UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF MATAHARI, GRAF KORONA, DAN GRAF *HAIRYCYCLE* DENGAN BANYAK SIMPUL LINGKARAN GENAP

SKRIPSI

ARIEF ADDINNITYA
0806325402

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF MATAHARI, GRAF KORONA, DAN GRAF *HAIRYCYCLE* DENGAN BANYAK SIMPUL LINGKARAN GENAP

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

ARIEF ADDINNITYA
0806325402

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Arief Addinnitya
NPM	:	0806325402
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	11 Juni 2012

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	:	Arief Addinnitya
NPM	:	0806325402
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Matahari, Graf Korona dan Graf *Hairycycle* dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	:	Dra. Denny R. Silaban, M.Kom	( )
Pembimbing II	:	Dr. Kiki A. Sugeng	(Ayyani)
Penguji I	:	Dra. Siti Aminah M. Kom	( )
Penguji II	:	Dr. Hengki Tasman	(Hengki)

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 11 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah swt. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom selaku pembimbing I dan Dr. Kiki A. Sugeng selaku pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktu dan pikiran serta memberikan masukan-masukan untuk penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Dr. Yudi Satria, MT. selaku Ketua Departemen, Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku Sekretaris Departemen, dan Dr. Dian Lestari selaku Koordinator Pendidikan yang telah banyak membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.
3. Seluruh staf pengajar di Departemen Matematika UI atas ilmu pengetahuan yang telah diberikan.
4. Seluruh karyawan (Mba Santi, dkk.) di Departemen Matematika UI atas bantuan yang telah diberikan.
5. Mamak dan Bapak, yang tak pernah berhenti memberikan dukungan kepada penulis selama penulis menjalani pendidikan di Matematika UI.”Terima kasih atas do’a, materi, nasihat dan semangat yang tak pernah berhenti kalian berikan”.
6. Kak Ayu, Kak Arum dan Asri, tiga saudari penulis yang selalu memberikan semangat kepada penulis.
7. Abi Murat Alver, atas pelajaran yang luar biasa yang pasti berguna bagi penulis dalam menjalani kehidupan.
8. Abi-abi pengajar di Arama Umraniye UICCI atas ilmunya yang bermanfaat.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

9. Teman-teman Arama Umraniye UICCI, atas canda, tawa, pelajaran serta pertemanan yang terjalin antara kalian dengan penulis. Banyak hal yang bisa penulis ambil sebagai pelajaran dari kalian.
10. Fani dan Wulan yang telah berjuang bersama selama penyusunan skripsi ini, serta Kak Nora, Agnes, Ifah dan Uchi, tetap semangat untuk graf labeling.
11. Keluarga besar Matematika UI 2008 yang luar biasa selalu menemani penulis selama penulis menjalani pendidikan sarjana di Departemen Matematika UI. Icha, Luthfa, Emy, Umbu, Awe, Eka, Numa. Sita, Ines, Risya, Tuti, Kiki, Ade, Dhila, Hindun, Cindy, Dheni, Andy, Adhi, Ega, Dhea, Uchi, Agy, Anisah, Arkies, Arman, Aci, Aya, Bowo, Citra, Danis, Dede, Dhewe, Dian, Dini, Hendri, Janu, Juni, Yulian, Maimun, Masykur, Maul, May, Mei, Mela, Nadia, Nita, Nora, Olin, Puput, Purwo, Resti, Siwi, Vika, Yulial, dan Ze. Semoga kita tetap "One and Inseparable".
12. Semua teman-teman di Departemen Matematika UI angkatan 2011, 2010, 2009, 2007, 2006 terima kasih atas semangat dan dukungannya.
13. Mas Adie dan Mas Nurdin atas pelajaran ekstra yang diberikan selama penulis mengambil mata kuliah skripsi.
14. Keluarga besar Kampung Asukweri, Waigeo Utara, Raja Ampat, Papua Barat, atas kenangan dan pelajaran yang tak akan pernah terlupa.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

2012

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Arief Addinnitya
NPM	:	0806325402
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Matahari, Graf Korona dan Graf *Hairycycle* dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap.

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 11 Juni 2012

Yang menyatakan

(Arief Addinnitya)

ABSTRAK

Nama : Arief Addinnitya
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul : Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Matahari, Graf Korona dan Graf *Hairycycle* dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap.

Suatu graf $G(V, E)$ dikatakan suatu graf jumlah jika terdapat suatu pemetaan satu-satu f yang disebut pelabelan jumlah, dari V ke himpunan bilangan bulat positif S sedemikian sehingga untuk $uv \in E$ jika dan hanya jika $f(w) = f(u) + f(v) \in S$, dimana $u, v, w \in V$. Untuk selanjutnya w disebut simpul bekerja. Graf terhubung G akan membutuhkan beberapa tambahan simpul terisolasi agar memenuhi aturan pelabelan jumlah. Graf jumlah G dikatakan graf jumlah eksklusif jika tidak ada simpul bekerja pada graf G. Banyak simpul terisolasi minimal sehingga pelabelan jumlah f memenuhi pelabelan jumlah eksklusif disebut bilangan jumlah eksklusif, dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$. Suatu pelabelan jumlah eksklusif pada G disebut optimal jika $\varepsilon(G) = \Delta(G)$. Pada skripsi ini akan ditunjukkan bilangan jumlah eksklusif yang optimal dari graf matahari dengan $\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_1}\right) = 3$. Graf korona dengan $\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_r}\right) = 2 + r$. Graf *hairycycle* dengan $\varepsilon\left(HC(n; r_i, i = 1, 2, \dots, n)\right) = 2 + r_{max}$ untuk n genap dan $r \in N$ dan $r_{max} = \max\{r_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, dimana r_i menyatakan banyaknya simpul daun yang terhubung pada simpul ke- i pada lingkaran.

Kata Kunci : bilangan jumlah eksklusif optimal, graf jumlah, graf *hairycycle*, graf korona, graf matahari, pelabelan jumlah, pelabelan jumlah eksklusif
xii + 45 halaman ; 22 gambar; 2 Tabel
Daftar Pustaka : 16 (1990 – 2012)

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

ABSTRACT

Name : Arief Addinnitya
Study Program : Mathematics
Title : Exclusive Sum Labeling on Sun Graph, Corona Graph and Hairycycle Graph with Even Number of Cycle Vertices.

A Graph $G(V, E)$ is called a sum graph if there exist an injective labeling f called sum labeling, from V to a set of positive integers S such that $uv \in E$ if and only if $f(w) = f(u) + f(v) \in S$ where $u, v, w \in V$. A vertex w is called a working vertex. Any connected graph G will require some additional isolated vertices in order to be sum labeled. Sum graph G is said to be exclusive sum graph if G contain no working vertex. The smallest number of isolated vertices such that sum labeling f is an exclusive sum labeling called exclusive sum number, denoted by $\varepsilon(G)$. In this *skripsi*, it will be showed optimum exclusive sum number of sun graphs which is $\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_1}\right) = 3$, corona graphs which is $\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_r}\right) = 2 + r$, hairycycle graphs which is $\varepsilon\left(HC(n; r_i, i = 1, 2, \ldots, n)\right) = 2 + r_{max}$ for even n, $r \in N$, and $r_{max} = \max\{r_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$, where r_i is a number of leaves attached to the i-th cycle's vertex.

Key words : corona graph, exclusive sum labeling, hairycycle graph, sum graph, sun graph, optimum exclusive sum number
xii + 45 pages ; 22 pictures; 2 Table
Bibliography : 16 (1990 – 2012)

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

DAFTAR ISI

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

DAFTAR GAMBAR

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

DAFTAR TABEL

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Begitu banyak situasi di dunia nyata yang secara mudah dapat digambarkan melalui diagram yang terdiri dari suatu kumpulan titik-titik bersama dengan garis-garis yang menghubungkan titik tertentu dari kumpulan titik-titik tersebut. Sebagai contoh, titik-titik dapat menggambarkan orang-orang dengan garis yang menghubungkannya menggambarkan hubungan pertemanan dari orang-orang tersebut, atau mungkin titik-titik sebagai pusat komunikasi dengan garis yang melambangkan jaringan komunikasi. Melihat bahwa yang menjadi perhatian utama dalam diagram tersebut adalah keterhubungan dua titik oleh suatu garis, maka cara mereka terhubung tidaklah penting. Penggambaran matematika dari jenis situasi seperti ini, mengingatkan akan konsep suatu graf (Bondy & Murty, 2008).

Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E) dimana V tidak kosong dan E (mungkin kosong). Himpunan E merupakan himpunan pasangan tak terurut dari elemen V. Elemen V disebut simpul dari G dan elemen E disebut busur dari G. Biasanya simpul digambarkan dengan titik-titik pada bidang, dan busur digambarkan dengan garis yang menghubungkan dua simpul pada bidang. Garis dapat berupa garis lurus atau kurva (Hartsfield & Ringel, 2003).

Beberapa jenis graf memiliki ciri-ciri khusus. Beberapa contoh diantaranya adalah graf lengkap (K_n), graf lintasan (P_n), dan graf lingkaran (C_n). Graf lengkap adalah suatu graf dimana setiap dua simpul yang berbeda dihubungkan oleh tepat satu busur (Wilson R. J. dan Watkins J. J., 1990). Graf lintasan P_n adalah graf dengan $n+1$ simpul yaitu simpulnya $v_0, v_1, \dots, v_n$ dengan n busur $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$. Simpul $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ berderajat dua kecuali untuk simpul awal dan simpul akhir berderajat satu. Graf lingkaran C_n adalah graf dengan n simpul yaitu $v_0, v_1, \dots, v_n$ dan busur-busur $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_0$ (Hartsfield & Ringel, 2003).

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

Pada graf, juga dapat dilakukan operasi antar graf. Salah satu operasi yang dapat diberlakukan pada graf adalah produk korona. Misalkan terdapat dua graf G dan H dengan jumlah simpul masing-masing adalah n_1 dan n_2. Produk korona dari $G \odot H$ didefinisikan sebagai suatu graf yang dihasilkan dari G dan H dengan mengambil satu salinan dari G dan n_1 salinan dari H, dan menghubungkannya dengan suatu busur dari setiap simpul pada salinan ke-i dari H dengan simpul ke-i dari G (Yero, I. G., 2010).

Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang pada teori graf adalah pelabelan pada graf. Secara informal, pelabelan pada suatu graf diartikan sebagai penempatan bilangan bulat pada elemen-elemen dari suatu graf, seperti simpul, busur, atau keduanya, sesuai dengan suatu ketentuan. Ketentuan ini biasanya digambarkan pada dasar pembobotan oleh beberapa fungsi evaluasi (Baca, M. dan Miller, M., 2008).

Salah satu jenis pelabelan yang diketahui adalah pelabelan jumlah. Pelabelan jumlah f pada suatu graf adalah suatu pemetaan dari simpul-simpul pada G ke bilangan-bilangan bulat positif yang berbeda sedemikian sehingga $uv \in E$ jika dan hanya jika jumlah dari label yang diberikan pada u dan v adalah label dari simpul lain w pada G. Pada kasus demikian, w akan disebut simpul bekerja. Suatu graf yang memiliki pelabelan jumlah dinamakan graf jumlah. Graf jumlah G akan membutuhkan beberapa simpul terisolasi. Jika suatu graf kekurangan simpul terisolasi, simpul terisolasi dapat ditambahkan sampai graf tersebut, bersama dengan tambahan simpul terisolasinya, dapat memenuhi aturan graf jumlah. Jumlah terkecil dari simpul terisolasi yang ditambahkan pada suatu graf agar graf tersebut memenuhi aturan graf jumlah disebut bilangan jumlah dari suatu graf, dinotasikan oleh $\sigma(G)$. Suatu graf jumlah bersama dengan simpul terisolasi yang paling sedikit dinamakan graf jumlah optimal (Tuga, dkk., 2005).

Pelabelan jumlah terbagi menjadi dua jenis, yaitu eksklusif dan inklusif. Pelabelan jumlah dari graf $G \cup \overline{K_r}$ untuk r bilangan bulat positif dikatakan eksklusif terhadap G jika semua simpul bekerjanya berada di $\overline{K_r}$, selain itu dinamakan inklusif. Untuk selanjutnya elemen dari $\overline{K_r}$ disebut simpul terisolasi. Semua graf dapat dibuat memenuhi aturan pelabelan jumlah eksklusif dengan menambahkan beberapa simpul terisolasi. Jumlah simpul terisolasi yang paling

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

sedikit yang perlu untuk ditambahkan pada suatu graf G untuk menghasilkan pelabelan jumlah eksklusif dinamakan bilangan jumlah eksklusif dari graf G, dilambangkan $\varepsilon(G)$, dan graf $G \cup \overline{K_{\varepsilon(G)}}$ disebut graf jumlah eksklusif (Tuga, dkk., 2005).

Oleh karena pelabelan jumlah ekslusif dapat berlaku untuk semua jenis graf, menjadi tantangan untuk menemukan pelabelan jumlah eksklusif pada jenis-jenis graf yang belum ditemukan sebelumnya. Penelitian yang dilakukan berfokus pada penemuan pelabelan jumlah eksklusif yang optimal yaitu pelabelan jumlah eksklusif dengan banyak simpul terisolasi yang ditambahkan paling sedikit. Misalkan $\Delta(G)$ menyatakan derajat tertinggi simpul-simpul pada graf G, maka $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$ (Tuga, dkk., 2005). Jadi, jika pada suatu graf G ditemukan bahwa $\varepsilon(G) = \Delta(G)$, maka bilangan jumlah eksklusif pada graf G tersebut optimal.

Tidaklah mudah untuk menemukan bilangan jumlah eksklusif yang optimal. Selain itu, masih banyak jenis-jenis graf yang belum diketahui konstruksi pelabelan jumlah eksklusifnya untuk mendapatkan bilangan jumlah yang optimal. Hal tersebut yang melatarbelakangi dilaksanakannya penelitian ini. Penelitian bermula dari penemuan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif untuk beberapa jenis graf, seperti yang didaftarkan dalam survey Miller, dkk. (2003) diantaranya jenis graf lintasan dengan $\varepsilon(P_n) = 2$ dan graf lingkaran dengan $\varepsilon(C_n) = 3$. Pada akhirnya penelitian berlanjut hingga ke pengembangan dari graf lingkaran. Selain itu, penelitian yang dilakukan oleh Haitang Wang dan Ping Li (2009) menemukan bahwa bilangan jumlah eksklusif pada graf matahari adalah $3 \leq \varepsilon(C_n \odot K_1) \leq 4$. Penelitian ini melanjutkan hasil dari Wang dan Li dengan mencari konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada pengembangan graf lingkaran yang diketahui, diantaranya graf matahari, graf korona, dan graf *harycycle*.

1.2. Rumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Rumusan masalah pada penilitian ini adalah bagaimana cara mengonstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* supaya banyak simpul yang ditambahkan optimal. Sedangkan masalah tersebut

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

terbatas hanya untuk pelabelan jumlah eksklusif pada jenis graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran genap.

1.3. Jenis Penelitian dan Metode Penelitian

Jenis penelitian yang dilakukan adalah penelitian dasar. Penelitian dasar, juga disebut sebagai penelitian murni, teoritis, atau ilmiah, adalah penelitian dengan sasaran utama menemukan pengetahuan baru, kebanyakan hanya secara tidak langsung terlibat dalam bagaimana pengetahuan tersebut akan diaplikasikan pada spesifik, praktik, atau masalah nyata (Connaway & Powell, 2007). Metode penelitian yang digunakan pada pelaksanaan penelitian ini adalah dengan melakukan studi pustaka terhadap karya-karya ilmiah yang berhubungan dengan topik penelitian. Kemudian, hasil studi pustaka tersebut digunakan untuk menganalisa dan mengonstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada kelas graf lain. Penelitian bermula dengan melakukan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada kelas graf yang sudah diketahui, seperti graf lintasan dan graf lingkaran, kemudian penelitian dilanjutkan dengan melakukan konstruksi untuk graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran genap, yang pada saat penelitian dimulai belum diketahui.

1.4. Tujuan Penulisan

Tujuan penelitian yang dilakukan adalah untuk

1. Mengkonstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran genap.
2. Memperoleh jumlah simpul terisolasi untuk pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari, graf korona, graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran genap.
3. Menunjukkan bahwa banyak simpul terisolasi yang didapatkan adalah optimal.

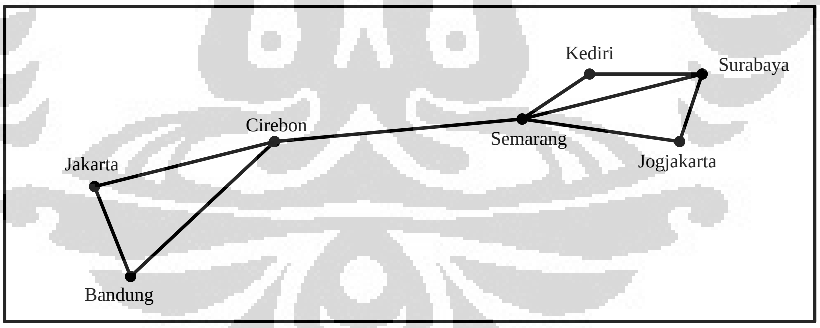
Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan konsep dasar pada teori graf, jenis-jenis graf, operasi pada graf, serta penjelasan mengenai pelabelan jumlah eksklusif yang digunakan pada bab selanjutnya.

2.1. Pengertian Graf

Konsep teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh Euler. Graf sendiri dapat dikatakan sebagai suatu konfigurasi dari titik-titik dan hubungan yang terjadi diantaranya pada aplikasi yang beragam. Konfigurasi ini dapat menggambarkan suatu jaringan fisik seperti sirkuit listrik, jaringan jalan raya, peta transportasi kota, dan lain-lain. Konfigurasi demikian, yang dimodelkan oleh struktur kombinatorik disebut sebagai graf (Singh, 2010). Gambar 2.1 memperlihatkan jaringan jalan raya antar kota sebagai salah satu graf dalam kehidupan sehari-hari.



Gambar 2.1 Jaringan jalan raya antar kota

Suatu **graf G** didefinisikan sebagai suatu pasangan himpunan (V, E) dimana V tidak kosong dan E (mungkin kosong), dimana E adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen V. Elemen dari V disebut **simpul** dari G dan elemen dari E disebut **busur** dari G. Biasanya simpul digambarkan dengan titik-titik pada bidang, dan busur digambarkan garis yang menghubungkan dua simpul pada bidang. Garis dapat berupa garis lurus atau kurva (Hartsfield & Ringel, 2003).

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

Sebagai pengindikasian bahwa graf memiliki **himpunan simpul** V dan **himpunan busur** E, terkadang ditulis $G = (V, E)$, dan untuk memperlihatkan V dan E merupakan himpunan simpul dan busur dari suatu graf terkadang V ditulis $V(G)$ dan E ditulis $E(G)$. Setiap busur $\{u, v\}$ dari G biasa ditulis dengan uv atau vu. Jika $e = uv$ merupakan suatu busur pada graf G, maka e dikatakan menghubungkan u dan v (Chartrand dkk., 2011).

Himpunan simpul V dari graf G mungkin tak berhingga, dan graf dengan himpunan simpul tak berhingga disebut **graf tak berhingga**. Sedangkan graf dengan himpunan simpul berhingga dinamakan **graf berhingga** (Rosen, 2007). Pada skripsi ini, jenis graf yang akan dibahas hanya graf berhingga.

Suatu graf dimana setiap busur menghubungkan dua simpul yang berbeda dan tidak ada busur yang menghubungkan pasangan simpul yang sama dinamakan **graf sederhana** (*simple graph*). Pada graf sederhana, setiap busur akan menghubungkan suatu pasangan simpul, dan tidak ada busur lain yang menghubungkan pasangan simpul yang sama. Maka, ketika terdapat busur pada suatu graf sederhana yang menghubungkan simpul u dan v, dapat dipastikan bahwa uv adalah satu-satunya busur yang menghubungkan u dan v pada graf sederhana. Selain itu, terdapat pula graf yang memiliki beberapa busur yang menghubungkan simpul yang sama, graf ini dinamakan **multigraf** (*multigraph*) (Rosen, 2007).

Apabila uv merupakan suatu busur pada graf G, maka u dan v adalah simpul-simpul saling **bertetangga** (*adjacent*). Himpunan tetangga dari suatu simpul v dinamakan **lingkungan terbuka** dari v, biasa dilambangkan dengan $N_G(v)$, atau ditulis $N(v)$ jika G sudah jelas. Jelas bahwa uv dan vw adalah busur yang berbeda, maka uv dan vw disebut **busur bertetangga**. Simpul u dan busur uv disebut **saling hadir (***incident***),** begitu juga simpul v dengan busur uv (Chartrand dkk., 2011).

Derajat dari suatu simpul v pada graf G adalah banyaknya simpul pada graf G yang bertetangga dengan v. Jadi, derajat dari simpul v adalah banyak simpul pada lingkungan dari $\left(N(v)\right)$. Derajat simpul v juga setara dengan banyak busur yang saling hadir dengan simpul v. Derajat simpul v dinotasikan dengan $d(v)$. Suatu simpul yang berderajat 0 disebut **simpul terisolasi** dan simpul yang

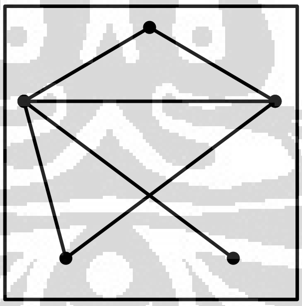
Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

berderajat 1 disebut **simpul ujung** atau **simpul daun**. Suatu busur yang hadir pada simpul daun disebut **busur *pendant***. Derajat terbesar diantara simpul-simpul pada graf G dinamakan **derajat maksimum** dari graf G dan dilambangkan dengan $\Delta(G)$, dan **derajat minimum** dari graf G dilambangkan dengan $\delta(G)$ (Chartrand dkk., 2011).

Definisi dan konsep teori graf yang dipaparkan di atas akan digunakan dalam penjelasan masalah pada bab selanjutnya. Jenis graf yang akan digunakan pada skripsi ini hanyalah graf berhingga dan sederhana. Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai beberapa jenis graf dan konsep pelabelan pada graf.

2.2. Jenis-Jenis Graf

Beberapa graf dikelompokkan menurut ciri khusus dari setiap graf. Pada subbab ini akan dipaparkan beberapa jenis graf yang akan dibahas pada penelitian ini. Sebelum membahas jenis-jenis graf, akan dikenalkan istilah order dan ukuran. Jumlah simpul pada suatu graf G disebut **order** dari G dan jumlah busur pada graf G disebut **ukuran** (*size*) dari G (Chartrand dkk., 2011). Order dari graf G pada Gambar 2.2 adalah 5 dan berukuran 6.

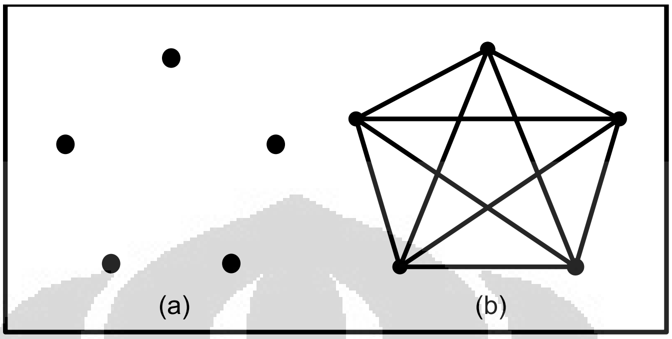


Gambar 2.2 Graf dengan order 5 dan ukuran 6

Suatu graf yang memiliki order 1 dinamakan **graf trivial.** Oleh karena itu, **graf nontrivial** memiliki 2 simpul atau lebih. Sedangkan graf yang memiliki ukuran 0 disebut **graf kosong** (*empty graph*). Maka, **graf tak kosong** memiliki busur. Pada graf kosong tidak ada simpul yang bertetangga. Berbeda dengan **graf lengkap** dimana setiap dua simpul pasti bertetangga. Ukuran dari suatu graf lengkap yang memiliki order n adalah $n(n-1)/2$. Oleh karena itu, untuk setiap

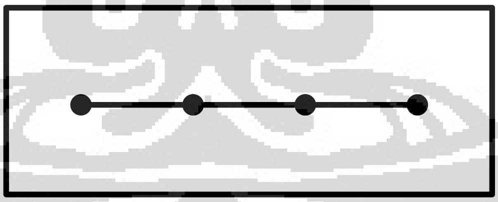
Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

graf G yang memiliki order n dan ukuran m, pertidaksamaan berikut akan terpenuhi, $0 \leq m \leq n(n-1)/2$. Graf lengkap biasanya dinotasikan dengan K_n (Chartrand dkk., 2011). Contoh graf kosong dan graf lengkap dengan order 5 digambarkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 (a) Graf kosong. (b) Graf lengkap ($\boldsymbol{K_5}$)

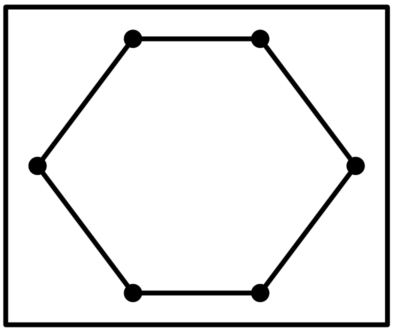
Dua kelas graf lain yang sering ditemukan adalah lintasan dan lingkaran. Untuk suatu bilangan bulat $n \geq 1$, **lintasan** P_n adalah suatu graf yang memiliki order n dan ukuran $n-1$ yang simpul-simpulnya dapat dinotasikan dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan busurnya dengan $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$ (Chartrand dkk., 2011). Grambar 2.3 memperlihatkan contoh graf lintasan dengan jumlah simpul 4 (P_4).



Gambar 2.4 Graf lintasan ($\boldsymbol{P_4}$)

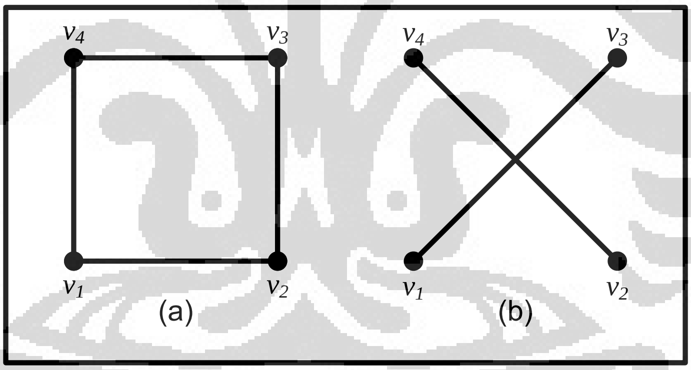
Untuk suatu bilangan bulat $n \geq 3$, **lingkaran** C_n adalah suatu graf yang memiliki order n dan ukuran n dimana simpul-simpulnya dapat dinotasikan dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan busurnya dengan $v_1 v_n$ dan $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$ (Chartrand dkk., 2011). Graf lingkaran dengan order 6 (C_6) diperlihatkan pada Gambar 2.5.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012



Gambar 2.5 Graf lingkaran ($\boldsymbol{C_6}$)

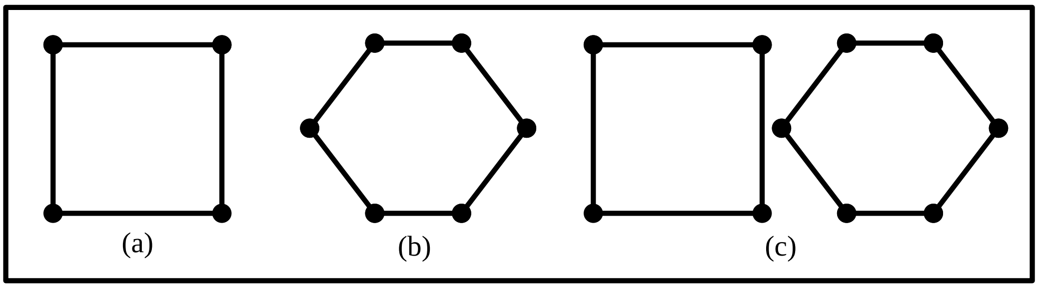
Operasi juga dapat dilakukan pada graf. Salah satu operasi yang dapat dilakukan pada graf adalah operasi komplemen. **Komplemen** $\overline{G}$ dari suatu graf G adalah graf dengan simpul-simpul $V(G)$ sedemikian sehingga dua simpul yang bertetangga di $\overline{G}$ jika dan hanya jika simpul-simpul ini tidak bertetangga di G (Chartrand dkk., 2011). Graf C_4 bersama dengan komplemennya diperlihatkan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 (a) Graf $\boldsymbol{C_4}$ (b) Graf $\overline{\boldsymbol{C_4}}$

Operasi juga dapat dilakukan pada dua graf untuk menghasilkan graf lain. Graf baru yang mengandung semua simpul dan busur dari graf tersebut dinamakan gabungan dari graf. Selanjutnya akan diberikan definisi formal untuk gabungan dari dua graf sederhana. **Gabungan** dari dua graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf sederhana yang himpunan simpulnya $V_1 \cup V_2$ dan himpunan busurnya $E_1 \cup E_2$. Gabungan dari G_1 dan G_2 dilambangkan oleh $G_1 \cup G_2$ (Rosen, 2007). Contoh operasi gabungan pada graf diperlihatkan pada Gambar 2.7.

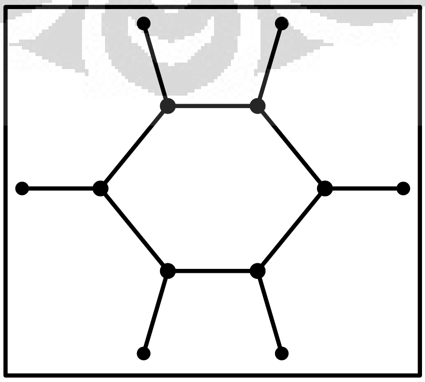
Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012



Gambar 2.7 (a) $\boldsymbol{G_1}$ (b) $\boldsymbol{G_2}$ (c) $\boldsymbol{G_1 \cup G_2}$

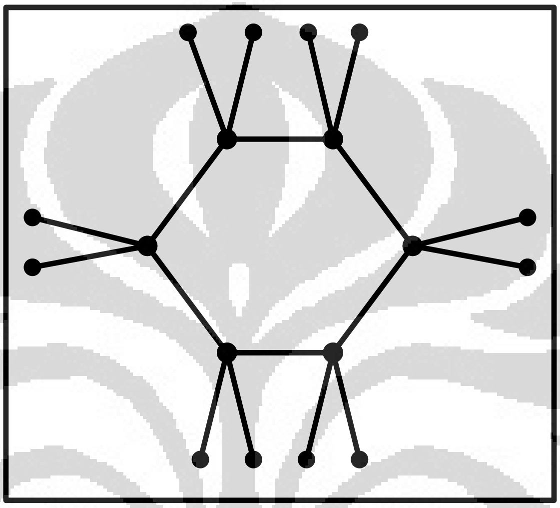
Selain operasi gabungan, juga dikenal operasi produk korona antara dua graf. Misalkan terdapat dua graf G dan H dengan jumlah simpul masing-masing adalah n_1 dan n_2. **Produk korona** dari $G \odot H$ didefinisikan sebagai suatu graf yang dihasilkan dari G dan H dengan mengambil satu salinan dari G dan n_1 salinan dari H, dan menghubungkan setiap simpul pada salinan ke-i dari H dengan simpul ke-i dari G (Yero, I. G., 2010).

Graf **matahari** ($C_n \odot \overline{K_1}$) merupakan suatu graf yang dibentuk dari suatu graf lingkaran C_n dimana setiap simpul pada graf lingkaran tersebut diberi tambahan satu simpul berderajat satu sedemikian sehingga setiap simpul pada graf matahari memiliki derajat 3, kecuali pada simpul ujung-ujungnya yang memiliki derajat 1. Graf matahari sendiri adalah hasil produk korona antara dua graf, yaitu graf lingkaran dengan n simpul ($C_n, n \geq 3$) dan komplemen dari graf lengkap dengan jumlah simpul satu ($\overline{K_1}$) . Graf matahari dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_1}$, dengan n menyatakan banyaknya simpul pada graf lingkaran. Contoh graf matahari dengan banyak simpul lingkaran enam diperlihatkan pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf matahari $\boldsymbol{C_6 \odot \overline{K_1}}$

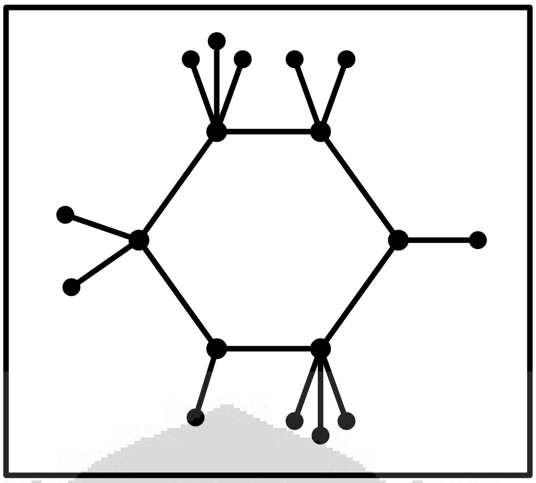
Jenis graf lain yang merupakan hasil produk korona dari dua graf adalah **graf korona.** Graf korona merupakan graf yang dibentuk dari graf lingkaran dengan menambahkan r simpul berderajat satu pada setiap simpul dari graf lingkaran $C_n, n \geq 3$. Graf korona juga merupakan hasil produk korona antara graf lingkaran dengan jumlah simpul n (C_n) dan komplemen dari graf lengkap dengan r simpul $(\overline{K_r})$, r bilangan asli. Graf korona sendiri biasa dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_r}$ dan contohnya seperti pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Graf korona $\boldsymbol{C_6 \odot \overline{K_2}}$

Jenis graf lain yang dibahas pada skripsi ini adalah graf *hairycycle*. Graf ***hairycycle*** HC $(n; r_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ adalah sebuah graf yang dibentuk dari graf lingkaran C_n dengan menghubungkan sembarang r_i simpul luar berderajat satu pada setiap simpul dalam v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pada graf lingkaran C_n. Simpul luar yang dimaksud disini adalah simpul berderajat satu pada graf *hairycycle* sedangkan simpul dalam yang dimaksud adalah simpul yang terdapat pada bagian lingkaran pada graf *hairycycle*. Graf *hairycycle* juga merupakan bentuk graf korona namun memiliki jumlah simpul daun yang terhubung pada simpul ke-i pada lingkaran tidak sama. Graf *hairycycle* $HC(6; 2, 3, 2, 1, 3, 1)$ ditunjukkan pada Gambar 2.10.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012



Gambar 2.10 Graf *hairycycle* $\boldsymbol{HC(6;\ 2,3,2,1,3,1)}$

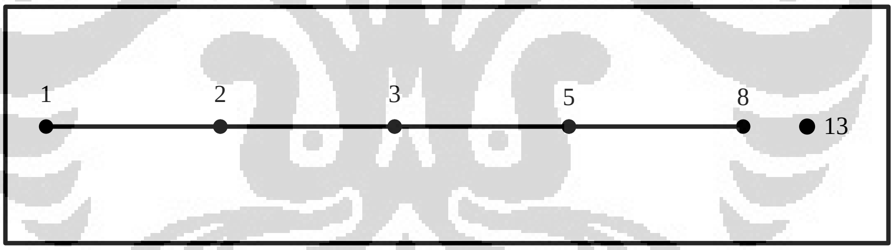
Pada subbab ini telah dijelaskan beberapa jenis graf. Jenis graf yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* yang terbatas pada jumlah simpul lingkaran genap.

2.3. Pelabelan Pada Graf

Pada skripsi ini dibahas mengenai pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran genap. Namun, sebelum membahas mengenai pelabelan jumlah eksklusif, diberikan penjelasan secara umum mengenai definisi dan istilah-istilah yang terdapat pada pelabelan. Selain itu, dijelaskan juga tentang definisi pelabelan jumah dan pelabelan jumlah eksklusif.

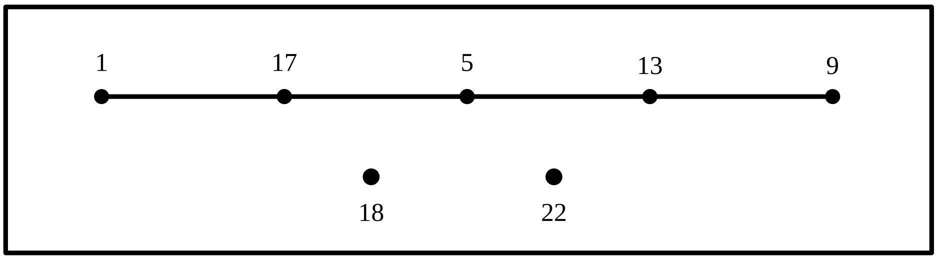
Semenjak konsep graf diperkenalkan oleh Euler pada abad kedelapan belas, semakin banyak ilmuwan yang mengembangkan teori graf. Salah satu pembahasan yang terus berkembang pada teori graf adalah pelabelan pada graf. Suatu **pelabelan** (penilaian) pada graf adalah pemetaan yang memetakan elemen-elemen dari graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat positif). Pilihan yang dijadikan daerah asal pemetaan umumnya adalah himpunan semua simpul dan busur (pelabelan seperti ini disebut **pelabelan total**), himpunan simpulnya saja (**pelabelan simpul**), atau himpunan busurnya saja (**pelabelan busur**). Daerah asal yang berupa kombinasi elemen graf lain juga dimungkinkan (Wallis, 2001).

Pelabelan pada graf terbagi menjadi beberapa macam. Salah satu jenis pelabelan yang diketahui adalah pelabelan jumlah. Suatu pelabelan $f: V(G) \rightarrow S$, dengan S adalah himpunan bilangan asli, disebut pelabelan jumlah jika untuk dua simpul berbeda di G, u dan v bertetangga jika dan hanya jika terdapat suatu simpul lain w dimana label $f(w) = f(u) + f(v)$, w disebut simpul bekerja. Graf yang memenuhi aturan pelabelan jumlah disebut **graf jumlah**. Berdasarkan definisi tersebut, simpul dengan jumlah label tertinggi pada graf jumlah tidak dapat bertetangga dengan simpul lain, maka setiap graf jumlah harus mengandung simpul terisolasi. Jika G bukan graf jumlah, akan selalu memungkinkan untuk menambahkan sejumlah simpul terisolasi kepada G untuk mencapai graf jumlah. **Bilangan jumlah** $\sigma(G)$ merupakan banyak simpul terisolasi minimal yang ditambahkan sehingga hasil ini tercapai (Miller, dkk., 2003). Suatu graf jumlah bersama dengan simpul terisolasi yang paling sedikit dinamakan **graf jumlah yang optimal** (Tuga, dkk., 2005). Contoh pelabelan jumlah terlihat pada Gambar 2.11. Gambar 2.11 memperlihatkan bilangan jumlah yang diperoleh dari pelabelan jumlah pada graf P_5, $\sigma(P_5) = 1$.



Gambar 2.11 Contoh pelabelan jumlah pada graf $\boldsymbol{P_5}$

Selanjutnya diperkenalkan istilah pelabelan jumlah eksklusif. Suatu pelabelan jumlah f dikatakan **pelabelan jumlah eksklusif** terhadap subgraf H dari graf G jika tidak terdapat simpul pada H yang merupakan simpul bekerja. Kemudian disebut H terlabel secara **eksklusif**. Selain itu, H dikatakan terlabel secara **inklusif**. **Bilangan jumlah eksklusif**, $\varepsilon(G)$, dari graf G adalah nilai r terkecil dari simpul terisolasi sedemikian sehingga $G = H \cup \overline{K_r}$ merupakan graf jumlah dan H terlabel secara eksklusif (Miller, M., dkk., 2003). Gambar 2.11 memperlihatkan pelabelan jumlah eksklusif pada graf lintasan. Pada gambar tersebut terlihat bahwa diperoleh $\varepsilon(P_5) = 2$.



Gambar 2.12 Contoh pelabelan jumlah eksklusif pada graf P_5

Kebanyakan penelitian yang terkait dengan pelabelan jumlah eksklusif pada suatu graf bertujuan untuk menemukan bilangan jumlah eksklusif dari graf tersebut. Salah satu penelitian penting mengenai pelabelan jumlah eksklusif adalah penelitian yang dilakukan oleh Tuga, dkk. (2005). Pada penelitiannya tersebut, ditunjukkan bahwa jika diketahui $\Delta(G)$ menyatakan derajat tertinggi simpul-simpul pada graf G, maka $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$ (Tuga, dkk., 2005).

Penelitian lain yang juga terkait dengan pelabelan jumlah eksklusif pada graf juga dilakukan oleh Miller, dkk. (2003).Penelitiannya menjelaskan tentang beberapa jenis graf yang telah ditemukan bilangan jumlah eksklusifnya. Tabel 2.1 memaparkan tentang rangkuman graf yang telah diketahui bilangan jumlah dan bilangan jumlah eksklusifnya berdasarkan publikasi hasil penelitian yang dikeluarkan oleh Miller, dkk. (2003).

Tabel 2.1 Rangkuman graf yang telah diketahui bilangan jumlah dan bilangan jumlah eksklusifnya (Miller, dkk., 2003) dengan catatan bahwa tanda Tanya (?) menyatakan bahwa pelabelan jumlah graf tersebut belum ditemukan

Graf	$\boldsymbol{\sigma(G)}$	$\boldsymbol{\varepsilon(G)}$
Bintang $S_n, n \geq 2$	1	n
Dua Bintang $S_{m,n}, m, n \geq 2$	1	$\max\{m, n\}$
Caterpillar S	1	$\Delta\, S$
Pohon $(T_n), n \geq 3$	1	?
Lintasan (P_n)	1	2

Lingkaran C_4 Lingkaran $C_n, n \geq 4$	3 2	3 3
Roda W_n $n \geq 5, n$ ganjil. $n \geq 4$, n genap	n $\frac{n}{2} + 2$	n n
Kipas F_n	?	n
Friendship f_n	2	$2n$
Graf lengkap K_n $n \geq 3$	$2n - 3$	$2n - 3$
Graf *Cocktail party* $H_{2,n}$ $H_{m,n}$	$4n - 5$?	$4n - 5$?
Graf lengkap *bipartite* $K_{n,n}$	$\left\lceil \frac{4n-3}{2} \right\rceil$	$2n - 1$
$K_{m,n}$	$\left\lceil \frac{k(n-1)}{2} + \frac{m}{k-1} \right\rceil$ dengan $k = \left\lceil \frac{\sqrt{1 + (8m + n - 1)(n - 1)}}{2} \right\rceil$	$m + n - 1$

Selain penelitian mengenai pelabelan jumlah eksklusif yang telah tercantum pada Tabel 2.1. Banyak penelitian serupa yang membahas mengenai pelabelan jumlah eksklusif pada graf. Seperti penelitian yang dilakukan oleh Sanjaya, dkk. (2011), yang membahas mengenai pelabelan jumlah eksklusif pada graf tangga, ditemukan bahwa untuk $n \geq 3, \varepsilon(L_n) = 3$. Selain itu, pelabelan jumlah eksklusif pada pengembangan dari graf tangga juga dilakukan oleh Haryono (2012). Pada penelitiannya, ditemukan bilangan jumlah eksklusif untuk gabungan graf tangga dan graf kaki seribu. Hasil penelitian yang diperoleh adalah $\varepsilon(mL_n) = 3$ dan $\varepsilon(L_n \odot \overline{K_r}) = 3$ untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 1$ (Haryono, 2012).

Pelabelan jumlah eksklusif dapat dilakukan untuk semua graf dengan menambahkan beberapa simpul terisolasi. Oleh karena itu, penelitian pada skripsi ini membahas pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* untuk banyak simpul lingkaran genap. Belum adanya laporan penelitian mengenai pelabelan jumlah eksklusif pada graf-graf tersebut menyebabkan dilakukan penelitian ini. Pada bab selanjutnya diberikan hasil penelitian yang dilakukan mengenai pelabelan jumlah eksklusif. Kemudian dibuktikan bahwa hasil yang telah diperoleh berlaku untuk setiap n dan pelabelan tersebut akan menghasilkan bilangan jumlah eksklusif yang optimal.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

BAB 3
PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF MATAHARI, GRAF KORONA, DAN GRAF *HAIRYCYCLE* DENGAN BANYAK SIMPUL LINGKARAN GENAP

Pelabelan jumlah eksklusif dapat diterapkan untuk semua jenis graf dengan menambahkan beberapa simpul terisolasi. Akan tetapi, untuk mencari pelabelan jumlah eksklusif dengan banyak simpul terisolasi yang ditambahkan minimal, tidaklah mudah. Oleh karena itu penelitian ini dilakukan untuk melengkapi pelabelan jumlah eksklusif pada beberapa kelas graf yang belum ditemukan bilangan jumlah eksklusifnya. Pada bab ini dijelaskan mengenai konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari, graf korona, dan graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran genap. Konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada kelas-kelas graf ini menghasilkan pelabelan jumlah eksklusif yang optimal. Untuk mengingatkan kembali bahwa pelabelan jumlah eksklusif pada suatu graf G dikatakan optimal jika $\Delta(G) = \varepsilon(G)$.

Pada bab ini, akan dikemukakan beberapa teorema yang diperoleh berdasar hasil penelitian yang telah dilakukan. Berdasarkan definisi pelabelan jumlah eksklusif, sistematika pembuktian teorema-teorema yang dikemukakan pada bab ini akan sesuai dengan langkah-langkah berikut:

1. Pendefinisian label untuk setiap simpul pada graf dengan penjumlahan dari label simpul yang bertetangga merupakan label simpul terisolasinya.
2. Pembuktian bahwa tidak ada busur tambahan antara simpul yang tidak bertetangga.
3. Pembuktian bahwa banyak simpul terisolasi yang diperoleh optimal.

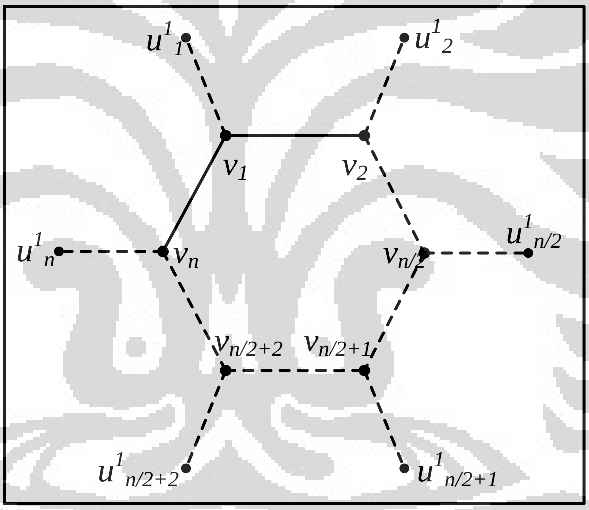
3.1. Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Matahari dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap

Graf matahari adalah hasil produk korona antara dua graf, yaitu graf lingkaran dengan n simpul $(C_n, n \geq 3)$ dan komplemen dari graf lengkap dengan jumlah

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

simpul satu ($\overline{K_1}$), biasa ditulis $C_n \odot \overline{K_1}$. Graf lingkaran sendiri memiliki n simpul, ditambah dengan n graf $\overline{K_1}$ yang masing-masing memiliki satu simpul, sehingga banyak simpul yang dimiliki oleh graf matahari adalah $2n$. Subbab ini hanya membahas pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari dengan banyak simpul lingkaran genap. Oleh karena itu, nilai n pada graf C_n hanya terbatas pada bilangan genap saja (n genap).

Himpunan simpul-simpul pada graf matahari terbagi menjadi dua bagian. Pertama adalah himpunan simpul lingkaran $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, kemudian yang kedua adalah himpunan simpul daun $\{u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots, u_n^1\}$, dimana $E = \{v_i u_i^1 | 1 \le i \le n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \le i \le n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$. Gambar 3.1. mengambarkan graf matahari dengan banyak simpul lingkaran n beserta notasi-notasi simpulnya.



Gambar 3.1 Graf Matahari $\boldsymbol{C_n \odot \overline{K_1}}$

Sebelum membentuk konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf $C_n \odot \overline{K_1}$ perlu ditentukan terlebih dahulu batasan bilangan jumlah eksklusif. Derajat maksimum dari simpul-simpul pada graf $C_n \odot \overline{K_1}$ dinotasikan dengan $\Delta(C_n \odot \overline{K_1})$.

Lemma 3.1 $\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_1}\right) \ge 3$

Bukti.

Telah diketahui sebelumnya bahwa untuk sembarang graf G berlaku, $\varepsilon(G) \ge \Delta(G)$ (Tuga, dkk., 2005). Telah diketahui bahwa $\Delta(C_n \odot \overline{K_1}) = 3$, maka, $\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_1}\right) \ge 3$. ■

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

Berikut ini diberikan bilangan jumlah eksklusif untuk graf matahari $C_n \odot \overline{K_1}$.

Teorema 3.2 $\varepsilon(C_n \odot \overline{K_1}) = 3$ untuk n genap.

Bukti.

Notasi simpul graf matahari mengikuti Gambar 3.1.

Definisikan $w_a, a = 1, 2, 3$ sebagai simpul-simpul terisolasi. Sistematika pembuktian teorema ini akan melalui beberapa tahapan pembuktian seperti yang disebutkan pada awal bab ini.

1. Pendefinisian konstruksi label untuk setiap simpul pada graf matahari.

   Untuk $1 \leq i \leq n$, label simpul-simpul graf $C_n \odot \overline{K_1}$ sebagai berikut

   Label simpul lingkaran

   $$f(v_i) = \begin{cases} 4(n-i) + 21, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4(i-1) + 17, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

   Label simpul daun

   $$f(u_i^1) = \begin{cases} 13, & \text{untuk } i = 1 \\ 4(n+i) + 9, & \text{untuk } i = 3, 5, 7, \dots, n-1 \\ 4(2n-i) + 17, & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, n-2 \\ 17, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

   Diketahui bahwa label simpul yang terisolasi adalah jumlah label dua simpul yang bertetangga. Jumlah label dua simpul bertetangga yang mungkin adalah

   $$f(v_i) + f(v_{i+1}) = \begin{cases} 4n + 38, & i \text{ ganjil} \\ 4n + 30, & i \text{ genap} \\ 8n + 30, & i = n \end{cases}$$

   $$f(v_i) + f(u_i^1) = \begin{cases} 4n + 30, & i = 1 \\ 8n + 30, & i = 3, 5, 7, \dots, n-1 \\ 8n + 30, & i = 2, 4, 6, \dots, n-2 \\ 4n + 30, & i = n \end{cases}$$

   Jadi, label dari simpul-simpul terisolasi pada graf $C_n \odot \overline{K_1}$ adalah $f(w_1) = 4n + 30$, $f(w_2) = 4n + 38$, dan $f(w_3) = 8n + 30$.

2. Pembuktian bahwa tidak ada busur tambahan antar simpul-simpul yang tidak bertetangga

   Untuk membuktikan bahwa tidak ada busur tambahan antar simpul-simpul yang tidak bertetangga, perlu dilakukan langkah-langkah pembuktian sebagai berikut.

a. Tidak ada busur antara v_i dengan v_j, jika $|i-j| \geq 2$ untuk $i \neq n$

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(v_j)$ adalah

$$f(v_i) + f(v_j) = \begin{cases} 4\big(2n-(i+j)\big)+42, & i,j \text{ ganjil} \\ 4\big((i+j)-2\big)+34, & i,j \text{ genap} \\ 4(n-i+j-1)+38, & i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 4(n+i-j-1)+38, & i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Hasil-hasil dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut pasti merupakan bilangan genap. Maka, hanya label-label simpul terisolasilah yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut. Nilai $f(v_i) + f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 4n + 30$ atau $f(w_2) = 4n + 38$. Selain itu, tidak ada label simpul yang terbentuk dari semua kemungkinan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut, sehingga tidak ada busur yang terbentuk antara busur v_i dengan v_j jika $|i-j| \geq 2$ untuk $i \neq n$.

b. Tidak ada busur antara v_n dengan v_j, jika $j \neq 1$ atau $j \neq n-1$

Jumlah dari label $f(v_n)$ dan $f(v_j)$ yang mungkin merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(v_n) + f(v_j) = \begin{cases} 8n-4j+34, & j \text{ ganjil} \\ 4n+4j+26, & j \text{ genap} \end{cases}.$$

Hasil-hasil dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut adalah bilangan genap. Maka hanya label simpul-simpul terisolasi yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul tersebut. Nilai $f(v_i) + f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $j = 1$ atau $j = n - 1$, yaitu $f(w_2) = 4n + 38$ atau $f(w_3) = 8n + 30$. Selain itu, tidak ada label simpul yang terbentuk dari semua kemungkinan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut, sehingga tidak ada busur yang terbentuk antara busur v_n dengan v_j jika $j \neq 1$ atau $j \neq n + 1$.

c. Tidak ada busur antara v_i dan u_j^1 jika $i \neq j$

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(u_j^1)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(v_i) + f(u_j^1) = \begin{cases} 4(n-i)+34, & i \text{ ganjil}, j = 1 \\ 4(i-1)+30, & i \text{ genap}, j = 1 \\ 8n-4i+4j+30, & i \text{ ganjil}, j = 3,5,\dots,n-1 \\ 8n+4i-4j+34, & i \text{ genap}, j = 2,4,\dots,n-2 \\ 12n-4i-4j+38, & i \text{ ganjil}, j = 2,4,\dots,n-2 \\ 4(n-i+j)+26, & i \text{ genap}, j = 3,5,\dots,n-1 \\ 4(n-i)+38, & i \text{ ganjil}, j = n \\ 4(i-1)+34, & i \text{ genap}, j = n \end{cases}.$$

Penjumlahan label simpul-simpul tersebut pasti menghasilkan bilangan genap. Oleh karena itu, hanya label dari simpul-simpul terisolasi yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut. Nilai $f(v_i) + f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j$, yaitu $f(w_1) = 4n + 30$ atau $f(w_3) = 8n + 30$. Selain itu, tidak ada label simpul yang terbentuk dari semua kemungkinan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut, sehingga tidak ada busur yang terbentuk antara busur v_i dengan u_j jika $i \neq j$.

d. Tidak ada busur antara u_i^1 dan u_j^1 untuk setiap i, j.

Jumlah dari label $f(u_i^1)$ dan $f(u_j^1)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(u_i^1) + f(u_j^1) = \begin{cases} 30, & i = 1, j = n \\ 4(n+j)+22, & i = 1, j = 3,5,\dots,n-1 \\ 4(2n-j)+30, & i = 1, j = 2,4,\dots,n-2 \\ 4(n+j)+26, & i = n, j = 3,5,\dots,n-1 \\ 4(2n-j)+34, & i = n, j = 2,4,\dots,n-2 \\ 8n+4i+4j+18, & i = 3,5,\dots,n-1, j = 3,5,\dots,n-1 \\ 16n-4i-4j+34, & i = 2,4,\dots,n-2, j = 2,4,\dots,n-2 \\ 12n+4i-4j+26, & i = 3,5,\dots,n-1, j = 2,4,\dots,n-2 \end{cases}.$$

Penjumlahan label simpul-simpul tersebut pasti menghasilkan bilangan genap. Oleh karena itu, hanya label dari simpul-simpul terisolasi yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut. Label simpul terisolasi adalah $f(w_1) = 4n + 30$, $f(w_2) = 4n + 38$, dan $f(w_3) = 8n + 30$. Nilai $f(u_i^1) + f(u_j^1)$ bukan merupakan label dari simpul terisolasi. Sehingga, tidak ada busur yang mungkin terbentuk antara u_i^1 dan u_j^1 untuk setiap i, j.

e. Tidak ada busur antara v_i dan simpul-simpul terisolasi w_a untuk $a = 1, 2, 3$.

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(w_a)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(v_i) + f(w_a) = \begin{cases} 8n - 4i + 51, & i \text{ ganjil}, a = 1 \\ 4n + 4i + 43, & i \text{ genap}, a = 1 \\ 8n - 4i + 59, & i \text{ ganjil}, a = 2 \\ 4n + 4i + 51, & i \text{ genap}, a = 2 \\ 12n - 4i + 51, & i \text{ ganjil}, a = 3 \\ 8n + 4i + 43, & i \text{ ganjil}, a = 3 \end{cases}.$$

Semua kemungkinan hasil penjumlahan kedua simpul tersebut merupakan bilangan ganjil.

label simpul lingkaran

$$f(v_i) = \begin{cases} 4(n - i) + 21, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4(i - 1) + 17, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

label simpul daun

$$f(u_i^1) = \begin{cases} 13, & \text{untuk } i = 1 \\ 4(n + i) + 9, & \text{untuk } i = 3, 5, 7, \dots, n - 1 \\ 4(2n - i) + 17, & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, n - 2 \\ 17, & \text{untuk } i = n \end{cases}.$$

Terlihat bahwa semua kemungkinan $f(v_i) + f(w_a)$ bukan merupakan label simpul pada graf matahari. Maka, tidak ada busur yang mungkin terbentuk antara v_i dan w_a.

f. Tidak ada busur antara u_i^1 dan simpul-simpul terisolasi w_a untuk $a = 1, 2, 3$.

Jumlah dari label $f(u_i^1)$ dan $f(w_a)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(u_i^1) + f(w_a) = \begin{cases} 4n + 43, & i = 1, a = 1 \\ 8n + i + 39, & i = 3, 5, \dots, n - 1, a = 1 \\ 12n - 4i + 47, & i = 2, 4, \dots, n - 2, a = 1 \\ 4n + 47, & i = n, a = 1 \\ 4n + 51, & i = 1, a = 2 \\ 8n + 4i + 47, & i = 3, 5, \dots, n - 1, a = 2 \\ 12n - 4i + 55, & i = 2, 4, \dots, n - 2, a = 2 \\ 4n + 55, & i = n, a = 2 \\ 8n + 43, & i = 1, a = 3 \\ 12n + i + 39, & i = 3, 5, \dots, n - 1, a = 3 \\ 16n - 4i + 47, & i = 2, 4, \dots, n - 2, a = 3 \\ 8n + 47, & i = n, a = 3 \end{cases}.$$

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

Semua kemungkinan hasil penjumlahan label kedua simpul tersebut merupakan bilangan ganjil. Maka, label-label simpul yang mungkin adalah label simpul lingkaran

$$f(v_i) = \begin{cases} 4(n-i)+21, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4(i-1)+17, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

label simpul daun

$$f(u_i^1) = \begin{cases} 13, & \text{untuk } i = 1 \\ 4(n+i)+9, & \text{untuk } i = 3,5,7,\dots,n-1 \\ 4(2n-i)+17, & \text{untuk } i = 2,4,6,\dots,n-2 \\ 17, & \text{untuk } i = n \end{cases}.$$

Terlihat bahwa semua kemungkinan $f(u_i^1) + f(w_a)$ bukan merupakan label simpul pada graf matahari. Maka, tidak ada busur yang mungkin terbentuk antara u_i^1 dan w_a.

g. Tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi

Jumlah dari label $f(w_a)$ dan $f(w_b)$ untuk $a \neq b$ ($a = 1,2,3$ dan $b = 1,2,3$) yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(w_a) + f(w_b) = \begin{cases} 8n+68, & a = 1, b = 2 \\ 12n+68, & a = 2, b = 3. \\ 12n+60, & a = 1, b = 3 \end{cases}$$

Penjumlahan label simpul-simpul tersebut adalah bilangan genap. Oleh karena itu, hanya label dari simpul-simpul terisolasi yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut. Label simpul terisolasi adalah $f(w_1) = 4n + 30$, $f(w_2) = 4n + 38$, dan $f(w_3) = 8n + 30$. Karena semua kemungkinan $f(w_a) + f(w_b)$ bukan merupakan salah satu dari label fungsi simpul terisolasi. Maka, tidak ada busur yang mungkin terbentuk antara simpul-simpul terisolasi.

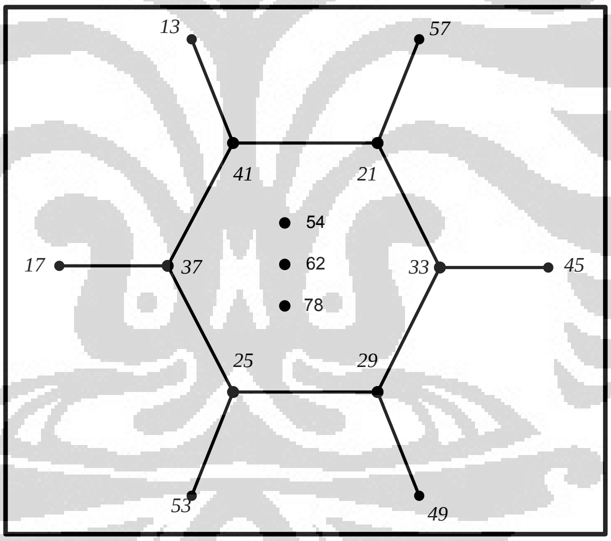
Berdasarkan langkah-langkah pembuktian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa tidak ada simpul tambahan untuk simpul-simpul yang tidak bertetangga.

3. Tunjukkan bahwa jumlah simpul terisolasi yang diperoleh adalah optimal. Pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari dengan jumlah simpul lingkaran genap di atas memperoleh jumlah simpul terisolasi sebanyak tiga, dan diketahui $\Delta(C_n \odot \overline{K_1}) = 3$. Berdasarkan Lemma 3.1, menyatakan bahwa $\varepsilon(C_n \odot \overline{K_1}) \geq 3$. Berdasarkan hasil tersebut telah dibuktikan bahwa pelabelan

jumlah eksklusif pada graf matahari dengan jumlah simpul lingkaran genap di atas telah optimal.

Berdasarkan ketiga langkah pembuktian di atas, maka $\varepsilon(C_n \odot \overline{K_1}) = 3$, untuk n genap telah terbukti. ■

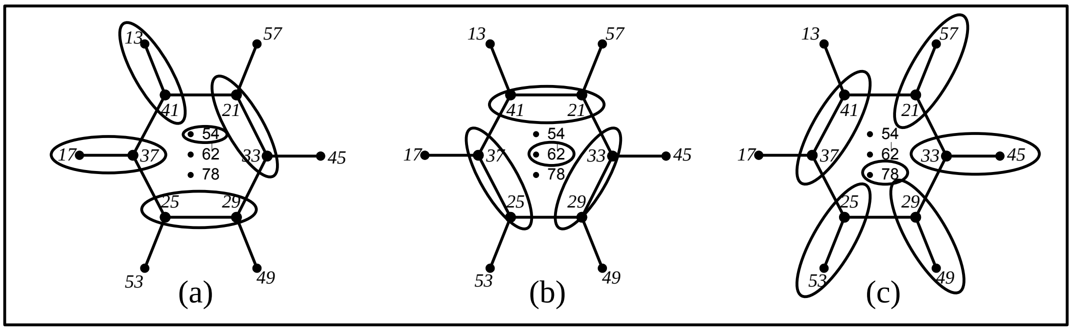
Pada Gambar 3.2 diberikan contoh pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari dengan jumlah simpul lingkaran 6 $(C_6 \odot \overline{K_1})$ dengan menggunakan konstruksi pelabelan yang telah dibuktikan sebelumnya. Label yang terlihat pada gambar tersebut merupakan hasil pemetaan semua simpul pada graf matahari dengan menggunakan fungsi pelabelan jumlah eksklusif yang telah dibuktikan pada Teorema 3.2. Pada gambar tersebut juga terlihat bahwa jumlah simpul terisolasi yang dihasilkan sama dengan derajat maksimumnya $(\varepsilon(C_6 \odot \overline{K_1}) = \Delta(C_6 \odot \overline{K_1}) = 3)$.



Gambar 3.2 Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Matahari $\boldsymbol{C_6 \odot \overline{K_1}}$

Selanjutnya pada Gambar 3.3, diperlihatkan bahwa contoh yang diberikan pada Gambar 3.2 memenuhi aturan pelabelan jumlah eksklusif, yaitu setiap jumlah dari label simpul yang bertetangga merupakan label dari simpul terisolasi.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012



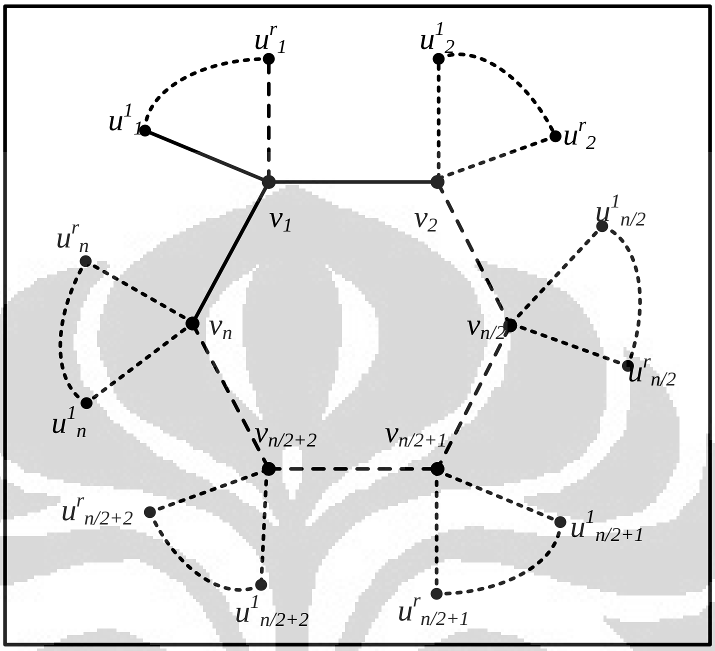
Gambar 3.3 Jumlah label simpul yang bertetangga pada graf $C_6 \odot \overline{K_1}$ sama dengan label simpul terisolasi

Pada Gambar 3.3 label simpul terisolasi adalah 54, 62, dan 78. Bagian (a) menunjukkan bahwa jumlah label simpul bertetangga yang ditandai bernilai 54, bagian (b) jumlah label simpul bertetangga yang ditandai bernilai 62, dan pada bagaian (c) jumlah label simpul bertetangga yang ditandai bernilai 78. Berdasarkan hasil pada Gambar 3.3 bagian (a), (b) dan (c) terlihat bahwa setiap label simpul yang bertetangga jumlahnya akan sama dengan label simpul terisolasi.

3.2. Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Korona dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai pelabelan jumlah eksklusif pada graf korona dengan banyak simpul lingkaran genap. Sebelumnya telah dijelaskan bahwa graf korona merupakan hasil produk korona antara graf lingkaran dengan jumlah simpul n (C_n) dan komplemen dari graf lengkap dengan jumlah simpul r ($\overline{K_r}$) biasa ditulis dengan $C_n \odot \overline{K_r}$. Disini hanya membahas pelabelan jumlah eksklusif pada graf korona dengan banyak simpul lingkaran genap, maka nilai n hanya terbatas pada bilangan-bilangan genap saja dan r bilangan asli.

Seperti pada subbab sebelumnya, himpunan simpul-simpul pada graf korona juga terbagi menjadi dua bagian. Himpunan simpul lingkaran $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan himpunan simpul daun $\{u_1^1, u_1^2, u_1^3, \dots, u_1^r, u_2^1, u_2^2, u_2^3, \dots, u_2^r, \dots, u_n^r\}$, dimana $E = \left\{v_i u_i^k \middle| 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r\right\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$. Simpul yang dilambangkan dengan v_i menunjukkan simpul lingkaran ke-i dan simpul yang dilambangkan dengan u_i^k menunjukkan simpul daun ke-k yang terhubung pada simpul lingkaran ke-i. Pada Gambar 3.4 diberikan ilustrasi graf korona dengan banyak simpul lingkaran n dan banyak simpul daun r.



Gambar 3.4 Graf korona $(\boldsymbol{C_n \odot \overline{K_r}})$

Lemma 3.3 $\varepsilon(C_n \odot \overline{K_r}) \geq 2 + r,$ dengan $n, r \in N$.

Bukti.

Telah diketahui sebelumnya bahwa untuk sembarang graf G berlaku $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$ (Tuga, dkk., 2005). Karena $\Delta(C_n \odot \overline{K_r}) = 2 + r$, maka, $\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_r}\right) \geq 2 + r$. ■

Supaya bilangan jumlah eksklusif dari graf korona optimal, nilai bilangan jumlah eksklusif haruslah $\varepsilon(C_n \odot \overline{K_r}) = 2 + r$. Teorema 3.4 memberikan bilangan jumlah eksklusif pada graf korona yang. Sistematika pembuktian teorema ini tidak berbeda dengan sistematika yang dibuktikan pada teorema sebelumnya.

Teorema 3.4 $\varepsilon(C_n \odot \overline{K_r}) = 2 + r,$ dengan n genap, dan $r \in N$.

Bukti.

Notasi simpul graf korona mengikuti Gambar 3.2.

Definisikan $w_a, a = 1, 2, \ldots, r + 2$ sebagai simpul-simpul terisolasi.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

1. Pendefinisian label untuk setiap simpul pada graf korona.

   Untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq k \leq r$, label simpul graf korona sebagai berikut. Label simpul lingkaran sama dengan pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari untuk simpul lingkaran pada Teorema 3.2.

   $$f(v_i) = \begin{cases} 4(n-i)+21, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4(i-1)+17, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}.$$

   Label simpul daun untuk $k = 1$ sama dengan pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari untuk simpul daun pada Teorema 3.2.

   $$f(u_i^1) = \begin{cases} 13, & \text{untuk } i = 1 \\ 4(n+i)+9, & \text{untuk } i = 3, 5, 7, \dots, n-1 \\ 4(2n-i)+17, & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, n-2 \\ 17, & \text{untuk } i = n \end{cases}.$$

   Label simpul daun untuk $k \geq 2$

   $$f(u_i^k) = \begin{cases} (16k-4)n+4i-21, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 16nk-4i-13, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}.$$

   Oleh karena pelabelan jumlah eksklusif untuk simpul lingkaran dan simpul daun pada graf korona sama dengan graf matahari untuk $k = 1$, maka label simpul terisolasi w_a untuk $a = 1, 2, 3$ juga akan sama. Sedangkan untuk $k \geq 2$, diperoleh dengan menjumlahkan label simpul daun ke-k dengan simpul ke-i pada lingkaran.

   $$f(v_i) + f(u_i^k) = \begin{cases} 16nk, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 16nk, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases},$$

   Sehingga, label simpul terisolasi adalah

   $$f(w_a) = \begin{cases} 4n+30, & a = 1 \\ 4n+38, & a = 2 \\ 8n+30, & a = 3 \\ 16nk & a = k+2, \text{untuk } k = 2, 3, \dots, r \end{cases}.$$

2. Pembuktian tidak ada busur tambahan di antara simpul-simpul yang tidak bertetangga

   Untuk membuktikan bahwa tidak ada busur tambahan antara simpul-simpul yang tidak bertetangga, perlu dilakukan beberapa langkah sebagai berikut.

   a. Tidak ada busur antara v_i dengan v_j, jika $|i-j| \geq 2$ untuk $i \neq n$

      Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(v_j)$ adalah

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

$$f(v_i)+f(v_j)=\begin{cases}4\big(2n-(i+j)\big)+42, & i,j \text{ ganjil}\\ 4\big((i+j)-2\big)+34, & i,j \text{ genap}\\ 4(n-i+j-1)+38, & i \text{ ganjil}, j \text{ genap}\\ 4(n+i-j-1)+38, & i \text{ genap}, j \text{ ganjil}\end{cases}.$$

Hasil-hasil dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut pasti merupakan bilangan genap dan tidak bergantung pada k. Hanya label-label simpul terisolasi untuk $a = 1, 2, 3$ yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut. Nilai $f(v_i) + f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j + 1$, yaitu $f(w_1) = 4n + 30$ atau $f(w_2) = 4n + 38$. Selain itu, tidak ada label simpul yang terbentuk dari semua kemungkinan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut, sehingga tidak ada busur yang terbentuk antara busur v_i dengan v_j jika $|i - j| \geq 2$ untuk $i \neq n$.

b. Tidak ada busur antara v_n dengan v_j, jika $j \neq 1$ atau $j \neq n - 1$

Jumlah dari label $f(v_n)$ dan $f\big(v_j\big)$ yang mungkin merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(v_n)+f\big(v_j\big)=\begin{cases}8n-4j+34, & j \text{ ganjil}\\ 4n+4j+26, & j \text{ genap}\end{cases}.$$

Hasil-hasil dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut adalah bilangan genap dan tidak bergantung pada k, maka, hanya label simpul-simpul terisolasi untuk $a = 1, 2, 3$ yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul tersebut. Nilai $f(v_i) + f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $j = 1$ atau $j = n - 1$, yaitu $f(w_2) = 4n + 38$ atau $f(w_3) = 8n + 30$. Selain itu, tidak ada label simpul yang terbentuk dari semua kemungkinan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut, sehingga tidak ada busur yang terbentuk antara busur v_n dengan v_j jika $j \neq 1$ atau $j \neq n + 1$.

c. Tidak ada busur antara v_i dan u_j^1 jika $i \neq j$

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f\big(u_j^1\big)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

$$f(v_i)+f(u_j^1)=\begin{cases}4(n-i)+34, & i \text{ ganjil}, j=1\\ 4(i-1)+30, & i \text{ genap}, j=1\\ 8n-4i+4j+30, & i \text{ ganjil}, j=3,5,\dots,n-1\\ 8n+4i-4j+34, & i \text{ genap}, j=2,4,\dots,n-2\\ 12n-4i-4j+38, & i \text{ ganjil}, j=2,4,\dots,n-2\\ 4(n-i+j)+26, & i \text{ genap}, j=3,5,\dots,n-1\\ 4(n-i)+38, & i \text{ ganjil}, j=n\\ 4(i-1)+34, & i \text{ genap}, j=n\end{cases}.$$

Penjumlahan label simpul-simpul tersebut pasti menghasilkan bilangan genap dan tidak bergantung pada k. Oleh karena itu, hanya label dari simpul-simpul terisolasi untuk $a=1,2,3$ yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut. Nilai $f(v_i)+f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i=j$, yaitu $f(w_1)=4n+30$ atau $f(w_3)=8n+30$. Selain itu, tidak ada label simpul yang terbentuk dari semua kemungkinan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut, sehingga tidak ada busur yang terbentuk antara busur v_i dengan u_j jika $i\neq j$.

d. Tidak ada busur antara u_i^1 dan u_j^1 untuk setiap i,j.

Jumlah dari label $f(u_i^1)$ dan $f(u_j^1)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(u_i^1)+f(u_j^1)=\begin{cases}30, & i=1, j=n\\ 4(n+j)+22, & i=1, j=3,5,\dots,n-1\\ 4(2n-j)+30, & i=1, j=2,4,\dots,n-2\\ 4(n+j)+26, & i=n, j=3,5,\dots,n-1\\ 4(2n-j)+34, & i=n, j=2,4,\dots,n-2\\ 8n+4i+4j+18, & i=3,5,\dots,n-1, j=3,5,\dots,n-1\\ 16n-4i-4j+34, & i=2,4,\dots,n-2, j=2,4,\dots,n-2\\ 12n+4i-4j+26, & i=3,5,\dots,n-1, j=2,4,\dots,n-2\end{cases}.$$

Penjumlahan label simpul-simpul tersebut pasti menghasilkan bilangan genap dan tidak bergantung pada k. Oleh karena itu, hanya label dari simpul-simpul terisolasi untuk $a=1,2,3$ yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut. Label simpul terisolasi adalah $f(w_1)=4n+30$, $f(w_2)=4n+38$, dan $f(w_3)=8n+30$. Nilai $f(u_i^1)+f(u_j^1)$ bukan merupakan salah satu dari label simpul terisolasi tersebut. Sehingga, tidak ada busur yang mungkin terbentuk antara u_i^1 dan u_j^1 untuk setiap i, j.

e. Tidak ada busur antara u_i^k dengan v_j untuk $i \neq j$ dan $k \geq 2$

Jumlah dari label $f(u_i^k)$ dan $f(v_j)$ yang mungkin merupakan salah satu dari hasil label fungsi berikut

$$f(u_i^k) + f(v_j) = \begin{cases} 16nk + 4i - 4j, & i \text{ ganjil, } j \text{ ganjil} \\ (16k - 4)n + 4i + 4j - 8, & i \text{ ganjil, } j \text{ genap} \\ 16nk - 4i + 4j, & i \text{ genap, } j \text{ genap} \\ (16k + +4)n - 4i - 4j + 8, & i \text{ genap, } j \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut pasti menghasilkan bilangan genap dan terdapat bergantung pada k. Sehingga, label yang mungkin hanyalah label dari simpul terisolasi w_a untuk $a = 4, 5, \dots, r$, $f(w_a) = 16nk$. Nilai $f(u_i^k) + f(v_j)$ akan menjadi label simpul terisolasi jika $i = j$, selain itu, tidak ada label simpul yang mungkin terbentuk dari semua kemungkinan hasil penjumlahan label tersebut. Karena tidak ada label simpul yang terbentuk, maka tidak ada simpul tambahan yang terbentuk antara u_i^k dan v_j untuk $i \neq j$.

f. Tidak ada busur antara u_i^k dan u_i^1 untuk $k \geq 2$

Jumlah dari label $f(u_i^k)$ dan $f(u_i^1)$ yang mungkin adalah sebagai berikut

$$f(u_i^k) + f(u_i^1) = \begin{cases} (16k - 4)n - 4, & i = 1 \\ 16nk + 8i - 12, & i \text{ ganjil, } i \neq 1 \\ 16nk + 8n - 8i + 4, & i \text{ genap, } i \neq n \\ 16nk - 4n + 4, & i = n \end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut pasti menghasilkan bilangan genap dan bergantung pada k. Sehingga, label yang mungkin hanyalah label dari simpul terisolasi w_a untuk $a = 4, 5, \dots, r + 2$, $f(w_a) = 16nk$. Sedangkan nilai $f(u_i^k) + f(u_i^1)$ bukan merupakan label dari simpul terisolasi, maka tidak ada busur tambahan atara u_i^k dan u_i^1 untuk $k \geq 2$.

g. Tidak ada busur tambahan antara u_i^k dengan u_i^l untuk $k \geq 2, l \geq 2$, dan $k \neq l$

Jumlah dari label $f(u_i^k)$ dan $f(u_i^l)$ yang mungkin adalah sebagai berikut

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

$$f(u_i^k)+f(u_i^l)=\begin{cases}(16k+16l-8)n+8i-42, & i \text{ ganjil}\\ 16nk+16nl-8i-26, & i \text{ genap}\end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut merupakan bilangan genap dan bergantung pada k. Sehingga, label yang mungkin hanyalah label dari simpul terisolasi w_a untuk $a = 4, 5, \ldots, r+2$, $f(w_a) = 16nk$. Sedangkan nilai $f(u_i^k) + f(u_i^l)$ bukan merupakan label dari simpul terisolasi. Maka, tidak ada busur tambahan atara u_i^k dan u_i^l untuk $k \geq 2$, $l \geq 2$ dan $k \neq l$.

h. Tidak ada busur antara u_i^k dengan u_j^l untuk setiap $i \neq j$

Jumlah dari label $f(u_i^k)$ dan $f(u_j^l)$ yang mungkin adalah sebagai berikut

$$f(u_i^k)+f(u_j^l)=\begin{cases}(16k+16l-8)n+4i+4j-42, & i,j \text{ ganjil}\\ 16nk+16nl-4n+4i-4j-34, & i \text{ ganjil}, j \text{ genap}\\ 16nk+16nl-4i-4j-26, & i,j \text{ genap}\\ 16nk+16nl-4n-4i+4j-34, & i \text{ genap}, j \text{ ganjil}\end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut merupakan bilangan genap. Hanya label simpul terisolasi yang mungkin. Sedangkan nilai $f(u_i^k) + f(u_j^l)$ bukan merupakan label simpul terisolasi. Maka, tidak ada busur anatara simpul u_i^k dan simpul u_j^l untuk setiap i, j.

i. Tidak ada busur antara u_i^k dengan u_j^1 untuk setiap i, j

Jumlah dari label $f(u_i^k)$ dan $f(u_j^1)$ yang mungkin adalah sebagai berikut

$$f(u_i^k)+f(u_j^1)=\begin{cases}(16k-4)n+4i-8, & i \text{ ganjil}, j=1\\ 16nk+4i+4j-12, & i \text{ ganjil}, j \text{ ganjil}, j\neq 1\\ 16nk+4n+4i-4j-4, & i \text{ ganjil}, j \text{ genap}, j\neq n\\ (16k-4)n+4i-4, & i \text{ ganjil}, j=n\\ 16nk-4i, & i \text{ genap}, j=1\\ 16nk-4i+4n+4j-4, & i \text{ genap}, j \text{ ganjil}, j\neq 1\\ 16nk-4i+4j, & i \text{ genap}, j \text{ genap}, j\neq n\\ 16nk-4i+4, & i \text{ genap}, j\neq n\end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut merupakan bilangan genap. Hanya label simpul terisolasi yang mungkin. Sedangkan nilai $f(u_i^k) + f(u_j^1)$ bukan merupakan label simpul terisolasi. Maka, tidak ada busur anatara simpul u_i^k dan simpul u_j^1 untuk setiap i, j.

j. Tidak ada busur antara v_i dengan simpul-simpul terisolasi

Bagian ini akan dibuktikan tidak ada busur anatara v_i dengan simpul w_a untuk $a = 1, 2, 3$.

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(w_a)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(v_i) + f(w_a) = \begin{cases} 8n - 4i + 51, & i \text{ ganjil}, a = 1 \\ 4n + 4i + 43, & i \text{ genap}, a = 1 \\ 8n - 4i + 59, & i \text{ ganjil}, a = 2 \\ 4n + 4i + 51, & i \text{ genap}, a = 2 \\ 12n - 4i + 51, & i \text{ ganjil}, a = 3 \\ 8n + 4i + 43, & i \text{ ganjil}, a = 3 \end{cases}.$$

Semua kemungkinan hasil penjumlahan kedua simpul tersebut merupakan bilangan ganjil dan tidak bergantung pada k, maka, label-label simpul pada graf korona yang mungkin adalah.

label simpul lingkaran

$$f(v_i) = \begin{cases} 4(n - i) + 21, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4(i - 1) + 17, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

label simpul daun untuk $k = 1$

$$f(u_i^1) = \begin{cases} 13, & \text{untuk } i = 1 \\ 4(n + i) + 9, & \text{untuk } i = 3, 5, 7, \dots, n - 1 \\ 4(2n - i) + 17, & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, n - 2 \\ 17, & \text{untuk } i = n \end{cases}.$$

Terlihat bahwa semua kemungkinan $f(v_i) + f(w_a)$ bukan merupakan label simpul pada graf korona, maka, tidak ada busur yang mungkin terbentuk antara v_i dan w_a untuk $a = 1, 2, 3$.

Pada bagian selanjutnya akan dibuktikan untuk $a = 4, 5, \dots, r + 2$.

Jumlah dari label $f(v_i)$ dan $f(w_a)$ yang mungkin adalah sebagai berikut

$$f(v_i) + f(w_a) = \begin{cases} 4n - 4i + 16k + 21, & i \text{ ganjil}, a = 4, 5, \dots, r + 2 \\ 4i + 16nk + 13, & i \text{ genap}, a = 4, 5, \dots, r + 2 \end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut merupakan bilangan ganjil dan bergantung pada k. Label simpul yang mungkin terjadi adalah label simpul daun untuk $k \geq 2$. Sedangkan nilai $f(v_i) + f(w_a)$ bukan merupakan label dari simpul daun untuk $k \geq 2$, maka, tidak ada busur tambahan antara v_i dengan simpul-simpul terisolasi w_a untuk $a = 4, 5, \dots, r + 2$.

Kedua bagian tersebut menunjukkan bahwa tidak ada busur yang terbentuk antara v_i dengan simpul-simpul terisolasi.

k. Tidak ada busur tambahan antara u_i^1 dengan simpul-simpul terisolasi

Bagian ini akan dibuktikan tidak ada busur tambahan antara u_i^1 dengan simpul-simpul terisolasi w_a untuk $a = 1, 2, 3$.

Jumlah dari label $f(u_i^1)$ dan $f(w_a)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(u_i^1) + f(w_a) = \begin{cases} 4n + 43, & i = 1, a = 1 \\ 8n + i + 39, & i = 3, 5, \dots, n-1, a = 1 \\ 12n - 4i + 47, & i = 2, 4, \dots, n-2, a = 1 \\ 4n + 47, & i = n, a = 1 \\ 4n + 51, & i = 1, a = 2 \\ 8n + 4i + 47, & i = 3, 5, \dots, n-1, a = 2 \\ 12n - 4i + 55, & i = 2, 4, \dots, n-2, a = 2 \\ 4n + 55, & i = n, a = 2 \\ 8n + 43, & i = 1, a = 3 \\ 12n + i + 39, & i = 3, 5, \dots, n-1, a = 3 \\ 16n - 4i + 47, & i = 2, 4, \dots, n-2, a = 3 \\ 8n + 47, & i = n, a = 3 \end{cases}.$$

Semua kemungkinan hasil penjumlahan label kedua simpul tersebut merupakan bilangan ganjil dan tidak bergantung pada k, maka label-label simpul yang mungkin adalah

label simpul lingkaran

$$f(v_i) = \begin{cases} 4(n-i) + 21, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4(i-1) + 17, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

label simpul daun untuk $k = 1$

$$f(u_i^1) = \begin{cases} 13, & \text{untuk } i = 1 \\ 4(n+i) + 9, & \text{untuk } i = 3, 5, 7, \dots, n-1 \\ 4(2n-i) + 17, & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, n-2 \\ 17, & \text{untuk } i = n \end{cases}.$$

Terlihat bahwa semua kemungkinan $f(u_i^1) + f(w_a)$ bukan merupakan label simpul pada graf korona. Maka, tidak ada busur yang mungkin terbentuk antara u_i^1 dan w_a untuk $a = 1, 2, 3$.

Pada bagian selanjutnya akan dibuktikan untuk $a = 4, 5, \dots, r + 2$.

Jumlah dari label $f(u_i^1)$ dan $f(w_a)$ yang mungkin adalah sebagai berikut

$$f(u_i^1) + f(w_a) = \begin{cases} 13 + 16nk, & i = 1, a = 4, 5, \dots, r+2 \\ 4(n(1+4k)+i)+9, & i = \text{ganjil}, a = 4, 5, \dots, r+2 \\ 4(2n(1+2k)-i)+17, & i = \text{genap}, a = 4, 5, \dots, r+2 \\ 17 + 16nk, & i = n, a = 4, 5, \dots, r+2 \end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut merupakan bilangan ganjil dan bergantung pada k. Label simpul yang mungkin terjadi adalah label simpul daun untuk $k \geq 2$. Sedangkan nilai $f(v_i) + f(w_a)$ bukan merupakan label dari simpul daun untuk $k \geq 2$, maka, tidak ada busur tambahan antara u_i^1 dengan simpul-simpul terisolasi $w_a$untuk $a = 4, 5, \dots, r+2$.

Kedua bagian tersebut memperlihatkan bahwa tidak ada busur tambahan antara u_i^1 dengan simpul-simpul terisolasi.

l. Tidak ada busur tambahan antara u_i^k dengan simpul-simpul terisolasi

Jumlah dari label $f(u_i^k)$ dan $f(w_a)$ yang mungkin adalah sebagai berikut

$$f(u_i^k) + f(w_a) = \begin{cases} 16nk + 4i + 9, & i \text{ ganjil}, a = 1 \\ 16nk + 4i + 17, & i \text{ ganjil}, a = 2 \\ 16nk + 4n + 4i + 9, & i \text{ ganjil}, a = 3 \\ 32nk - 4n + 4i - 21, & i \text{ ganjil}, a = 4, 5, \dots, r-2 \\ 16nk + 4n - 4i + 17, & i \text{ genap}, a = 1 \\ 16nk + 4n - 4i + 25, & i \text{ genap}, a = 2 \\ 16nk + 8n - 4i + 17, & i \text{ genap}, a = 3 \\ 32nk - 4i - 13, & i \text{ genap}, a = 4,5, \dots, r-2 \end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut merupakan bilangan ganjil. Label simpul yang mungkin terjadi adalah label simpul lingkaran dan simpul daun. Sedangkan nilai $f\left(u_i^k\right) + f(w_a)$ bukan merupakan label dari simpul lingkaran maupun simpul daun. Maka, tidak ada busur tambahan antara u_i^k dengan simpul-simpul terisolasi.

m. Tidak ada busur antara simpul-simpul terisolasi

Bagian ini akan dibuktikan tidak ada busur tambahan antara w_a dan w_b untuk $a = 1, 2, 3$ dan $b = 1, 2, 3$.

Jumlah dari label $f(w_a)$ dan $f(w_b)$ untuk $a \neq b$ $(a = 1, 2, 3\ dan\ b = 1, 2, 3)$ yang mungkin, merupakan salah satu dari hasil berikut

$$f(w_a) + f(w_b) = \begin{cases} 8n + 68, & a = 1, b = 2 \\ 12n + 68, & a = 2, b = 3. \\ 12n + 60, & a = 1, b = 3 \end{cases}$$

Penjumlahan label simpul-simpul tersebut adalah bilangan genap dan tidak bergantung pada k. Oleh karena itu, hanya label dari simpul-simpul terisolasi untuk $a = 1, 2, 3$ yang mungkin sama dengan hasil penjumlahan label simpul-simpul tersebut. Label simpul terisolasi adalah $f(w_1) = 4n + 30$, $f(w_2) = 4n + 38$, dan $f(w_3) = 8n + 30$. Karena semua kemungkinan $f(w_a) + f(w_b)$ bukan merupakan salah satu dari label fungsi simpul terisolasi tersebut, maka tidak ada busur yang mungkin terbentuk antara simpul-simpul terisolasi untuk $a \neq b, a = 1, 2, 3$ dan $b = 1, 2, 3$.

Pada bagian selanjutnya akan dibuktikan untuk kasus $a = 4, 5, \dots, r + 2$. Jumlah dari label-label simpul yang mungkin antara w_a dan w_b untuk $a \neq b$ adalah sebagai berikut

$$f(w_a) + f(w_b) = \begin{cases} 16nk + 4n + 30, & a = 4, 5, \dots, r + 2, b = 1 \\ 16nk + 4n + 38, & a = 4, 5, \dots, r + 2, b = 2 \\ 16nk + 8n + 30, & a = 4, 5, \dots, r + 2, b = 3 \end{cases}.$$

Semua kemungkinan dari penjumlahan label simpul-simpul tersebut merupakan bilangan genap dan bergantung pada k, maka hanya label-label simpul terisolasi yang mungkin terjadi. Sedangkan, nilai $f(w_a) + f(w_b)$ bukan merupakan label simpul terisolasi, maka, tidak ada busur antara simpul terisolasi untuk kasus $a = 4, 5, \dots, r + 2$.

Kedua bagian tersebut memperlihatkan bahwa tidak ada busur tambahan antara simpul-simpul terisolasi.

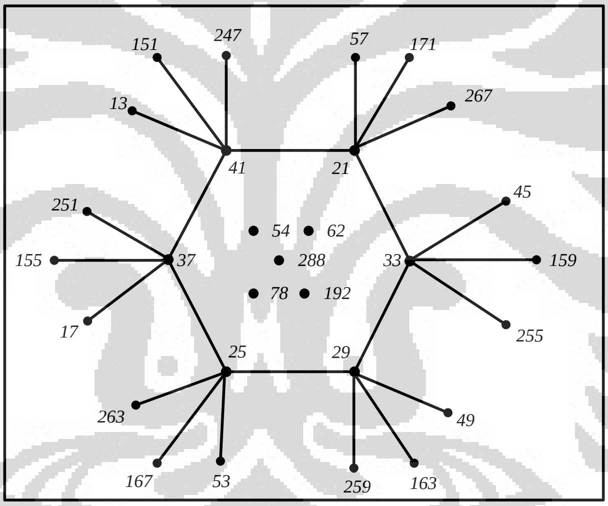
Berdasarkan langkah-langkah pembuktian tersebut, telah terbukti bahwa tidak ada busur tambahan yang terbuentuk untuk simpul

3. Akan ditunjukkan bahwa simpul terisolasi yang diperoleh telah optimal

   Jumlah simpul terisolasi yang diperoleh pada pelabelan jumlah eksklusif pada graf korona di atas sama dengan jumlah simpul terisolasi yang diperoleh pada pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari ditambah dengan $r - 1$, yaitu $3 + (r - 1) = 3 - 1 + r = 2 + r$. Berdasarkan hasil tersebut, diperoleh bahwa banyaknya simpul terisolasi adalah $2 + r$. Berdasarkan Lemma 3.3, $\varepsilon(C_n \odot \overline{K_r}) \geq 2 + r$, maka bilangan jumlah ekslusif yang diperoleh telah optimal.

Berdasarkan hasil pembuktian di atas, terbukti bahwa $\varepsilon(C_n \odot \overline{K_r}) = 2 + r$, n genap, dan $r \in N$. ■

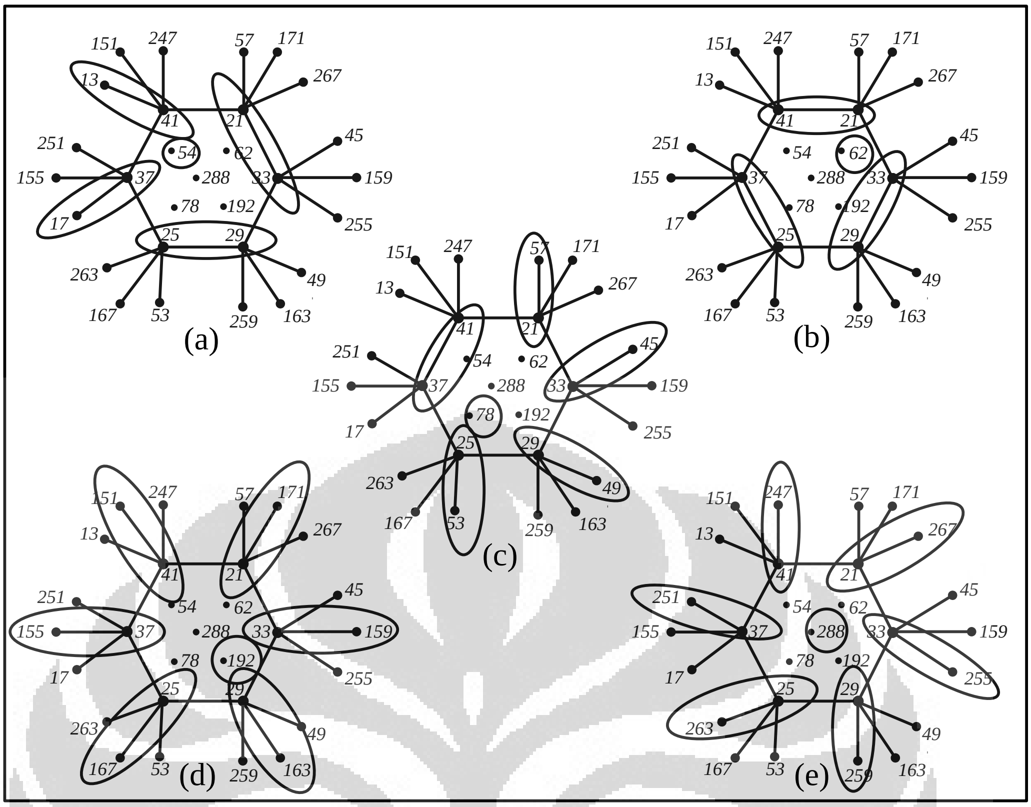
Pada Gambar 3.5 diberikan contoh pelabelan jumlah eksklusif pada graf $C_6 \odot \overline{K_3}$. Gambar 3.5 memperlihatkan pelabelan jumlah eksklusif pada graf $C_6 \odot \overline{K_3}$ menggunakan fungsi pelabelan jumlah eksklusif yang telah dibuktikan sebelumnya. Label simpul yang terlihat pada Gambar 3.5, merupakan hasil pemetaan simpul pada graf korona dengan pelabelan jumlah eksklusif yang telah dibuktikan sebelumnya. Berdasarkan Gambar 3.5 tersebut juga terlihat bahwa jumlah simpul terisolasi yang diperoleh sama dengan derajat maksimum pada graf $C_6 \odot \overline{K_3}$ $(\Delta(C_6 \odot \overline{K_3}) = \varepsilon(C_6 \odot \overline{K_3}) = 2 + 3 = 5)$.



Gambar 3.5 Pelabelan jumlah eksklusif pada graf $\boldsymbol{C_6 \odot \overline{K_3}}$

Gambar 3.6 menunjukkan bahwa pelabelan jumlah eksklusif yang telah diberikan pada Gambar 3.5 memenuhi aturan pelabelan jumlah eksklusif, dimana jumlah setiap label simpul yang bertetangga sama dengan label simpul terisolasi. Gambar 3.6 yang diberikan akan menunjukkan bahwa label dari simpul terisolasi merupakan jumlah label dari simpul yang bertetangga, serta jumlah simpul terisolasi yang didapatkan sama dengan derajat maksimum dari graf korona tersebut.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012



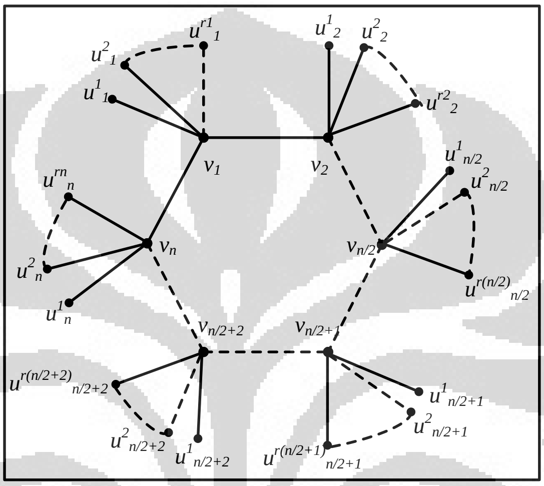
Gambar 3.6 Jumlah label simpul yang bertetangga pada graf $C_6 \odot \overline{K_3}$ sama dengan label dari simpul terisolasi

Seperti terlihat pada Gambar 3.6, label simpul terisolasi adalah 54, 62, 78, 192, dan 288. Jika dilihat pada bagian (a) ditunjukkan bahwa jumlah label simpul bertetangga yang ditandai sama dengan 54. Begitu juga pada bagian (b) jumlah label simpul-simpul yang ditandai sama dengan 62. Kemudian pada bagian (c) 78, (d) 192, dan (e) 288. Pada contoh ini telah terlihat bahwa aturan pelabelan jumlah eksklusif telah terpenuhi.

3.3. Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf *Hairycycle* dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap

Graf *hairycycle* merupakan graf yang dapat dibentuk dengan menghubungkan sejumlah r_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ simpul berderajat satu pada setiap simpul dari graf lingkaran C_n dan dapat dinotasikan dengan $HC(n; r_i, i = 1, 2, \dots, n)$. Pelabelan yang akan dibahas pada subbab ini hanya terbatas pada graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran genap (n genap) dan r_i anggota bilangan asli.

Simpul graf *hairycycle* terdiri dari himpunan simpul lingkaran dan himpunan simpul daun, yaitu $V = \{v_i | 1 \le i \le n\} \cup \{u_i^k | 1 \le i \le n, 1 \le k \le r_i\}$ dengan $E = \{v_i u_i^k | 1 \le i \le n, 1 \le k \le r\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \le i \le n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$. Simpul yang dilambangkan dengan v_i merupakan simpul lingkaran ke-i dan simpul yang dilambangkan dengan u_i^k merupakan simpul daun ke-k pada simpul lingkaran ke-i. Pada Gambar 3.8 akan diberikan gambaran bentuk umum dari graf *hairycycle* dan penamaan simpulnya.

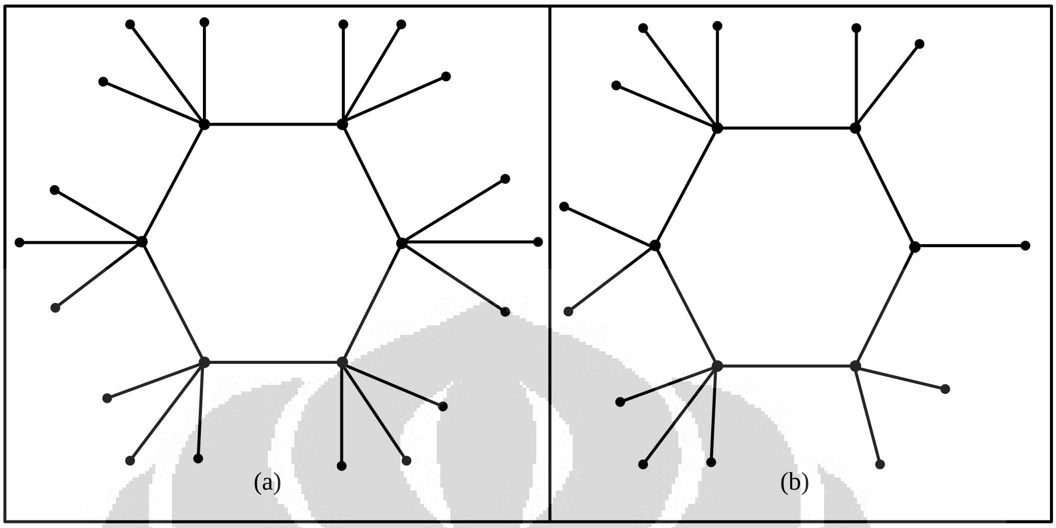


Gambar 3.7 Penamaan simpul pada graf *hairycycle* $\boldsymbol{HC(n; r_i, i = 1, 2, \ldots, n)}$

Graf *hairycycle* juga dapat diperoleh dengan melakukan penghapusan pada graf korona terhadap sejumlah simpul daun beserta busur yang hadir pada simpul daun tersebut. Untuk mendapatkan graf *hairycycle* $HC(n; r_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ dilakukan penghapusan simpul daun beserta busur yang hadir pada simpul daun tersebut pada graf korona $C_n \odot \overline{K_{r_{max}}}$, dengan $r_{max} = \max\{r_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$, sebanyak $r_{max} - r_i$, sehingga diperoleh graf *hairycycle* yang diinginkan. Berikut akan diberikan ilustrasi untuk mendapatkan graf *hairycycle* $HC(6; 3, 2, 1, 2, 3, 2)$ $(r_{max} = 3)$ dari graf korona $C_6 \odot \overline{K_3}$. Gambar 3.8 memperlihatkan graf korona $C_6 \odot \overline{K_3}$ dan graf *hairycycle* $HC(6; 3, 2, 1, 2, 3, 2)$. Setiap penghapusan dilakukan pada graf $C_6 \odot \overline{K_3}$ sebanyak $3 - r_i$ simpul daun berseta busur yang hadir pada simpul daun tersebut. Jadi, dilakukan penghapusan $0, 1, 2, 1, 0, 1$ simpul daun beserta busur yang hadir pada simpul daun yang dihapus, berurut pada simpul

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

daun yang terletak di simpul lingkaran $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ sehingga diperoleh graf $HC(6; 3, 2, 1, 2, 3, 2)$.



(a) (b)

Gambar 3.8 (a) Graf $\boldsymbol{C_6 \odot \overline{K_3}}$ (b) Graf $\boldsymbol{HC(6; 3, 2, 1, 2, 3, 2)}$

Pelabelan jumlah eksklusif yang dilakukan pada graf *hairycycle* juga menggunakan ide yang sama dengan penjelasan sebelumnya. Pelabelan dilakukan terhadap graf korona $C_n \odot \overline{K_{r_{max}}}$ sesuai dengan pelabelan pada Teorema 3.4, kemudian dilakuakn penghapusan sebanyak $r_{max} - r_i$ simpul daun beserta busur yang hadir pada simpul tersebut berikut label yang telah hadir padanya sampai mendapatkan graf *hairycycle* $HC(n; r_i, i = 1, 2, \ldots, n)$. Hasil penghapusan tersebut akan menghasilkan graf *hairycycle* yang telah terlabel.

Selanjutnya akan dilakukan pembatasan terhadap bilangan jumlah yang dicari. Tuga, dkk. (2005) menyatakan bahwa, misalkan $\Delta(G)$ menyatakan derajat tertinggi simpul-simpul pada graf G, maka $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$. Derajat simpul tertinggi dari graf *hairycycle* dengan jumlah simpul lingkaran n dan jumlah simpul daun pada simpul lingkaran ke-i sebanyak r_i dinotasikan dengan $\Delta(HC(n; r_i, i = 1, 2, \ldots, n))$. Diketahui $\Delta\big(HC(n; r_i, i = 1, 2, \ldots, n)\big) = 2 + r_{max}$, dengan $r_{max} = \max\{r_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$. Berdasarkan dua hasil tersebut, agar bilangan jumlah ekskulsif pada graf *hairycycle* optimal, harus diperoleh bilangan jumlah eksklusif yang sama dengan derajat maksimum dari graf *hairycyle*. Akibat 3.3 akan memperlihatkan bahwa telah didapatkan bilangan jumlah eksklusif untuk graf *hairycycle* yang optimal.

Akibat 3.5 $\varepsilon\big(HC(n; r_i, i = 1, 2, \dots, n)\big) = 2 + r_{max}$, dengan n genap, $r_{max} = \max\{r_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, dimana r_i menyatakan banyaknya simpul daun yang terhubung pada simpul lingkaran ke-i.

Bukti.

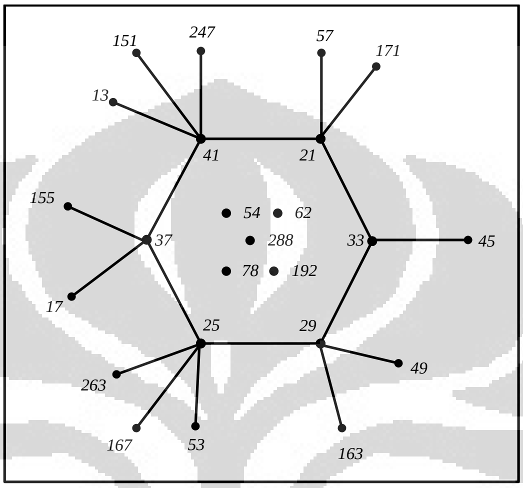
Pembuktian Akibat 3.5 mengikuti alur yang diberikan pada Algoritma 3.6.

Algoritma 3.1

1. Ambil $r_{max} = \max\{r_i | i = 1, 2, \dots, n\}$.
2. Label graf korona $C_n \odot \overline{K_{r_{max}}}$ menggunakan pelabelan jumlah eksklusif pada Teorema 3.4.
3. Untuk $i = 1, 2, \dots, n$, hapus $r_{max} - r_i$ simpul daun dan busur yang hadir pada simpul daun tersebut beserta label pada simpul tersebut.

Setelah melakukan Algoritma 3.6, akan dihasilkan graf *hairycycle* yang telah terlabel secara eksklusif. Berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh $\varepsilon\big(C_n \odot \overline{K_{r_{max}}}\big) = 2 + r_{max}$. Karena pelabelan graf *hairycycle* tersebut menggunakan pelabelan jumlah eksklusif pada graf $C_n \odot \overline{K_{r_{max}}}$, maka bilangan jumlah yang untuk graf *hairycycle* akan sama dengan graf $C_n \odot \overline{K_{r_{max}}}$, $\varepsilon\big(HC(n; r_i, i = 1, 2, \dots, n)\big) = 2 + r_{max} = \Delta\big(C_n \odot \overline{K_{r_{max}}}\big)$. Penghapusan simpul daun beserta busurnya pada Algoritma 3.1 tidak merubah derajat maksimum dari graf tersebut Bilangan jumlah yang diperoleh telah optimal. Karena $\varepsilon\big(HC(n; r_i, i = 1, 2, \dots, n)\big) = \Delta\big(HC(n; r_i, i = 1, 2, \dots, n)\big)$, bilangan jumlah eksklusif yang diperoleh telah optimal. ■

Pada Gambar 3.9 diberikan contoh pelabelan jumlah eksklusif pada graf *hairycycle* $HC(6; 3, 2, 1, 2, 3, 2)$. Gambar 3.9 memperlihatkan pelabelan jumlah eksklusif pada graf $HC(6; 3, 2, 1, 2, 3, 2)$. Pelabelan tersebut dilakukan dengan menentukan r_{max} dari graf $HC(6; 3, 2, 1, 2, 3, 2)$, yaitu 3. Kemudian label graf $C_n \odot \overline{K_{r_{max}}}$ yang sesuai ($\boldsymbol{C_6 \odot \overline{K_3}}$) berdasarkan aturan graf korona pada Teorema 3.4. Salanjutnya, simpul daun dan busur yang hadir pada simpul daun tersebut dihapus sebanyak $r - r_i$, sedemikian sehingga graf yang dihasilkan sesuai dengan graf *hairycycle* yang dimaksud $\big(HC(6; 3, 2, 1, 2, 3, 2)\big)$. Hasilnya akan sama dengan yang terlihat pada Gambar 3.9. Pada Gambar 3.9 juga terlihat bahwa jumlah simpul terisolasi yang diperoleh sama dengan derajat maksimum $\left(\varepsilon\left(HC(6;3,2,1,2,3,2)\right) = \Delta\left(HC(6;3,2,1,2,3,2)\right) = 2 + r_{max} = 2 + 3 = 5\right)$. Hal ini mengindikasikan bahwa bilangan jumlah eksklusifnya telah optimum. Penghapusan terhadap simpul dan busur dapat dilakukan sembarang.

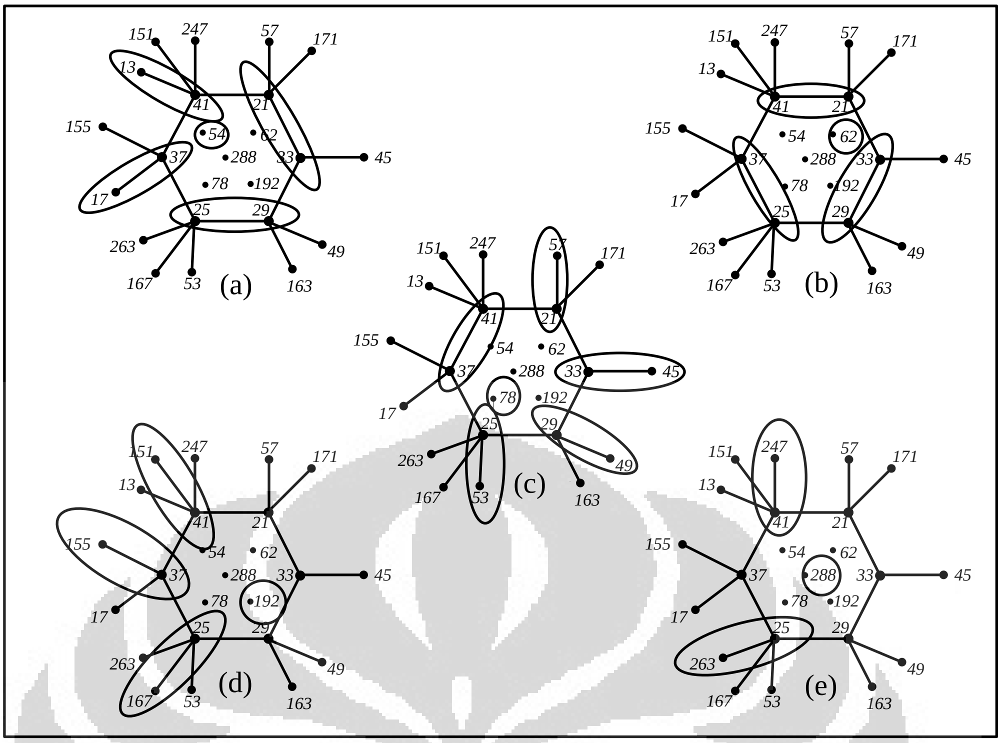


Gambar 3.9 Pelabelan jumlah eksklusif pada graf $\boldsymbol{HC}(\mathbf{6};\mathbf{3},\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{2})$

Contoh pada gambar 3.10 ditunjukkan pelabelan jumlah eksklusif pada Gambar 3.9 telah memenuhi aturan pelabelan jumlah eksklusif. Gambar 3.10 memperlihatkan bahwa jumlah label dari setiap simpul-simpul yang bertetangga akan sama dengan label dari simpul terisolasi.

Gambar 3.10 menunjukkan bahwa jumlah simpul terisolasi yang didapat sama dengan derajat maksimum simpul tersebut $\Delta\left(HC(6;3,2,1,2,3,2)\right) = \varepsilon\left(HC(6;3,2,1,2,3,2)\right) = 5$. Sama seperti pada subbab yang menjelaskan pelabelan jumlah eksklusif pada graf korona. Pada Gambar 3.10 label dari simpul-simpul terisolasi adalah 54, 62, 78, 192 dan 288. Pada bagian (a) ditunjukkan bahwa jumlah label simpul bertetangga yang ditandai sama dengan 54. Begitu juga pada bagian (b) jumlah label simpul-simpul yang ditandai sama dengan 62. Kemudian pada bagian (c) 78, (d) 192, dan (e) 288. Pada contoh ini telah terlihat bahwa aturan pelabelan jumlah eksklusif telah terpenuhi.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012



Gambar 3.10 Jumlah label simpul bertetangga pada graf $\boldsymbol{HC}(\mathbf{6}; \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2})$ sama dengan label simpul terisolasi

Bab selanjutnya diberikan rangkuman hasil-hasil penelitian yang diperoleh dan telah dipaparkan pada Bab 3.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

BAB 4
KESIMPULAN

Pada skripsi ini telah diberikan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif pada graf matahari, graf korona dan graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran genap untuk mendapatkan bilangan jumlah eksklusif yang optimal. Jumlah simpul terisolasi terkecil yang dibutuhkan pada kontruksi pelabelan jumlah eksklusif yang telah dijelaskan sama dengan derajat maksimum pada graf tersebut. Tabel 4.1 menunjukkan bilangan jumlah eksklusif dari graf yang telah diteliti.

Tabel 4.1 Hasil penelitian

Jenis Graf	Bilangan Jumlah Eksklusif
Graf Matahari $\left(C_n \odot \overline{K_1}\right)$	$\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_1}\right) = 3$ untuk n genap
Graf Korona $\left(C_n \odot \overline{K_r}\right)$	$\varepsilon\left(C_n \odot \overline{K_r}\right) = 2 + r$ untuk n genap, $r \in N$
Graf *Hairycycle* $\left(HC(n; r_i, i = 1,2, \dots, n)\right)$	$\varepsilon\left(HC(n; r_i, i = 1,2, \dots, n)\right) = 2 + r_{max}$ untuk n genap, $r_i \in N$, $r_{max} = \max\{r_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$

Penelitian lebih lanjut mengenai pelabelan jumlah eksklusif masih dapat terus dilakukan untuk beberapa masalah terbuka berikut

Masalah terbuka 1. Temukan bilangan jumlah eksklusif untuk graf korona (termasuk graf matahari) dengan banyak simpul lingkaran ganjil.

Masalah terbuka 2. Temukan bilangan jumlah eksklusif untuk graf *hairycycle* dengan banyak simpul lingkaran ganjil.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

DAFTAR PUSTAKA

Baca, M., dan Miller, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs*. Florida: BrownWalker Press.

Bondy, J. A. dan Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory* (*Graduate Texts in Mathematics*). New York: Springer.

Chartrand, G., Lesniak, L., Ping, Z. (2011). *Graph & Digraph* (5th ed.). Boca Raton: CRC Press.

Connaway, L. S. dan Powell, R. R. (2010). *Basic Research Method for Librarians*. California: Greenwood Publishing Group.

Hartsfield, N. dan Ringel, G. (2003). *Pearls in Graph Theory*. New York: Dover.

Haryono, M. (2012). Pelabelan Jumlah Eksklusif Pada Graf Tangga, Gabungan Graf Tangga, dan Graf Kaki Seribu. *Tesis S2.* Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Indonesia, Depok.

Marcus, D. A. (2008). *Graph Theory: A Problem Oriented Approach.* New York: MAA Textbooks.

Miller, M., Ryan, J., Slamin, Sugeng, K. A., dan Tuga, M. (2003). Open Problem in Exclusive Sum Labeling. *Proc. of the 13th Australian Workshop on Combinatorial algorithms* (*AWOCA*). Seoul, Korea Selatan.

Rosen, K. H. (2007). *Discrete Mathematics and Its Apilcations* (6th ed.). New York: McGraw-Hill.

Sanjaya, D., John, P., dan Haryono, M. (2011). Pelabelan Jumlah Eksklusif Pada Graf Tangga L_n. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, FMIPA UNY.* 299-302.

Singh, G. S. (2010). *Graph Theory*. New Delhi: PHI Learning.

Tuga, M., Miller, M., Ryan, J., dan Ryjáček, Z. (2005). Exclusive Sum Labeling of Trees. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55, 109-121.

Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. New York: *Birkhäuser Boston.*

Wang H. dan Li P. (2010). Some Result on Exclusive Sum Graphs. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 34, 343-351.

Pelabelan jumlah..., Arief Addinnitya, FMIPA UI, 2012

Wilson, R. J. dan Watkins, J. J. (1990). *Graph An Introductory Aproach.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Yero, I. G., Kuziak, D., dan Velazquez, J. A. R. (2010). On The Metric Dimension of Corona Product Graphs. *arXiv.org.* Maret 9, 2011. http://arxiv.org/abs/1009.2586