adalah sebagai berikut:

(i) Pada setiap akhir dan awal di setiap tahap tidak dipertimbangkan biaya penurunan dan pemuatan barang.

(ii) Kendaraan transportasi tersedia.

Jadi, dalam hal ini untuk jaringan distribusi barang dari pabrik ke pengecer, dianggap bahwa tidak dipertimbangkan biaya penurunan barang (dari kendaraan transportasi) yang akan disimpan di gudang distributor dan biaya pemuatan barang dari gudang ke kendaraan transportasi. Demikian juga tidak dipertimbangkan biaya penurunan barang dari kendaraan transportasi ke gudang pengecer.

Dengan asumsi di atas, maka pada jaringan distribusi barang dalam suatu rantai pasokan dapat diperoleh rancangan transportasi barang dari pabrik–distributor pengecer yang meminimumkan biaya (Gambar 3.2)



Gambar 3.2 Skema 2 transportasi

Jadi, apabila pada tahap1diperoleh rancangan transportasi optimum dan juga pada tahap 2 diperoleh rancangan transportasi optimum, maka akan diperoleh juga rancangan transportasi optimum secara keseluruhan, yaitu dari pabrik-distributor-pengecer.

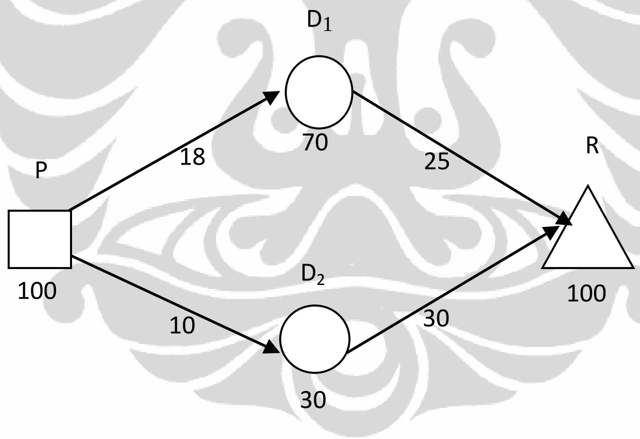
3.2 Ilustrasi Penyelesaian Masalah Rantai Pasokan dengan MetodeTransportasi

Dalam tesis ini masalah rantai pasokan yang dibahas adalah rantai pasokan dengan dua tahap. Masing-masing tahap diselesaikan dengan metode transportasi. Pada bab ini diberikan ilustrasi penyelesaian masalah rantai pasokan dengan metode transportasi yang diberikan untuk 4 kasus yang dimulai dari kasus yang paling sederhana.

Untuk membantu melakukan simulasi untuk ilustrasi dibuat program listing yang terdapat pada lampiran 4, 5, 6, 7 dan 8 (simulasi 3, transportasi, metode AV, U-V dan Modif-dist). Lampiran 9 dan 10 adalah output program ilustrasi kasus 3 dan kasus 4.

Kasus 1 (1 pabrik, 2 distributor dan 1 pengecer)

Misalkan lokasi pabrik berada pada satu kota P dengan kapasitas 100 unit. Gudang distributor terletak di dua kota D_1 dan D_2 dengan kapasitas d_1=70 unit dan d_2= 30 unit. Biaya transportasi dari pabrik kedistributor $c_{11}^{1} = 18$ dan $c_{12}^{1} = 10$. Terdapat satu pengecer R, dengan jumlah permintaan 100 unit. Biaya transportasi dari distributor ke pengecer R, $c_{11}^{2} = 25$ dan $c_{12}^{2} = 30$. Maka masalah perencanaan transportasinya diberikan dalam Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Rantai pasokan yang menghubungkan 1 pabrik, 2 distributor dan 1 pengecer

Masalah ini akan dibagi menjadi 2 tahap. Tahap I dari pabrik ke distributor dan tahap II dari distributor ke pengecer.

Terlihat dengan jelas bahwa penyelesaian untuk tahap I adalah

	x_{11}	x_{12}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	70	30	
Biaya tiap unit	18	10	
Biaya transportasi	1260	300	1560

Artinya diangkut sejumlah 70 unit barang dari pabrik ke distributor D_1 dan30 unit barang diangkut ke distributor D_2 sehingga dalam menyelesaikan tahap II, tersedia 70 unit barang di distributor D_1 dan 30 unit barang di distributor D_2. Total biaya transportasi Rp 1.560.000,-.

Penyelesaian tahap II adalah

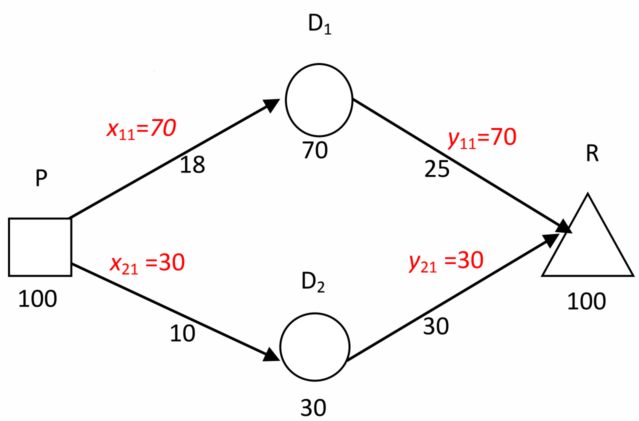
	y_{11}	y_{12}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	70	30	
Biaya tiap unit	25	30	
Biaya transportasi	1750	900	2650

Jumlah produk yang diangkut ke pengecer *R* dari distributor D_1=70 unit dan dari D_2=30 unit, dengan total biaya pengangkutan Rp 2.650.000,- Penyelesaian secara keseluruhan adalah:

	Tahap I		Tahap II		Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
	x_{11}	x_{12}	y_{11}	y_{21}	
Nilai	70	30	70	30	
Biaya tiap unit	18	10	25	30	
Biaya transportasi	1260	300	1750	900	4210

Secara diagram dapat dilihat pada Gambar 3.4

Dari pabrik barang diangkut ke pengecer *R* melalui distributor D_1 sebanyak 70 unit dan ke pengecer *R* melaluidistributor D_2 sebanyak 30 unit. Total biaya transportasi adalah penjumlahan biaya transportasi tahap I dan tahap II yaitu Rp 4.210.000,-

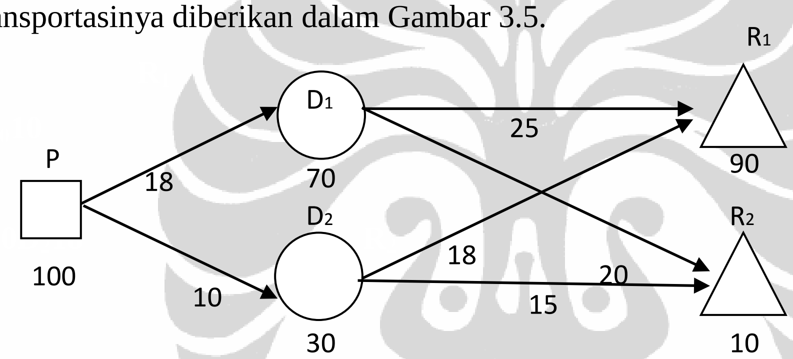


Gambar 3.4 Perencanaan transportasi produk pada rantai pasokan yang menghubungkan 1 pabrik, 2 distributor dan 1 pengecer

Selanjutnya akan diberikan kasus dimana terdapat 1 pabrik, 2 distributor, dan 2 pengecer.

Kasus 2(1 pabrik, 2 distributor dan 2 pengecer)

Misalkan lokasi pabrik berada di satu kota P dengan kapasitas 100 unit. Gudang distributor terletak di dua kota D_1 dan D_2 dengan kapasitas d_1=70 unit dan d_2= 30 unit. Biaya transportasi dari pabrik ke distributor $c^1{}_{11}$=18 dan $c^1{}_{12}$=10. Pengecer berlokasi di dua kota yaitu R_1 dan R_2, masing-masing dengan permintaan r_1=90 unit dan r_2=10 unit. Biaya transportasi dari distributor D_1 ke pengecer R_1dan R_2 adalah $c_{11}^2 = 25$ dan $c_{12}^2 = 20$. Biaya transportasi dari D_2 ke pengecer R_1 dan R_2, adalah $c_{21}^2 = 18$ dan $c_{22}^2 = 15$. Masalah perencanaan transportasinya diberikan dalam Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Rantai pasokan yang terdiri dari 1 pabrik,2 distributor dan 2 pengecer

Masalah diatas dapat dibagi dalam dua tahap, tahap I dari pabrik ke distributor dan tahap II dari distributor ke pengecer.Tiap tahap dapat diselesaikan dengan metode transportasi.

Terlihat dengan jelas penyelesaian untuk tahap I

	x_{11}	x_{12}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	70	30	
Biaya tiap unit	18	10	
Biaya transportasi	1260	300	1560

Jumlah barang yang diangkut dari pabrik ke distributor D_1=70 unit dan jumlah barang yang diangkut dari pabrik ke distributor D_2=30 unit, sehingga dalam menyelesaikan tahap II tersedia 70 unit barang di D_1 dan 30 unit barang di D_2

Total biaya pengangkutan Rp 1.560.000,-.

Tahap II diselesaikan dengan menggunakan metode transportasi.

Penyelesaian tahap II dengan metode transportasi adalah:

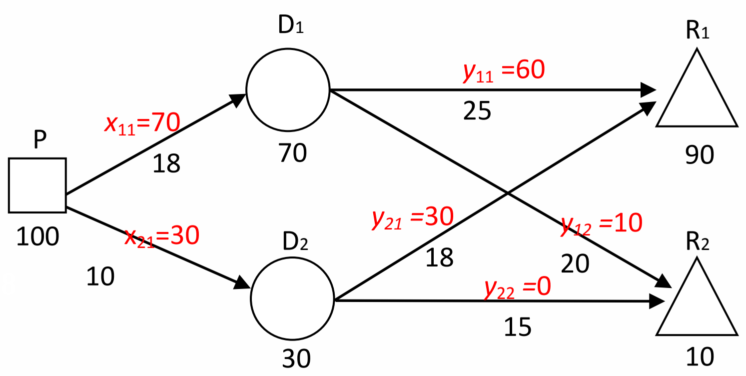
	y_{11}	y_{12}	y_{21}	y_{22}	Total Biayatransportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	60	10	30	0	
Biaya tiap unit	25	20	18	15	
Biaya transportasi	1500	200	540	0	2240

Artinya jumlah barang yang diangkut ke pengecer R_1 dari distributor D_1=60 unit dan dari D_2=30 unit. Jumlah barang yang diangkut ke pengecer R_2 dari distributor D_1=10 unit. Pada kasus ini tidak ada pengiriman barang ke pengecer R_2 melalui distributor D_2. Total biaya pengangkutan dari semua distributor ke semua pengecer adalah Rp 2.240.000,-. Penyelesaian secara keseluruhan adalah

	Tahap I		Tahap II				Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
	x_{11}	x_{12}	y_{11}	y_{12}	y_{21}	y_{22}	
Nilai	70	30	60	10	30	0	
Biaya tiap unit	18	10	25	20	18	15	
Biayatransportasi	1260	300	1500	200	540	0	3800

Secara diagram dapat dilihat pada Gambar 3.6

Penyelesaian secara keseluruhan adalah dari pabrik, barang diangkut ke pengecer R_1 sebanyak 60 unit melalui distributor D_1 dan diangkut 30 unit ke pengecer R_1 melalui distributor D_2. Sedangkan yang diangkut ke pengecer R_2 melalui D_1 adalah10 unit. Total biaya transportasi untuk mengangkut barang dari pabrik ke semua pengecer melalui distributor adalah Rp3.800.000. Dengan asumsi tidak ada biaya menaikkan atau menurunkan barang, artinya pabrik, distributor maupun pengecer milik perusahaan yang sama.

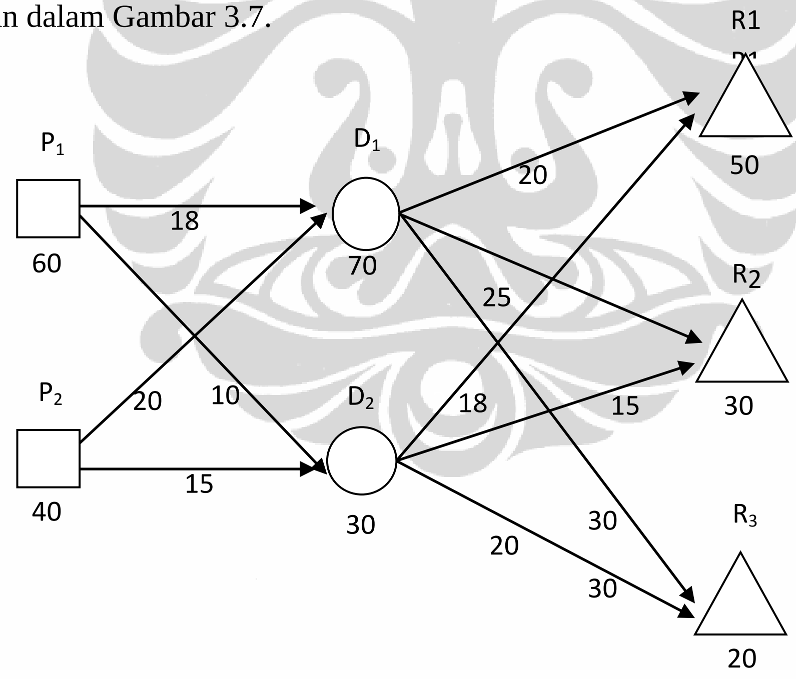


Gambar 3.6 Perencanaan transportasi barang pada rantai pasokan yang terdiri dari 1 pabrik, 2 distributor dan 2 pengecer

Kasus selanjutnya yang akan dibahas adalahkasus dimana terdapat 2 pabrik, 2 distributor dan 3 pengecer.

Kasus 3 (2 pabrik, 2 distributor dan 3 pengecer)

Jika lokasi pabrik terletak di dua kota, P_1 dan P_2 dengan kapasitas $p_{1=}$60 unit, p_2=40 unit. Gudang distributor juga terletak di dua kota D_1 dan D_2 dengan kapasitas d_1=70 unit dan d_2= 30 unit. Biaya transportasi dari pabrik ke distributor D_1 adalah $c^1_{11} = 18$ dan $c^1_{12} = 10$, sedangkan biaya transportasi dari pabrik ke distributor D_2 adalah $c^1_{21} = 20$ dan $c^1_{22} = 15$. Pengecer berlokasi di tiga kota yaitu R_1, R_2 dan R_3 masing-masing dengan permintaan r_1=50 unit, r_2=30 unit dan r_3 =20 unit. Biaya transportasi dari distributor D_1 ke pengecer R_1, R_2 dan R_3 adalah $c^2_{11} = 20, c^2_{12} = 25$ dan $c^2_{13} = 30$. Biaya transportasi dari D_2 ke pengecer R_1, R_2 dan R_3, adalah $c^2_{21} = 18$, $c^2_{22} = 15$ dan $c^2_{23} = 20$. Masalah perencanaan transportasinya diberikan dalam Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Rantai pasokan yang terdiri dari 2 pabrik,
2 distributor dan 3 pengecer

Untuk menyelesaikan tahap I digunakan metode transportasi. Dengan menggunakan program diperoleh solusi awal sebagai berikut

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	30	30	40	0	
Biaya tiap unit	18	10	20	15	
Biaya transportasi	540	300	800	0	1640

Setelah dilakukan pemeriksaan dengan program, ternyata solusi awal sudah optimum, sehingga solusi tahap I adalah:

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	30	30	40	0	
Biaya tiap unit	18	10	20	15	
Biaya transportasi	540	300	800	0	1640

Artinya dari pabrik P_1 diangkut produk sebanyak 30 unit ke distributor D_1 dan 30 unit ke D_2. Produk yang dikirim dari pabrik P_2 ke distributor D_1 adalah 40 unit. Sehingga D_1 menerima70 unit dan D_2 menerima 30 unit. Dalam kasus ini tidak ada pengiriman barang dari pabrik P_2 ke distributor D_2 sehingga dalam menyelesaikan tahap II pada D_1 tersedia 70 unit, dan pada D_2 tersedia 30 unit. Total biaya transportasi untuk mengangkut produk dari kedua pabrik ke semua distributor adalah Rp 1.640.000,-

Tahap II diselesaikan dengan metode transportasi. Dengan menggunakan program diperoleh solusi awal sebagai berikut:

	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	50	0	20	0	30	0	
Biaya tiap unit	20	25	30	18	15	20	
Biaya transportasi	1000	0	600	0	450	0	2050

Setelah dilakukan pemeriksaan dengan program, ternyata solusi awal sudah optimum, sehingga solusi tahap II adalah:

	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	50	0	20	0	30	0	
Biaya tiap unit	20	25	30	18	15	20	
Biaya transportasi	1000	0	600	0	450	0	2050

Artinya jumlah produk yang diangkut ke pengecer R_1 dari distributor D_1=50 unit. Dari distributor D_1 ke pengecer R_3 = 20 unit dan dari D_2 ke pengecer R_2= 30 unit, tidak ada pengangkutan barang dari D_1 ke R_2 dan dari D_2 ke pengecer R_1 maupun R_3. Total biaya pengangkutan Rp 2.050.000,-

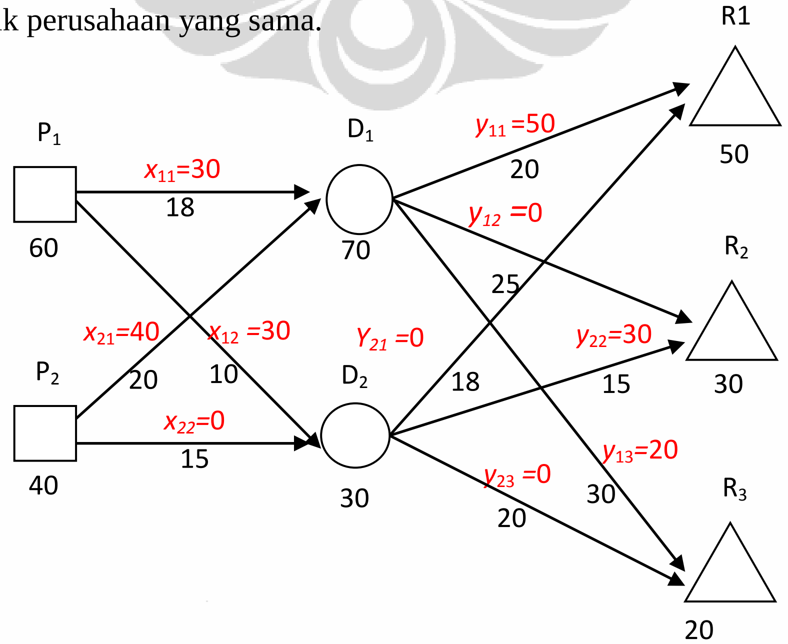
Hasil lengkap dari program untuk kasus 3 dapat dilihat pada lampiran 9.

Sehingga penyelesaian secara keseluruhan adalah

	Tahap I			Tahap II			Total Biaya Transportasi (dalam ribuan rupiah)
	x_{11}	x_{12}	x_{21}	y_{11}	y_{13}	y_{22}	
Nilai	30	30	40	50	20	30	
Biaya tiap unit	18	10	20	20	30	15	
Biaya transportasi	540	300	800	1000	600	450	3690

Secara diagram dapat dilihat pada Gambar 3.8

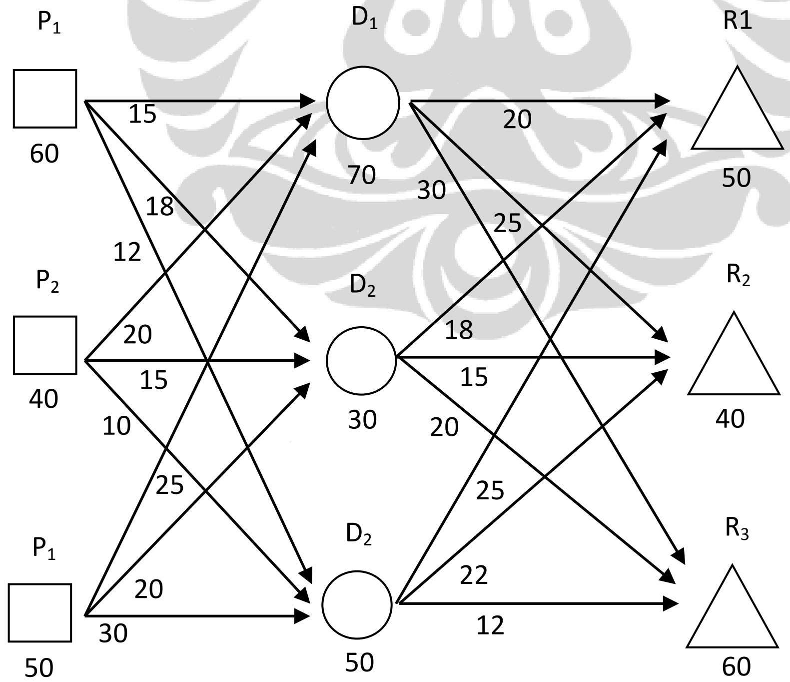
Dari pabrik P_1 dan P_2 jumlah produk yang diangkut ke pengecer R_1 melalui distributor D_1 sebanyak 50 unit, dari pabrik P_1 dan P_2 dikirim ke pengecer R_2 melalui D_2 sebanyak 30 unit. Dari pabrik P_1 dan P_2 jumlah produk yang diangkut ke R_3 melalui D_1 adalah 20 unit, sehingga pengecer R_1 menerima 50 unit produk dan pengecer R_2 menerima 30 unit produk. Pengecer R_3 menerima 20 unit. Sehingga total biaya transportasi Rp3.690.000,- . Dengan anggapan tidak ada biaya menaikkan atau menurunkan barang, artinya pabrik, distributor maupun pengecer milik perusahaan yang sama.



Gambar 3.8 Perencanaan Transportasi produk pada rantai pasokan yang terdiri dari 2 pabrik, 2 distributor dan 3 pengecer

Kasus 4 (3 Pabrik, 3 Distributor dan 3 Pengecer).

Jika lokasi pabrik berada di tiga kota, dengan kapasitas p_{1}=60 unit, p_2=40 unit dan p_3 =50 unit. Gudang distributor juga terletak di tiga kota D_1, D_2 dan D_3 dengan kapasitas d_1=70 unit, d_2= 30 unit dan d_3 =50 unit. Sedangkan biaya transportasi dari pabrik ke distributor D_1 adalah $c_{11}^1 = 15$, $c_{12}^1 = 18$ dan $c_{13}^1 = 12$, biaya transportasi ke distributor D_2 adalah $c_{21}^1 = 20$, $c_{22}^1 = 15$ dan $c_{23}^1 = 10$ dan biaya transportasi dari pabrik ke distributor D_3 adalah $c_{31}^1 = 25$, $c_{32}^1 = 20$ dan $c_{33}^1 = 30$ Pengecer juga berlokasi di tiga kota yaitu R_1, R_2 dan R_3 masing-masing dengan permintaan r_1=50 unit, r_2=60 unit dan r_3 =40 unit. Biaya transportasi dari distributor D_1 ke pengecer R_1, R_2 dan R_3 adalah $c_{11}^2 = 20$, $c_{12}^2 = 25$ dan $c_{13}^2 = 30$. Biaya transportasi dari D_2 ke pengecer R_1, R_2 dan R_3 adalah $c_{21}^2 = 18$, $c_{22}^2 = 15$ dan $c_{23}^2 = 20$. Biaya transportasi dari D_3 ke pengecer R_1, R_2 dan R_3 adalah $c_{31}^2 = 25$, $c_{32}^2 = 22$ dan $c_{33}^2 = 12$. Maka masalah perencanaan transportasinya diberikan dalam Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Rantai pasokan yang terdiri dari 3 pabrik,
3 distributor dan 3 pengecer

Untuk menyelesaian tahap I digunakan metode transportasi. Dengan menggunakan program diperoleh solusi awal sebagai berikut:

	x_{11}	x_{13}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	50	10	40	20	30	
Biaya tiap unit	15	12	10	25	20	
Biaya transportasi	750	120	400	500	600	2370

Setelah dilakukan pemeriksaan dengan program, ternyata solusi awal sudah optimum, sehingga solusi tahap I adalah:

	x_{11}	x_{13}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	50	10	40	20	30	
Biaya tiap unit	15	12	10	25	20	
Biaya transportasi	750	120	400	500	600	2370

Artinya dari pabrik P_1 diangkut produk sebanyak 50 unit ke distributor D_1 dan ke $D_3$10 unit. Produk yang dikirim dari pabrik P_2 ke distributor D_3 adalah 40 unit. Banyaknya produk yang diangkut dari pabrik P_3 ke distributor D_1 adalah 20 unit, ke D_2 30 unit. Sehingga D_1 menerima70 unit, D_2 menerima 30 unit dan D_3 menerima 50 unit, sehingga dalam menyelesaikan tahap II pada D_1 tersedia 70 unit,pada D_2 tersedia 30 unit dan pada D_3 tersedia 50 unit. Total biaya transportasi untuk mengangkut produk dari semua pabrik ke semua distributor adalah Rp 2.370.000,-

Untuk menyelesaikan tahap II digunakan metode transportasi.

Penyelesaian tahap II dengan metode transportasi, solusi awalnya adalah:

	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{22}	y_{33}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	50	10	10	30	50	
Biaya tiap unit	20	25	30	15	12	
Biayatransportasi	1000	250	300	450	600	2600

Setelah dilakukan pemeriksaan dengan program, ternyata solusi awal sudah optimum, sehingga solusi tahap II adalah:

	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{22}	y_{33}	Total biaya transportasi (dalam ribuan rupiah)
Nilai	50	10	10	30	50	
Biaya tiap unit	20	25	30	15	12	
Biayatransportasi	1000	250	300	450	600	2600

Artinya banyaknya produk yang diangkut ke pengecer R_1 dari distributor D_1=50 unit. Dari Distributor D_1 ke pengecer R_2 = 10 unit, dari D_1 ke pengecer R_3 =10 unit, dari distributor D_2 ke pengecer R_2= 30 unit, dan dari distributor D_3 ke pengecer R_3 =50 unit. Dapat dilihat bahwa dari distributor D_2 tidak ada produk yang diangkut ke pengecer R_1 dan R_2, demikian juga dari distributor D_3 tidak ada pengangkutan produk ke R_1. Total biaya pengangkutan dari semua distributor kesemua pengecer adalahRp 2.600.000,-

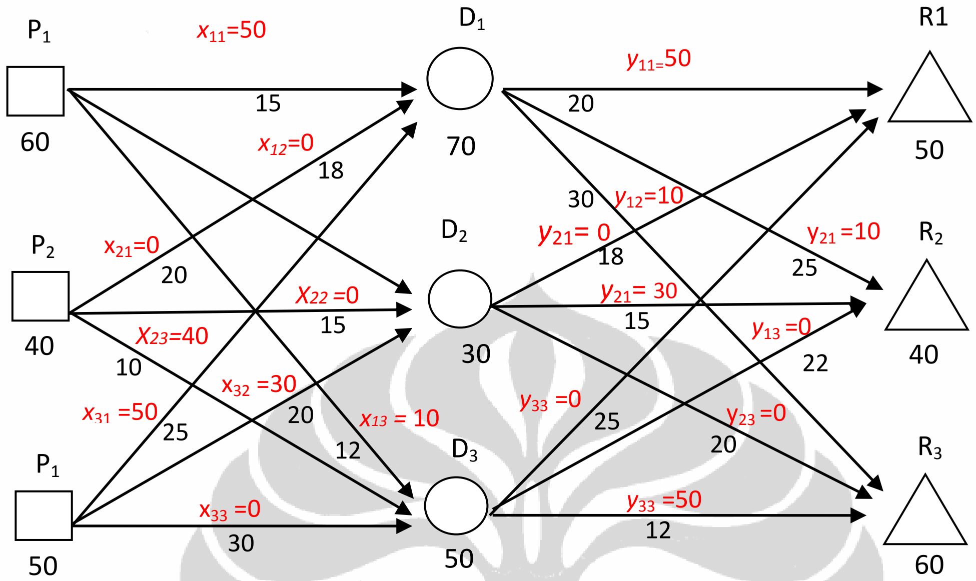
Penyelesaian secara keseluruhan adalah:

	x_{11}	x_{13}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{22}	y_{33}	Total biaya transportasi(dalam ribuanrupiah)
Nilai	50	10	40	20	30	50	10	10	30	50	
Biaya tiap unit	15	12	10	25	20	20	25	30	15	12	
Biaya transportasi	750	120	400	500	600	100	250	300	450	600	4970

Secara diagram dapat dilihat pada Gambar 3.10

Hasil lengkap dari program untuk kasus 4 dapat dilihat pada lampiran 10.

Dari pabrikP_1, P_2 dan P_3 banyaknya produkyang diangkut ke pengecer R_1 melalui distributor D_1 sebanyak 50 unit, dari pabrik P_1, P_2 dan P_3 dikirim ke pengecer R_2 melalui D_1 sebanyak 10 unit, melalui D_2 ke pengecer R_2 sebanyak 30 unit. Dari pabrik P_1, P_2 dan P_3 banyaknya produk yang diangkut ke R_3 melalui D_1 adalah 10 unit dan 50 unit melalui D_3 sehingga pengecer R_1 menerima 50 unit produk, pengecer R_2 menerima 40 unit produk dan pengecer R_3 menerima 60 unit produk. Sehingga total biaya transportasi dari semua pabrik ke semua pengecer melalui distributor adalah Rp 4.970.000.-. Dengan asumsi tidak ada biaya menaikkan atau menurunkan barang, artinya pabrik, distributor maupun pengecer milik perusahaan yang sama.



Gambar 3.10 Perencanaan transportasi produk pada rantai pasokan yang terdiri dari 3 pabrik, 3 distributor dan 3 pengecer

BAB 4

KESIMPULAN

Pada tesis ini perencanaan transportasi masalah rantai pasok dibagi menjadi beberapa tahap yang saling terpisah, dimana pada setiap akhir dari tahapan sebelumnya dapat digunakan untuk mempertimbangkan tahap selanjutnya , sehingga prinsip keoptimuman Bellman dapat digunakan.

Setiap tahap diselesaikan dengan metode transportasi. Sedangkan perencanaan secara keseluruhan merupakan gabungan dari solusi transportasi pada setiap tahap. Menggunakan program yang dibuat telah ditunjukkan solusi optimal dari kasus – kasus yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. (2004). *Elementary Linear Algebra*. John Wiley&Sons,INC

[2] Chang, Y-H, et al., ed. (2008). Applying co-evolutionary Genetic Algoritms to Solve the Supply Chain Network Design Problem- Based on The Textile Industry In Taiwan. *Proceeding of Business And Information*, Vol 5, issue 1.

[3] Hadley, G. (1980). *Linear Programming*. Addisonn-Wesley Publshing Company.

[4] Rahimi, H, et al, ed (2010). A Heuristic Procedure For Designing a Distribution Network in a Supply Chain System Using Harmony Search Meta-heuristic and Linear Programming. *Proceeding of the international Multiconference of Engineers and Computer Scientific* 2010, vol III, IMECS, March 17-19, Hongkong.

[5] Toni, D. M (2009). *Penentuan Rute Minimum Jalur Distribusi dalam Supply Chain Network Menggunakan Algoritma Genetika*, Skripsi, Departemen Ilmu Komputer FMIPA IPB.

[6] Vimanathan, B, *Modeling Full Supply Chain Optimization-a mixed integer goal programming approach*, Institute for Financial Management and Research, Chennai

[7] Wayne L.W. (1995). *Introduction to Mathematical Programming,Application and Algoritthms.* Duxbury Press, Belmont, California.

[8] http//www.math.cuhk.edu.hk/~wei/ipch6.pdf. (14/9/2011 jam 14.30). Chapter 6 *Transportation Problems.*

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

BUKTI TEOREMA 2.1

Akan dibuktikan Rank dari matriks $A = m+n-1$

Bukti:

Kasus 1:

Akan dibuktikan rank $(A) \leq m + n - 1$.

Misalnya s_i adalah baris ke i dari A dan d_j baris ke $m + j$ dari A (baris tujuan)

Dari Teorema 2.3 diperoleh bahwa

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j = 0 .$$

Dari sini, baris s_i dan d_j bergantung linier (tidak bebas linier).

Jadi, rank $(A) \leq m + n - 1$.

Kasus 2:

Akan dibuktikan rank $(A) \geq m+n-1$.

Dengan membangun matriks non singular $(m+n-1)(m+n-1)$ dari submatrik A.

Misalnya diambil kolom ke-n, ke-$2n$,… ke-mn bersama-sama dengan kolom 1,2,…,(n-1), maka dari matriks A dapat dihasilkan $(m+n)$ baris, kolom $(m+n-1)$.

Jika baris terakhir dari matriks A dihilangkan, diperoleh matriks berukuran $(m+n-1)(m+n-1)$.

$$D = \begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\
 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & . & & & & & & & & & \\
 & & & . & & & & & & & & \\
 & & & & . & & & & & & & \\
0 & & & & & 1 & & & & & & . \\
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & . & & & \\
 & & & & & & & & & . & & \\
 & & & & & & & & & & . & \\
 & & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

(lanjutan)

Karena D matriks segitiga maka $\det D = 1$. Karena D non singular dan $Rank(A) \geq Rank(D) = m + n - 1$.

Bersdasarkan kasus 1 dan 2 diperoleh, $RankA = m + n - 1$. Terbukti.

LAMPIRAN 2
BUKTI TEOREMA 2.2

Akan dibuktikan

Setiap minor dari A hanya dapat bernilai satu diantara +1, -1, atau 0. Jika diberikan sebarang A_k suatu submatrik berukuran kxk diperoleh det $A = \pm 1$ atau 0.

Bukti:

Jika diberikan sembarang A_k, sub matriks dari A yang berukuran k x k, diperoleh det $A_k = \pm 1$, atau 0. Perhatikan bahwa setiap kolom dari A tepat mempunyai dua angka 1. Jadi sembarang kolom dari A_k. mempunyai satu angka 1 atau tidak punya angka 1.

Jika A_k berisi kolom yang tidak mempunyai angka 1 maka det A=0. Selanjutnya diasumsikan bahwa setiap kolom dari A_k berisi paling sedikit satu angka 1. Terdapat 2 kasus yang harus dikerjakan.

Kasus 1:

Setiap kolom A_k berisi dua angka 1, maka satu angka 1 harus berasal dari baris asal dan satu angka 1 lagi berasal dari baris tujuan. Dengan mengurangi baris asal dari baris tujuan diperoleh vektor nol. Dengan demikian vektor baris dari A_k bergantung linier. Dengan emikian det A_k =0.

Kasus 2:

Paling sedikit satu kolom dari A_k berisi tepat angka 1. Dengan perluasan A_k terhadap kolom ini, diperoleh det $A_k = \pm A_{k-1}$ dimana tanda bergantung pada letak dari angka 1. Ulangi pernyataan A_{k-1} maka teorema ini terbukti.

LAMPIRAN 3

BUKTI TEOREMA 2.3

Akan dibuktikan

Koefisien-koefisien dari $y_{(\alpha\beta)(ij)}$ hanya bisa bernilai 1, -1, atau 0.

Bukti:

Misalnya R_i berukuran *m*+*n*-1 yang diperoleh dari B di (2.10). Dengan menghilangkan baris ke-*i* dari B, $R_i y_{ij}$ adalah a_{ij} dengan entri ke-*i* dihilangkan.

Berdasarkan ($a_{ij} = e_i + e_{m+j}$, *i*=1,2,...,*m* dan *j*=1,2,...,*n*) diperoleh $R_i y_{ij} = e_{m-1+j}$ maka

$y_{ij} = R_i^{-1} e_{m+1-j} = \dfrac{1}{\det R_i}(AdjR_i)e_{m-1+j}$ dimana $AdjR_i$ adalah adj dari R_i. Jadi R_i diperoleh dengan mengambil *m*+*n*-1 kolom dan *m*+*n*-1 baris dari matriks A. Artinya R_i sub matriks dari *A*. Hal ini juga menunjukkan bahwa R_i adalah sub matriks dari *B* dan *B* sub matriks dari *A*. Karena *B* adalah matriks dasar R_i mempunyai rank penuh. Berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh det R_i = ±1. Karena entri dari $Adj(R_i)$ adalah hanya minor dari R_i dan juga dari *A*, nilai-nilainya hanya bisa ± 1 atau 0. Jadi $y_{ij} = \pm 1$ atau 0. Dengan demikian persamaan (6.6) menjadi $a_{ij} = \sum_{\alpha\beta} (\pm 1) a_{\alpha\beta}^B$ dimana $a_{\alpha\beta}^B$ dengan $y_{(\alpha\beta)(ij)} = 0$, tidak dipertimbangkan dalam $a_{ij} = \sum (\pm 1) a_{\alpha\beta}^B$.

LAMPIRAN 4

Simulasi 3

```
disp(' ');
disp('Jadi penyelesain optimum dari produsen ke distributor');
disp('adalah')
disp(x1);
pause;
disp(['dengan biaya = ', num2str(biaya1)]);
pause;
disp(' ')
disp(' ')
disp('B.                    DISTRIBUTOR --> RETAILER');
disp('=====================================================');
disp(' ');
disp('Diketahui:');
disp('kapasitas distributor =');
disp(b);
pause;
disp('permintaan dari retailer =');
disp(d);
pause;
disp('dan tabel biaya transportasinya =');
disp(c2);
pause;

[x2 biaya2] = transportasi(b,d,c2);
disp(' ');
disp('Jadi penyelesain optimum transportasi dari distributor ke reatiler');
disp('adalah')
disp(x2);
pause;
```

(lanjutan)

```
disp(['dengan biaya = ', num2str(biaya2)]);
pause
disp(' ')
disp(['Biaya keseluruhan dari produsen ke retailer adalah ', num2str(biaya1),' + ',
num2str(biaya2),' =
',num2str(str2num(num2str(biaya1))+str2num(num2str(biaya2)))]);
```

LAMPIRAN 5

Transportasi

```
% Minimumkan f = sum_ij(c_ij*x_ij)
% dengan syarat:
% persediaan  : sum_j(x_ij) = a_i; i=1,2,...,m
% permintaan  : sum_i(x_ij) = b_j; j=1,2,...,n
% kepositifan : x_ij >= 0; i=1,2,...,m dan j=1,2,...,n

function [x, biaya] = transportasi(a, b, c);

% [x, biaya] = transportasi(a, b, c)
% Input:
%   a = persediaan                    (m*1)
%   b = permintaan                    (n*1)
%   c = biaya                         (m*n)
% Output:
%   x     = solusi optimal            (m*n)
%   biaya = biaya transportasi minimum   (1*1)

% ===================== A. Metode Aproximasi Vogel
=======================
% Metode yang digunakan untuk menentukan penyelesaian awal yang layak
% pada program ini adalah metode aproximasi vogel.

[x,bas] = MetodeAV(a,b,c);
% [x,bas] = tr_vogel(a,b,c);
% bas adalah matriks yang isinya satu untuk peubah basis dan nol untuk
% peubah bukan basis, digunakan untuk menandai peubah basis.
biaya = num2str(sum(sum(c.*x)));
disp('a. Penyelesain awal dengan menggunakan metode AV =');
disp('-------------------------------------------------')
```

(lanjutan)

```
disp(x);
pause;
disp(['dengan biaya = ', num2str(biaya)]);
pause;
disp(' ');
% ======== B. Pemeriksaan Keoptimumam dan Perbaikan Penyelesaian ===
disp('b. Pemeriksaan Keoptimumam dan Perbaikan Penyelesaian')
disp('-----------------------------------------------------')
pause;
idx_opt = 0;
while 1
% ====================== B.1 Pemeriksaan Keoptimumam
======================
  % Menentukan nilai u_i (i=1,2,...,m) dan v_j (j=1,2,...,n)
  % sehingga: c_rs = u_v + r_s untuk setiap (r,s)
  [u,v] = u_v(x,c,bas);

  % Evaluasi biaya reduksi
  r = c - u*ones(size(v')) - ones(size(u))*v';
  disp([num2str(idx_opt+1),'.']);
  disp('tabel reduksinya =');
  disp(r);
  disp('Yang dipilih untuk dimasukan menjadi peubah basis pada kali ini adalah')
  pause;
  if any(any(r<0))
  % jika terdapat biaya reduksi yang negatif maka penyelesaian masih belum
  % optimum. Langkah selanjutnya, dilakukan perbaikan penyelesaian
  % dengan mengganti/memasukan peubah bukan basis yang nilai reduksinya
  % paling negatif
     [min_row posr_min]=min(r);
     [temp posc_min]=min(min_row);
     i=posr_min(posc_min);
```

(lanjutan)

```
    j=posc_min;
    disp(['peubah pada baris ke-',num2str(i),' dan kolom ke-',num2str(j),',
sehingga']);
    disp(' ');
    pause;
    [x,bas]=modif_dist(x,i,j,bas);
    idx_opt = idx_opt + 1;
    disp(['penyelesaian pada iterasi ke-',num2str(idx_opt),' ='])
    disp(x);
    pause;
    biaya=sum(sum(c.*x));
  else
    disp('tidak ada, karena sudah optimum!')
    disp('semua nilai reduksinya tidak ada yang negatif.')
    pause;
    disp(' ')
   break
  end;
end

if idx_opt==0,
   disp('Jadi, tidak perlu dilakukan perbaikan penyelesaian karena hasil
penyelesaian awal memakai metode AV sudah optimum');
else
   disp(['Jumlah iterasi untuk pemeriksaan keoptimumam dan perbaikan
penyelesaian adalah sebanyak ',num2str(idx_opt),' kali']);
end
pause;
end
```

LAMPIRAN 6

Metode AV

```
function [x, bas] = MetodeAV(a, b, c)
% [x, bas] = Metode(a, b, c)
% x  : penyelesaian awal yang layak dengan metode aproksimasi vogel   (m*n)
% bas: matriks yang isi selnya 1 untuk peubah basis dan 0 untuk peubah
%      bukan basis                                         (m*n)
% a  : persediaan                                          (m*1)
% b  : permintaan                                          (n*1)
% c  : biaya                                               (m*n)
if (sum(a)~=sum(b)),
  disp('ERROR: jumlah permintaan tidak sama dengan jumlah pengeluaran.');
  return;
end
m  =length(a);
n  =length(b);
x  =zeros(m,n);
bas=zeros(m,n);
while max(a)>0 & max(b)>0
    % penalti baris: selisih antar dua biaya terkecil pada baris itu
    pen_b = Inf(m,2);
    for brs=1:m
        baris = c(brs,:);
        [min_1, lok_min] = min(baris);
        pen_b(brs,2) = lok_min;
        baris(lok_min) = Inf;
        pen_b(brs,1) = min(baris) - min_1;
    end
    % penalti kolom
    pen_k = Inf(n,2);
    for klm=1:n
```

(lanjutan)

```
    kolom = c(:,klm);
    [min_1, lok_min] = min(kolom);
    pen_k(klm,2) = lok_min;
    kolom(lok_min) = Inf;
    pen_k(klm,1) = min(kolom) - min_1;
end

% Mencari baris atau kolom dengan penalti terbesar
if max(pen_b) >= max(pen_k)
  [temp,i] = max(pen_b(:,1));
  j=pen_b(i,2);
  if a(i)<b(j)
    x(i,j)=a(i);
    bas(i,j)=1;
    b(j)=b(j)-a(i);
    a(i)=0;
    c(i,:)=Inf;
  else
    x(i,j)=b(j);
    bas(i,j)=1;
    a(i)=a(i)-b(j);
    b(j)=0;
    c(:,j)=Inf;
  end
else
  [temp,j] = max(pen_k(:,1));
  i=pen_k(j,2);
  if a(i)<b(j)
    x(i,j)=a(i);
    bas(i,j)=1;
    b(j)=b(j)-a(i);
    a(i)=0;
```

(lanjutan)

```
          c(i,:)=Inf;
        else
          x(i,j)=b(j);
          bas(i,j)=1;
          a(i)=a(i)-b(j);
          b(j)=0;
          c(:,j)=Inf;
        end
    end
end
```

LAMPIRAN 7

U-V

```
function [u,v] = u_v(x,c,bas)
% [u,v]=multipliers(x,c,b)
% x  : solusi saat ini (m*n)
% bas: matriks dengan nilai 1 u/ peubah basis dan 0 u/ bukan basis (m*n)
% c  : biaya (m*n)
% u  (m*1)
% v  (n*1)
[m,n]=size(x);

if sum(sum(bas))< m+n-1
  disp('"terjadi kasus kemerosotan penyelesaian (degeneracy)"')
  [bas] = bas_kemerosotan(c,bas);
end
if sum(sum(bas))< m+n-1
    for i=1:m
        for j=1:n
          if bas(i,j)~=1&sum(sum(bas))<m+n-1
              bas(i,j)=1;
          end
        end
    end
end
  u=Inf*ones(m,1);
  v=Inf*ones(n,1);
  u(1)=0;
  % misal diambil u_1 = 0
  i=1;
  while i<m+n
  % sampai seluruh nilai u_i dan v_j diketahui
```

(lanjutan)

```
    for brs=1:m
      for klm=1:n
        if bas(brs,klm)==1
          if (u(brs)~=Inf) & (v(klm)==Inf)
            v(klm)=c(brs,klm)-u(brs);
            i=i+1;
          elseif (u(brs)==Inf) & (v(klm)~=Inf)
            u(brs)=c(brs,klm)-v(klm);
            i=i+1;
          end
        end
      end
    end
  end
end
```

LAMPIRAN 8

Modif-dist lampiran 5.

```
function [y,bas_baru]=modif_dist(x,brs, klm,bas)
% [y, new_bas] = modif_dist(x,brs, klm,bas)
% x        : solusi saat ini  (m*n)
% bas      : peubah basis saat ini (m*n)
% brs,klm  : index dari peubah yang akan dimasukan sebagai basis
% y : solusi setelah dilakukan metode modifikasi distribusi (m*n)
% bas_baru : peubah basis yang baru  (m*n)
bas_baru = bas;
y  = x;
[m,n]  = size(x);

 % untuk membentuk lintasan tertutup, dimulai dengan index yang akan
 % dimasukan ke dalam basis
lintasan    = [brs klm];
% peubah yang akan dimasukan menjadi basis tidak dimasukan dalam pencarian:
Bas  (brs,klm) = Inf;
x(brs,klm)   = Inf;

cari D baris    = 1;    % mulai mencari dalam baris yang sama
while (lintasan(1,1)~=brs | lintasan(1,2)~=klm | length(lintasan)==2),
  if cari D baris, % mencari di baris
    j=1;
    while cari D baris
      if (bas(lintasan(1,1),j)~=0) & (j~=lintasan(1,2))
        lintasan=[lintasan(1,1) j ;lintasan]; % menambahkan index yang ditemui ke
dalam lintasan
        cari D baris=0;  % mulai mencari di kolom
      elseif j==n,    % tidak diketemukan basis lagi pada baris ini
        bas (lintasan(1,1),lintasan(1,2))=0;
```

(lanjutan)

```
        lintasan=lintasan (2:length(lintasan),:); % backtrack
        cari D baris=0; % dimulai dengan mencari pada kolom
      else
        j=j+1;
      end
   end
  else  % mencari di kolom
   i=1;
   while ~cari D baris
      if (bas(i, lintasan(1,2))~=0) & (i~=lintasan(1,1))
        lintasan=[i lintasan(1,2) ; lintasan];
        cari D baris=1;
      elseif i==m
        bas (lintasan(1,1),lintasan(1,2))=0;
        lintasan=lintasan (2:length(lintasan),:);
        cari D baris=1;
      else
        i=i+1;
      end
    end
  end
end
% mencari nilai modifikasi
l=length (lintasan);
nilai_modif=Inf;
index_modif=Inf;
for i=2:2:l
 if x (lintasan(i,1), lintasan(i,2)) < nilai_modif,
  nilai_modif=x (lintasan(i,1), lintasan(i,2));
  index_modif=i;
 end;
end
```

(lanjutan)

```
% mengitung matriks transportasi yang baru setelah dimasukan peubah basis
% baru dengan melakukan proses pendistribusian nilai modifikasi
y(brs,klm)=nilai_modif;
for i=2:l-1
  y(lintasan(i,1),lintasan(i,2))=y(lintasan(i,1), lintasan(i,2))+(-1)^(i-
1)*nilai_modif;
end
bas_baru(brs,klm)=1;
bas_baru(lintasan(index_modif,1), lintasan (index_modif,2))=0;
```

LAMPIRAN 9

Output program ilustrasi kasus 3

```
>> simulasi
A.                  PRODUSEN --> DISTRIBUTOR
==========================================================
 Diketahui:
kapasitas produksi =
    60
    40
permintaan dari ditributor =
    70
    30
dan tabel biaya transportasinya =
    18    10
    20    15
a. Penyelesain awal dengan menggunakan metode AV =
--------------------------------------------------
    30    30
    40     0
dengan biaya = 1640
 b. Pemeriksaan Keoptimumam dan Perbaikan Penyelesaian
-----------------------------------------------------
1.
tabel reduksinya =
     0     0
     0     3
Yang dipilih untuk dimasukan menjadi peubah basis pada kali ini adalah
tidak ada, karena sudah optimum!
```

(lanjutan)

semua nilai reduksinya tidak ada yang negatif.

Jadi, tidak perlu dilakukan perbaikan penyelesaian karena hasil penyelesaian awal memakai metode AV sudah optimum

Jadi penyelesain optimum dari produsen ke distributor adalah

30 30

40 0

dengan biaya = 1640

B. DISTRIBUTOR --> RETAILER

===

Diketahui:

kapasitas distributor =

70

30

permintaan dari retailer =

50

30

20

dan tabel biaya transportasinya =

20 25 30

18 15 20

a. Penyelesain awal dengan menggunakan metode AV =

----

50 0 20

0 30 0

dengan biaya = 2050

b. Pemeriksaan Keoptimumam dan Perbaikan Penyelesaian

1.

tabel reduksinya =

(lanjutan)

0	0	0
8	0	0

Yang dipilih untuk dimasukan menjadi peubah basis pada kali ini adalah

tidak ada, karena sudah optimum!

semua nilai reduksinya tidak ada yang negatif.

Jadi, tidak perlu dilakukan perbaikan penyelesaian karena hasil penyelesaian awal memakai metode AV sudah optimum

Jadi penyelesain optimum transportasi dari distributor ke reatiler

adalah

50	0	20
0	30	0

dengan biaya = 2050

Biaya keseluruhan dari produsen ke retailer adalah 1640 + 2050 = 3690

LAMPIRAN 10

Output program ilustrasi kasus 4

A. PRODUSEN --> DISTRIBUTOR

==

Diketahui:

kapasitas produksi =

60

40

50

permintaan dari ditributor =

70

30

50

dan tabel biaya transportasinya =

15	18	12
20	15	10
25	20	30

a. Penyelesain awal dengan menggunakan metode AV =

50	0	10
0	0	40
20	30	0

dengan biaya = 2370

b. Pemeriksaan Keoptimumam dan Perbaikan Penyelesaian

1.tabel reduksinya =

0	8	0
7	7	0
0	0	8

Yang dipilih untuk dimasukan menjadi peubah basis pada kali ini adalah tidak ada, karena sudah optimum!

semua nilai reduksinya tidak ada yang negatif.

Jadi, tidak perlu dilakukan perbaikan penyelesaian karena hasil penyelesaian awal memakai metode AV sudah optimum

Jadi penyelesain optimum dari produsen ke distributor

adalah

50	0	10
0	0	40
20	30	0

dengan biaya = 2370

B. DISTRIBUTOR --> RETAILER

===

Diketahui:

kapasitas distributor =

70

30

50

permintaan dari retailer =

50

40

60

dan tabel biaya transportasinya =

20	25	30
18	15	20
25	22	12

a. Penyelesain awal dengan menggunakan metode AV =

50	10	10
0	30	0
0	0	50

dengan biaya = 2600

b. Pemeriksaan Keoptimumam dan Perbaikan Penyelesaian

1.

tabel reduksinya =

0	0	0
8	0	0
23	15	0

Yang dipilih untuk dimasukan menjadi peubah basis pada kali ini adalah

tidak ada, karena sudah optimum!

semua nilai reduksinya tidak ada yang negatif.

Jadi, tidak perlu dilakukan perbaikan penyelesaian karena hasil penyelesaian awal memakai metode AV sudah optimum

Jadi penyelesain optimum transportasi dari distributor ke reatiler

adalah

50	10	10
0	30	0
0	0	50

dengan biaya = 2600

Biaya keseluruhan dari produsen ke retailer adalah 2370 + 2600 = 4970