



UNIVERSITAS INDONESIA

**PELABELAN GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA GRAF POT
BUNGA DAN GRAF POHON PALEM**

Tesis

**diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Magister Sains**

MUZAYYIN AHMAD

NPM 1006786202

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA**

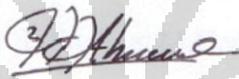
DEPOK

2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.



Nama : MUZAYYIN AHMAD
NPM : 1006786202
Tanda Tangan : 
Tanggal : Januari 2012

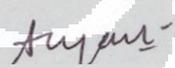
HALAMAN PENGESAHAN

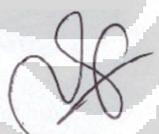
Tesis ini diajukan oleh :

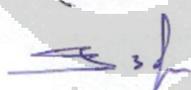
Nama : Muzayyin Ahmad
NPM : 1006786202
Program Studi : Magister Matematika
Judul Tesis : Pelabelan Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palem

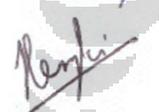
Telah berhasil dipertahankan dihadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi magister matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dr. Kiki A. Sugeng ()

Pembimbing II : Dra. Denny R. Silaban, M.Kom ()

Penguji I : Dr. rer. nat. Hendri Murfi, M.Kom ()

Penguji II : Dr. Hengki Tasman ()

Penguji III : Dra. Siti Aminah, M.Kom ()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 12 Januari 2012

KATA PENGANTAR

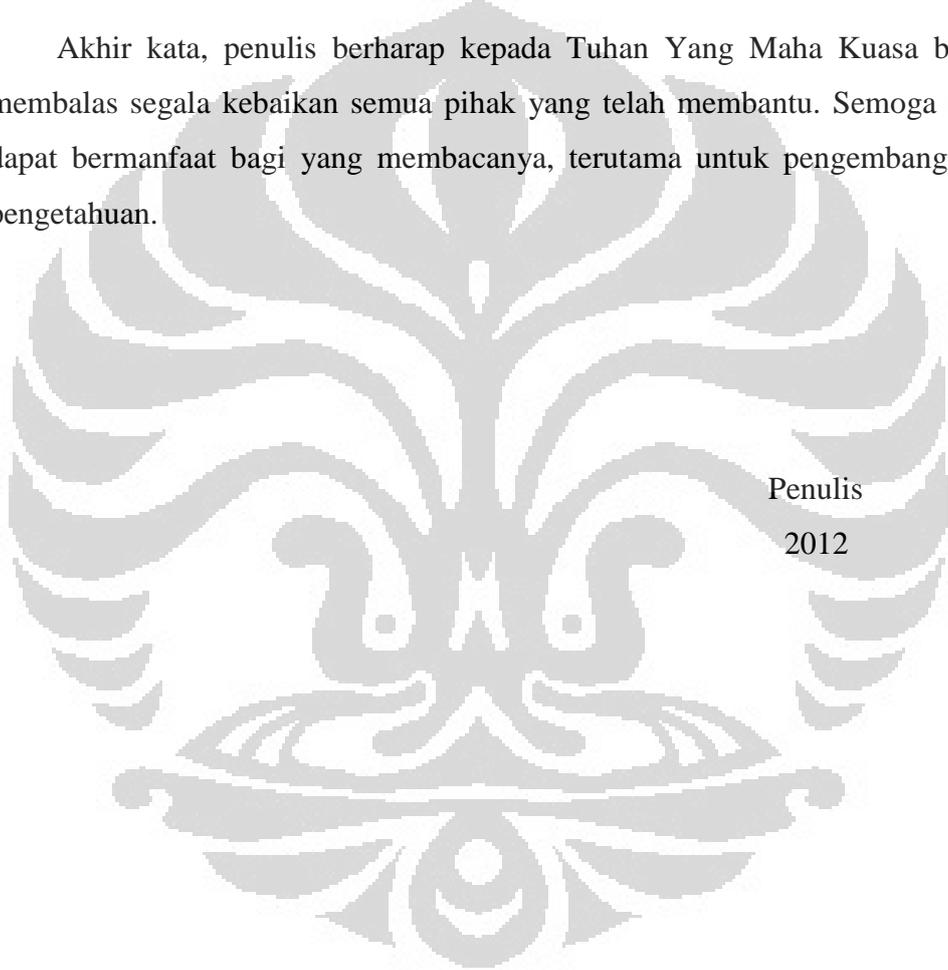
Alhamdulillah, segala puji hanya bagi Allah SWT tuhan yang maha kuasa, yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis sadar bahwa penyelesaian tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tesis ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Ibu Dr. Kiki A. Sugeng, M.Si dan Ibu Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom selaku dosen pembimbing tesis yang teramat banyak memberikan nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini;
2. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami, selaku Ketua Program Studi Magister Matematika dan Dr. rer. Nat. Hendri Murfi, M.Kom selaku sekretaris Program Studi Magister Matematika dan sekaligus dosen pembimbing akademik yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama menyelesaikan masa studi;
3. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T, selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Ibu Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech, selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI;
4. Seluruh staf pengajar di Program Magister Matematika FMIPA UI, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;
5. Pemerintah Propinsi Jambi melalui Dinas Pendidikan Propinsi yang telah memberikan kesempatan dan dukungan melalui program beasiswa.
6. Ayahanda dan Ibunda tercinta serta keluarga besar saya yang telah memberikan dukungan moral, materiil, serta doa yang tidak pernah berhenti;
7. Istriku tercinta Sri Handayani. M, SP dan anakku tersayang Arrumaisha Kalila Ahmad, atas segala dukungan, kesabaran, semangat, dan doa;

8. Haryono, Nurul Huda, Zulfi Amri dan semua teman-teman S2 UI dari Jambi angkatan kedua yang telah berjuang bersama.
9. Kepada semua teman-teman yang telah memberi semangat terutama teman-teman megister matematika angkatan 2010 di FMIPA UI.
10. Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu, penulis ucapkan terima kasih.

Akhir kata, penulis berharap kepada Tuhan Yang Maha Kuasa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.



Penulis
2012

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini ;

Nama : Muzayyin Ahmad
NPM : 1006786202
Program Studi : Magister Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Tesis

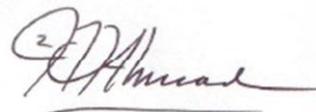
Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia, Hak Bebas Biaya Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive royalty-free right*) atas karya ilmiah saya berjudul :

**Pelabelan Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$
pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palem**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan hak bebas biaya royalti non eksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (data base), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada Tanggal : 12 Januari 2012
Yang menyatakan



(Muzayyin Ahmad)

ABSTRAK

Nama : Muzayyin Ahmad
Program Studi : Magister Matematika
Judul Tesis : Pelabelan Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palem

Pelabelan pada graf G adalah penetapan nilai bilangan bulat untuk simpul dan busur dari G dengan aturan tertentu. Pelabelan graceful adalah fungsi injektif g dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif g' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$, dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u, v \in V$ berlaku $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$. Pelabelan $\hat{\rho}$ merupakan modifikasi lain dari pelabelan graceful. Pelabelan $\hat{\rho}$ adalah fungsi injektif h dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif h' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ atau $\{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$, dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u, v \in V$ berlaku $h'(uv) = |h(u) - h(v)|$. Graf pot bunga ($C_k - S_n$) dibentuk dari gabungan graf bintang S_n dan graf lingkaran C_k dengan tambahan busur yang menghubungkan pusat graf bintang S_n dengan salah satu simpul pada graf lingkaran C_k . Graf pohon palem ($C_k - B_{m,n}$) merupakan gabungan graf sapu dan graf lingkaran C_k dengan tambahan busur yang menghubungkan simpul ujung graf $B_{m,n}$ dengan salah satu simpul pada graf lingkaran C_k . Pada makalah ini diberikan konstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ untuk graf pot bunga ($C_k - S_n$) dan graf pohon palem ($C_k - B_{m,n}$), dengan k bilangan bulat, $k \geq 3$ dan m, n bilangan asli. Pelabelan graceful pada graf pot bunga dan graf pohon palem hanya untuk $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$.

Kata kunci : pelabelan graceful, pelabelan $\hat{\rho}$, graf bintang, graf lingkaran, graf pot bunga, graf pohon palem
x +50 halaman; 17 gambar
Daftar Pustaka: 7 (1994-2011)

ABSTRACT

Name : Muzayyin Ahmad
Study Program : Magister of Mathematics
Title : Graceful Labeling and $\hat{\rho}$ Labeling of Flower Pot Graph and Palm Tree Graph

A labeling on a graph G is an assignment of integer value to vertex and edge of G with certain rule. A graceful labeling is an injective function g from the set of vertices V to a set of numbers $\{0,1,2,\dots, |E|\}$ which induces a bijective function g' from the set E to the set of numbers $\{1,2,\dots,|E|\}$, where for each edge $uv \in E$ with $u, v \in V$ applies $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$. A $\hat{\rho}$ labeling is a modification of graceful labeling. The $\hat{\rho}$ labeling is an injective function h from the set V to the set of numbers $\{0,1,2,\dots,|E|+1\}$ which induces a bijective function h' from the set of edges E to the set of numbers $\{1,2,\dots,|E|\}$ or $\{1,2,\dots,|E|-1, |E|+1\}$, where each edge $uv \in E$ with $u, v \in V$ applies $h'(uv) = |h(u) - h(v)|$. A flower pot graph $(C_k - S_n)$ is formed by combining the center of star graph S_n with a vertex of cycle graph C_k with an edge. A palm tree graph $(C_k - B_{m,n})$ is formed by combining the end vertex of broom graph $B_{m,n}$ with a vertex of cycle C_k . In this thesis is given constructions of graceful labeling and $\hat{\rho}$ labeling for flower pot graph $(C_k - S_n)$ and palm tree graph $(C_k - B_{m,n})$, with integer $k \geq 3$ and m, n are positive integer. Graceful labeling on flower pot graph and palm tree graph are given only for $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$.

Key words : graceful labeling, $\hat{\rho}$ labeling, star graph, circle graph, flower pot graph $(C_k - S_n)$, palm tree graph $(C_k - B_{m,n})$.
x + 50 pages ; 17 pictures
Bibliography : 7 (1994-2011)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR	x
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan.....	2
1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan	2
1.4 Tujuan Penulisan.....	3
BAB 2 LANDASAN TEORI	4
2.1 Teori Graf.....	4
2.2 Jenis – Jenis Graf	5
2.3 Pelabelan Graf.....	8
BAB 3 PELABELAN GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$	11
3.1 Pelabelan Graceful pada Graf Pot Bunga	11
3.2 Pelabelan Graceful pada Graf Pohon Palembang.....	17
3.3 Pelabelan $\hat{\rho}$ pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palembang	28
BAB 4 PENUTUP.....	49
4.1 Kesimpulan	49
4.2 Saran.....	49
DAFTAR PUSTAKA	50

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	(a) Graf lintasan P_4 (b) Graf lintasan P_n	5
Gambar 2.2	Graf lingkaran C_3	5
Gambar 2.3	Graf bintang S_6	6
Gambar 2.4	Graf <i>caterpillar</i> $S_{(5,3,3,1,2)}$	6
Gambar 2.5	Graf sapu $B_{4,8}$	7
Gambar 2.6	Graf <i>unicyclic</i> yang mengandung graf lingkaran C_3	7
Gambar 2.7	Graf pot bunga C_3-S_7	7
Gambar 2.8	Graf pohon palem $C_3-B_{3,7}$	8
Gambar 2.9	Pelabelan graceful pada graf bintang S_6	9
Gambar 2.10	Pelabelan $\hat{\rho}$ pada gabungan graf bintang $S_6 \cup S_7$	10
Gambar 3.1	Notasi simpul C_k-S_n	12
Gambar 3.2	Contoh pelabelan graceful pada (a) graf $C_{12}-S_7$ dan (b) graf $C_{11}-S_7$	17
Gambar 3.3	Notasi simpul $C_k-B_{m,n}$	17
Gambar 3.4	Contoh pelabelan graceful pada (a) graf $C_{12}-S_{4,7}$ dan (b) graf $C_{11}-S_{4,7}$	28
Gambar 3.5	Contoh pelabelan graceful pada C_5-S_7	29
Gambar 3.6	Contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada (a) graf C_9-S_7 dan (b) graf $C_{10}-S_7$	35
Gambar 3.7	Contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada (a) graf $C_9-S_{3,7}$ dan (b) graf $C_{10}-S_{3,7}$	48

BAB 1

PENDAHULUAN

Bab pendahuluan memuat latar belakang dilakukannya penelitian, permasalahan yang dikaji, tujuan penulisan, batasan masalah dan sistematika penulisan. Selanjutnya akan diuraikan secara lengkap.

1.1. Latar Belakang

Permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat terkait dengan objek diskrit dan relasi antar objek tersebut. Misalnya jalan yang menghubungkan satu kota dengan kota lainnya. Kota-kota dalam hal ini merupakan objek diskrit, sedangkan jalan merelasikan antar objek tersebut. Permasalahan di atas dapat dimodelkan secara baik dengan menggunakan konsep graf. Teori graf digunakan untuk menyederhanakan suatu masalah dan mempermudah penyelesaiannya.

Suatu graf G adalah pasangan himpunan (V, E) , dimana V adalah himpunan tak kosong dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen di V . Elemen di V disebut simpul dari G , dan elemen di E disebut busur dari G . Subgraf dari suatu graf G adalah graf H , sedemikian sehingga setiap simpul di H adalah simpul di G , dan setiap busur di H juga busur di G (Hartsfield dan Ringel, 2004).

Pada graf dikenal keluarga graf yang beberapa diantaranya dijelaskan sebagai berikut. Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari barisan simpul-simpul dimana pada tiap simpul terdapat busur yang menghubungkan simpul tersebut ke simpul berikutnya dalam barisan. Graf lingkaran adalah lintasan yang memiliki simpul awal dan simpul akhir yang sama. Graf pohon adalah graf yang tidak mengandung subgraf berbentuk lingkaran. Graf hutan adalah gabungan terpisah dari dua atau lebih graf pohon. Graf *unicyclic* adalah graf yang memiliki tepat satu subgraf lingkaran. Penelitian ini akan fokus pada kelas graf *unicyclic*. Graf pot bunga adalah gabungan graf bintang dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh busur yang menghubungkan simpul pusat graf bintang dengan satu simpul pada graf lingkaran. Graf pohon palem adalah gabungan graf sapu dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh busur yang menghubungkan simpul ujung graf sapu dengan salah satu simpul pada graf lingkaran.

Pelabelan graceful pertama kali didefinisikan oleh Alex Rosa pada tahun 1967 yaitu fungsi g yang merupakan penilaian β (β valuation) dari suatu graf G dengan V simpul, jika g adalah fungsi injektif dari simpul-simpul g ke himpunan $\{0,1,2,\dots,|E|\}$ sedemikian sehingga setiap busur xy diberi label dengan $g(xy) = |g(x) - g(y)|$ menghasilkan label-label berbeda pada busur. Kemudian Galian mempopulerkan pelabelan tersebut dengan nama pelabelan graceful (Galian 2010). Pelabelan graceful pada graf G adalah suatu fungsi injektif $g : V \rightarrow \{0,1,2,\dots,|E|\}$ sedemikian sehingga menginduksi fungsi bijektif $g' : E \rightarrow \{1,2,\dots,|E|\}$ yang didefinisikan dengan $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$ (Choudum dan Kishore, 1996). Graf yang memiliki pelabelan graceful disebut graf graceful.

Beberapa hasil pelabelan graceful dapat dilihat dalam survey yang dilakukan oleh Galian (2010). Beberapa graf graceful antara lain: graf *caterpillar*, graf pohon dengan diameter paling banyak 5, graf pohon dengan jumlah simpul maksimal 27, graf pohon simetris, graf petasan (*firecracker*), graf helm, graf *unicyclic*, dan beberapa graf yang lain seperti lintasan P_n , bintang S_n , lingkaran C_n dengan banyak simpul $n = 0, 3 \pmod{4}$, graf lengkap K_n dengan $n \leq 5$, graf lengkap *bipartite* $K_{m,n}$ dengan $m,n \in \mathbb{N}$, *n-cube* $K_2 \times K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2$ untuk setiap $n \geq 1$, graf roda W_n dengan $n \geq 4$.

Alex Rosa mendefinisikan suatu pelabelan yang mirip dengan pelabelan graceful yang disebut dengan pelabelan \hat{g} . Pelabelan \hat{g} adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif h dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, |E| + 1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif h' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$ atau $\{0,1,2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $h'(uv) = |h(u) - h(v)|$ (Galian 2010).

1.2. Permasalahan dan Ruang Lingkup

Dari tabel hasil penelitian pada survey Galian, terlihat hasil penelitian yang berkaitan dengan graf *unicyclic* masih sangat sedikit, sehingga hal ini menjadi permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.

Konstruksi kelas graf yang akan diteliti berkaitan dengan gabungan graf bintang, graf sapu dengan graf lingkaran. Sesuai dengan permasalahan penelitian,

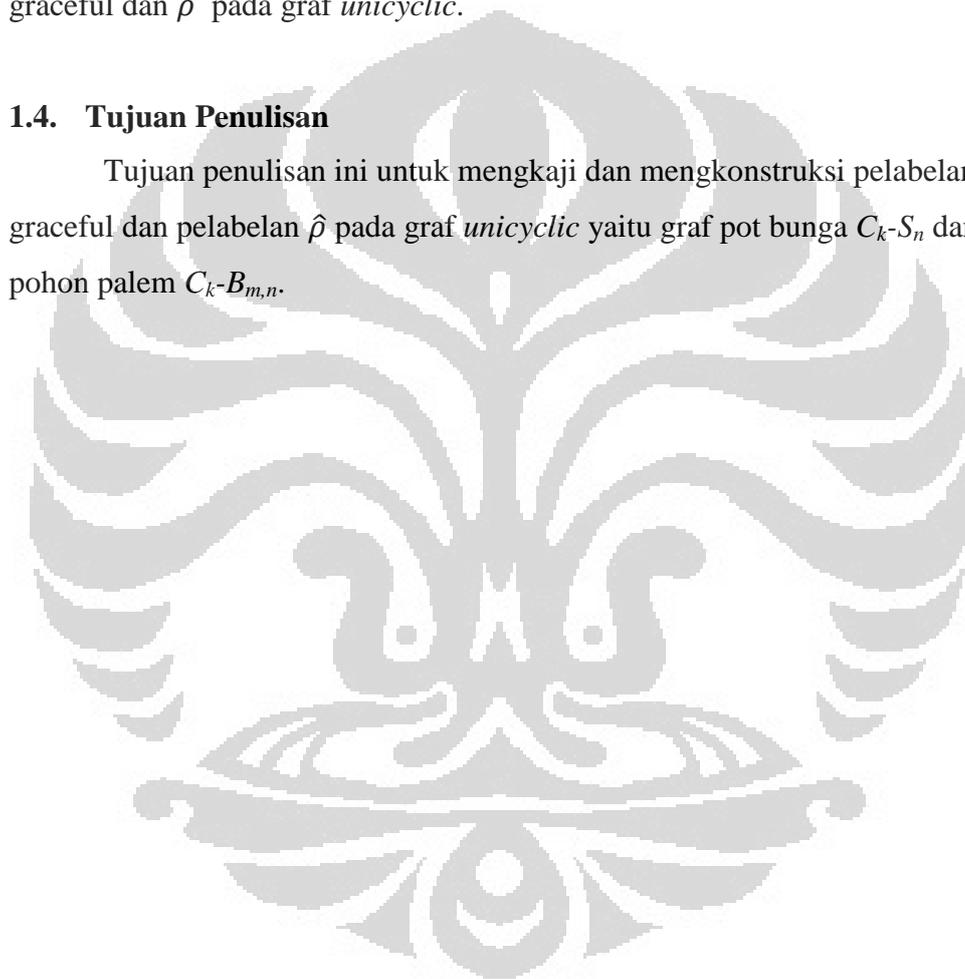
maka konstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ dilakukan hanya pada graf *unicyclic*, yang terdiri dari graf pot bunga C_k-S_n , dan graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$.

1.3. Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Penelitian dilakukan dengan studi pustaka dan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, disertasi ataupun artikel yang relevan dengan topik pembahasan untuk dikembangkan menjadi konstruksi pelabelan graceful dan $\hat{\rho}$ pada graf *unicyclic*.

1.4. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini untuk mengkaji dan mengkonstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf *unicyclic* yaitu graf pot bunga C_k-S_n dan graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$.



BAB 2 LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan kosep dasar teori graf dan penjelasan tentang beberapa pelabelan yang akan digunakan pada bab berikutnya.

2.1. Teori Graf

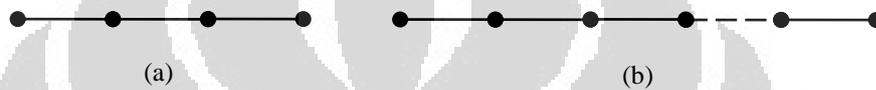
Suatu **graf** G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah suatu himpunan tak kosong dan E adalah suatu himpunan yang mungkin kosong, yang berisi pasangan-pasangan tak terurut dari anggota-anggota V . Anggota-anggota V disebut **simpul** dari graf G , dan anggota-anggota E disebut **busur** dari graf G . Banyaknya simpul atau anggota V dinotasikan $|V|$ sedangkan banyaknya busur atau anggota E yang dinotasikan $|E|$. Biasanya titik digambarkan untuk mewakili simpul, dan garis untuk mewakili busur, garis yang digunakan dapat berupa garis lurus atau kurva. Jika u dan v adalah simpul pada graf G , maka u dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) dengan v jika terdapat busur diantara u dan v , busur tersebut dinotasikan dengan e atau uv . Busur e dikatakan **menghubungkan** atau **hadir** (*incident*) pada simpul u , jika u merupakan titik ujung dari e , sebaliknya simpul u dikatakan hadir pada busur e , jika u merupakan titik ujung dari e . **Derajat** (*degree*) simpul v disimbolkan dengan $deg(v)$ adalah banyaknya busur yang hadir pada simpul v . **Simpul terisolasi** (*isolated vertex*) adalah simpul dengan derajat 0. **Simpul ujung** atau **daun** adalah simpul dengan derajat 1 (Hartsfield dan Ringel, 1994).

Misalkan diberikan graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$, maka **gabungan graf** G_1 dan G_2 dituliskan $G_1 \cup G_2$ dimana $V(G_1 \cup G_2) = V_1 \cup V_2$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E_1 \cup E_2$. **Subgraf** dari graf G adalah graf H yang setiap simpul dari H merupakan simpul dari G dan setiap busur dari H merupakan busur di G . Dengan kata lain, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Secara khusus jika simpul v di G , maka $G - v$ merupakan subgraf dari G yang diperoleh dengan cara menghapus simpul v dan semua busur di G yang hadir pada v . Jika busur e di G , maka $G - e$ merupakan subgraf dari G yang diperoleh dengan cara menghapus busur e dari G (Hartsfield dan Ringel, 1994).

2.2. Jenis-Jenis Graf

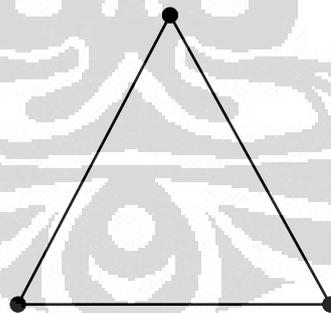
Pada teori graf terdapat berbagai jenis graf. Pada bagian ini akan dibahas jenis-jenis graf yang digunakan pada bab berikutnya.

Suatu graf dengan n simpul yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n$ dan busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ disebut **graf lintasan** P_n dengan panjang n (Hartsfield dan Ringel, 1994). Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk sembarang dua simpul u dan v pada graf G terdapat lintasan dari u ke v . Pada Gambar 2.1 diberikan contoh graf lintasan P_4 dengan banyak simpul 4 dan banyak busur 3 serta graf lintasan P_n dengan banyak simpul n dan banyak busur $(n - 1)$.



Gambar 2.1 (a) Graf lintasan P_4 (b) Graf lintasan P_n

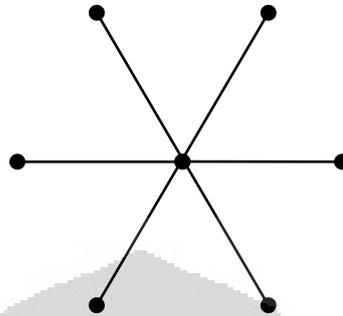
Graf lingkaran (*cycle*), C_n , dengan panjang n adalah graf dengan n simpul v_1, v_2, \dots, v_n dan busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ (Hartsfield dan Ringel, 1994). Pada Gambar 2.2 diberikan contoh graf lingkaran C_3 yaitu graf lingkaran yang banyak simpul 3 dan banyak busur 3.



Gambar 2.2 Graf lingkaran C_3

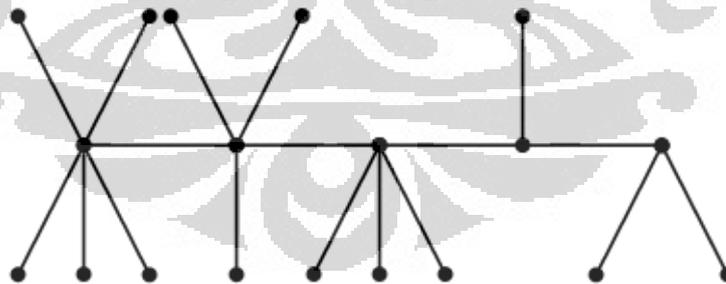
Graf bintang, S_n , adalah graf yang dibangun dari satu simpul pusat dengan menambahkan sejumlah n simpul daun pada simpul pusat tersebut. Graf bintang memiliki $n+1$ simpul dan n busur (Choudum dan Kishore, 1996). Graf bintang merupakan sub kelas dari graf pohon, karena graf bintang tidak

mempunyai subgraf lingkaran. Pada Gambar 2.3 diberikan contoh graf bintang S_6 yaitu graf bintang dengan banyak simpul 7 dan banyak busur 6.



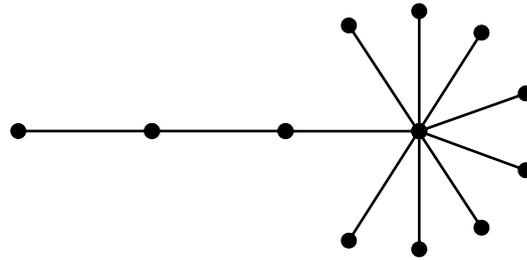
Gambar 2.3 Graf bintang S_6

Graf caterpillar S_{n_1, n_2, \dots, n_r} adalah graf yang dibangun dari suatu lintasan disebut tulang belakang atau *backbone* P_r dengan menambahkan sejumlah daun pada setiap simpul pada lintasan - yang, yaitu n_i daun pada simpul lintasan c_i , dimana $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. (Sugeng, dkk, 2005). Pada Gambar 2.4 diberikan graf *caterpillar* $S_{(5,3,3,1,2)}$ yaitu graf *caterpillar* dengan 19 simpul (5 simpul *backbone*, dan 5,3,3,1,2 simpul daun yang terhubung pada tiap simpul *backbone* secara berurutan) dan 18 busur.



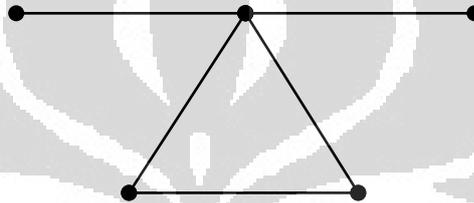
Gambar 2.4 Graf *caterpillar* $S_{(5,3,3,1,2)}$

Graf sapu $B_{m,n}$ adalah kasus khusus dari graf *caterpillar* dimana sejumlah n simpul-simpul daun hanya dihubungkan pada satu simpul ujung dari tulang belakang P_m (Sevenhot 2010). Pada Gambar 2.5 diberikan contoh graf sapu $B_{4,8}$.



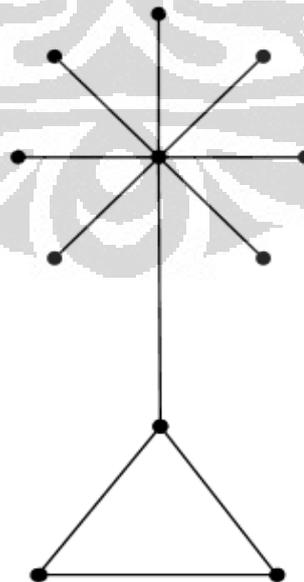
Gambar 2.5 Graf sapu $B_{4,8}$

Graf unicyclic adalah graf yang memuat tepat satu lingkaran (Galian 2010). Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf *unicyclic* yang dibangun dari P_3 dan C_3 , simpul P_2 terhubung dengan salah satu simpul C_3 yang jumlah simpul dan jumlah busur 5.



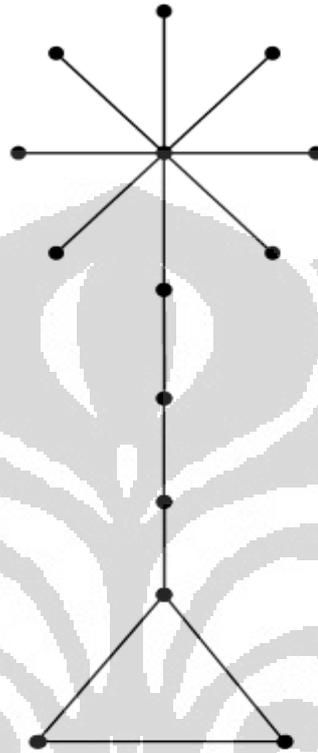
Gambar 2.6 Graf *unicyclic* yang mengandung graf lingkaran C_3

Graf pot bunga C_k-S_n adalah gabungan graf bintang dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh busur yang menghubungkan simpul pusat graf bintang S_n , dengan satu simpul pada graf lingkaran C_k . Pada Gambar 2.7 diberikan contoh graf pot bunga C_3-S_7



Gambar 2.7 Graf pot bunga C_3-S_7

Graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ adalah gabungan graf sapu dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh busur yang menghubungkan simpul ujung graf sapu $B_{m,n}$ dengan salah satu simpul pada graf lingkaran C_k . Pada Gambar 2.8 diberikan contoh graf pohon palem $C_3-B_{3,7}$



Gambar 2.8 Graf pohon palem $C_3-B_{3,7}$

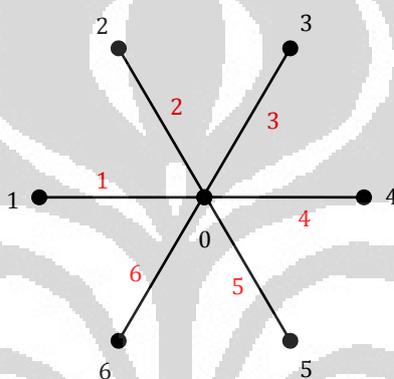
2.3. Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemberian nilai bilangan pada simpul, busur, atau simpul dan busur dari graf menurut aturan tertentu. Banyak jenis pelabelan yang telah dikenal di antaranya pelabelan ajaib, pelabelan jumlah, pelabelan graceful, pelabelan $\hat{\rho}$ dan lain sebagainya. Pada tesis ini hanya dibahas pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

Pelabelan graceful pada graf G adalah fungsi injektif g dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, |E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif g' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$ dimana untuk setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u, v \in V$ berlaku $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$. Suatu graf yang memiliki pelabelan graceful disebut **graf graceful** (Choudum dan Kishore, 1996).

Beberapa graf graceful yang sudah diketahui antara lain adalah graf bintang, graf lintasan, dan graf *caterpillar*. Graf bintang jelas merupakan graf graceful dengan konstruksi pelabelan sebagai berikut. Simpul pusat diberikan label 0, dan simpul-simpul ujungnya di berikan label 1, 2 dan seterusnya. Dengan konstruksi pelabelan seperti ini maka pelabelan busur yang diinduksikan oleh pelabelan simpul adalah selisih dari label simpul - simpul yang hadir pada busur tersebut.

Pada Gambar 2.9 diberikan contoh pelabelan graceful pada graf bintang S_6 .

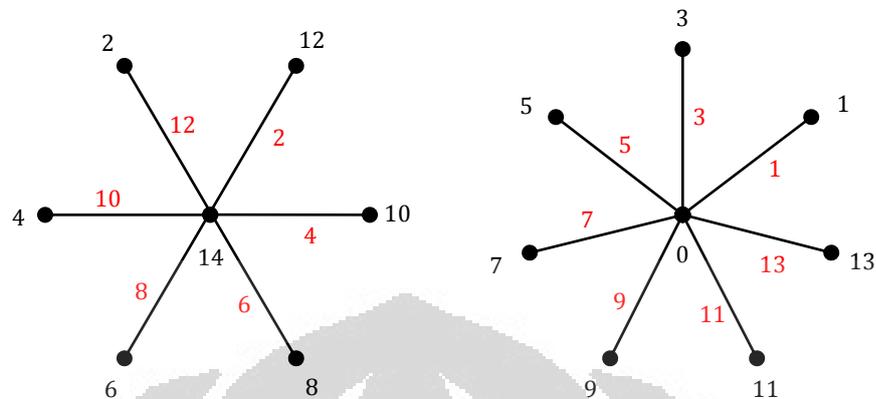


Gambar 2.9 Pelabelan graceful pada graf bintang S_6

Pelabelan graceful tidak mungkin dikonstruksikan pada graf yang memiliki $|V| > |E| + 1$. Untuk graf seperti ini didefinisikan pelabelan lain yang memberikan kelonggaran pada pelabelan simpul, salah satunya adalah pelabelan $\hat{\rho}$.

Pelabelan $\hat{\rho}$ adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif h dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif h' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ atau $\{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u, v \in V$ berlaku $h'(uv) = |h(u) - h(v)|$ (Galian 2010). Jelas bahwa semua graf yang memiliki pelabelan graceful memiliki pelabelan $\hat{\rho}$, hal ini disebabkan himpunan label simpul pada graf graceful merupakan subhimpunan dari himpunan label simpul pada pelabelan $\hat{\rho}$, tetapi graf yang memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ belum tentu merupakan pelabelan graceful.

Pada Gambar 2.10 diberikan contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada gabungan graf bintang $S_6 \cup S_7$



Gambar 2.1 Contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada gabungan graf $S_6 \cup S_7$

Pada bab ini telah dibahas jenis-jenis graf, pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$. Pada bab berikutnya akan dibahas pelabelan graceful pada graf pot bunga dan graf pohon palem untuk $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ serta pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf pot bunga dan graf pohon palem untuk setiap k .

BAB 3

PELABELAN GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA GRAF POT BUNGA DAN GRAF POHON PALEM

Pada bab ini akan diberikan pelabelan graceful dan modifikasi pelabelan graceful, yaitu pelabelan $\hat{\rho}$ pada beberapa kelas graf. Setiap graf yang memiliki pelabelan graceful, jelas memiliki pelabelan $\hat{\rho}$, tetapi belum tentu sebaliknya. Graf yang menjadi perhatian pada bab ini adalah gabungan antara graf lingkaran dengan graf bintang dan graf sapu, membentuk graf yang dinamakan graf pot bunga dan graf pohon palem. Akan ditunjukkan bahwa graf pot bunga dan pohon palem mempunyai pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

3.1 Pelabelan Graceful pada Graf Pot Bunga

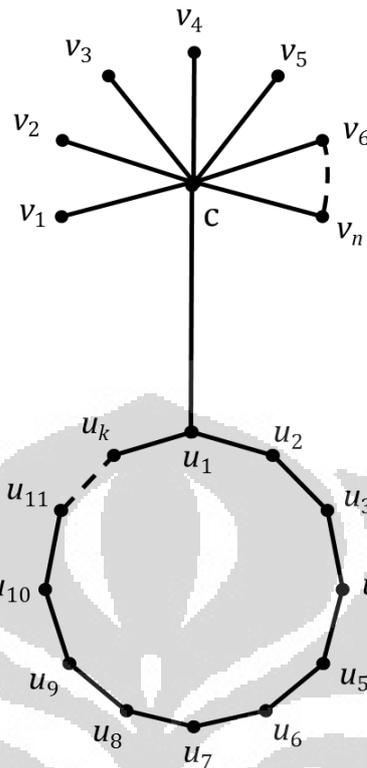
Graf pot bunga C_k-S_n adalah gabungan graf bintang dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh busur antara pusat graf bintang S_n , dengan satu simpul pada graf lingkaran C_k , $k \geq 3$, $n \geq 0$.

Pada bab sebelumnya telah diberikan definisi pelabelan graceful, graf graceful, dan pelabelan $\hat{\rho}$. Perlu diingat bahwa pelabelan graceful pada graf G adalah fungsi injektif g dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif g' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ dimana untuk setiap busur $uv \in E$ berlaku $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$ dengan $u, v \in V$.

Pada Teorema 3.1 diberikan konstruksi pelabelan graceful pada graf pot bunga, C_k-S_n dengan $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$, $k \geq 3$, $n \geq 0$.

Teorema 3.1 Graf pot bunga C_k-S_n dengan $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$, $k \geq 3$ dan n bilangan bulat positif memiliki pelabelan graceful.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf pot bunga C_k-S_n diberikan pada Gambar 3.1. Dapat dilihat bahwa himpunan simpul $V(C_k-S_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_k, c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dan himpunan busur $E(C_k-S_n) = \{u_1u_2, \dots, u_{k-1}u_k, u_1u_k, u_1c, cv_1, cv_2, \dots, cv_n\}$ maka jelas bahwa $|V| = k + n + 1$ dan $|E| = k + n + 1$.



Gambar 3.1 Notasi simpul graf pot bunga $C_k - S_n$

Untuk selanjutnya pembuktian pelabelan graceful untuk graf pot bunga $C_k - S_n$ akan dibagi menjadi dua kasus yaitu untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dan $k \equiv 3 \pmod{4}$.

Kasus 1. $k \equiv 0 \pmod{4}$

Didefinisikan pelabelan f pada simpul $C_k - S_n$ untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{2k+3-i}{2} & , i = 1, 3, 5, \dots, k-1. \\ \frac{i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, \frac{k}{2}. \\ \frac{i+2}{2} & , i = \frac{k}{2} + 2, \frac{k}{2} + 4, \dots, k. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$f(c) = 0. \quad (3.2)$$

$$f(v_i) = k + 1 + i \quad , i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Dari persamaan (3.1) diperoleh $\{f(u_i) \mid u_i \in V(C_k - S_n)\} = \{k + 1, k, k - 1, k - 2, k - 3, \dots, \frac{k}{2} + 2, 1, 2, \dots, \frac{k}{4}, \frac{k}{4} + 2, \frac{k}{4} + 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\}$. Dari persamaan (3.3) diperoleh $\{f(v_i) \mid v_i \in V(C_k - S_n)\} = \{k + 2, k + 3, k + 4, \dots, k + 1 + n\}$.

Sehingga diperoleh $f(V(C_k - S_n)) = \{0, 1, 2, \dots, \frac{k}{4}, \frac{k}{4} + 2, \frac{k}{4} + 3, \dots, \frac{k}{2} + 1, k + 1, k, k - 1, k - 2, k - 3, \dots, \frac{k}{2} + 2, k + 2, k + 3, k + 4, \dots, k + 1 + n\}$. Pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (3.1 - 3.3), merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur f' yang diinduksi dari f dengan $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$. Label busur $C_k - S_n$ dinyatakan sebagai berikut.

$$f'(u_i u_{i+1}) = |f(u_i) - f(u_{i+1})|$$

$$= \begin{cases} \left| \binom{2k+3-i}{2} - \binom{(i+1)}{2} \right| = k - i + 1, & i = 1, 3, \dots, \frac{k}{2} - 1. \\ \left| \binom{i}{2} - \binom{2k+3-(i+1)}{2} \right| = |i - k - 1|, & i = 2, 4, \dots, \frac{k}{2}. \\ \left| \binom{2k+3-i}{2} - \binom{(i+1)+2}{2} \right| = k - i, & i = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 3, \dots, k - 1. \\ \left| \binom{(i+2)}{2} - \binom{2k+3-(i+1)}{2} \right| = |i - k|, & i = \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 2. \end{cases} \quad (3.4)$$

$$f'(u_1 u_k) = |f(u_1) - f(u_k)|$$

$$= |(k + 2 - 1) - (\frac{k}{2} + 1)|$$

$$= \frac{k}{2}. \quad (3.5)$$

$$f'(u_1 c) = |f(u_1) - f(c)|$$

$$= |(k + 1) - (0)|$$

$$= k + 1. \quad (3.6)$$

$$f'(cv_i) = |f(c) - f(v_i)|$$

$$= |(0) - (k + 1 + i)|$$

$$= k + 1 + i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Dari persamaan (3.4) diperoleh $\{f'(u_i u_{i+1}) \mid u_i u_{i+1} \in E(C_k - S_n)\} = \{k, k - 2, k - 4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k - 1, k - 3, k - 5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2\}$. Dari persamaan (3.5) diperoleh $\{f'(u_1 u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - S_n)\} = \{\frac{k}{2}\}$. Dari persamaan (3.6) diperoleh $\{f'(u_1 c) \mid u_1 c \in E(C_k - S_n)\} = \{k + 1\}$. Dan dari persamaan (3.7) diperoleh $\{f'(cv_i) \mid cv_i \in E(C_k - S_n)\} = \{k + 2, k + 3, k + 4, \dots, k + 1 + n\}$. Sehingga diperoleh $f'(E(C_k - S_n)) = \{k, k - 2, k - 4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k - 1, k - 3, k -$

$5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2}, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2, k + 1, k + 2, k + 3, k + 4, \dots, k + 1 + n$.

Berdasarkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (3.4 – 3.7) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan membentuk himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang membentuk himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Berdasarkan hal tersebut, maka f membentuk pelabelan graceful untuk graf pot bunga C_k-S_n dengan $k \equiv 0 \pmod{4}$.

Kasus 2. $k \equiv 3 \pmod{4}$

Didefinisikan pelabelan f pada simpul graf C_k-S_n untuk $k \equiv 3 \pmod{4}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{2k+3-i}{2} & , i = 1, 3, 5, \dots, k. \\ \frac{i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \frac{i+2}{2} & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 4, \dots, k-1. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$f(c) = 0. \quad (3.9)$$

$$f(v_i) = k + 1 + i \quad , i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

Dari persamaan (3.8) diperoleh $\{f(u_i) \mid u_i \in V(C_k-S_n)\} = \{k + 1, k, k - 1, k - 2, \dots, \frac{k+3}{2}, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + 4, \dots, \frac{k+1}{2}\}$. Dan dari persamaan (3.10) diperoleh $\{f(v_i) \mid v_i \in V(C_k-S_n)\} = \{k + 2, k + 3, k + 4, \dots, k + 1 + n\}$.

Sehingga diperoleh $f(V(C_k-S_n)) = \{0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + 4, \dots, \frac{k+1}{2}, k + 1, k, k - 1, k - 2, \dots, \frac{k+3}{2}, k + 2, k + 3, k + 4, \dots, k + 1 + n\}$. Pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.8 - 3.10), melabelkan anggota $V(C_k-S_n)$ dengan pelabelan $f(V(C_k-S_n))$ merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur f' yang diinduksikan oleh pelabelan $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ pada graf C_k-S_n yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f'(u_i u_{i+1}) &= |f(u_i) - f(u_{i+1})| \\
&= \begin{cases} \left| \binom{2k+3-i}{2} - \binom{i+1}{2} \right| = k - i + 1 & , i = 1, 3, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1. \\ \left| \binom{i}{2} - \binom{2k+3-(i+1)}{2} \right| = |i - k - 1| & , i = 2, 4, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \left| \binom{2k+3-i}{2} - \binom{(i+1)+2}{2} \right| = k - i & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 3, \dots, k. \\ \left| \binom{i+2}{2} - \binom{2k+3-(i+1)}{2} \right| = |i - k| & , i = \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 1. \end{cases} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(u_1 u_k) &= |f(u_1) - f(u_k)| \\
&= \left| \binom{2k+3-1}{2} - \binom{2k+3-k}{2} \right| \\
&= \frac{k-1}{2}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(u_1 c) &= |f(u_1) - f(c)| \\
&= |(k+1) - (0)| \\
&= k+1. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

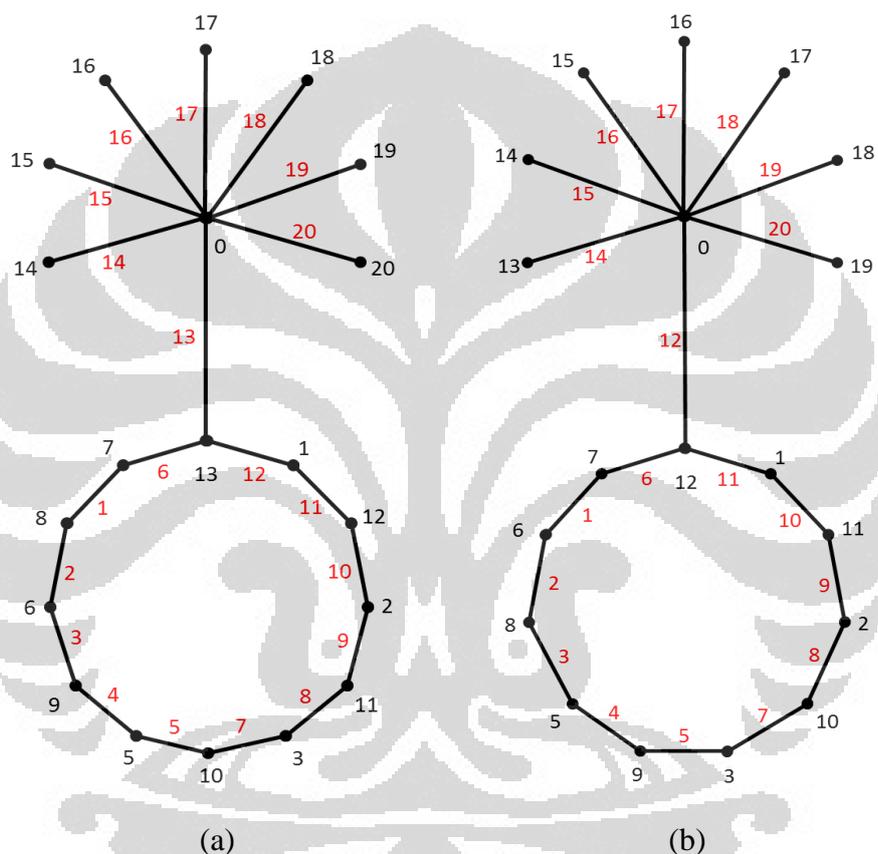
$$\begin{aligned}
f'(cv_i) &= |f(c) - f(v_i)| \\
&= |(0) - (k+1+i)| \\
&= k+1+i, \quad , i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.11) diperoleh $\{f'(u_i u_{i+1}) \mid u_i u_{i+1} \in E(C_k - S_n)\} = \{k, k-2, k-4, \dots, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, k-1, k-3, \dots, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 3, \dots, 1, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 2, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 4, \dots, 2\}$. Dari persamaan (3.12) diperoleh $\{f'(u_1 u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - S_n)\} = \left\{ \frac{k}{2} \right\}$. Dari persamaan (3.13) diperoleh $\{f'(u_1 c) \mid u_1 c \in E(C_k - S_n)\} = \{k+1\}$. Dan dari persamaan (3.14) diperoleh $\{f'(cv_i) \mid cv_i \in E(C_k - S_n)\} = \{k+2, k+3, k+4, \dots, k+1+n\}$. Sehingga diperoleh $f'(E(C_k - S_n)) = \{k, k-2, k-4, \dots, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, k-1, k-3, \dots, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \frac{k-1}{2}, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 3, \dots, 1, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 2, k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 4, \dots, 2, k+1, k+2, k+3, k+4, \dots, k+1+n\}$.

Berdasarkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (3.11 – 3.14) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Berdasarkan hal tersebut, maka f merupakan pelabelan graceful untuk graf pot bunga $C_k - S_n$ dengan $k \equiv 3 \pmod{4}$.

Dari 2 kasus di atas terbukti bahwa graf pot bunga (C_k-S_n) dengan $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ memiliki pelabelan graceful. ■

Pada Gambar 3.2 diberikan contoh pelabelan graceful pada graf pot bunga $C_{12}-S_7$ untuk kasus $k \equiv 0 \pmod{4}$, dengan banyak simpul graf bintangnya 7 dan graf lingkarannya 12. Pada Gambar 3.3 diberikan contoh pelabelan graceful pada graf pot bunga $C_{11}-S_7$ untuk kasus $k \equiv 3 \pmod{4}$ diberikan dengan banyak simpul graf bintangnya 7 dan graf lingkarannya 11.



Gambar 3.2 Contoh pelabelan graceful pada (a) graf $C_{12}-S_7$ dan (b) graf $C_{11}-S_7$

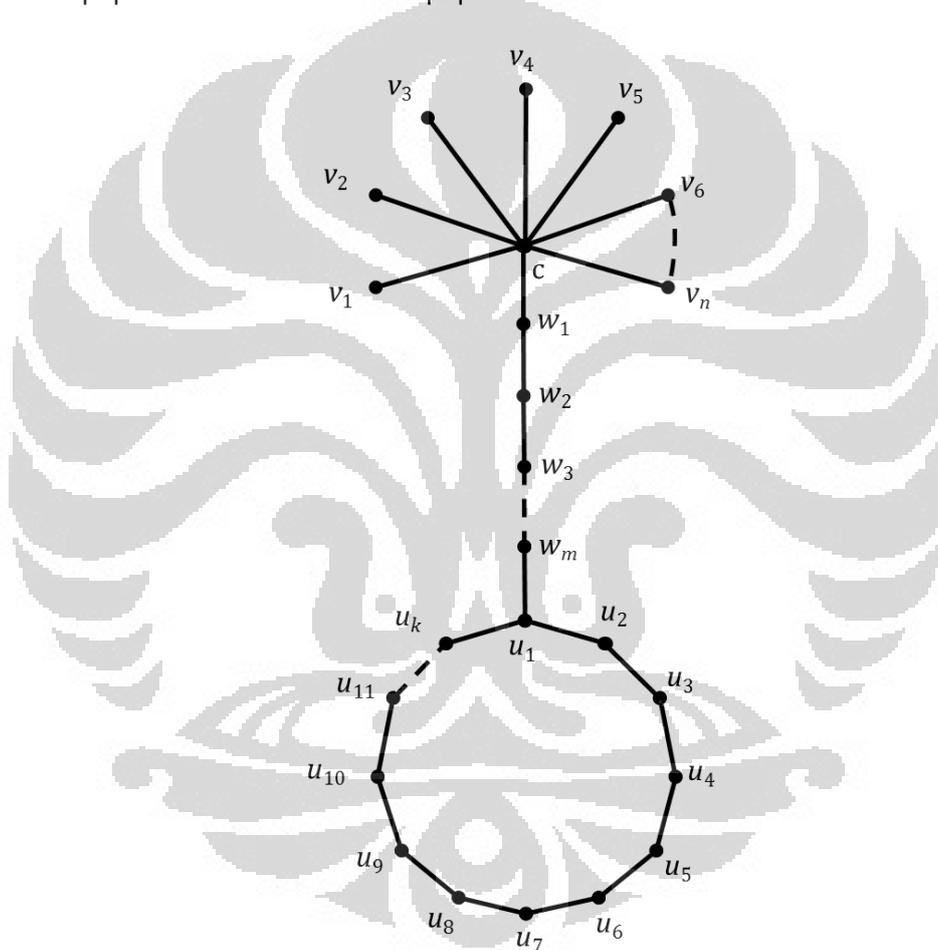
3.2 Pelabelan Graceful pada Graf Pohon Palem

Graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ adalah gabungan graf sapu dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh busur antara simpul ujung graf sapu $B_{m,n}$ dengan salah satu simpul pada graf lingkaran C_k .

Pada Teorema 3.2 diberikan konstruksi pelabelan graceful pada graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dengan $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$, $k \geq 3$, $n \geq 0$.

Teorema 3.2 Graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dengan $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$, $k \geq 3$ dan m, n bilangan bulat positif memiliki pelabelan graceful.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf $C_k-B_{m,n}$ diberikan pada Gambar 3.4. Dapat dilihat bahwa himpunan simpul $V(C_k-B_{m,n}) = \{u_1, u_2, \dots, u_k, w_1, w_2, \dots, w_m, c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan busur $E(C_k-B_{m,n}) = \{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{k-1}u_k, u_1u_k, u_1w_m, w_1w_2, w_2w_3, \dots, w_{m-1}w_m, w_1c, cv_1, cv_2, cv_3, \dots, cv_n\}$ maka jelas bahwa $|V| = k + m + n + 1$ dan $|E| = k + m + n + 1$.



Gambar 3.3 Notasi simpul pohon palem $C_k-B_{m,n}$

Untuk selanjutnya pembuktian pelabelan graceful untuk graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ akan dibagi menjadi empat kasus yaitu untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m genap, $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m ganjil, $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m genap dan $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m ganjil.

Kasus 1. $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m genap

Didefinisikan pelabelan g pada simpul graf $C_k - B_{m,n}$ untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m genap, sebagai berikut.

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{2k+m+3-i}{2} & , i = 1,3,5, \dots, k-1. \\ \frac{m+i}{2} & , i = 2,4,6, \dots, \frac{k}{2}. \\ \frac{m+i+2}{2} & , i = \frac{k}{2} + 2, \frac{k}{2} + 4, \dots, k. \end{cases} \quad (3.15)$$

$$g(v_i) = k + m + 1 + i \quad , i = 1,2,3, \dots, n. \quad (3.16)$$

$$g(w_i) = \begin{cases} \frac{2k+2m+3-i}{2} & , i = 1,3,5, \dots, m-1. \\ \frac{i}{2} & , i = 2,4,6, \dots, m. \end{cases} \quad (3.17)$$

$$g(c) = 0. \quad (3.18)$$

Dari persamaan (3.15) diperoleh $\{g(u_i) \mid u_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{m}{2} + k + 1, \frac{m}{2} + k, \frac{m}{2} + k - 1, \frac{m}{2} + k - 2, \dots, \frac{m+k}{2} + 2, \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \frac{m}{2} + 2, \dots, \frac{2m+k}{4}, \frac{2m+k}{4} + 2, \frac{2m+k}{4} + 3, \frac{2m+k}{4} + 4, \dots, \frac{m+k+2}{2} \right\}$. Dari persamaan (3.16) diperoleh $\{g(v_i) \mid v_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + 1 + n\}$. Dari persamaan (3.17) diperoleh $\{g(w_i) \mid w_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 1, k + m, k + m - 1, k + m - 2, k + m - 3, \dots, \frac{k}{2} + 2, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\}$. Dan dari persamaan (3.18) diperoleh $g(c) = 0$. Sehingga diperoleh $g(V(C_k - B_{m,n})) = \left\{ 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + k + 1, \frac{m}{2} + k, \frac{m}{2} + k - 1, \frac{m}{2} + k - 2, \dots, \frac{m+k}{2} + 2, \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \frac{m}{2} + 2, \dots, \frac{2m+k}{4}, \frac{2m+k}{4} + 2, \frac{2m+k}{4} + 3, \frac{2m+k}{4} + 4, \dots, \frac{m+k+2}{2}, k + m + 1, k + m, k + m - 1, k + m - 2, k + m - 3, \dots, \frac{k}{2} + 2, k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + 1 + n \right\}$. Pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.15 - 3.18), merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur g' yang di induksi oleh pelabelan $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$ pada graf $C_k - B_{m,n}$ untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m genap yang dinyatakan sebagai berikut.

$$g'(u_i u_{i+1}) = |g(u_i) - g(u_{i+1})|.$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \left| \left(\frac{2k+m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{m+(i+1)}{2} \right) \right| = k-i+1 & , i = 1, 3, \dots, \frac{k}{2} - 1. \\ \left| \left(\frac{m+i}{2} \right) - \left(\frac{2k+m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = |i-k-1| & , i = 2, 4, \dots, \frac{k}{2}. \\ \left| \left(\frac{2k+m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{m+(i+1)+2}{2} \right) \right| = k-i & , i = \frac{k}{2} + 1, \dots, k-1. \\ \left| \left(\frac{m+i+2}{2} \right) - \left(\frac{2k+m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = |i-k| & , i = \frac{k}{2} + 2, \dots, k-2. \end{cases} \\
& \hspace{15em} (3.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(u_1 u_k) &= |g(u_1) - g(u_k)| \\
&= \left| \left(\frac{2k+m+3-1}{2} \right) - \left(\frac{m+k+2}{2} \right) \right| \\
&= \frac{k}{2}. \hspace{15em} (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(u_1 w_m) &= |g(u_1) - g(w_m)| \\
&= \left| \left(\frac{2k+m+3-1}{2} \right) - \left(\frac{m}{2} \right) \right| \\
&= k+1. \hspace{15em} (3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(w_i w_{i+1}) &= |g(w_i) - g(w_{i+1})| \\
&= \begin{cases} \left| \left(\frac{2k+2m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{(i+1)}{2} \right) \right| = k+m+1-i & , i = 1, 3, \dots, m-1. \\ \left| \left(\frac{i}{2} \right) - \left(\frac{2k+2m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = k+m+1-i & , i = 2, 4, \dots, m-2. \end{cases} \\
& \hspace{15em} (3.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(c w_1) &= |g(c) - g(w_1)| \\
&= \left| (0) - \left(\frac{2k+2m+3-1}{2} \right) \right| \\
&= k+m+1. \hspace{15em} (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(c v_i) &= |g(c) - g(v_i)| \\
&= |(0) - (k+m+1+i)| \\
&= k+m+1+i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \hspace{5em} (3.24)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.19) diperoleh $\{g'(u_i u_{i+1}) | u_i u_{i+1} \in EC_k - B_{m,n}\} = \{k, k-2, k-4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k-1, k-3, k-5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2\}$. Dari persamaan (3.20) diperoleh $\{g'(u_1 u_k) | u_1 u_k \in EC_k - B_{m,n}\} = \{\frac{k}{2}\}$. Dari persamaan (3.21) diperoleh $\{g'(u_1 w_m) | u_1 w_m \in EC_k - B_{m,n}\} = \{k+1\}$. Dari persamaan (3.22) diperoleh $\{g'(w_i w_{i+1}) | w_i w_{i+1} \in EC_k - B_{m,n}\} = \{k+m, k+m-2, k+m-4, \dots, k+2, k+m-1, k+m-3, \dots, k+3\}$. Dari persamaan (3.23) diperoleh $\{g'(c w_1) | c w_1 \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k+m+1\}$. Dan dari persamaan (3.24)

diperoleh $\{g'(cv_1) | cv_1 \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + n + 1\}$. Sehingga diperoleh $g'(E(C_k - B_{m,n})) = \{k, k - 2, k - 4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k - 1, k - 3, k - 5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2}, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2, k + 1, k + m, k + m - 2, k + m - 4, \dots, k + 2, k + m - 1, k + m - 3, \dots, k + 3, k + m + 1, k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + n + 1\}$.

Berdasarkan pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.19 - 3.24), setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan g' yang diinduksi oleh pelabelan simpul g , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pohon palem $C_k - B_{m,n}$ memiliki pelabelan graceful untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m genap.

Kasus 2. $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m ganjil

Didefinisikan pelabelan g pada simpul graf $C_k - B_{m,n}$ untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m ganjil, sebagai berikut.

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{m+i}{2} & , i = 1, 3, 5, \dots, \frac{k}{2} - 1. \\ \frac{m+i+2}{2} & , i = \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 3, \dots, k - 1. \\ \frac{2k+m+3-i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, k. \end{cases} \quad (3.25)$$

$$g(v_i) = k + m + 1 + i \quad , i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.26)$$

$$g(w_i) = \begin{cases} \frac{2k+2m+3-i}{2} & , i = 1, 3, 5, \dots, m. \\ \frac{i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, m - 1. \end{cases} \quad (3.27)$$

$$g(c) = 0. \quad (3.28)$$

Dari persamaan (3.25) diperoleh $\{g(u_i) | u_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, \frac{2m+k-2}{4}, \frac{2m+k+6}{4}, \frac{2m+k+8}{4}, \dots, \frac{m+k+1}{2}, \frac{2k+m+1}{2}, \frac{2k+m-1}{2}, \frac{2k+m-3}{2}, \dots, \frac{k+m+3}{2} \right\}$. Dari persamaan (3.26) diperoleh $\{g(v_i) | v_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + 1 + n\}$. Dari persamaan (3.27) diperoleh $\{g(w_i) | w_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ k + m + 1, k + m, k + m - 1, k + m - 2, k + m - 3, \dots, \frac{k}{2} + \right\}$

$2, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}$. Sehingga diperoleh $g(V(C_k - B_{m,n})) = \{0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \frac{m+5}{2}, \dots, \frac{2m+k-2}{4}, \frac{2m+k+6}{4}, \frac{2m+k+8}{4}, \dots, \frac{m+k+1}{2}, \frac{2k+m+1}{2}, \frac{2k+m-1}{2}, \frac{2k+m-3}{2}, \dots, \frac{k+m+3}{2}, k+m+1, k+m, k+m-1, k+m-2, k+m-3, \dots, \frac{k}{2}+2, k+m+2, k+m+3, k+m+4, \dots, k+m+1+n\}$. Pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.25 - 3.28), merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur g' yang di induksi oleh pelabelan $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$ pada graf $C_k - B_{m,n}$ dengan $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m ganjil, yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 g'(u_i u_{i+1}) &= |g(u_i) - g(u_{i+1})| \\
 &= \begin{cases} \left| \left(\frac{2k+m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{m+(i+1)}{2} \right) \right| = k-i+1 & , i = 1, 3, \dots, \frac{k}{2} - 1. \\ \left| \left(\frac{m+i}{2} \right) - \left(\frac{2k+m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = |i-k-1| & , i = 2, 4, \dots, \frac{k}{2}. \\ \left| \left(\frac{2k+m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{m+(i+1)+2}{2} \right) \right| = k-i & , i = \frac{k}{2} + 1, \dots, k-1. \\ \left| \left(\frac{m+i+2}{2} \right) - \left(\frac{2k+m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = |i-k| & , i = \frac{k}{2} + 2, \dots, k-2. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
 g'(u_1 u_k) &= |g(u_1) - g(u_k)| \\
 &= \left| \left(\frac{2k+m+3-1}{2} \right) - \left(\frac{m+k+2}{2} \right) \right| \\
 &= \frac{k}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 g'(u_1 w_m) &= |g(u_1) - g(w_m)| \\
 &= \left| \left(\frac{2k+m+3-1}{2} \right) - \left(\frac{m}{2} \right) \right| \\
 &= k+1.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 g'(w_i w_{i+1}) &= |g(w_i) - g(w_{i+1})| \\
 &= \begin{cases} \left| \left(\frac{2k+2m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{(i+1)}{2} \right) \right| = k+m+1-i & , i = 1, 3, \dots, m-1. \\ \left| \left(\frac{i}{2} \right) - \left(\frac{2k+2m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = k+m+1-i & , i = 2, 4, \dots, m-2. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
 g'(c w_1) &= |g(c) - g(w_1)| \\
 &= \left| (0) - \left(\frac{2k+2m+3-1}{2} \right) \right| \\
 &= k+m+1.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$g'(c v_i) = |g(c) - g(v_i)|$$

$$\begin{aligned}
&= |(0) - (k + m + 1 + i)| \\
&= k + m + 1 + i \quad , i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.29) diperoleh $\{g^2(u_i u_{i+1}) | u_i u_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k, k - 2, k - 4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k - 1, k - 3, k - 5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2\}$. Dari persamaan (3.30) diperoleh $\{g'(u_1 u_k) | u_1 u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{\frac{k}{2}\}$. Dari persamaan (3.31) diperoleh $\{g'(u_1 w_m) | u_1 w_m \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + 1\}$. Dari persamaan (3.32) diperoleh $\{g'(w_i w_{i+1}) | w_i w_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m, k + m - 2, k + m - 4, \dots, k + 2, k + m - 1, k + m - 3, \dots, k + 3\}$. Dari persamaan (3.33) diperoleh $\{g'(c w_1) | c w_1 \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 1\}$. Dan dari persamaan (3.34) diperoleh $\{g'(c v_i) | c v_i \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + n + 1\}$. Sehingga diperoleh $g'(E(C_k - B_{m,n})) = \{k, k - 2, k - 4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k - 1, k - 3, k - 5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2}, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2, k + 1, k + m, k + m - 2, k + m - 4, \dots, k + 2, k + m - 1, k + m - 3, \dots, k + 3, k + m + 1, k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + n + 1\}$.

Berdasarkan pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.29 - 3.34) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan g' yang diinduksi oleh pelabelan simpul g , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pohon palem $C_k - B_{m,n}$ memiliki pelabelan graceful untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dengan m ganjil.

Kasus 3. $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m genap

Didefinisikan pelabelan g pada simpul graf $C_k - B_{m,n}$ untuk $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m genap, sebagai berikut.

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{2k+m+3-i}{2} & , i = 1,3,5, \dots, k. \\ \frac{m+i}{2} & , i = 2,4,6, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \frac{m+i+2}{2} & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 4, \dots, k-1. \end{cases} \quad (3.35)$$

$$g(v_i) = k + m + 1 + i \quad , i = 1,2,3, \dots, n. \quad (3.36)$$

$$g(w_i) = \begin{cases} \frac{2k+2m+3-i}{2} & , i = 1,3,5, \dots, m-1. \\ \frac{i}{2} & , i = 2,4,6, \dots, m. \end{cases} \quad (3.37)$$

$$g(c) = 0. \quad (3.38)$$

Dari persamaan (3.35) diperoleh $\{g(u_i) \mid u_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{m}{2} + k + 1, \frac{m}{2} + k, \frac{m}{2} + k - 1, \frac{m}{2} + k - 2, \dots, \frac{m+k}{2} + 2, \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \frac{m}{2} + 3, \dots, \frac{2m+k}{4}, \frac{2m+k}{4} + 2, \frac{2m+k}{4} + 3, \frac{2m+k}{4} + 4, \dots, \frac{m+k+2}{2} \right\}$. Dari persamaan (3.36) diperoleh $\{g(v_i) \mid v_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + 1 + n\}$. Dari persamaan (3.37) diperoleh $\{g(w_i) \mid w_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 1, k + m, k + m - 1, k + m - 2, k + m - 3, \dots, \frac{k}{2} + 2, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\}$. Sehingga diperoleh $g(V(C_k - B_{m,n})) = \{0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + k + 1, \frac{m}{2} + k, \frac{m}{2} + k - 1, \frac{m}{2} + k - 2, \dots, \frac{m+k}{2} + 2, \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \frac{m}{2} + 2, \dots, \frac{2m+k}{4}, \frac{2m+k}{4} + 2, \frac{2m+k}{4} + 3, \frac{2m+k}{4} + 4, \dots, \frac{m+k+2}{2}, k + m + 1, k + m, k + m - 1, k + m - 2, k + m - 3, \dots, \frac{k}{2} + 2, k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + 1 + n\}$. Pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.35 - 3.38), merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur g' yang di induksi oleh pelabelan $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$ pada graf $C_k - B_{m,n}$ untuk $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m genap yang dinyatakan sebagai berikut.

$$g'(u_i u_{i+1}) = |g(u_i) - g(u_{i+1})|$$

$$= \begin{cases} \left| \left(\frac{2k+m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{m+(i+1)}{2} \right) \right| = k - i + 1 & , i = 1,3, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1. \\ \left| \left(\frac{m+i}{2} \right) - \left(\frac{2k+m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = |i - k - 1| & , i = 2,4, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \left| \left(\frac{2k+m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{m+(i+1)+2}{2} \right) \right| = k - i & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \dots, k - 1. \\ \left| \left(\frac{m+i+2}{2} \right) - \left(\frac{2k+m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = |i - k| & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \dots, k - 2. \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
g'(u_1 u_k) &= |g(u_1) - g(u_k)| \\
&= \left| \left(\frac{2k+m+3-1}{2} \right) - \left(\frac{m+k+2}{2} \right) \right| \\
&= \frac{k}{2}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
g'(u_1 w_m) &= |g(u_1) - g(w_m)| \\
&= \left| \left(\frac{2k+m+3-1}{2} \right) - \left(\frac{m}{2} \right) \right| \\
&= k + 1.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
g'(w_i w_{i+1}) &= |g(w_i) - g(w_{i+1})| \\
&= \begin{cases} \left| \left(\frac{2k+2m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{(i+1)}{2} \right) \right| = k + m + 1 - i, & i = 1, 3, \dots, m-1. \\ \left| \left(\frac{i}{2} \right) - \left(\frac{2k+2m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = k + m + 1 - i, & i = 2, 4, \dots, m-2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
g'(c w_1) &= |g(c) - g(w_1)| \\
&= \left| (0) - \left(\frac{2k+2m+3-1}{2} \right) \right| \\
&= k + m + 1.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
g'(c v_i) &= |g(c) - g(v_i)| \\
&= |(0) - (k + m + 1 + i)| \\
&= k + m + 1 + i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Dari persamaan (3.39) diperoleh $\{g'(u_i u_{i+1}) \mid u_i u_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k, k-2, k-4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k-1, k-3, k-5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2\}$. Dari persamaan (3.40) diperoleh $\{g'(u_1 u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{\frac{k}{2}\}$. Dari persamaan (3.41) diperoleh $\{g'(u_1 w_m) \mid u_1 w_m \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + 1\}$. Dari persamaan (3.42) diperoleh $\{g'(w_i w_{i+1}) \mid w_i w_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m, k + m - 2, k + m - 4, \dots, k + 2, k + m - 1, k + m - 3, \dots, k + 3\}$. Dari persamaan (3.43) diperoleh $\{g'(c w_i) \mid c w_i \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 1\}$. Dan dari persamaan (3.44) diperoleh $\{g'(c v_i) \mid c v_i \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + n + 1\}$. Sehingga diperoleh $g'(E(C_k - B_{m,n})) = \{k, k-2, k-4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k-1, k-3, k-5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2}, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2, k + 1, k + m, k + m - 2, k + m - 4, \dots, k + 2, k +$

$m - 1, k + m - 3, \dots, k + 3, k + m + 1, k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + n + 1\}$.

Berdasarkan pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.39 - 3.44), setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan g' yang diinduksi oleh pelabelan simpul g , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ memiliki pelabelan graceful untuk $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m genap.

Kasus 4. $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m ganjil

Didefinisikan pelabelan g pada simpul graf $C_k-B_{m,n}$ untuk $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m ganjil, sebagai berikut.

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{m+i}{2} & , i = 1, 3, 5, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1. \\ \frac{m+i+2}{2} & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 3, \dots, k - 1. \\ \frac{2k+m+3-i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, k. \end{cases} \quad (3.45)$$

$$g(v_i) = k + m + 1 + i \quad , i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.46)$$

$$g(w_i) = \begin{cases} \frac{2k+2m+3-i}{2} & , i = 1, 3, 5, \dots, m. \\ \frac{i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, m - 1. \end{cases} \quad (3.47)$$

$$g(c) = 0 \quad (3.48)$$

Dari persamaan (3.45) diperoleh $\{g(u_i) \mid u_i \in V(C_k-B_{m,n})\} = \left\{ \frac{m}{2} + k + 1, \frac{m}{2} + k, \frac{m}{2} + k - 1, \frac{m}{2} + k - 2, \dots, \frac{m+k}{2} + 2, \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \frac{m}{2} + 2, \dots, \frac{2m+k}{4}, \frac{2m+k}{4} + 2, \frac{2m+k}{4} + 3, \frac{2m+k}{4} + 4, \dots, \frac{m+k+2}{2} \right\}$. Dari persamaan (3.46) diperoleh $\{g(v_i) \mid v_i \in V(C_k-B_{m,n})\} = \{k + m + 2, k + m + 3, k + m + 4, \dots, k + m + 1 + n\}$. Dari persamaan (3.47) diperoleh $\{g(w_i) \mid w_i \in V(C_k-B_{m,n})\} = \{k + m + 1, k + m, k + m - 1, k + m - 2, k + m - 3, \dots, \frac{k}{2} + 2, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}\}$. Sehingga diperoleh $g(V(C_k-B_{m,n})) = \{0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m}{2}, \frac{m}{2} + k + 1, \frac{m}{2} + k, \frac{m}{2} + k - 1, \frac{m}{2} + k - 2, \dots, \frac{m+k}{2} + 2, \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \frac{m}{2} + 2, \dots, \frac{2m+k}{4}, \frac{2m+k}{4} + 2, \frac{2m+k}{4} + 3, \frac{2m+k}{4} + 4,$

..., $\frac{m+k+2}{2}, k+m+1, k+m, k+m-1, k+m-2, k+m-3, \dots, \frac{k}{2}+2, k+m+2, k+m+3, k+m+4, \dots, k+m+1+n$. Pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.45 - 3.48), merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur g' yang di induksi oleh pelabelan $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$ pada graf $C_k-B_{m,n}$ dengan $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m ganjil, yang dinyatakan sebagai berikut.

$$g'(u_i u_{i+1}) = |g(u_i) - g(u_{i+1})|.$$

$$= \begin{cases} \left| \left(\frac{2k+m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{m+(i+1)}{2} \right) \right| = k-i+1 & , i = 1, 3, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1. \\ \left| \left(\frac{m+i}{2} \right) - \left(\frac{2k+m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = |i-k-1| & , i = 2, 4, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \left| \left(\frac{2k+m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{m+(i+1)+2}{2} \right) \right| = k-i & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \dots, k-1. \\ \left| \left(\frac{m+i+2}{2} \right) - \left(\frac{2k+m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = |i-k| & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \dots, k-2. \end{cases} \quad (3.49)$$

$$g'(u_1 u_k) = |g(u_1) - g(u_k)|$$

$$= \left| \left(\frac{2k+m+3-1}{2} \right) - \left(\frac{m+k+2}{2} \right) \right|$$

$$= \frac{k}{2}. \quad (3.50)$$

$$g'(u_1 w_m) = |g(u_1) - g(w_m)|$$

$$= \left| \left(\frac{2k+m+3-1}{2} \right) - \left(\frac{m}{2} \right) \right|$$

$$= k+1. \quad (3.51)$$

$$g'(w_i w_{i+1}) = |g(w_i) - g(w_{i+1})|$$

$$= \begin{cases} \left| \left(\frac{2k+2m+3-i}{2} \right) - \left(\frac{(i+1)}{2} \right) \right| = k+m+1-i & , i = 1, 3, \dots, m-1. \\ \left| \left(\frac{i}{2} \right) - \left(\frac{2k+2m+3-(i+1)}{2} \right) \right| = k+m+1-i & , i = 2, 4, \dots, m-2. \end{cases} \quad (3.52)$$

$$g'(c w_1) = |g(c) - g(w_1)|$$

$$= \left| (0) - \left(\frac{2k+2m+3-1}{2} \right) \right|$$

$$= k+m+1. \quad (3.53)$$

$$g'(c v_i) = |g(c) - g(v_i)|$$

$$= \left| (0) - (k+m+1+i) \right|$$

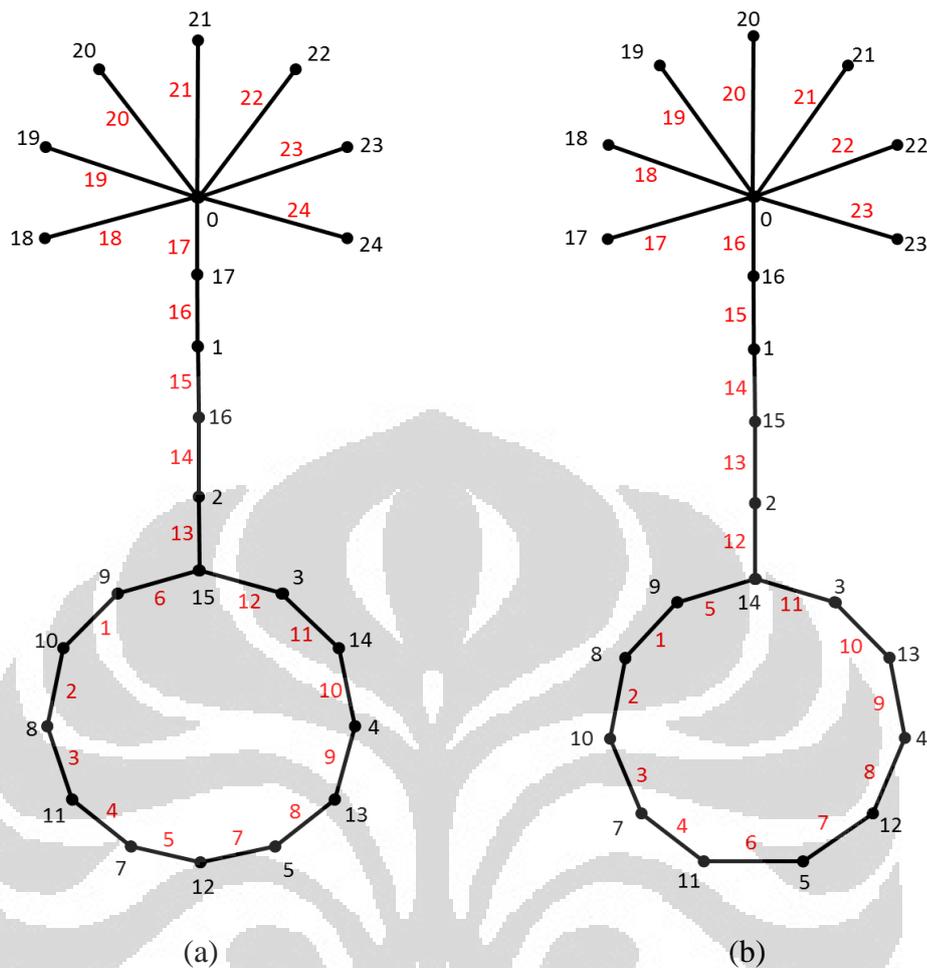
$$= k+m+1+i \quad , i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.54)$$

Dari persamaan (3.49) diperoleh $\{g'(u_i u_{i+1}) \mid u_i u_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k, k-2, k-4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k-1, k-3, k-5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2\}$. Dari persamaan (3.50) diperoleh $\{g'(u_1 u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{\frac{k}{2}\}$. Dari persamaan (3.51) diperoleh $\{g'(u_1 w_m) \mid u_1 w_m \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k+1\}$. Dari persamaan (3.52) diperoleh $\{g'(w_i w_{i+1}) \mid w_i w_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k+m, k+m-2, k+m-4, \dots, k+2, k+m-1, k+m-3, \dots, k+3\}$. Dari persamaan (3.53) diperoleh $\{g'(c w_1) \mid c w_1 \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k+m+1\}$. Dan dari persamaan (3.54) diperoleh $\{g'(c v_i) \mid c v_i \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k+m+2, k+m+3, k+m+4, \dots, k+m+n+1\}$. Sehingga diperoleh $g'(E(C_k - B_{m,n})) = \{k, k-2, k-4, \dots, k - \frac{k}{2} + 2, k-1, k-3, k-5, \dots, k - \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2}, k - \frac{k}{2} - 1, k - \frac{k}{2} - 3, \dots, 1, k - \frac{k}{2} - 2, k - \frac{k}{2} - 4, \dots, 2, k+1, k+m, k+m-2, k+m-4, \dots, k+2, k+m-1, k+m-3, \dots, k+3, k+m+1, k+m+2, k+m+3, k+m+4, \dots, k+m+n+1\}$.

Berdasarkan pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.49 - 3.54), setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan g' yang diinduksi oleh pelabelan simpul g , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pohon palem $C_k - B_{m,n}$ memiliki pelabelan graceful untuk $k \equiv 3 \pmod{4}$ dengan m ganjil.

Dari 4 kasus di atas terbukti bahwa graf pohon palem $(C_k - B_{m,n})$ dengan $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ memiliki pelabelan graceful. ■

Pada Gambar 3.4(a) diberikan contoh pelabelan graceful pada graf pohon palem $C_{12} - S_{4,7}$ untuk kasus $k \equiv 0 \pmod{4}$ dan m genap. Pada Gambar 3.4(b) diberikan contoh pelabelan graceful pada graf pohon palem $C_{11} - S_{4,7}$ untuk kasus $k \equiv 3 \pmod{4}$ dan m genap.



Gambar 3.4 Contoh pelabelan graceful pada (a) graf $C_{12}-S_{4,7}$ dan (b) graf $C_{11}-S_{4,7}$

3.3 Pelabelan $\hat{\rho}$ pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palem

Setiap graf yang dapat dilabel dengan pelabelan graceful pasti dapat juga dilabel dengan pelabelan $\hat{\rho}$. Berikut ini ditunjukkan bahwa graf pot bunga C_k-S_n dan graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ juga mempunyai pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$.

Akibat 3.3. Graf pot bunga C_k-S_n dengan $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$, $k \geq 3$ dan n bilangan bulat positif memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

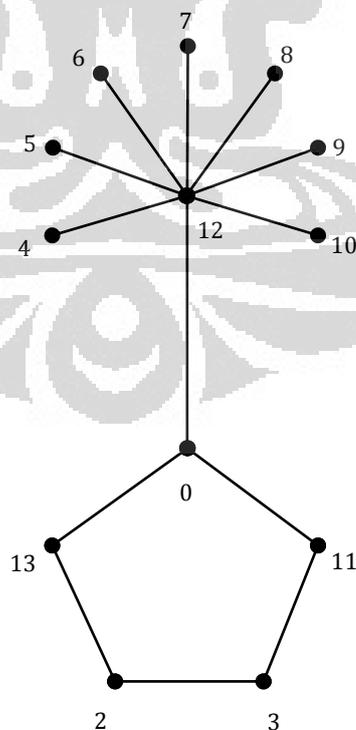
Bukti. Dengan mendefinisikan fungsi f dan f' seperti pada bukti Teorema 3.1 yaitu persamaan (3.1 - 3.4) dan (3.8 - 3.10), diperoleh pelabelan simpul dari C_k-S_n ke subhimpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$, dan pelabelan busur dari

C_k-S_n ke subhimpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Jadi graf C_k-S_n memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$. ■

Akibat 3.4. Graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dengan $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$, $k \geq 3$ dan n bilangan bulat positif memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

Bukti. Dengan mendefinisikan fungsi g dan g' seperti pada bukti Teorema 3.2 yaitu persamaan (3.15 - 3.18) dan (3.25 - 3.28), diperoleh pelabelan simpul dari $C_k-B_{m,n}$ ke himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$, dan pelabelan busur dari $C_k-B_{m,n}$ ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Jadi graf $C_k-B_{m,n}$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$. ■

Pelabelan graceful untuk graf pot bunga C_k-S_n dan graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dengan $k \equiv 1, 2 \pmod{4}$ secara umum belum ditemukan. Namun terdapat graf pot bunga C_k-S_n dengan $k \equiv 1 \pmod{4}$ yang dapat dilabel dengan pelabelan graceful. Sebagai contoh pada Gambar 3.5 diberikan pelabelan graceful untuk graf C_5-S_7 .



Gambar 3.5 Contoh pelabelan graceful pada C_5-S_7

Pada penelitian ini baru diperoleh pelabelan $\hat{\rho}$ untuk graf pot bunga C_k-S_n dan graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dengan $k \equiv 1, 2 \pmod{4}$, m, n bilangan bulat positif. Pelabelan ini diberikan pada Teorema 3.5 dan 3.6.

Teorema 3.5 Graf pot bunga C_k-S_n dengan $k \equiv 1, 2 \pmod{4}$, $k \geq 3$ dan n bilangan bulat positif memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf C_k-S_n diberikan pada Gambar 3.1. Dapat dilihat bahwa himpunan simpul $V(C_k-S_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_k, c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dan himpunan busur $E(C_k-S_n) = \{u_1u_2, \dots, u_{k-1}u_k, u_1c, cv_1, cv_2, cv_3, \dots, cv_n\}$ maka jelas bahwa $|V| = k + n + 1$ dan $|E| = k + n + 1$.

Untuk selanjutnya pembuktian pelabelan $\hat{\rho}$ untuk graf C_k-S_n akan dibagi menjadi dua kasus yaitu untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$ dan $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Kasus 1. $k \equiv 1 \pmod{4}$

Didefinisikan pelabelan f untuk simpul C_k-S_n dengan $k \equiv 1 \pmod{4}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{k+4+i}{2} + n & , i = 1, 3, 5, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \frac{k+2-i}{2} & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 4, \dots, k-2. \\ \frac{k+1-i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \frac{k+5+i}{2} + n & , i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 4, \dots, k-1. \end{cases} \quad (3.55)$$

$$f(u_k) = 0. \quad (3.56)$$

$$f(c) = \frac{k+1}{2}. \quad (3.57)$$

$$f(v_i) = \frac{k+3}{2} + i, \quad , i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.58)$$

Dari persamaan (3.55) diperoleh $\{f(u_i) \mid u_i \in V(C_k-S_n)\} = \{\frac{k+5}{2} + n, \frac{k+7}{2} + n, \dots, \frac{3k+9}{4} + n, \frac{k-1}{4}, \frac{k-5}{4}, \dots, 2, \frac{k-1}{2}, \frac{k-3}{2}, \dots, \frac{k+3}{4}, \frac{3k+13}{4} + n, \frac{3k+17}{4} + n, \dots, k+2 + n\}$. Dari persamaan (3.58) diperoleh $\{f(v_i) \mid v_i \in V(C_k-S_n)\} = \{0, \frac{k+3}{2} + 1, \frac{k+3}{2} + 2, \frac{k+3}{2} + 3, \dots, \frac{k+3}{2} + n\}$. Sehingga diperoleh $f(V(C_k-S_n)) = \{0, \frac{k+1}{2}, \frac{k+3}{2} + 1,$

$$\left. \frac{k+3}{2} + 2, \frac{k+3}{2} + 3, \dots, \frac{k+3}{2} + n, \frac{k+5}{2} + n, \frac{k+7}{2} + n, \dots, \frac{3k+9}{4} + n, \frac{k-1}{4}, \frac{k-5}{4}, \dots, 2, \frac{k-1}{2}, \frac{k-3}{2}, \dots, \frac{k+3}{4}, \frac{3k+13}{4} + n, \frac{3k+17}{4} + n, \dots, k + 2 + n \right\}.$$

Pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (3.55 - 3.58), merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur f' yang diinduksi dari f dengan $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ label busur $C_k - S_n$ dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f'(u_i u_{i+1}) &= |f(u_i) - f(u_{i+1})| \\ &= \begin{cases} \left| \left(\frac{k+4+i}{2} + n \right) - \left(\frac{k+1-(i+1)}{2} \right) \right| = n + i + 2, & i = 1, 3, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \left| \left(\frac{k+1-i}{2} \right) - \left(\frac{k+4+(i+1)}{2} + n \right) \right| = n + i + 2, & i = 2, 4, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor. \\ \left| \left(\frac{k+4+i}{2} + n \right) - \left(\frac{k+5+(i+1)}{2} + n \right) \right| = 1. \\ \left| \left(\frac{k+5+i}{2} + n \right) - \left(\frac{k+2-(i+1)}{2} \right) \right| = n + i + 2, & i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \dots, k - 2. \\ \left| \left(\frac{k+2-i}{2} \right) - \left(\frac{k+5+(i+1)}{2} + n \right) \right| = n + i + 2, & i = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \dots, k - 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} f'(u_{k-1} u_k) &= |f(u_{k-1}) - f(u_k)| \\ &= |(k + 2 + n) - (0)| \\ &= k + 2 + n. \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} f'(u_1 u_k) &= |f(u_1) - f(u_k)| \\ &= \left| \left(\frac{k+5}{2} + n \right) - (0) \right| \\ &= \frac{k+5}{2} + n. \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} f'(u_1 c) &= |f(u_1) - f(c)| \\ &= \left| \left(\frac{k+5}{2} + n \right) - \left(\frac{k+1}{2} \right) \right| \\ &= n + 2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} f'(c v_i) &= |f(c) - f(v_i)| \\ &= \left| \left(\frac{k+1}{2} \right) - \left(\frac{k+3}{2} + i \right) \right| \\ &= 1 + i \quad , i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dari persamaan (3.59) diperoleh $\{f'(u_i u_{i+1}) \mid u_i u_{i+1} \in E(C_k - S_n)\} = \{1, n + 3, n + 5, \dots, \frac{2n+k+5}{2}, n + 4, n + 6, \dots, \frac{2n+k+3}{2}, \frac{2n+k+7}{2}, \frac{2n+k+11}{2}, \dots, n + k, \frac{2n+k+9}{2}, \frac{2n+k+13}{2}, \dots, n + k + 1\}$. Dari persamaan (3.60) diperoleh $\{f'(u_{k-1} u_k) \mid u_{k-1} u_k \in E(C_k - S_n)\} = \{k + 2 + n\}$. Dari persamaan (3.61) diperoleh $\{f'(u_1 u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - S_n)\} = \{\frac{k+5}{2} + n\}$. Dari persamaan (3.62) diperoleh $\{f'(u_1 c) \mid u_1 c \in E(C_k - S_n)\} = \{n + 2\}$. Dan dari persamaan (3.63) diperoleh $\{f'(c v_i) \mid c v_i \in E(C_k - S_n)\} = \{2, 3, 4, \dots, 1 + n\}$. Sehingga diperoleh $f'(E(C_k - S_n)) = \{1, 2, 3, 4, \dots, 1 + n, \frac{k+5}{2} + n, n + 2, n + 3, n + 5, \dots, \frac{2n+k+5}{2}, n + 4, n + 6, \dots, \frac{2n+k+3}{2}, \frac{2n+k+7}{2}, \frac{2n+k+11}{2}, \dots, n + k, \frac{2n+k+9}{2}, \frac{2n+k+13}{2}, \dots, n + k + 1, k + 2 + n\}$.

Berdasarkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (3.59 – 3.63) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan membentuk himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$. Kemudian pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang membentuk himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pot bunga $C_k - S_n$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$.

Kasus 2. $k \equiv 2 \pmod{4}$

Didefinisikan pelabelan g untuk simpul $C_k - S_n$ dengan $k \equiv 2 \pmod{4}$ sebagai berikut

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{k+5+i}{2} + n & , i = 1, 3, 5, \dots, k - 1. \\ \frac{k+4-i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, \frac{k}{2} + 1. \\ \frac{k+2-i}{2} & , i = \frac{k}{2} + 3, \frac{k}{2} + 5, \dots, k - 2. \end{cases} \quad (3.64)$$

$$f(u_k) = 0. \quad (3.65)$$

$$f(c) = \frac{k+4}{2}. \quad (3.66)$$

$$f(v_i) = \frac{k+4}{2} + i \quad , i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.67)$$

Dari persamaan (3.55) diperoleh $\{f(u_i) \mid u_i \in V(C_k - S_n)\} = \{\frac{k+6}{2} + n, \frac{k+8}{2} + n, \dots, k + 2 + n, \frac{k+2}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k-2}{2}, \dots, \frac{k+6}{4}, \frac{k-2}{4}, \frac{k-6}{4}, \dots, 2\}$. Dari persamaan (3.58) diperoleh $\{f(v_i) \mid v_i \in V(C_k - S_n)\} = \{\frac{k+4}{2} + 1, \frac{k+4}{2} + 2, \frac{k+4}{2} + 3, \dots, \frac{k+4}{2} + n\}$. Sehingga diperoleh $f(V(C_k - S_n)) = \{0, \frac{k+4}{2}, \frac{k+4}{2} + 1, \frac{k+4}{2} + 2, \frac{k+4}{2} + 3, \dots, \frac{k+4}{2} + n, \frac{k+6}{2} + n, \frac{k+8}{2} + n, \dots, k + 2 + n, \frac{k+2}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k-2}{2}, \dots, \frac{k+6}{4}, \frac{k-2}{4}, \frac{k-6}{4}, \dots, 4\}$.

Pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (3.64 - 3.67), merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur f' yang diinduksi dari f dengan $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ label busur $C_k - S_n$ dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f'(u_i u_{i+1}) &= |g(u_i) - g(u_{i+1})| \\
 &= \begin{cases} \left| \left(\frac{k+5+i}{2} + n \right) - \left(\frac{k+4-(i+1)}{2} \right) \right| = n + i + 1 & , i = 1, 3, \dots, \frac{k}{2} \\ \left| \left(\frac{k+4-i}{2} \right) - \left(\frac{k+5+(i+1)}{2} + n \right) \right| = n + i + 1 & , i = 2, 4, \dots, \frac{k}{2} + 1 \\ \left| \left(\frac{k+5+i}{2} + n \right) - \left(\frac{k+2-(i+1)}{2} \right) \right| = n + i + 2 & , i = \frac{k}{2} + 2, \dots, k - 2 \\ \left| \left(\frac{k+2-i}{2} \right) - \left(\frac{k+5+(i+1)}{2} + n \right) \right| = n + i + 2 & , i = \frac{k}{2} + 3, \dots, k - 1. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
 f'(u_{k-1} u_k) &= |g(u_{k-1}) - g(u_k)| \\
 &= |(k + 2 + n) - (0)| \\
 &= k + 2 + n.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
 f'(u_1 u_k) &= |g(u_1) - g(u_k)| \\
 &= \left| \left(\frac{k+6}{2} + n \right) - (0) \right| \\
 &= \frac{k+6}{2} + n.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
 f'(u_1 c) &= |g(u_1) - g(c)| \\
 &= \left| \left(\frac{k+6}{2} + n \right) - \left(\frac{k+4}{2} \right) \right| \\
 &= n + 1.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

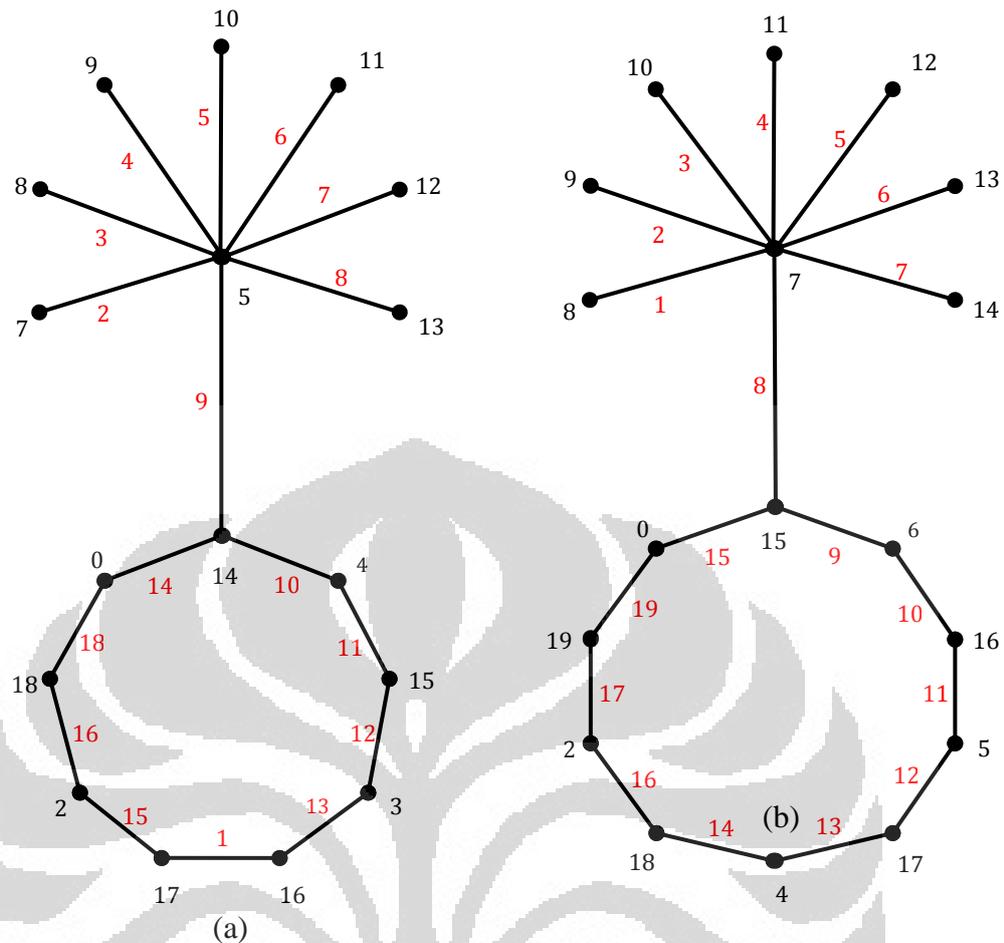
$$\begin{aligned}
 f'(c v_i) &= |g(c) - g(v_i)| \\
 &= \left| \left(\frac{k+4}{2} \right) - \left(\frac{k+4}{2} + i \right) \right| \\
 &= i & , i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Dari persamaan (3.59) diperoleh $\{f^o(u_i u_{i+1}) \mid u_i u_{i+1} \in E(C_k - S_n)\} = \{1, n + 3, n + 5, \dots, \frac{2n+k+5}{2}, n + 4, n + 6, \dots, \frac{2n+k+3}{2}, \frac{2n+k+7}{2}, \frac{2n+k+11}{2}, \dots, n + k, \frac{2n+k+9}{2}, \frac{2n+k+13}{2}, \dots, n + k + 1\}$. Dari persamaan (3.60) diperoleh $\{f'(u_{k-1} u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - S_n)\} = \{k + 2 + n\}$. Dari persamaan (3.61) diperoleh $\{f'(u_1 u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - S_n)\} = \{\frac{k+5}{2} + n\}$. Dari persamaan (3.62) diperoleh $\{f'(u_1 c) \mid u_1 c \in E(C_k - S_n)\} = \{n + 2\}$. Dan dari persamaan (3.63) diperoleh $\{f'(c v_i) \mid c v_i \in E(C_k - S_n)\} = \{2, 3, 4, \dots, 1 + n\}$. Sehingga diperoleh $f'(E(C_k - S_n)) = \{1, 2, 3, 4, \dots, 1 + n, \frac{k+5}{2} + n, n + 2, n + 3, n + 5, \dots, \frac{2n+k+5}{2}, n + 4, n + 6, \dots, \frac{2n+k+3}{2}, \frac{2n+k+7}{2}, \frac{2n+k+11}{2}, \dots, n + k, \frac{2n+k+9}{2}, \frac{2n+k+13}{2}, \dots, n + k + 1, k + 2 + n\}$.

Berdasarkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (3.59 – 3.63) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$. Kemudian pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pot bunga $C_k - S_n$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Dari 2 kasus di atas terbukti bahwa graf pot bunga $(C_k - S_n)$ dengan $k \equiv 1, 2 \pmod{4}$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. ■

Pada Gambar 3.6(a) diberikan contoh pelabelan graceful pada graf pot bunga $C_9 - S_7$ untuk kasus $k \equiv 1 \pmod{4}$, dan pada Gambar 3.6(b) diberikan contoh pelabelan graceful pada graf pot bunga $C_{10} - S_7$ untuk kasus $k \equiv 2 \pmod{4}$.



Gambar 3.6 Contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada (a) graf C_9-S_7 dan (b) graf $C_{10}-S_7$

Pada Teorema 3.4 diberikan konstruksi pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dengan $k \equiv 1, 2 \pmod{4}$

Teorema 3.4 Graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dengan $k \equiv 1, 2 \pmod{4}$, $k \geq 3$ dan m, n bilangan bulat positif memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf $C_k-B_{m,n}$ diberikan pada Gambar 3.4.

Pada Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa himpunan simpul $V(C_k-B_{m,n}) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, w_1, w_2, w_3, \dots, w_m, c, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, dan himpunan busur $E(C_k-B_{m,n}) = \{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{k-1}u_k, u_1u_k, u_1w_m, w_1w_2, w_2w_3, \dots, w_{m-1}w_m, w_1c, cv_1, cv_2, cv_3, \dots, cv_n\}$, maka jelas bahwa $|V| = k + m + n + 1$ dan $|E| = k + m + n + 1$.

Untuk selanjutnya pembuktian pelabelan $\hat{\rho}$ untuk graf $C_k-B_{m,n}$ akan dibagi menjadi empat kasus yaitu untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m ganjil, $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m genap, $k \equiv 2 \pmod{4}$ dengan m ganjil dan $k \equiv 2 \pmod{4}$ dengan m genap.

Kasus 1. $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m ganjil

Didefinisikan pelabelan g untuk simpul graf $C_k-B_{m,n}$ untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m ganjil, sebagai berikut.

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{k+4+i}{2} + n + m & , i = 1, 3, 5, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor. \\ \frac{k+2-i}{2} & , i = \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \right) + 1, \dots, k-2. \\ \frac{k+1-i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor. \\ \frac{k+5+i}{2} + n + m & , i = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 4, \dots, k-1. \end{cases} \quad (3.63)$$

$$g(u_k) = 0. \quad (3.64)$$

$$g(v_i) = \frac{k+m}{2} + i \quad , i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.65)$$

$$g(w_i) = \begin{cases} \frac{k+m+1-i}{2} & , i = 1, 3, 5, \dots, m \\ \frac{k+m+4+i}{2} + n & , i = 2, 4, 6, \dots, m-1. \end{cases} \quad (3.66)$$

$$g(c) = \frac{k+m+4}{2} + n. \quad (3.67)$$

Dari persamaan (3.63) diperoleh $\{g(u_i) \mid u_i \in V(C_k-B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+5}{2} + n + m, \right.$

$\frac{k+7}{2} + n + m, \dots, \frac{3k+9}{4} + n + m, \frac{k-1}{4}, \frac{k-5}{4}, \dots, 2, \frac{k-1}{2}, \frac{k-3}{2}, \dots, \frac{k+3}{4}, \frac{3k+13}{4} + n + m, \frac{3k+17}{4} + n + m, \dots, k + 2 + n + m \left. \right\}$. Dari persamaan (3.65) diperoleh

$\{g(v_i) \mid v_i \in V(C_k-B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m}{2} + 1, \frac{k+m}{2} + 2, \frac{k+m}{2} + 3, \dots, \frac{k+m}{2} + n \right\}$. Dari

persamaan (3.66) diperoleh $\{g(w_i) \mid w_i \in V(C_k-B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+3}{2}, \frac{k+m+1}{2}, \right.$

$\frac{k+m-1}{2}, \dots, \frac{k+4}{2}, \frac{k+m+6}{2} + n, \frac{k+m+8}{2} + n, \dots, \frac{k+2m+3}{2} + n \left. \right\}$. Sehingga diperoleh

$g(V(C_k-B_{m,n})) = \left\{ 0, \frac{k+m}{2} + 1, \frac{k+m}{2} + 2, \frac{k+m}{2} + 3, \dots, \frac{k+m}{2} + n, \frac{k+m+3}{2}, \frac{k+m+1}{2}, \right.$

$\frac{k+m-1}{2}, \dots, \frac{k+4}{2}, \frac{k+m+6}{2} + n, \frac{k+m+8}{2} + n, \dots, \frac{k+2m+3}{2} + n, \frac{k+m+4}{2} + n, \frac{k+5}{2} + n +$

$$= \begin{cases} \left| \left(\frac{k+m+1-i}{2} \right) - \left(\frac{k+m+4+(i+1)}{2} + n \right) \right| = n + i + 2 \\ \quad , i = 1, 3, 5, \dots, m - 2. \\ \left| \left(\frac{k+m+4+i}{2} + n \right) - \left(\frac{k+m+1-(i+1)}{2} \right) \right| = n + i + 2 \\ \quad , i = 2, 4, 6, \dots, m - 1. \end{cases} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} g'(cw_1) &= |g(c) - g(w_1)| \\ &= \left| \left(\frac{k+m+4}{2} + n \right) - \left(\frac{k+m}{2} \right) \right| \\ &= n + 2. \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} g'(cv_i) &= |g(c) - g(v_i)| \\ &= \left| \left(\frac{k+m+4}{2} + n \right) - \left(\frac{k+m}{2} + i \right) \right| \\ &= n + 2 - i \quad , i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Dari persamaan (3.68) diperoleh $\{g'(u_i u_{i+1}) | u_i u_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{1, m + n + 3, m + n + 5, \dots, m + n + \frac{k+1}{2}, m + n + 4, m + n + 6, \dots, m + n + 2 + \frac{k+1}{2}, m + n + 4 + \frac{k-1}{2}, m + n + 6 + \frac{k-1}{2}, \dots, m + n + k - 1, m + n + 3 + \frac{k-1}{2}, m + n + 5 + \frac{k-1}{2}, \dots, m + n + k\}$. Dari persamaan (3.69) diperoleh $\{g'(u_{k-1} u_k) | u_{k-1} u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + 2 + n + m\}$. Dari persamaan (3.70) diperoleh $\{g'(u_1 u_k) | u_1 u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{\frac{k+5}{2} + n + m\}$. Dari persamaan (3.71) diperoleh $\{g'(u_1 w_m) | u_1 w_m \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n + m + 2\}$. Dari persamaan (3.72) diperoleh $\{g'(w_i w_{i+1}) | w_i w_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n + 3, n + 5, n + 7, \dots, n + m, n + 4, n + 6, n + 8, \dots, n + m + 1\}$. Dari persamaan (3.73) diperoleh $\{g'(cw_1) | cw_1 \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n + 2\}$. Dan dari persamaan (3.74) diperoleh $\{g'(cv_i) | cv_i \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n + 1, n, n - 1, n - 2, \dots, 2\}$. Sehingga diperoleh $g'(E(C_k - B_{m,n})) = \{1, n + 2, n + 1, n, n - 1, n - 2, \dots, 2, m + n + 3, m + n + 5, \dots, m + n + \frac{k+1}{2}, m + n + 4, m + n + 6, \dots, m + n + 2 + \frac{k+1}{2}, m + n + 4 + \frac{k-1}{2}, m + n + 6 + \frac{k-1}{2}, \dots, m + n + k - 1, m + n + 3 + \frac{k-1}{2}, m + n + 5 + \frac{k-1}{2}, \dots, m + n + k, \frac{k+5}{2} + n + m, n + 3, n + 5, n + 7, \dots, n + m, n + 4, n + 6, n + 8, \dots, n + m + 1, n + m + 2, k + 2 + n + m\}$. Berdasarkan pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.68 - 3.74) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$. Kemudian pelabelan g' yang diinduksi oleh pelabelan simpul

g , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pohon palem $C_k - B_{m,n}$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m ganjil.

Kasus 2. $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m genap

Didefinisikan pelabelan g untuk simpul graf $C_k - B_{m,n}$ untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m genap, sebagai berikut :

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{k+4+i}{2} + n + m & , i = 1, 3, 5, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor. \\ \frac{k+2-i}{2} & , i = \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right) + 1, \dots, k-2. \\ \frac{k+1-i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor. \\ \frac{k+5+i}{2} + n + m & , i = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 4, \dots, k-1. \end{cases} \quad (3.75)$$

$$g(u_k) = 0. \quad (3.76)$$

$$g(v_i) = \frac{k+m+3}{2} + i \quad , i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.77)$$

$$g(w_i) = \begin{cases} \frac{k+m+4+i}{2} + n & , i = 1, 3, 5, \dots, m-1. \\ \frac{k+m+1-i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, m. \end{cases} \quad (3.78)$$

$$g(c) = \frac{k+m+1}{2}. \quad (3.79)$$

Dari persamaan (3.75) diperoleh $\{g(u_i) \mid u_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+5}{2} + n + m, \frac{k+7}{2} + n + m, \dots, \frac{3k+9}{4} + n + m, \frac{k-1}{4}, \frac{k-5}{4}, \dots, 2, \frac{k-1}{2}, \frac{k-3}{2}, \dots, \frac{k+3}{4}, \frac{3k+13}{4} + n + m, \frac{3k+17}{4} + n + m, \dots, k + 2 + n + m \right\}$. Dari persamaan (3.77) diperoleh

$$\{g(v_i) \mid v_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+3}{2} + 1, \frac{k+m+3}{2} + 2, \frac{k+m+3}{2} + 3, \dots, \frac{k+m+3}{2} + n \right\}.$$

Dari persamaan (3.78) diperoleh $\{g(w_i) \mid w_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+5}{2} + n, \frac{k+m+7}{2} + n, \frac{k+m+9}{2} + n, \dots, \frac{k+3}{2} + m + n, \frac{k+m-1}{2}, \frac{k+m-3}{2}, \dots, \frac{k+1}{2} \right\}$. Dari persamaan

$$(3.79) \text{ diperoleh } \{g(c) \mid c \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+1}{2} \right\}.$$

Sehingga diperoleh

$$g(V(C_k - B_{m,n})) = \left\{ 0, \frac{k+m+3}{2} + 1, \frac{k+m+3}{2} + 2, \frac{k+m+3}{2} + 3, \dots, \frac{k+m+3}{2} + n, \frac{k+m+5}{2} + n, \frac{k+m+7}{2} + n, \frac{k+m+9}{2} + n, \dots, \frac{k+3}{2} + m + n, \frac{k+m+1}{2}, \frac{k+m-1}{2}, \frac{k+m-3}{2}, \dots, \frac{k+1}{2}, \frac{k+5}{2} + \right.$$

g , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pohon palem $C_k - B_{m,n}$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m genap.

Kasus 3. $k \equiv 2 \pmod{4}$ dengan m ganjil

Didefinisikan pelabelan g untuk simpul graf $C_k - B_{m,n}$ untuk $k \equiv 2 \pmod{4}$ dengan m ganjil, sebagai berikut :

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{k+5+i}{2} + n + m & , i = 1, 3, 5, \dots, k-1. \\ \frac{k+4-i}{2} & , i = 2, 4, 6, \dots, \frac{k}{2} + 1. \\ \frac{k+2-i}{2} & , i = \frac{k}{2} + 3, \frac{k}{2} + 5, \dots, k-2. \end{cases} \quad (3.87)$$

$$g(u_k) = 0. \quad (3.88)$$

$$g(v_i) = \frac{k+m+3}{2} + i \quad , i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.89)$$

$$g(w_i) = \begin{cases} \frac{k+m+4-i}{2} & , i = 1, 3, 5, \dots, m \\ \frac{k+m+5+i}{2} + n & , i = 2, 4, 6, \dots, m-1. \end{cases} \quad (3.90)$$

$$g(c) = \frac{k+m+5}{2} + n. \quad (3.91)$$

Dari persamaan (3.87) diperoleh $\{g(u_i) \mid u_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+6}{2} + n + m, \frac{k+8}{2} + n + m, \dots, k + 2 + n + m, \frac{k+2}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k-2}{2}, \dots, \frac{k+10}{4}, \frac{k-2}{4}, \frac{k-6}{4}, \dots, 2 \right\}$. Dari persamaan (3.89) diperoleh $\{g(v_i) \mid v_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+3}{2} + 1, \frac{k+m+3}{2} + 2, \frac{k+m+3}{2} + 3, \dots, \frac{k+m+3}{2} + n \right\}$. Dari persamaan (3.90) diperoleh $\{g(w_i) \mid w_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+3}{2}, \frac{k+m+1}{2}, \frac{k+m-1}{2}, \dots, \frac{k+4}{2}, \frac{k+m+7}{2} + n, \frac{k+m+9}{2} + n, \frac{k+m+11}{2} + n, \dots, \frac{k+4}{2} + m + n \right\}$. Dari persamaan (3.91) diperoleh $\{g(c) \mid c \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+5}{2} + n \right\}$. Sehingga diperoleh $g(V(C_k - B_{m,n})) = \left\{ 0, \frac{k+6}{2} + n + m, \frac{k+8}{2} + n + m, \dots, k + 2 + n + m, \frac{k+2}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k-2}{2}, \dots, \frac{k+10}{4}, \frac{k-2}{4}, \frac{k-6}{4}, \dots, 2, \frac{k+m+3}{2} + 1, \frac{k+m+3}{2} + 2, \frac{k+m+3}{2} + 3, \dots, \frac{k+m+3}{2} + n, \frac{k+m+3}{2}, \frac{k+m+1}{2}, \frac{k+m-1}{2}, \dots, \frac{k+4}{2}, \frac{k+m+7}{2} + n, \frac{k+m+9}{2} + n, \frac{k+m+11}{2} + n, \dots, \frac{k+4}{2} + m + n, \frac{k+m+5}{2} + n \right\}$.

$$\begin{aligned}
&= \left| \left(\frac{k+m+5}{2} + n \right) - \left(\frac{k+m+3}{2} \right) \right| \\
&= n + 1.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
g'(cv_i) &= |g(c) - g(v_i)| \\
&= \left| \left(\frac{k+m+5}{2} + n \right) - \left(\frac{k+m+3}{2} + i \right) \right| \\
&= n + 1 - i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Dari persamaan (3.92) diperoleh $\{g'(u_i u_{i+1}) \mid u_i u_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{m + n + 2, m + n + 4, \dots, m + n + 1 + \frac{k}{2}, m + n + 3, m + n + 5, \dots, m + n + 2 + \frac{k}{2}, m + n + 4 + \frac{k}{2}, m + n + 6 + \frac{k}{2}, \dots, m + n + k - 1, m + n + 5 + \frac{k}{2}, m + n + 7 + \frac{k}{2}, \dots, m + n + k\}$. Dari persamaan (3.93) diperoleh $\{g'(u_{k-1} u_k) \mid u_{k-1} u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k + 2 + n + m\}$. Dari persamaan (3.94) diperoleh $\{g'(u_1 u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{\frac{k+6}{2} + n + m\}$. Dari persamaan (3.95) diperoleh $\{g'(u_1 w_m) \mid u_1 w_m \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n + m + 1\}$. Dari persamaan (3.96) diperoleh $\{g'(w_i w_{i+1}) \mid w_i w_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n + 2, n + 4, n + 6, \dots, n + m - 1, n + 3, n + 5, n + 7, \dots, n + m\}$. Dari persamaan (3.97) diperoleh $\{g'(cw_1) \mid cw_1 \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n + 1\}$. Dan dari persamaan (3.98) diperoleh $\{g'(cv_i) \mid cv_i \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n, n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 1\}$. Sehingga diperoleh $g'(E(C_k - B_{m,n})) = \{n + 1, n, n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 1, n + 2, n + 4, n + 6, \dots, n + m - 1, n + 3, n + 5, n + 7, \dots, n + m, n + m + 1, \frac{k+6}{2} + n + m, m + n + 2, m + n + 4, \dots, m + n + 1 + \frac{k}{2}, m + n + 3, m + n + 5, \dots, m + n + 2 + \frac{k}{2}, m + n + 4 + \frac{k}{2}, m + n + 6 + \frac{k}{2}, \dots, m + n + k - 1, m + n + 5 + \frac{k}{2}, m + n + 7 + \frac{k}{2}, \dots, m + n + k, k + 2 + n + m\}$.

Berdasarkan pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.92 - 3.98) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$. Kemudian pelabelan g' yang diinduksi oleh pelabelan simpul g , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pohon palem $C_k - B_{m,n}$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$ dengan m ganjil.

Kasus 4. $k \equiv 2 \pmod{4}$ dengan m genap

Didefinisikan pelabelan g untuk simpul graf $C_k - B_{m,n}$ untuk $k \equiv 2 \pmod{4}$ dengan m genap, sebagai berikut :

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{k+5+i}{2} + n + m & , i = 1,3,5, \dots, k-1. \\ \frac{k+4-i}{2} & , i = 2,4,6, \dots, \frac{k}{2} + 1. \\ \frac{k+2-i}{2} & , i = \frac{k}{2} + 3, \frac{k}{2} + 5, \dots, k-2. \end{cases} \quad (3.99)$$

$$g(u_k) = 0. \quad (3.100)$$

$$g(v_i) = \frac{k+m+4}{2} + i \quad , i = 1,2,3, \dots, n. \quad (3.101)$$

$$g(w_i) = \begin{cases} \frac{k+m+5+i}{2} + n & , i = 1,3,5, \dots, m-1. \\ \frac{k+m+4-i}{2} & , i = 2,4,6, \dots, m. \end{cases} \quad (3.102)$$

$$g(c) = \frac{k+m+4}{2}. \quad (3.103)$$

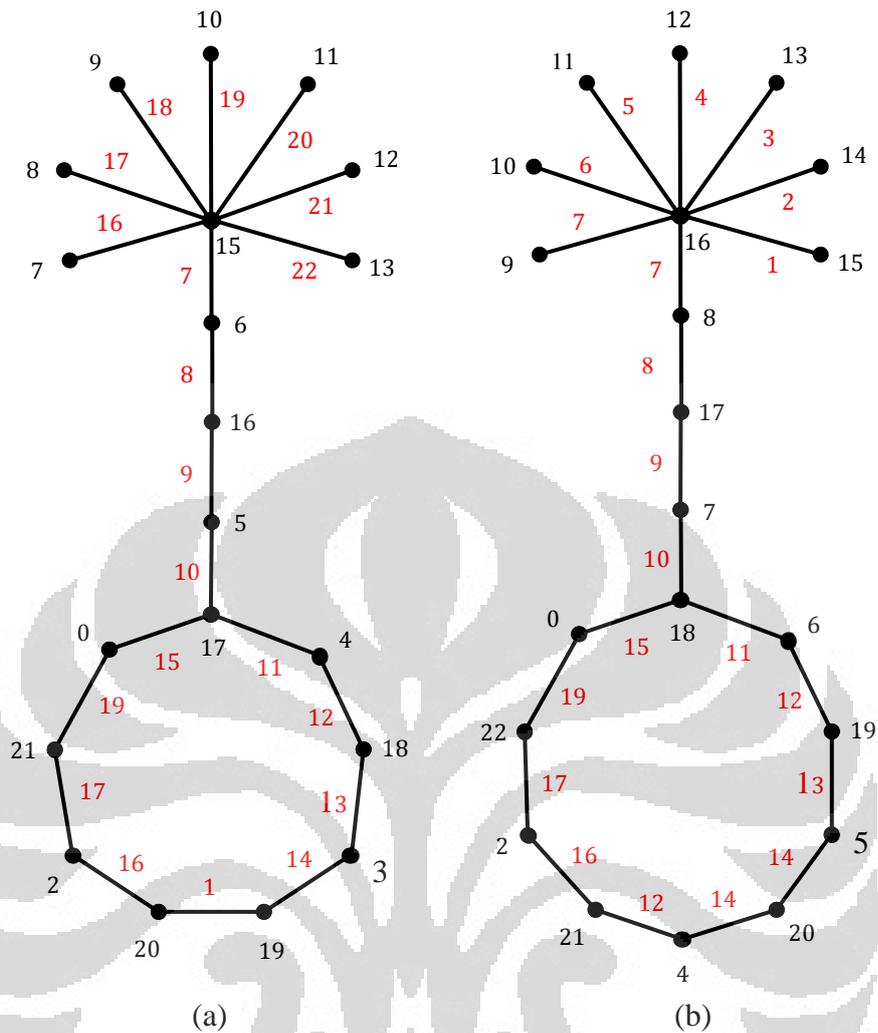
Dari persamaan (3.99) diperoleh $\{g(u_i) \mid u_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+6}{2} + n + m, \frac{k+8}{2} + n + m, \dots, k + 2 + n + m, \frac{k+2}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k-2}{2}, \dots, \frac{k+10}{4}, \frac{k-2}{4}, \frac{k-6}{4}, \dots, 2 \right\}$. Dari persamaan (3.101) diperoleh $\{g(v_i) \mid v_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+4}{2} + 1, \frac{k+m+4}{2} + 2, \frac{k+m+4}{2} + 3, \dots, \frac{k+m+4}{2} + n \right\}$. Dari persamaan (3.102) diperoleh $\{g(w_i) \mid w_i \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+6}{2} + n, \frac{k+m+8}{2} + n, \frac{k+m+10}{2} + n, \dots, \frac{k+4}{2} + m + n, \frac{k+m+2}{2}, \frac{k+m}{2}, \frac{k+m-2}{2}, \dots, \frac{k+4}{2} \right\}$. Dari persamaan (3.103) diperoleh $\{g(c) \mid c \in V(C_k - B_{m,n})\} = \left\{ \frac{k+m+4}{2} \right\}$. Sehingga diperoleh $g(V(C_k - B_{m,n})) = \left\{ 0, \frac{k+6}{2} + n + m, \frac{k+8}{2} + n + m, \dots, k + 2 + n + m, \frac{k+2}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k-2}{2}, \dots, \frac{k+10}{4}, \frac{k-2}{4}, \frac{k-6}{4}, \dots, 2, \frac{k+m+4}{2} + 1, \frac{k+m+4}{2} + 2, \frac{k+m+4}{2} + 3, \dots, \frac{k+m+4}{2} + n, \frac{k+m+6}{2} + n, \frac{k+m+8}{2} + n, \frac{k+m+10}{2} + n, \dots, \frac{k+4}{2} + m + n, \frac{k+m+2}{2}, \frac{k+m}{2}, \frac{k+m-2}{2}, \dots, \frac{k+4}{2}, \frac{k+m+4}{2} \right\}$. Pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.99 - 3.103), merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberi label dengan pelabelan busur g' yang di induksi oleh pelabelan $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$ pada graf $C_k - B_{m,n}$ dengan $k \equiv 2 \pmod{4}$ dengan m genap, yang dinyatakan sebagai berikut.

Dari persamaan (3.104) diperoleh $\{g'(u_i u_{i+1}) \mid u_i u_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{m+n+2, m+n+4, \dots, m+n+1+\frac{k}{2}, m+n+3, m+n+5, \dots, m+n+2+\frac{k}{2}, m+n+4+\frac{k}{2}, m+n+6+\frac{k}{2}, \dots, m+n+k-1, m+n+5+\frac{k}{2}, m+n+7+\frac{k}{2}, \dots, m+n+k\}$. Dari persamaan (3.105) diperoleh $\{g'(u_{k-1} u_k) \mid u_{k-1} u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{k+2+n+m\}$. Dari persamaan (3.106) diperoleh $\{g'(u_1 u_k) \mid u_1 u_k \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{\frac{k+6}{2} + n + m\}$. Dari persamaan (3.107) diperoleh $\{g'(u_1 w_m) \mid u_1 w_m \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n+m+1\}$. Dari persamaan (3.108) diperoleh $\{g'(w_i w_{i+1}) \mid w_i w_{i+1} \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n+2, n+4, n+6, \dots, n+m, n+3, n+5, n+7, \dots, n+m-1\}$. Dari persamaan (3.109) diperoleh $\{g'(c w_1) \mid c w_1 \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n+1\}$. Dan dari persamaan (3.110) diperoleh $\{g'(c v_i) \mid c v_i \in E(C_k - B_{m,n})\} = \{n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1\}$. Sehingga diperoleh $g'(E(C_k - B_{m,n})) = \{n+1, n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1, n+2, n+4, n+6, \dots, n+m, n+3, n+5, n+7, \dots, n+m-1, n+m+1, \frac{k+6}{2} + n + m, m+n+2, m+n+4, \dots, m+n+1+\frac{k}{2}, m+n+3, m+n+5, \dots, m+n+2+\frac{k}{2}, m+n+4+\frac{k}{2}, m+n+6+\frac{k}{2}, \dots, m+n+k-1, m+n+5+\frac{k}{2}, m+n+7+\frac{k}{2}, \dots, m+n+k, k+2+n+m\}$.

Berdasarkan pelabelan g yang didefinisikan pada persamaan (3.104 - 3.110) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$. Kemudian pelabelan g' yang diinduksi oleh pelabelan simpul g , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa graf pohon palem $C_k - B_{m,n}$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $k \equiv 2 \pmod{4}$ dengan m genap.

Pada Gambar 3.7(a) diberikan contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf pohon palem $C_9 - S_{3,7}$ untuk kasus $k \equiv 1 \pmod{4}$ dan m genap. Pada Gambar 3.7(b) diberikan contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf pohon palem $C_{10} - S_{3,7}$ untuk kasus $k \equiv 2 \pmod{4}$ dan m ganjil.



Gambar 3.7 Contoh pelabelan $\hat{\rho}$ pada (a) graf $C_9-S_{3,7}$ dan (b) graf $C_{10}-S_{3,7}$

Pada Bab ini telah dibahas konstruksi pelabelan graceful pada graf pot bunga dan pohon palem untuk $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$. Selain itu juga telah dibahas konstruksi pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf pot bunga dan pohon palem untuk setiap k .

BAB 4 PENUTUP

Pada bab ini akan disampaikan kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan konstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf pot bunga dan graf pohon palem pada bab-bab sebelumnya.

4.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian pada bab-bab sebelumnya, telah dibuktikan dan diperoleh hasil berikut :

1. Setiap graf pot bunga C_k-S_n dapat dilabel dengan pelabelan graceful untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dan $k \equiv 3 \pmod{4}$, dengan $k \geq 3$ dan n bilangan bulat positif (Teorema 3.1).
2. Setiap graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dapat dilabel dengan pelabelan graceful untuk $k \equiv 0 \pmod{4}$ dan $k \equiv 3 \pmod{4}$, dengan $k \geq 3$ dan n bilangan bulat positif (Teorema 3.2).
3. Setiap graf pot bunga C_k-S_n dapat dilabel dengan pelabelan $\hat{\rho}$ untuk setiap k , dengan $k \geq 3$ dan n bilangan bulat positif (Akibat 3.3 dan Teorema 3.5).
4. Setiap graf pohon palem $C_k-B_{m,n}$ dapat dilabel dengan pelabelan $\hat{\rho}$ untuk setiap k , dengan $k \geq 3$ dan n bilangan bulat positif (Akibat 3.4 dan Teorema 3.6).

4.2 Saran

Berdasarkan pengkajian yang telah dilakukan, penelitian lebih lanjut dapat dilakukan terhadap pelabelan graceful pada graf pot bunga dan pohon palem untuk $k \equiv 1 \pmod{4}$ dan $k \equiv 2 \pmod{4}$. Selain itu penelitian juga dapat dilanjutkan terhadap peabelan graceful dan $\hat{\rho}$ untuk graf *unicyclic*, karena konstruksi kelas graf *unicyclic* yang telah diketahui sebelumnya masih mungkin untuk dikembangkan lebih lanjut lagi, terutama untuk beberapa graf *unicyclic* yang bisa diperoleh dari gabungan graf lingkaran dengan graf pohon.

DAFTAR PUSTAKA

- Choudum, S. A., Kishore, S. P. (1996). All 5-star are Skolem graceful. *Indian J. Pure and Appl. Math*, 27, 1101-1105.
- Galian, J. A. (2010). Dynamic survey of graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 17#ds6.
- Hartsfield, N., Ringel, G. (1994) *Pearls in graph theory: A Comprehensive Introduction*. Academic Press.
- Muzayyin A., Zulfi A., Sugeng K. A. (2011). *Pelabelan graceful dan pelabelan \hat{p} pada graf pot bunga (C_3-pS_n)*. Dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika UI-UNPAD, Bandung.
- Sevenhot, Sugeng, K. A., Silaban, D. R. (2010). Pelabelan skolem graceful dan pelabelan \hat{p} pada gabungan dua graf. *Prosiding Seminar Nasional UNPAR, Bandung*, MS 183- MS 191.
- Sugeng, K. A., Miller, M., Slamini, & Baca, M. (2005). (a,d)-edge-antimagic total labeling of caterpillars. *Lecture Notes Comput. Sci.*, 3330, 169-180.
- Zulfi, A. Muzayyin, A., Huda, N., Supriadi. (2011). Pelabelan skolem graceful dan pelabelan \hat{p} pada graf S_n . *Prosiding Seminar Nasional UNY, Yogyakarta*, M 131- M 136.