UNIVERSITAS INDONESIA

PEMODELAN SISTEM TARIF BERDASARKAN *ZONE* PADA TRANSPORTASI UMUM

SKRIPSI

ANDY WARTA SAPUTRA
0806325384

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PEMODELAN SISTEM TARIF BERDASARKAN *ZONE*

PADA TRANSPORTASI UMUM

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

ANDY WARTA SAPUTRA
0806325384

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK

JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Andy Warta Saputra
NPM	: 0806325384
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 14 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Andy Warta Saputra
NPM	: 0806325384
Program Studi	: Sarjana Matematika
Judul Skripsi	: Pemodelan Sistem Tarif Berdasarkan *Zone* pada Transportasi Umum

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom	( )
Penguji	: Dr. Kiki Ariyanti Sugeng	( )
Penguji	: Dr. Hengki Tasman	( )
Penguji	: Alhadi Bustamam, PhD	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 14 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana SainsJurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada

(1) Bapak dan Ibu dari penulis yang telah membesarkan penulis hingga saat ini dan selalu memberikan dukungan atas apa yang penulis lakukan.
(2) Ilham Muharam dan Faisal Akhirudin, adik penulis.
(3) Ibu Dr. Sri Mardiyati, M.kom selaku pembimbing penulis, yang telah memberikan banyak ilmu bermanfaat kepada penulis dalam penulisan skripsi ini
(4) Seluruh dosen Departemen Matematika UI yang telah memberikan penulis ilmu yang bermanfaat untuk masa depan penulis.
(5) Kak Ajat, Hendri, dan Maimun yang sudah membantu penulis selama penulisan skripsi ini.
(6) Adi, Bowo, Andy, Arief, Umbu, Hendri, Ade, dan semua teman- teman seperjuangan.
(7) Seluruh teman-teman angkatan 2008 yang telah memberikan pengalaman per-kuliahan yang tak terlupakan.
(8) Angkatan 2007, 2009, 2010, 2011

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurang-an dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, Juni 2012

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI

TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Andy Warta Saputra
NPM	: 0806325384
Program Studi	: S1 Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Pemodelan Sistem Tarif Berdasarkan *Zone* pada Transportasi Umum

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.
Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 14 Juni 2012
Yang menyatakan

(Andy Warta Saputra)

ABSTRAK

Nama : Andy Warta Saputra
Program Studi : Matematika
Judul : Pemodelan Sistem Tarif Berdasarkan *Zone* pada Transportasi Umum

Sistem transportasi umum terdiri dari halte- halte dan jalur yang menghubungkan antar halte- halte tersebut secara langsung. Saat ini, terdapat banyak permasalahan pada transportasi umum, dimana salah satu permasalahan tersebut adalah permasalahan tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang. Penentuan tarif yang harus dibayarkan oleh seorang penumpang akan tergantung dari jumlah halte yang dilewati dalam perjalanannya. Pada tugas akhir ini akan dibahas sistem tarif berdasarkan *zone*, dimana *zone*- *zone* tersebut terdiri dari beberapa halte yang digambarkan dalam bentuk graf dan diasumsikan telah tersedia.

Kata Kunci : graf, tarif, transportasi umum, *zone*

xii + 49 halaman; 9 gambar; 2 tabel

Daftar pustaka : 9 (1980 - 2009)

ABSTRACT

Name : Andy Warta Saputra
Program Study : Mathematics
Title : The Design of *Zone* Tariff Systems in Public Transportation

A public transportation system is represented by the stops and the direct connections between them. Nowadays, there are many problems in public transportion, where one of these problems is the fares that should be paid by the passengers. Determination of the fares paid by a passenger will depend on the number of stops passed by his journey. On this final assignment, the *zone* tariff system, where the *zone*s consist of some stops will be discussed. The *zone* system can be represented by a graph and is assumed that the *zone*s already exists.

Keyword : graph, public transportation, tariff, *zone*

xii + 49 pages ; 9 pictures; 2 tables

Bibliography : 9 (1980 - 2009)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang masalah

Pada kesehariannya, manusia pasti pernah menggunakan jasa transportasi umum seperti bus dan kereta api. Untuk menggunakan jasa transportasi umum tersebut para penumpang diharuskan membayar sejumlah biaya untuk setiap perjalanan yang akan dilakukannya. Tarif yang harus dibayar oleh para penumpang tersebut akan tergantung dari sistem tarif apa yang digunakan oleh pihak perusahaan transportasi umum. Menurut Anita Schobel dan Hamacher (2004), terdapat tiga buah sistem tarif yang sering digunakan oleh perusahaan transportasi umum, yaitu sistem tarif berdasarkan jarak, sistem tarif tetap, dan sistem tarif berdasarkan *zone*. Sistem tarif berdasarkan jarak itu sendiri adalah sistem dimana penetapan tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang akan tergantung pada jarak yang ditempuhnya. Sedangkan sistem tarif tetap adalah sistem dimana penetapan tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang adalah sama untuk setiap perjalanan, tidak tergantung pada jarak yang ditempuhnya. Di Jakarta, salah satu perusahaan yang menggunakan sistem tarif berdasarkan jarak adalah pengelola jenis angkutan umum seperti taksi, dimana ongkos yang dibayarkan penumpang akan sesuai dengan jarak yang ditempuhnya. Sedangkan untuk pengelola jenis angkutan umum seperti Trans Jakarta menggunakan sistem tarif tetap, dimana penumpang akan membayarkan tarif yang sama untuk setiap perjalanannya. Kemudian di kota lain di luar Indonesia seperti San Francisco di California dan Saarland di Jerman terdapat sistem tarif berdasarkan *zone*, yaitu gabungan dari sistem tarif berdasarkan jarak dengan sistem tarif tetap.

Untuk menggunakan sistem tarif berdasarkan *zone*, halte- halte yang ada di sistem harus dibagi ke dalam *zone*- *zone* terlebih dahulu. Kemudian, penentuan tarif yang harus dibayarkan oleh para penumpang hanya akan tergantung pada *zone* pemberangkatan dan *zone* pemberhentiannya saja. Dengan demikian, tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang akan tergantung dari berapa banyak *zone* yang dilewati untuk sekali perjalanan, sehingga untuk setiap perjalanan yang melewati jumlah *zone* yang sama maka ongkos yang harus dibayarkan penumpang juga harus sama.

Ketika sebuah perusahaan transportasi umum ingin mengubah sistem tarif yang mereka pakai sekarang menjadi sistem tarif berdasarkan *zone*, maka mereka harus membuat model dari *zone*- *zone*nya dan model untuk menetapkan tarif yang baru (tarif berdasarkan *zone*) sedemikian sehingga baik perusahaan transportasi umum maupun penumpang tidak ada yang terlalu dirugikan.

Dengan mengubah sistem tarif yang digunakan saat ini menjadi sistem tarif secara *zone*, pihak perusahaan transportasi umum harus mencari pemodelan yang tepat dari tarif baru yang menggunakan sistem *zone*, dengan asumsi *zone*nya sudah ditetapkan terlebih dahulu.

1.2 PerumusanMasalah dan Ruang Lingkup

Perumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana memodelkan tarif pada sistem tarif transportasi umum berdasarkan *zone*. Sedangkan pembatasan masalah ini adalah:

1. Transportasi umum yang dibahas adalah transportasi umum yang beroperasi dalam lingkup kota
2. Jenis transportasi umum yang digunakan adalah bus
3. Penumpang hanya boleh naik atau turun kendaraan umum pada halte yang ada
4. *Zone* sudah ditentukan terlebih dahulu

1.3 Jenis dan Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah mempelajari pemodelan tarif dari sistem tarif transportasi umum berdasarkan *zone*

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas mengenai teori pemodelan yang akan menjadi dasar dibuatnya model penjadwalan bus dan pengemudi dalam sistem transportasi perkotaan. Setelah itu dibahas juga mengenai teori graf dan penerapan dari turunan yang nantinya digunakan pada pembahasan selanjutnya

Pemodelan matematis adalah suatu model pendekatan yang mencoba menghubungkan kehidupan dunia nyata dengan bahasa matematis. Pemodelan matematis banyak digunakan dalam berbagai bidang ilmu, seperti fisika, biologi, dan ilmu sosial. Ilmu matematika yang digunakan dalam pemodelan matematis antara lain kalkulus, aljabar, geometri dan lain-lain.

Sebelum pembahasan mengenai pemodelan matematis terlebih dahulu akan diberikan definisi mengenai kata "model" yang dipakai pada tugas akhir ini.

Definisi 2.1 Model adalah suatu obyek atau konsep yang digunakan untuk merepresentasikan sesuatu.
Hal yang ingin dimodelkan tersebut diperkecil atau dikonversikan ke dalam bentuk yang lebih komprehensif.
(Meyer, 1985)

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat berbagai macam pemodelan, misalnya: pemodelan bumi menjadi peta, gedung menjadi maket, dan lain-lain. Pada tugas akhir ini pemodelan yang dipakai adalah pemodelan matematis, untuk itu didefinisikan pemodelan matematis.

Definisi 2.2 Suatu model matematika adalah suatu model yang bagian-bagiannya mengacu kepada konsep matematis, seperti : konstanta, variabel, persamaan, pertidaksamaan, dan lain-lain.
(Meyer, 1985)

2.1 Langkah-langkah dalam membuat model matematis (Meyer 1985)

Terdapat 3 langkah untuk membuat suatu pemodelan matematis, yaitu: formulasi, manipulasi matematis, dan evaluasi.

2.1.1 Formulasi

1. Formulasi dimulai dengan menyatakan suatu pertanyaan yang biasanya adalah ketidakjelasan atau permasalahan yang terlalu besar. Jika permasalahannya tidak jelas, ubah sebisa mungkin agar menjadi jelas, jika permasalahan terlalu besar maka ubah menjadi beberapa bagian yang bisa dikerjakan.

2. Berikutnya yang harus dilakukan adalah mengidentifikasi faktor-faktor mana saja yang penting dalam permasalahan untuk dimodelkan.

3. Deskripsikanlah hal-hal yang penting tersebut ke dalam deskripsi matematika yang sesuai (variabel, persamaan, dan lain-lain).

2.1.2 Manipulasi matematis

Formulasi matematis yang diberikan diatas biasanya tidak akan langsung menghasilkan jawaban yang diinginkan. Untuk mendapatkan jawaban yang diinginkan harus dilakukan proses manipulasi matematis. Manipulasi ini biasa dilakukan dengan cara menyelesaikan persamaan, pertidaksamaan atau apapun tergantung formulanya.

2.1.3 Evaluasi

Terakhir adalah pengevaluasian terhadap model apakah model tersebut sudah memberikan hasil yang akurat atau tidak. Sebagai contoh mungkin saja terdapat suatu hubungan antara beberapa variabel yang ternyata jauh lebih penting dari apa yang diduga sebelumnya.

Setelah membahas mengenai pemodelan berikutnya diberikan pembahasan mengenai optimisasi.

2.2. Masalah Optimisasi

Pemodelan matematis biasanya digunakan untuk membantu membuat suatu keputusan. Ketika model matematika digunakan untuk memperoleh alternatif yang terbaik dari beberapa alternatif lain yang ada, maka hal tersebut dapat dikatakan sebagai sebuah permasalahan optimisasi.

Dalam pemodelan matematis digunakan dua istilah yang penting yaitu daerah layak dan fungsi obyektif.

Definisi 2.3 Daerah layak adalah daerah yang didalamnya berisi kemungkinan-kemungkinan yang mungkin dipilih.

(Meyer, 1985)

Definisi 2.4 Fungsi obyektif adalah fungsi yang memberikan nilai kepada semua anggota yang berada didalam daerah layak sedemikian sehingga nilai dari masing-masing anggota daerah layak dapat diukur.

(Meyer, 1985)

2.3. Teori Graf

Dalam pembahasan sistem transportasi, sistem ini dapat digambarkan dalam bentuk graf dengan pengetahuan dasar yang akan dibahas berikut ini.

Definisi 2.5 Sebuah graf sederhana $G = (V, E)$ adalah koleksi dari dua buah himpunan tak kosong $V = \{v_1, v_2, \dots ..\}$ yang disebut dengan simpul dan himpunan $E = \{e_1, e_2, \dots .\}$ yang elemennya disebut busur, sedemikian sehingga untuk setiap busur e_k merupakan penghubung dari pasangan simpul (v_i, v_j).

(Deo, 1980)

Sebuah graf ada yang tidak memiliki arah dan ada yang memiliki arah. Pada graf yang tidak memiliki arah, pasangan simpul (v_i, v_j) sama dengan pasangan simpul (v_j, v_i), sedangkan pada graf yang memiliki arah, pasangan simpul (v_i, v_j) tidak sama dengan pasangan simpul (v_j, v_i). Kemudian untuk selanjutnya dibahas mengenai graf yang memiliki arah.

Definisi 2.6 Sebuah graf berarah $G = (V, E)$ adalah graf G yang mengandung himpunan tak kosong busur $V = \{v_1, v_2, \dots\dots\}$, himpunan busur $E = \{e_1, e_2, \dots.\}$, dan sebuah pemetaan Ψ yang memetakan setiap busur pada pasangan simpul (v_i, v_j).

(Deo, 1980)

2.4 Penerapan Turunan

Salah satu penerapan dari turunan suatu fungsi adalah untuk menemukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi tersebut. Untuk selanjutnya akan dibahas mengenai bagaimana menemukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi satu variabel.

2.4.1 Maksimum dan Minimum

Definisi 2.8 Misalkan S merupakan suatu daerah asal dari fungsi f yang mengandung titik c. Dapat dikatakan bahwa:

i. $f(c)$ merupakan nilai maksimum f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap x pada S.
ii. $f(c)$ merupakan nilai minimum f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap x pada S.
iii. $f(c)$ merupakan nilai ekstrim f pada S jika ia merupakan nilai maksimum atau nilai minimum.
iv. Fungsi yang ingin diminimumkan atau dimaksimumkan disebut fungsi objektif.

(Purcell, Varberg, & Rigdon, 2003)

Teorema 2.1 Jika fungsi f kontinu pada selang tutup $[a, b]$, maka fungsi f akan mencapai nilai maksimum dan minimum pada selang tutup tersebut.

(Purcell, Varberg, & Rigdon, 2003)

Teorema 2.2 Jika f terdefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah berupa titik kritis, yaitu c merupakan salah satu dari:

i. Titik ujung dari I,
ii. Titik stasioner dari f, yaitu jika $f'(c) = 0$, atau
iii. Titik singular dari f, yaitu jika $f'(c)$ tidak ada.

(Purcell, Varberg, & Rigdon, 2003)

2.4.2 Kemonotonan

Definisi 2.9 Misalkan f terdefinisikan pada selang I. Dapat dikatakan bahwa:

i. f naik pada I, jika untuk setiap pasang bilangan $x_1$dan x_2 dalam I,
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
ii. f turun pada I, jika untuk setiap pasang bilangan $x_1$dan x_2 dalam I,
$x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
iii. f monoton mutlak pada I jika f naik pada I atau turun pada I

(Purcell, Varberg, & Rigdon, 2003)

Teorema 2.3 Misalkan f kontinu pada selang I dan terturunkan pada setiap titik dalam dari I.

i. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik x dalam selang I, maka f naik pada selang I
ii. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik x dalam selang I, maka f turun pada selang I

(Purcell, Varberg, & Rigdon, 2003)

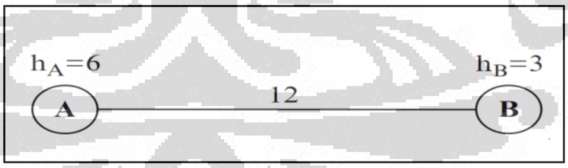
2.5 Center Problem

Dalam pemodelan satu *center*, simpul permintaan masing-masing memiliki bobot. Yang menjadi bobot dalam suatu permasalahan mungkin memiliki interpretasi yang berbeda- beda, seperti waktu per satuan jarak, biaya per satuan jarak atau kerugian per satuan jarak. Jadi permasalahannya adalah akan dicari sebuah pusat untuk meminimalkan waktu maksimum, biaya maksimum maupun kerugian maksimum. Dengan kata lain, akan dicari solusi sedemikian sehingga kasus terburuk yang mungkin terjadi menjadi sebaik mungkin.

Sebagai contoh, misalkan suatu pemerintahan kota ingin membangun sebuah pos pemadam kebakaran pada sebuah kota. Jika waktu yang dibutuhkan untuk melakukan perjalanan dari pos pemadam kebakaran (j) menuju tempat-tempat yang membutuhkan bantuan (i) dinotasikan dengan d_{ij} maka yang menjadi perhatian kita adalah bagaimana membangun pos pemadam kebakaran sedemikian sehingga d_{ij} menjadi seminimum mungkin untuk setiap simpul yang membutuhkan bantuan i .

Pada jaringan yang setiap simpulnya memiliki bobot yang tidak sama, akan ditempatkan sebuah simpul baru sedemikian sehingga maksimum dari bobot yang dikalikan dengan jarak dari setiap simpul yang ada di jaringan tersebut dengan simpul yang baru menjadi seminimum mungkin.

Misalkan terdapat sebuah jaringan dengan dua buah simpul yang memiliki bobot seperti pada Gambar 2.1 berikut



Gambar 2.1 Contoh jaringan dengan 2 simpul yang memiliki bobot

Kemudian akan ditempatkan sebuah simpul X sedemikian sehingga maksimum dari bobot yang dikalikan dengan jarak kedua simpul dengan simpul X menjadi seminimum mungkin.

Misalkan terdapat sebuah jaringan yang memiliki dari dua buah simpul yaitu i dan j yang masing- masing memiliki bobot h_i dan h_j. Misalkan $d(i,j)$ merupakan jarak dari simpul i ke simpul j. Simpul X^* akan menjadi simpul dimana $maks\{h_i d(i,t), h_j d(j,t)\}$ menjadi seminimum mungkin untuk setiap t jika memenuhi kondisi berikut:

i. $h_i d(i,X^*) = h_j d(j,X^*)$

ii. $d(i,X^*) + d(j,X^*) = d(i,j)$

Bukti:.

Akan dibuktikan maks$\{h_i d(i,X^*), h_j d(j,X^*)\} = h_i d(i,X^*) = h_j d(j,X^*) \leq$ maks$\{h_i d(i,t), h_j d(j,t)\}$ untuk setiap t

- Kasus 1 ($t = X^* + c$, untuk $c > 0$)

  Maka,

  maks$\{h_i d(i,X^* + c), h_j d(j,X^* + c)\}$

  $=$ maks$\{h_i(d(i,X^*) + d(X^*,X^* + c)), h_j(d(j,X^*) - d(X^*,X^* + c))\}$

  $=$ maks$\{h_i(d(i,X^*) + c), h_j(d(j,X^*) - c)\}$

  $=$ maks$\{h_i d(i,X^*) + h_i c, h_j d(j,X^*) - h_j c\}$

  $= h_i d(i,X^*) + h_i c$

  $> h_i d(i,X^*)$

- Kasus 2 ($t = X^* - c$, untuk $c > 0$)

  Maka,

  maks$\{h_i d(i,X^* - c), h_j d(j,X^* - c)\}$

  $=$ maks$\{h_i(d(i,X^*) - d(X^*,X^* + c)), (h_j d(j,X^*) + d(X^*,X^* + c))\}$

  $=$ maks$\{h_i(d(i,X^*) - c), h_j(d(j,X^*) + c)\}$

  $=$ maks$\{h_i d(i,X^*) - h_i c, h_j d(j,X^*) + h_j c\}$

  $= h_j d(j,X^*) + h_j c$

  $> h_j d(j,X^*)$

Maka terbukti, $h_i d(i,X^*) = h_j d(j,X^*) \leq$ maks$\{h_i d(i,t), h_j d(j,t)\}$ untuk setiap t.

Akan dihitung nilai maks$\{h_i d(i,t), h_j d(j,t)\}$ yang paling minimum untuk setiap t yang sama dengan nilai $h_i d(i,X^*)$ dan $h_j d(j,X^*)$.

- Akan dihitung $h_j d(i, X^*)$

$d(i, X^*) + d(j, X^*) = d(i, j)$

$d(j, X^*) = d(i, j) - d(i, X^*)$

Sehingga, $h_i d(i, X^*) = h_j d(j, X^*)$

$h_i d(i, X^*) = h_j\big(d(i, j) - d(i, X^*)\big)$

$h_i d(i, X^*) + h_j d(i, X^*) = h_j d(i, j)$

$(h_i + h_j) d(i, X^*) = h_j d(i, j)$

$d(i, X) = h_j d(i, j)/(h_i + h_j)$

Sehingga $h_i d(i, X) = h_i h_j d(i, j)/(h_i + h_j)$

- Akan dihitung $h_j d(j, X^*)$

$d(i, X^*) + d(j, X^*) = d(i, j)$

$d(i, X^*) = d(i, j) - d(j, X^*)$

Sehingga, $h_i d(i, X^*) = h_j d(j, X^*)$

$h_i(d(i, j) - d(j, X^*)) = h_j d(j, X^*)$

$h_i d(i, j) - h_i d(j, X^*) = h_j d(j, X^*)$

$(h_i + h_j) d(j, X^*) = h_i d(i, j)$

$d(j, X^*) = h_i d(i, j)/(h_i + h_j)$

Sehingga $h_j d(j, X^*) = h_i h_j d(i, j)/(h_i + h_j)$

❖ Maka nilai $\text{maks}\{h_i d(i, t), h_j d(j, t)\}$ yang paling minimum untuk setiap t adalah $h_i d(i, X^*) = h_j d(j, X^*) = h_i h_j d(i, j)/(h_i + h_j)$

Misalkan terdapat suatu jaringan seperti pada Gambar 2.1 dan ingin di tempatkan sebuah simpul X sedemikian sehingga maksimum dari bobot simpul yang dikalikan dengan jarak simpul A dan B dengan simpul X akan menjadi seminimum mungkin.

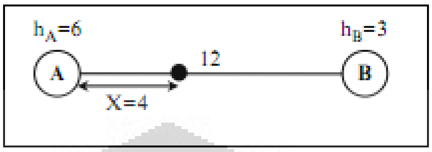
berdasarkan rumus diatas, nilai maksimum dari bobot yang dikalikan dengan jarak simpul A dan B dengan simpul X yang paling minimum adalah

$h_A d(A, X) = h_B d(B, X) = h_A h_B d(A, B)/(h_A + h_B)$

$$= \frac{6.3.12}{6 + 3} = 24$$

Jadi, nilai maksimum dari bobot yang dikalikan dengan jarak simpul A dan B dengan simpul X yang paling minimum adalah 24, dengan jarak simpul X dengan simpul A dan simpul B adalah: $d(A, X) = \frac{24}{6} = 4$, dan $d(B, X) = \frac{24}{3} = 8$

Seperti pada Gambar 2.2 berikut



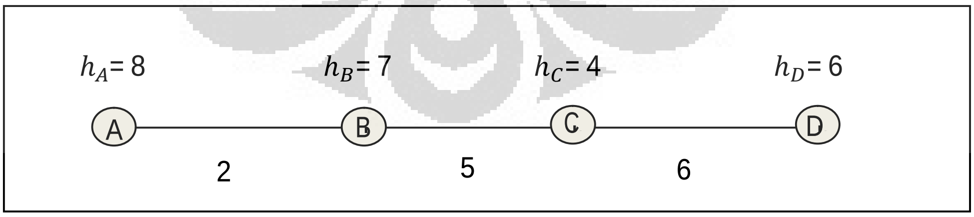
Gambar 2.2 Simpul X sehingga nilai maksimum dari bobot yang dikalikan dengan jarak simpul A dan B dengan simpul X menjadi minimum

Jika terdapat suatu jaringan yang memiliki simpul lebih dari dua dan memiliki bobot pada setiap simpulnya, maka untuk suatu simpul X dapat ditentukan nilai maksimum yang paling minimum dari bobot masing- masing simpul yang dikalikan dengan jarak simpulnya dengan simpul X dengan melihat simpul-simpul tersebut sebagai kumpulan dari pasangan- pasangan simpul, sehingga didapatkan nilai maksimum yang paling minimum adalah

$$\max_{i,j} h_i h_j d(i, j) / (h_i + h_j)$$

dimana (i, j) sebagai pasangan simpul- simpul, $d(i, j)$ sebagai jarak simpul i dan j, h_i dan h_j sebagai bobot dari masing- masing simpul i dan j.

Sebagai contoh, misalkan terdapat suatu jaringan yang terdiri dari empat buah simpul dengan masing- masing bobot seperti berikut:



Gambar 2.3 Contoh Jaringan dengan empat buah simpul yang memiliki bobot untuk setiap simpulnya

Maka untuk suatu simpul X dapat ditentukan nilai maksimum yang paling minimum dari bobot masing- masing simpul yang dikalikan dengan jarak simpulnya dengan simpul X dengan melihat simpul- simpul tersebut sebagai kumpulan dari pasangan- pasangan simpul seperti berikut:

$$\frac{h_A h_B d(A,B)}{h_A + h_B} = \frac{8 * 7 * 2}{15} = 7{,}5$$

$$\frac{h_A h_C d(A,C)}{h_A + h_C} = \frac{8 * 4 * 7}{12} = 18{,}7$$

$$\frac{h_A h_D d(A,D)}{h_A + h_D} = \frac{8 * 6 * 13}{14} = 44{,}6$$

$$\frac{h_B h_C d(B,C)}{h_B + h_C} = \frac{7 * 4 * 5}{11} = 12{,}7$$

$$\frac{h_B h_D d(B,D)}{h_B + h_D} = \frac{7 * 6 * 11}{13} = 35{,}5$$

$$\frac{h_C h_D d(C,D)}{h_C + h_D} = \frac{4 * 6 * 6}{10} = 14{,}4$$

Maka nilai maksimum yang paling minimum dari bobot masing- masing simpul yang dikalikan dengan jarak simpulnya dengan simpul X adalah

$$\text{maks}\{75;\ 18{,}7; 44{,}6; 12{,}7; 35{,}5; 14{,}4\} = 44{,}6$$

BAB 3
PEMODELAN SISTEM TARIF BERDASARKAN ZONE PADA TRANSPORTASI UMUM

Pada bab ini dibahas mengenai pemodelan sistem tarif berdasarkan *zone* pada transortasi umum. Bab ini dimulai dengan menjelaskan mengenai sistem tarif pada transportasi umum, kemudian dilanjutkan dengan menjelaskan pula mengenai tipe- tipe dari sistem tarif pada transportasi umum beserta cara penentuan tarif dari masing- masing tipe tersebut dan diakhiri dengan menjelaskan formulasi matematika untuk sistem tarif berdasarkan *zone*.

3.1 Sistem Tarif pada Transportasi Umum

Pada bagian ini dijelaskan mengenai pengertian transportasi umum, istilah dan notasi yang digunakan pada sistem tarif transportasi umum dan beberapa tipe sistem tarif yang sering digunakan pada transportasi umum.

Transportasi umum dapat didefinisikan sebagai pemindahan atau pergerakan yang dilakukan dengan menggunakan alat transportasi yang digunakan oleh orang banyak.

Transportasi umum yang dibahas pada skripsi ini adalah transportasi umum yang beroperasi dalam lingkup kota. Untuk penyederhanaan penulisan, transportasi umum dalam kota akan ditulis sebagai transportasi kota. Transportasi kota memiliki banyak jenis tergantung pada kebutuhan kota tersebut. Secara garis besar, transportasi kota yang cukup dikenal adalah berupa bus dan kereta. Pada skripsi ini jenis transportasi kota yang digunakan adalah bus yang beroperasi dalam lingkup kota yang hanya boleh menaikkan atau menurunkan penumpang pada halte yang sudah ditentukan.

Ketika seorang penumpang ingin menggunakan jasa transportasi kota, maka ia harus mengeluarkan biaya sesuai dengan tarif yang sudah ditetapkan oleh perusahaan transportasi kota. Sistem yang digunakan perusahaan pengelola transportasi kota untuk menentukan tarif yang harus di bayarkan oleh para penumpangnya disebut sistem tarif pada transportasi kota.

Berikut ini akan diberikan beberapa istilah yang akan dipakai dalam permasalahan ini

- “halte” yaitu suatu lokasi dimana penumpang dapat turun dari kendaraan atau naik kendaraan umum. Halte yang digunakan penumpang untuk menaiki kendaraan umum disebut ”halte keberangkatan” dan halte yang menjadi tujuan bagi penumpang disebut “halte pemberhentian”.
- “*zone*” merupakan suatu bagian dari wilayah yang memiliki batas- batas yang jelas dan terdiri dari beberapa halte.
- “jarak tempuh” merupakan jarak yang harus ditempuh oleh seseorang untuk melakukan perjalanan dari halte pemberangkatan ke halte pemberhentian.
- “tarif ” merupakan biaya yang harus dibayarkan oleh penumpang untuk menggunakan transportasi kota.
- “muatan” yaitu jumlah penumpang yang melakukan perjalanan dari satu halte menuju halte yang lain.

Kemudian untuk mengubah penentuan tarif dari sistem tarif berdasarkan jarak menjadi sistem tarif berdasarkan *zone* dibutuhkan pengertian- pengertian berikut:

- Misalkan suatu jaringan transportasi kota G yang terdiri dari kumpulan k buah halte direpresentasikan dengan $V = \{v_i |\ i = 1, 2, \ldots, k\}$ dan busur yang merupakan jarak dari halte v_i ke halte v_j yang dinotasikan dengan $\{v_i , v_j\}$. Sehingga jaringan transportasi kota dapat dinyatakan sebagai $G = (V, E)$ dimana:

  $V = \{v_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ dan $E = \left\{\{v_i , v_j\} \middle| v_i , v_j \in V \right\}$
- Jaringan transportasi kota tersebut dibagi menjadi L buah *zone*, yaitu $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_L\}$ dengan Z_n merupakan kumpulan halte pada V yang saling lepas sedemikian sehingga

  $\bigcup_{n=1}^{L} Z_n = V.$

- Pada sistem tarif berdasarkan *zone*, jaringan transportasi kota $G = (V, E)$ dapat ditransformasi menjadi $G' = (Ƶ, E_Z)$ dimana:
  $Ƶ = \{Z_n | n = 1, 2, \ldots, L\}$,
  $E_Z = \{\{Z_k, Z_l\} | Z_k, Z_l$ adalah $zone$ yang bersebelahan$\}$, dengan nilai $\{Z_k, Z_l\}$ adalah 1.
  Untuk *zone*- *zone* yang tidak bersebelahan tidak ada edge yang menghubungkannya.

  Z_k, Z_l dikatakan bersebelahan jika terdapat $v_i \in Z_k$ dan $v_j \in Z_l$ sedemikian sehingga $\{v_i, v_j\} \in E$ (Anita Schobel, 2005)

- d_{ij} sebagai notasi untuk tarif yang harus dikeluarkan seseorang yang melakukan perjalanan dari halte v_i menuju halte v_j dengan menggunakan sistem tarif berdasarkan jarak.
- $c(p)$ sebagai notasi untuk biaya yang harus dibayarkan penumpang untuk melewati p buah *zone*
- n_{ij} sebagai notasi untuk jumlah *zone* yang dilewati seseorang ketika melakukan perjalanan dari halte v_i menuju halte v_j
- z_{ij} sebagai notasi untuk tarif yang harus dikeluarkan seseorang yang melakukan perjalanan dari halte v_i menuju halte v_j dengan menggunakan sistem tarif berdasarkan *zone*, dimana:
  jika $i = j$, maka $z_{ij} = 0$, dan
  jika $i \neq j$, maka $z_{ij} = c(n_{ij})$

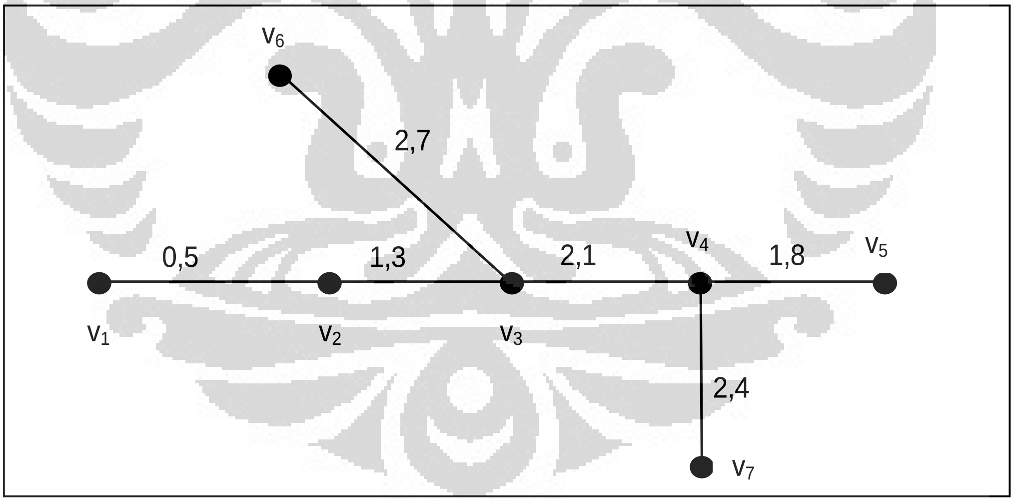
3.2 Tipe- Tipe dari Sistem Tarif pada Transportasi Umum

Menurut Anita Schobel dan Hamacher (2004) secara umum terdapat tiga tipe sistem tarif yang sering digunakan oleh perusahaan transportasi kota, yaitu:

1. Sistem tarif berdasarkan jarak
2. Sistem tarif tetap
3. Sistem tarif berdasarkan *zone*

3.2.1 Sistem Tarif Berdasarkan Jarak

Sistem tarif berdasarkan jarak merupakan salah satu sistem yang dapat digunakan oleh perusahaan transportasi kota untuk menentuan tarif yang harus dibayarkan oleh penumpangnya. Pada sistem ini, tarif untuk suatu perjalanan tergantung pada jarak yang ditempuhnya,yaitu semakin jauh jarak tempuh perjalanannya maka makin besar pula tarif yang harus dibayarkan. Ketika seorang penumpang ingin melakukan perjalanan dari suatu halte menuju halte yang lain, maka dibutuhkan jarak antar halte- haltenya untuk menghitung tarif yang harus ia bayarkan.



Gambar 3.1 Contoh jaringan transportasi umum

Cara perhitungan tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang dengan menggunakan sistem ini dapat dilihat pada contoh permasalahan 3.1 berikut:

Permasalahan 3.1
Misalkan diberikan suatu jaringan transportasi kota yang terdiri dari tujuh buah halte yang dinotasikan dengan $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ serta jarak tempuh antar haltenya seperti Gambar 3. 1 di atas.

Kemudian akan ditentukan tarif yang harus dibayarkan penumpang yang melakukan perjalanan dari satu halte menuju halte yang lain.

Jika a_{ij} menyatakan jarak yang harus ditempuh (dalam km) untuk melakukan perjalanan dari halte v_i menuju halte v_j maka dari jaringan tersebut didapatkan:

$a_{11} = 0$	$a_{12} = 0{,}5$	$a_{13} = 1{,}8$	$a_{14} = 3{,}9$	$a_{15} = 5{,}7$	$a_{16} = 4{,}5$	$a_{17} = 6{,}3$
$a_{21} = 0{,}5$	$a_{22} = 0$	$a_{23} = 1{,}3$	$a_{24} = 3{,}4$	$a_{25} = 5{,}2$	$a_{26} = 4{,}0$	$a_{27} = 5{,}8$
$a_{31} = 1{,}8$	$a_{32} = 1{,}3$	$a_{33} = 0$	$a_{34} = 2{,}1$	$a_{35} = 3{,}9$	$a_{36} = 2{,}7$	$a_{37} = 4{,}5$
$a_{41} = 3{,}9$	$a_{42} = 3{,}4$	$a_{43} = 2{,}1$	$a_{44} = 0$	$a_{45} = 1{,}8$	$a_{46} = 4{,}8$	$a_{47} = 2{,}4$
$a_{51} = 5{,}7$	$a_{52} = 5{,}2$	$a_{53} = 3{,}9$	$a_{54} = 1{,}8$	$a_{55} = 0$	$a_{56} = 6{,}6$	$a_{57} = 4{,}2$
$a_{61} = 4{,}5$	$a_{62} = 4{,}0$	$a_{63} = 2{,}7$	$a_{64} = 4{,}8$	$a_{65} = 6{,}6$	$a_{66} = 0$	$a_{67} = 7{,}2$
$a_{71} = 6{,}3$	$a_{72} = 5{,}8$	$a_{73} = 4{,}5$	$a_{74} = 2{,}4$	$a_{75} = 4{,}2$	$a_{76} = 7{,}2$	$a_{77} = 0$

sehingga dari data tersebut dapat dibentuk matriks jarak (**A**) berukuran *7 x 7* berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 1{,}8 & 3{,}9 & 5{,}7 & 4{,}5 & 6{,}3 \\ 0{,}5 & 0 & 1{,}3 & 3{,}4 & 5{,}2 & 4 & 5{,}8 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 0 & 2{,}1 & 3{,}9 & 2{,}7 & 4{,}5 \\ 3{,}9 & 3{,}4 & 2{,}1 & 0 & 1{,}8 & 4{,}8 & 2{,}4 \\ 5{,}7 & 5{,}2 & 3{,}9 & 1{,}8 & 0 & 6{,}6 & 4{,}2 \\ 4{,}5 & 4 & 2{,}7 & 4{,}8 & 6{,}6 & 0 & 7{,}2 \\ 6{,}3 & 5{,}8 & 4{,}5 & 2{,}4 & 4{,}2 & 7{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan harga untuk setiap jarak tempuh perjalanan ditentukan seperti Tabel 3.1 berikut:

Tabel 3.1 Tabel tarif berdasarkan jarak tempuh

Jarak tempuh(km)	Harga (dalam ribuan rupiah)
$0 < d \leq 1$	2
$1 < d \leq 2$	3
$2 < d \leq 3$	4
$3 < d \leq 4$	5
$4 < d \leq 5$	6
$5 < d \leq 6$	7
$d > 6$	8

Dengan data jarak dan data harga untuk setiap jarak perjalanan, maka dapat dibentuk suatu matriks tarif berdasarkan jarak (dalam ribuan rupiah), yaitu:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 0 & 8 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, untuk menentukan tarif yang harus dibayar jika seseorang akan melakukan perjalanan dari halte v_1 menuju halte v_7 dapat dilihat pada matriks **D** (d_{17}), yaitu sebesar Rp. 8000.

Menurut *Anita Schobel dan Hamacher,* sistem ini dianggap adil bagi para penumpang karena semakin jauh perjalanan seseorang maka makin besar pula tarif yang harus dibayarkan. Untuk menghitung tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang dibutuhkan jarak antar masing-masing halte, sehingga untuk jumlah halte yang sangat besar sistem ini dianggap terlalu kompleks dan penentuan tarif yang harus dibayarkan oleh para penumpang menjadi tidak terlalu *transparent*.

3.2.2 Sistem Tarif Tetap

Pada sistem tarif tetap, semua perjalanan dari suatu halte menuju halte lain pada kota tersebut memiliki tarif yang sama, tidak tergantung pada jarak perjalanannya. Perusahaan transportasi kota cukup memberikan sebuah tarif yang berlaku untuk semua perjalanan dari suatu halte menuju halte lain pada kota tersebut. Jadi, selama penumpang tidak keluar dari halte maka tarif yang dibayarkan tetap sama. Sistem tarif ini mudah dimengerti oleh para penumpang, akan tetapi sistem tarif ini juga sering dirasa tidak adil bagi sebagian penumpang. Hal ini dikarenakan bagi mereka yang hanya melakukan perjalanan jarak dekat diharuskan membayar tarif yang sama dengan yang melakukan perjalanan jarak jauh.

Cara perhitungan tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang dengan menggunakan sistem ini dapat dilihat pada contoh berikut:

Misalkan terdapat permasalahan seperti pada permasalahan 3.1. Jika perusahaan tersebut menetapkan tarif Rp. 4000 untuk setiap perjalanan maka semua perjalanan dari satu halte menuju halte yang lain pada jaringan transportasi kota tersebut memiliki tarif yang sama, yaitu Rp. 4000.

Jadi, bila ada penumpang yang melakukan perjalanan dari halte v_1 menuju halte v_7 maka tarif yang harus dibayarkan akan sama dengan yang melakukan perjalanan dari halte v_1 menuju halte v_2, yaitu sebesar Rp. 4000. Begitu juga dengan perjalanan yang lain, semua memiliki tarif Rp. 4000.

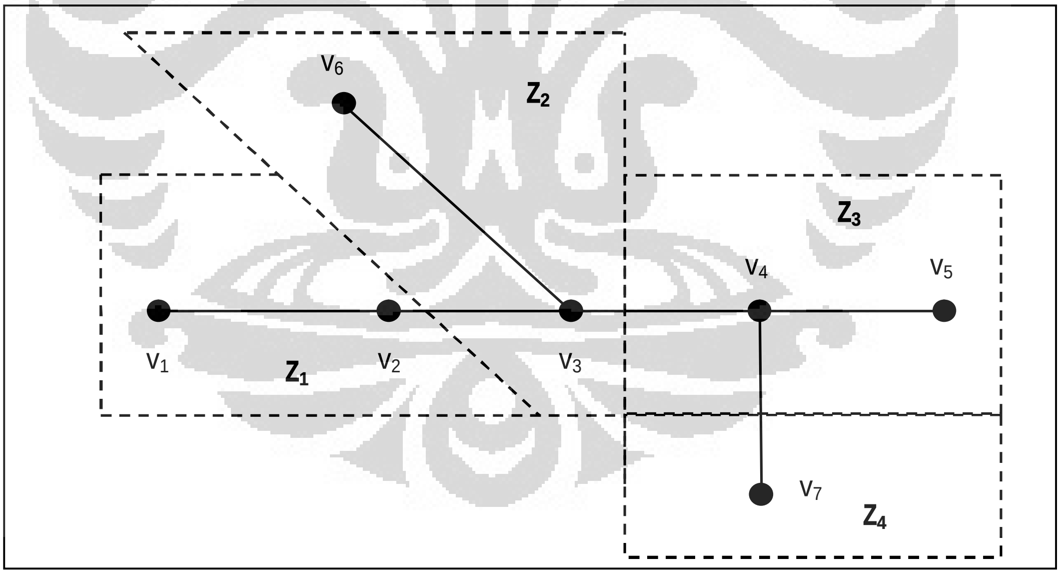
Menurut Anita Schobel dan Hamacher (2004), sistem ini dianggap cukup *transparent* dan mudah untuk dimengerti oleh para penumpang. Selain itu, sistem ini juga memudahkan perusahaan untuk menentukan tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang. Akan tetapi, tarif ini dianggap kurang adil bagi sebagian penumpang. Hal ini dikarenakan penumpang yang melakukan perjalanan jarak dekat diharuskan membayar tarif yang sama dengan penumpang lain yang melakukan perjalanan jauh.

3.2.3 Sistem tarif berdasarkan *zone*

Sistem tarif berdasarkan *zone* merupakan gabungan dari sistem tarif berdasarkan jarak dan sistem tarif tetap. Untuk menggunakan sistem tarif ini halte- halte yang berada di kota harus dibagi ke dalam *zone*- *zone* terlebih dahulu. Untuk menghitung tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang dengan menggunakan sistem tarif ini maka dibutuhkan data jumlah *zone* yang mungkin dilewati untuk setiap perjalanan yang dilakukan oleh penumpang. Tarif untuk setiap perjalanan pada sistem ini tergantung pada jumlah *zone* yang dilewati dari *zone* pemberangkatan sampai *zone* pemberhentiannya.

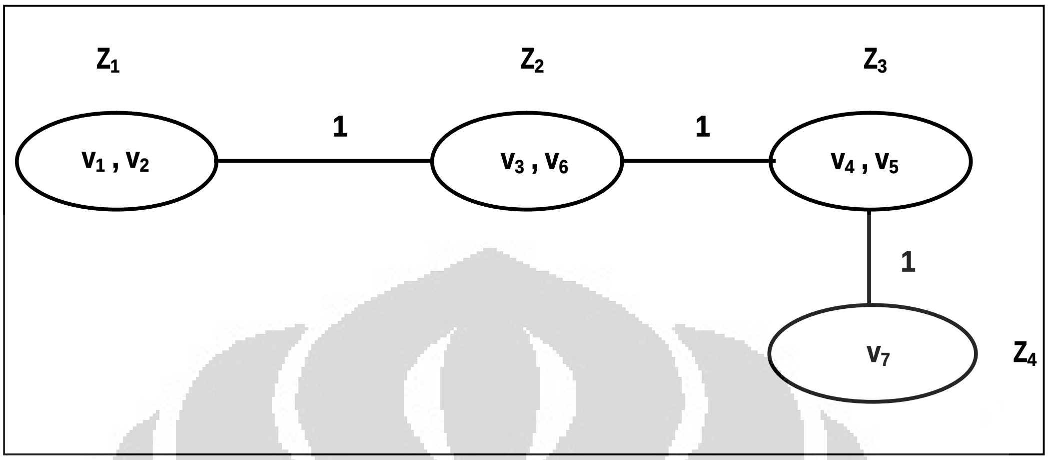
Cara perhitungan tarif yang harus dibayarkan oleh penumpang dengan menggunakan sistem ini dapat dilihat pada contoh berikut:

Misalkan terdapat jaringan transportasi kota seperti pada permasalahan 3.1. Kemudian, halte- halte pada jaringan tersebut dibagi kedalam empat *zone*, dimana $Z_1 = \{v_1, v_2\}$, $Z_2 = \{v_3, v_6\}, Z_3 = \{v_4, v_5\}$, dan $Z_4 = \{v_7\}$ seperti Gambar 3.2 berikut:



Gambar 3.2 Contoh penzonaan jaringan transportasi kota

Selanjutnya jaringan transportasi kota dengan *zone*- *zone* yang sudah ditetapkan seperti pada Gambar 3.2 dapat ditransformasi menjadi jaringan yang baru $G' = (Ƶ, E_Z)$ seperti pada Gambar 3.3 berikut:



Gambar 3.3 Contoh jaringan $G' = (Ƶ, E_Z)$

dimana setiap node merepresentasikan himpunan *zone* $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ dan setiap busur merepresentasikan jumlah *zone* yang dilewati. *Zone*- *zone* yang bersebelahan memiliki nilai busur 1, sehingga dengan begitu dapat dihitung jumlah *zone* yang dilewati dari satu halte menuju halte yang lain.

Kemudian, jika n_{ij} menyatakan banyaknya *zone* yang dilewati dari halte v_i menuju halte v_j maka dari gambar 3 didapatkan:

$n_{11} = 0$	$n_{12} = 0$	$n_{13} = 1$	$n_{14} = 2$	$n_{15} = 2$	$n_{16} = 1$	$n_{17} = 3$
$n_{21} = 0$	$n_{22} = 0$	$n_{23} = 1$	$n_{24} = 2$	$n_{25} = 2$	$n_{26} = 1$	$n_{27} = 3$
$n_{31} = 1$	$n_{32} = 1$	$n_{33} = 0$	$n_{34} = 1$	$n_{35} = 1$	$n_{36} = 0$	$n_{37} = 2$
$n_{41} = 2$	$n_{42} = 2$	$n_{43} = 1$	$n_{44} = 0$	$n_{45} = 0$	$n_{46} = 1$	$n_{47} = 1$
$n_{51} = 2$	$n_{52} = 2$	$n_{53} = 1$	$n_{54} = 0$	$n_{55} = 0$	$n_{56} = 1$	$n_{57} = 1$
$n_{61} = 1$	$n_{62} = 1$	$n_{63} = 0$	$n_{64} = 1$	$n_{65} = 1$	$n_{66} = 0$	$n_{67} = 2$
$n_{71} = 3$	$n_{72} = 3$	$n_{73} = 2$	$n_{74} = 1$	$n_{75} = 1$	$n_{76} = 2$	$n_{77} = 0$

sehingga dari data tersebut dapat dibentuk matriks **N** berukuran *7 x 7* berikut:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika tarif (dalam ribuan rupiah) untuk setiap jumlah *zone* yang dilewati ditentukan seperti pada Tabel 3.2 berikut:

Tabel 3.2 Tabel tarif berdasarkan *zone*

Jumlah *zone*	Tarif (dalam ribuan rupiah)
0	2
1	4
2	5
3	6

Dengan data jumlah *zone* yang dilewati dan data tarif untuk setiap jumlah *zone* yang dilewati, maka dapat dibentuk matriks tarif (dalam ribuan rupiah) berdasarkan *zone*, yaitu:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 6 & 5 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

maka untuk menentukan tarif yang harus dibayar jika seseorang akan melakukan perjalanan dari halte v_1 menuju halte v_7, dapat dilihat pada matriks $\boldsymbol{Z}$ (z_{17}), yaitu sebesar Rp. 6000.

Jadi tarif yang harus dibayarkan penumpang yang melakukan perjalanan dari v_1 menuju v_7 adalah Rp. 6000.

Menurut Anita Schobel dan Hamacher (2004), sistem ini sering digunakan oleh perusahaan transportasi kota karena bagi para penumpang sistem ini dirasa sudah cukup adil dan juga *transparent.*

3.3 Formula Matematika untuk Sistem Tarif berdasarkan *Zone*

Ketika suatu perusahaan transportasi kota ingin mengubah sistem tarif yang mereka gunakan saat ini (sistem tarif berdasarkan jarak) menjadi sistem tarif berdasarkan *zone*, maka mereka harus membuat model untuk tarif yang baru dengan asumsi *zone*nya sudah ditentukan. Perubahan sistem tarif tersebut bertujuan untuk mendapatkan perubahan tarif yang seminimum mungkin sedemikian sehingga baik perusahaan maupun penumpang tidak ada yang terlalu dirugikan.

Dengan tarif berdasarkan jaraknya (d_{ij}) yang sudah ada sebelumnya dan juga *zone- zone* yang sudah ditentukan, maka akan dicari tarif berdasarkan *zone* (z_{ij}) sedemikian sehingga perubahan tarif yang terjadi menjadi seminimum mungkin.

Untuk menentukan tarif berdasarkan *zone* (z_{ij}), perusahaan juga sudah memiliki data penumpang yang melakukan perjalanan dari halte v_i menuju halte v_j yang dinotasikan dengan w_{ij} dengan $W = \sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij}$ yang merupakan jumlah seluruh penumpang dari perusahaan transportasi kota tersebut.

Menurut Anita Schobel dan Hamacher (2004), untuk mendapatkan perubahan tarif yang seminimum mungkin dapat digunakan tiga buah fungsi tujuan, yaitu:

1. $b_{maks} = \text{maks}_{v_i,v_j \in V} w_{ij} \left| d_{ij} - z_{ij} \right|$

   Fungsi objektif b_{maks} merupakan model untuk menemukan deviasi terbesar dari dua buah tarif yang berbeda agar menjadi seminimum mungkin. Dengan begitu perubahan tarif yang terlalu besar yang di alami oleh penumpang dapat dihindari. Kemudian dari sisi perusahaan, muatan

w_{ij} digunakan untuk meminumkan deviasi terbesar dari pendapatan yang didapatkan pihak perusahaan.

2. $b_1 \quad = \frac{1}{W}\sum_{v_i,v_j\in V} w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$

Fungsi objektif b_1 merupakan model untuk menemukan rata- rata yang seminimum mungkin dari total deviasi absolute.

3. $b_2 \quad = \frac{1}{W}\sum_{v_i,v_j\in V} w_{ij}\left(d_{ij} - z_{ij}\right)^2$

Fungsi objektif b_2 merupakan model untuk menemukan rata- rata yang seminimum mungkin dari total deviasi kuadrat.

Jadi, model matematika untuk mendapatkan perubahan tarif yang seminimum mungkin adalah

Minimum: $c(p) \epsilon \{c^*_{maks}(p), c^*_1(p), c^*_2(p)\}$, untuk setiap p

dimana:

$c^*_{maks}(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat b_{maks} = $\text{maks}_{v_i,v_j\in V} w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ menjadi minimum untuk setiap p.

$c^*_1(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat $b_1 = \frac{1}{W}\sum_{v_i,v_j\in V} w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ menjadi minimum untuk setiap p.

$c^*_2(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat $b_2 = \frac{1}{W}\sum_{v_i,v_j\in V} w_{ij}\left(d_{ij} - z_{ij}\right)^2$ menjadi minimum untuk setiap p.

dengan syarat: $z_{ij} \geq 0, \quad \forall\, v_i, v_j \in V$

$z_{ij} \in \boldsymbol{N}, \quad \forall\, v_i, v_j \in V$

Teorema 3.1

Misalkan $Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_L$ yang merupakan pembagian *zone* dari G, d_{ij} sebagai tarif berdasarkan jarak dari halte v_i ke halte v_j, dan w_{ij} sebagai banyaknya penumpang yang melakukan perjalanan dari halte v_i menuju halte v_j.

maka, untuk $p = 0, 1, 2, \dots, L-1$ akan berlaku:

1) Untuk meminimumkan $b_{maks} = \text{maks}_{v_i, v_j \in V}\, w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ terhadap z_{ij} maka dapat dipilih:

$$z_{ij} = c^*_{maks}(p) = \max_{\substack{v_i, v_j \in V, i \neq j \\ n_{ij} = p}} d_{ij} - \frac{z^*(p)}{w_{ij}}$$

$$\text{dengan } z^*(p) = \max_{\substack{v_{i_1}, v_{j_1}, v_{i_2}, v_{j_2} \in V \\ n_{i_1 j_1} = n_{i_2 j_2} = p}} \frac{w_{i_1 j_1} w_{1_2 j_2}}{w_{i_1 j_1} + w_{i_2 j_2}} \left(d_{i_1 j_1} - d_{i_2 j_2}\right)$$

2) Untuk meminimumkan $b_1 = \frac{1}{W} \sum_{v_i, v_j \in V} w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ terhadap z_{ij} maka dapat dipilih:

$$z_{ij} = c^*_1(p) = \text{median}\{\underbrace{d_{ij}, d_{ij}, \dots \dots, d_{ij}}_{w_{ij} kali} : v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j, n_{ij} = p\}$$

dimana n_{ij} merupakan jumlah *zone* yang dilalui seseorang yang melakukan perjalanan dari halte v_i ke halte v_j

3) Untuk meminimumkan $b_2 = \frac{1}{W} \sum_{v_i, v_j \in V} w_{ij}\left(d_{ij} - z_{ij}\right)^2$ terhadap z_{ij} maka dapat dipilih:

$$z_{ij} = c^*_2(p) = \frac{1}{W_p} \sum_{\substack{v_i, v_j \in V \\ n_{ij} = p}} w_{ij} d_{ij}$$

dimana W_p merupakan jumlah seluruh penumpang yang melewati p buah *zone* pada perjalanannya

Bukti:

Berikut ini akan dilakukan pembentukan kumpulan pasangan halte (v_i, v_j) dimana perjalanan yang dilakukan dari halte v_i sampai halte v_j akan melewati p buah *zone*, atau dapat dituliskan dengan:

$M_p = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V, n_{ij} = p\}$ dimana p merupakan jumlah *zone* yang dilewati seseorang yang melakukan perjalanan dari halte v_i sampai halte v_j.

Sebut n_p sebagai jumlah anggota M_p, maka akan terdapat n_p buah tarif berdasarkan jarak dari pasangan- pasangan halte anggota M_p tersebut. Kemudian urutkan tarif- tarif tersebut dari yang terkecil hingga yang terbesar sedemikian sehingga $d_{m_1^p} \leq d_{m_2^p} \leq \cdots \leq d_{m_{n_p}^p}$ untuk $m_1^p, m_2^p, \ldots, m_{n_p}^p \in M_p$.

1. Diketahui bahwa $b_{maks} = \max_{v_i, v_j \in V} w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$

Kemudian untuk mencari maksimum dari $w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$, fungsi

$w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ dapat dikelompokan berdasarkan jumlah zone yang dilewati (p) sehingga didapatkan:

$$b_{maks} = \max_{p=0,1,..,L-1} \max_{m \in M_p} w_m |d_m - c(p)|$$

$$= \max_{p=0,1,..,L-1} \max_{n=1,2,..,n_p} w_{m_n^p}\left|d_{m_n^p} - c(p)\right|$$

Misalkan $K_{maks}(p) = \max_{n=1,2,..,n_p} w_{m_n^p}\left|d_{m_n^p} - c(p)\right|$, maka didapatkan

$$b_{maks} = \max_{p=0,1,..,L-1} K_{maks}(p)$$

Untuk meminimumkan $b_{maks} = \max_{p=0,1,..,L-1} K_{maks}(p)$ terhadap $c(p)$ maka cukup dengan meminimumkan $K_{maks}(p) = \max_{n=1,2,..,n_p} w_{m_n^p}\left|d_{m_n^p} - c(p)\right|$ terhadap $c(p)$.

Misalkan $c^*(p)$ merupakan nilai yang membuat $K_{maks}(p) = \max_{n=1,2,..,n_p} w_{m_n^p}\left|d_{m_n^p} - c(p)\right|$ minimum.

Maka berdasarkan rumus dari *center problem* pada landasan teori, nilai K_{maks} yang paling minimum adalah $\max_{m_i, m_j \in M_p} \frac{w_{m_i} w_{m_j}\left|d_{m_i} - d_{m_j}\right|}{w_{m_i} + w_{m_j}}$.

Misalkan, $z^*(p) = \max_{m_i, m_j \in M_p} \frac{w_{m_i} w_{m_j}\left|d_{m_i} - d_{m_j}\right|}{w_{m_i} + w_{m_j}}$

Maka dengan $c^*(p)$ sebagai nilai yang membuat

$K_{maks}(p) = \max_{n=1,2,..,n_p} w_{m_n^p} \left| d_{m_n^p} - c(p) \right|$ minimum, maka

$$\max_{n=1,2,..,n_p} w_{m_n^p} \left| d_{m_n^p} - c^*(p) \right| = z^*(p)$$

atau $w_{m_n^p} \left| d_{m_n^p} - c^*(p) \right| \le z^*(p)$ untuk $n = 1,2,..,n_p$

$$\left| d_{m_n^p} - c^*(p) \right| \le \frac{z^*(p)}{w_{m_n^p}}$$

$$-\frac{z^*(p)}{w_{m_n^p}} \le d_{m_n^p} - c^*(p) \le \frac{z^*(p)}{w_{m_n^p}}$$

$$-\frac{z^*(p)}{w_{m_n^p}} - d_{m_n^p} \le -c^*(p) \le \frac{z^*(p)}{w_{m_n^p}} - d_{m_n^p}$$

Pandang pertidaksamaan: $\quad - c^*(p) \le \frac{z^*(p)}{w_{m_n^p}} - d_{m_n^p}$

sehingga, $d_{m_n^p} - \frac{z^*(p)}{w_{m_n^p}} \le c^*(p)$

Atau $c^*(p)$ merupakan $\max_{n=0,1,2...,n_p} d_{m_n^p} - \frac{z^*(p)}{w_{m_n^p}}$

Atau $c^*(p) = \max_{\substack{v_i,v_j \in V, i \neq j \\ n_{ij}=p}} d_{ij} - \frac{z^*(p)}{w_{ij}}$

2. Diketahui bahwa $b_1 = \frac{1}{W} \sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij} \left| d_{ij} - z_{ij} \right|$

$$W\, b_1 = \sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij} \left| d_{ij} - z_{ij} \right|$$

Kemudian jika $\sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij} \left| d_{ij} - z_{ij} \right|$ dijumlahkan berdasarkan jumlah *zone* yang dilewati dari halte v_i ke halte v_j, maka didapatkan

$$W\ b_1 = \sum_{p=0}^{L-1} \sum_{m \in M_p} w_m |d_m - c(p)|$$

$$W\ b_1 = \sum_{p=0}^{L-1} \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} \left| d_{m_n^p} - c(p) \right|$$

misalkan $K_1(p) = \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} \left| d_{m_n^p} - c(p) \right|$

maka, $W\ b_1 = \sum_{p=0}^{L-1} K_1(p)$

kemudian untuk meminimumkan b_1, maka cukup dengan meminimumkan

$$K_1(p) = \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} \left| d_{m_n^p} - c(p) \right|$$

Untuk meminimumkan $K_1(p)$ maka akan dicari turunan $K_1(p)$ terhadap $c(p)$:

$$K_1(p) = \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} \left| d_{m_n^p} - c(p) \right| = \begin{cases} \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} \left(d_{m_n^p} - c(p) \right), \text{untuk } c(p) < d_{m_n^p} \\ \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} \left(c(p) - d_{m_n^p} \right), \text{untuk } c(p) > d_{m_n^p} \end{cases}$$

Maka turunan $K_1(p)$ terhadap $c(p)$ adalah

$$\frac{dK_1(p)}{dc(p)} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{n_p} -w_{m_n^p} & , \text{untuk } c(p) < d_{m_n^p} \\ \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} & , \text{untuk } c(p) > d_{m_n^p} \end{cases}$$

Turunan $K_1(p)$ terhadap $c(p)$ juga dapat dinyatakan dengan

$$\frac{dK_1(p)}{dc(p)} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{n_p} -w_{m_n^p} & \text{, untuk } c(p) < d_{m_1^p} \quad \dots (a) \\ \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} & \text{, untuk } c(p) > d_{m_{n_p}^p} \quad \dots (b) \\ \sum_{n=1}^{t} w_{m_n^p} - \sum_{n=t+1}^{n_p} w_{m_n^p} & \text{, untuk } d_{m_t^p} < c(p) < d_{m_{t+1}^p} \quad \dots (c) \end{cases}$$

Turunan $K_1(p)$ terhadap $c(p)$ menjadi bentuk yang (a) karena $d_{m_1^p}$ merupakan tarif terkecil diantara semua $d_{m_n^p}$ untuk $n = 1,2 \dots, n_p$, maka untuk $c(p)$ yang lebih kecil dari $d_{m_n^p}$ akan sama dengan $c(p)$ yang lebih kecil dari $d_{m_1^p}$. Menjadi bentuk yang (b) karena $d_{m_{n_p}^p}$ merupakan tarif terbesar diantara semua $d_{m_n^p}$ untuk $n = 1,2 \dots, n_p$, maka untuk $c(p)$ yang lebih besar dari $d_{m_n^p}$ akan sama dengan $c(p)$ yang lebih besar dari $d_{m_{n_p}^p}$. Kemudian akan menjadi bentuk yang (c) karena berdasarkan bentuk (a), untuk $c(p)$ yang lebih besar dari $d_{m_t^p}$ maka turunan $K_1(p)$ terhadap $c(p)$ menjadi $\sum_{n=1}^{t} w_{m_n^p}$, dan berdasarkan bentuk (b), untuk $c(p)$ yang lebih kecil dari $d_{m_{t+1}^p}$ maka turunan$K_1(p)$ terhadap $c(p)$ menjadi $\sum_{n=t+1}^{n_p} -w_{m_n^p}$. Sehingga untuk $d_{m_t^p} < c(p) < d_{m_{t+1}^p}$ turunan $K_1(p)$ terhadap $c(p)$ menjadi

$$\sum_{n=1}^{t} w_{m_n^p} - \sum_{n=t+1}^{n_p} w_{m_n^p}$$

Sifat 1

Kondisi minimum: $K_1(p)$ akan minimum jika terdapat suatu t yang memenuhi:

$$\sum_{n=1}^{t-1} w_{m_n^p} - \sum_{t}^{n_p} w_{m_n^p} < 0 \qquad (1a)$$

$$\sum_{n=1}^{t} w_{m_n^p} - \sum_{t+1}^{n_p} w_{m_n^p} \geq 0 \qquad (1b)$$

Jika kondisi (1b) yang didapatkan berupa pertidaksamaan, maka $c^*(p) = d_{m_t^p}$.

Jika kondisi (1b) yang didapatkan berupa persamaan, maka $c^*(p) = [d_{m_t^p}, d_{m_{t+1}^p}]$

Bukti:

- Jika kondisi (1b) yang didapatkan berupa pertidaksamaan, maka $c^*(p) = d_{m_t^p}$

$$\sum_{n=1}^{t-1} w_{m_n^p} - \sum_{t}^{n_p} w_{m_n^p} < 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dK_1(p)}{dc(p)} < 0 \text{ untuk } d_{m_{t-1}^p} < c(p) < d_{m_t^p}$$

$$\sum_{n=1}^{t} w_{m_n^p} - \sum_{t+1}^{n_p} w_{m_n^p} > 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dK_1(p)}{dc(p)} > 0 \text{ untuk } d_{m_t^p} < c(p) < d_{m_{t+1}^p}$$

  Maka, $K_1(p)$ akan minimum untuk $c(p) = d_{m_t^p}$

- Jika kondisi (1b) yang didapatkan berupa persamaan, maka $c^*(p) \in (d_{m_t^p}, d_{m_{t+1}^p})$

$$\sum_{n=1}^{t} w_{m_n^p} - \sum_{t+1}^{n_p} w_{m_n^p} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dK_1(p)}{dc(p)} = 0 \; untuk \; d_{m_t^p} < c(p) < d_{m_{t+1}^p}$$

  Maka $K_1(p)$ akan minimum untuk $c^*(p) \in (d_{m_t^p}, d_{m_{t+1}^p})$

Kondisi pada sifat 1 juga dapat dinyatakan dengan:

$$c^*(p) = median\{\underbrace{d_{ij}, d_{ij}, \dots\dots, d_{ij}}_{w_{ij} kali} : v_i, v_j \in V, i \neq j, n_{ij} = p\}$$

3. Diketahui bahwa $b_2 = \frac{1}{W}\sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij}\left(d_{ij} - z_{ij}\right)^2$

$$Wb_2 = \sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij}\left(d_{ij} - z_{ij}\right)^2$$

Kemudian jika $\sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij}\left(d_{ij} - z_{ij}\right)^2$ dijumlahkan berdasarkan jumlah *zone* yang dilewati dari halte v_i ke halte v_j, maka didapatkan

$$Wb_2 = \sum_{p=0}^{L-1}\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}\left(d_{m_t^p} - c(p)\right)^2$$

misalkan $K_2(p) = \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}\left(d_{m_t^p} - c(p)\right)^2$

maka, $Wb_2 = \sum_{p=0}^{L-1} K_2(p)$

Untuk meminimumkan b_2 terhadap $c(p)$ maka cukup dengan meminimumkan:

$$K_2(p) = \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}\left(d_{m_t^p} - c(p)\right)^2$$

Akan dicari turunan $K_2(p)$ terhadap $c(p)$

$$\frac{dK_2(p)}{dc(p)} = -2\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}\left(d_{m_t^p} - c(p)\right)$$

Untuk meminimumkan $K_2(p)$ akan dicari $c(p)$ sedemikian sehingga

$$\frac{dK_2(p)}{dc(p)} = 0$$

$$\frac{dK_2(p)}{dc(p)} = -2\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}\left(d_{m_t^p} - c(p)\right) = 0$$

Sehingga, $\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}\left(d_{m_t^p} - c(p)\right) = 0$

$$\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} d_{m_t^p} - \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} c(p) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} d_{m_t^p} - c(P)\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} d_{m_t^p} = c(p)\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}$$

sehingga, $c(p) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}}\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} d_{m_t^p}$

misalkan $W_p = \sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p}$, maka

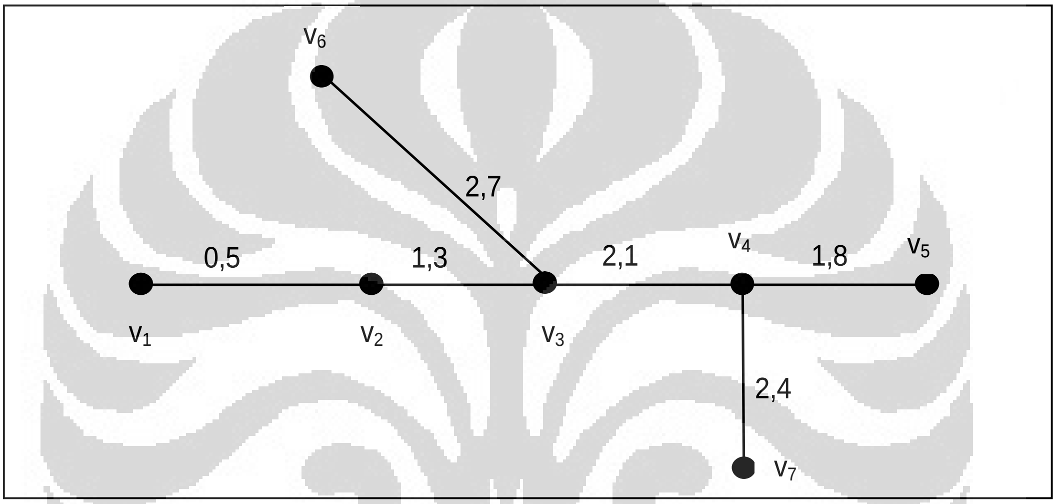
maka didapatkan $c(p) = \frac{1}{W_p}\sum_{n=1}^{n_p} w_{m_n^p} d_{m_t^p}$

atau dapat dinyatakan sebagai $c(p) = \frac{1}{W_p}\sum_{\substack{i,j\in V \\ n_{ij}=p}} w_{ij} d_{ij}$

BAB 4

CONTOH PERMASALAHAN SERTA PENYELESAIANNYA DARI SISTEM TARIF BERDASARKAN *ZONE*

Misalkan suatu perusahaan transportasi umum ingin mengubah sistem tarif yang mereka gunakan (sistem tarif berdasarkan jarak) menjadi sistem tarif berdasarkan *zone*. Dengan jaringan transportasi umum $G = (V, E)$ yang memiliki tujuh buah halte dan jarak antar halte seperti pada gambar 4.1 berikut



Gambar 4.1 Contoh Jaringan $G = (V, E)$

Pihak perusahaan transportasi umum menetapkan tarif (dalam ribuan rupiah) berdasarkan jarak dari halte v_i menuju halte v_j yang disajikan dalam matriks **D** berikut

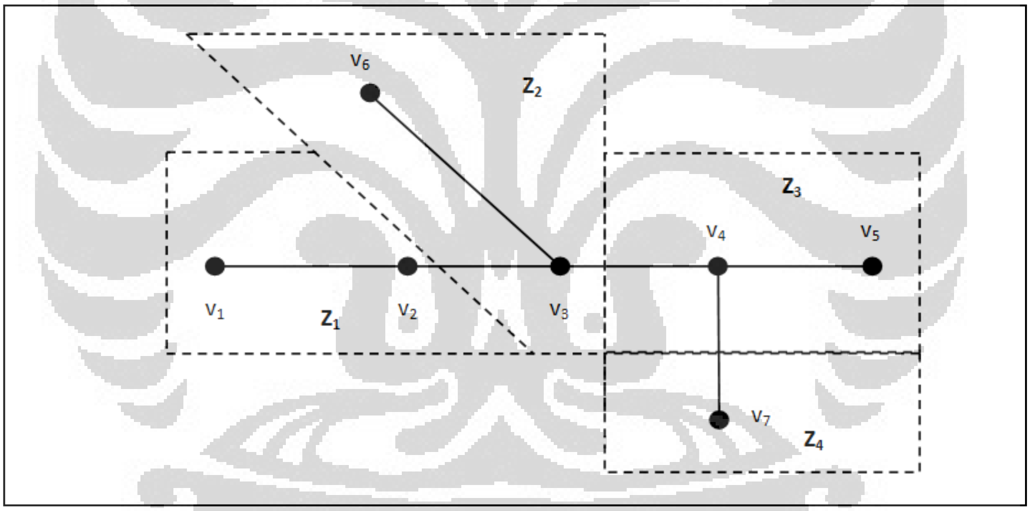
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 7 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 0 & 8 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan jumlah penumpang yang melakukan perjalanan dari halte v_i menuju halte v_j (w_{ij}) disajikan dalam matriks **W** berikut:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 11 & 21 & 23 & 15 & 13 \\ 10 & 0 & 10 & 12 & 20 & 11 & 17 \\ 11 & 10 & 0 & 11 & 14 & 10 & 18 \\ 21 & 12 & 11 & 0 & 10 & 19 & 15 \\ 23 & 20 & 14 & 10 & 0 & 18 & 20 \\ 15 & 11 & 10 & 19 & 18 & 0 & 23 \\ 13 & 17 & 18 & 15 & 20 & 23 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan jumlah seluruh penumpang dari perusahaan transportasi umum (W) adalah 520.

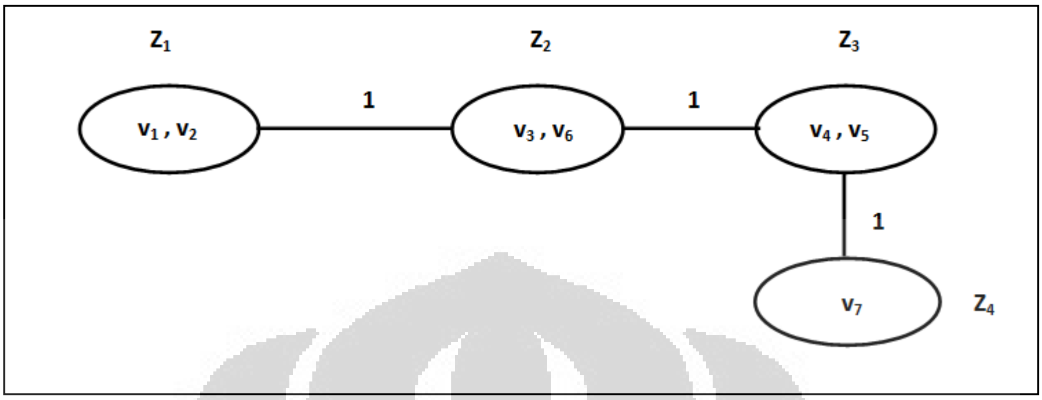
Kemudian pihak perusahaan ingin menggunakan sistem tarif berdasarkan *zone* dengan membagi halte- halte yang ada kedalam empat buah *zone*, dimana $Z_1 = \{v_1, v_2\}$, $Z_2 = \{v_3, v_4\}$, $Z_3 = \{v_5, v_7\}$, dan $Z_4 = \{v_6\}$ seperti pada gambar 4.2 berikut:



Gambar 4.2 Contoh penzonaan jaringan transportasi kota

Selanjutnya dari jaringan transportasi umum $G = (V, E)$ dan dengan pembagian halte ke dalam *zone- zone* seperti pada gambar 4.2, maka dapat dibentuk

$G' = (\mathbb{Z}, E_Z)$ seperti pada gambar 4. 3 berikut:



Gambar 4.3 Contoh jaringan $G' = (\mathbb{Z}, E_Z)$

sehingga didapatkan jumlah *zone* yang dilewati dari halte v_i menuju halte v_j (n_{ij}) yang dinyatakan dalam bentuk matriks **N** berikut:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian akan di cari tarif (dalam ribuan rupiah) berdasarkan *zone* (z_{ij}) sedemikian sehingga perubahan tarif yang terjadi tidak terlalu besar. Dengan fungsi tujuan adalah meminimumkan $c(p) \in \{c^*_{maks}(p), c^*_1(p), c^*_2(p)\}$, untuk setiap p

dimana:

$c^*_{maks}(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat $b_{maks} = \text{maks}_{v_i, v_j \in V}\, w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ menjadi minimum.

$c^*_1(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat $b_1 = \frac{1}{W}\sum_{v_i, v_j \in V} w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ menjadi minimum.

$c^*_2(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat $b_2 = \frac{1}{W}\sum_{v_i, v_j \in V} w_{ij}\left(d_{ij} - z_{ij}\right)^2$ menjadi minimum.

Akan dihitung $c^*_{maks}(p), c^*_1(p)$, dan $c^*_2(p)$ untuk $p = 0, 1, 2, 3$

Didefinisikan $M_p = \{(v_i, v_j): v_i, v_j \in V, dan\ n_{ij} = p\}$

Sehingga didapatkan:

$M_0 = \{(v_1, v_2), (v_4, v_5), (v_3, v_6)\}$

$M_1 = \{(v_1, v_3), (v_1, v_6), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_3, v_4),$

$(v_3, v_5), (v_6, v_4), (v_6, v_5), (v_4, v_7), (v_5, v_7)\}$

$M_2 = \{(v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_7), (v_6, v_7)\}$

$M_3 = \{(v_1, v_7), (v_2, v_7)\}$

- Akan dicari $z_{ij} = c^*_{maks}(p)$ untuk fungsi tujuan b_{maks} :

$$z_{ij} = c^*_{maks}(p) = \max_{\substack{v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j \\ n_{ij} = p}} d_{ij} - \frac{z^*(p)}{w_{ij}},$$

dengan $z^*(p) = \max\limits_{\substack{v_{i_1}, v_{j_1}, v_{i_2}, v_{j_2} \in V \\ n_{i_1 j_1} = n_{i_2 j_2} = p}} \dfrac{w_{i_1 j_1} w_{1_2 j_2}}{w_{i_1 j_1} + w_{i_2 j_2}} (d_{i_1 j_1} - d_{i_2 j_2})$

➢ Untuk $p = 0$, akan dihitung $z^*(0)$

(v_i, v_j)	w_{ij}	d_{ij}
(v_1, v_2)	10	2
(v_4, v_5)	10	3
(v_3, v_6)	10	4

$(v_{i_1}, v_{j_1}), (v_{i_2}, v_{j_2})$	$z(0) = \dfrac{w_{i_1 j_1} w_{1_2 j_2}}{w_{i_1 j_1} + w_{i_2 j_2}} (d_{i_1 j_1} - d_{i_2 j_2})$
(v_1, v_2),(v_4, v_5)	5
(v_1, v_2), (v_3, v_6)	10
(v_4, v_5), (v_3, v_6)	5

maka $z^*(0) = maks\{5, 10, 5\} = 10$

Kemudian akan dihitung $c^*_{maks}(p)$

(v_i, v_j)	$c_{maks}(0) = d_{ij} - \frac{z^*(0)}{w_{ij}}$
(v_1, v_2)	1
(v_3, v_6)	2
(v_4, v_5)	3

- Maka didapat $c^*_{maks}(0) = maks\{1, 2, 3\} = 3$ (dalam ribuan rupiah)

  Atau $c^*_{maks}(0) = \text{Rp}. 3.000$

- Untuk $p = 1$

Akan dihitung $z^*(1)$

(v_i, v_j)	w_{ij}	d_{ij}
(v_1, v_3)	11	3
(v_1, v_6)	15	6
(v_2, v_3)	10	3
(v_2, v_6)	11	5
(v_3, v_4)	11	4
(v_3, v_5)	14	5
(v_6, v_4)	19	6
(v_6, v_5)	18	8
(v_4, v_7)	15	4
(v_5, v_7)	20	6

$(v_{i_1}, v_{j_1}), (v_{i_2}, v_{j_2})$	$z(1) = \frac{w_{i_1 j_1} w_{1_2 j_2}}{w_{i_1 j_1} + w_{i_2 j_2}} (d_{i_1 j_1} - d_{i_2 j_2})$
$(v_1, v_3),(v_1, v_6)$	19
$(v_1, v_3),(v_2, v_3)$	0
$(v_1, v_3),(v_2, v_6)$	11
$(v_1, v_3),(v_3, v_4)$	5.5
$(v_1, v_3),(v_3, v_5)$	12.3
$(v_1, v_3),(v_6, v_4)$	20.9
$(v_1, v_3), (v_6, v_5)$	34.1
$(v_1, v_3), (v_4, v_7)$	6.3
$(v_1, v_3), (v_5, v_7)$	21.3
$(v_1, v_6),(v_2, v_3)$	18
$(v_1, v_6),(v_2, v_6)$	6.3
$(v_1, v_6), (v_3, v_4)$	12.7
$(v_1, v_6), (v_3, v_5)$	7.2

$(v_{i_1}, v_{j_1}), (v_{i_2}, v_{j_2})$	$z(1) = \frac{w_{i_1 j_1} w_{1_2 j_2}}{w_{i_1 j_1} + w_{i_2 j_2}} (d_{i_1 j_1} - d_{i_2 j_2})$
$(v_1, v_6), (v_6, v_4)$	0
$(v_1, v_6), (v_6, v_5)$	16.4
$(v_1, v_6), (v_4, v_7)$	15
$(v_1, v_6), (v_5, v_7)$	0
$(v_2, v_3),(v_2, v_6)$	10.5
$(v_2, v_3), (v_3, v_4)$	5.2
$(v_2, v_3), (v_3, v_5)$	11.7
$(v_2, v_3), (v_6, v_4)$	19.7
$(v_2, v_3), (v_6, v_5)$	32.1
$(v_2, v_3), (v_4, v_7)$	6
$(v_2, v_3), (v_5, v_7)$	20
$(v_2, v_6), (v_3, v_4)$	5.5
$(v_2, v_6), (v_3, v_5)$	0
$(v_2, v_6), (v_6, v_4)$	7
$(v_2, v_6), (v_6, v_5)$	20.4
$(v_2, v_6), (v_4, v_7)$	6.3
$(v_2, v_6), (v_5, v_7)$	7.1
$(v_3, v_4), (v_3, v_5)$	6.2
$(v_3, v_4), (v_6, v_4)$	14
$(v_3, v_4), (v_6, v_5)$	27.3
$(v_3, v_4), (v_4, v_7)$	0
$(v_3, v_4), (v_5, v_7)$	14.2
$(v_3, v_5), (v_6, v_4)$	8.1
$(v_3, v_5), (v_6, v_5)$	23.6
$(v_3, v_5), (v_4, v_7)$	7.2
$(v_3, v_5), (v_5, v_7)$	8.2
$(v_6, v_4), (v_6, v_5)$	18.5
$(v_6, v_4), (v_4, v_7)$	16.8
$(v_6, v_4), (v_5, v_7)$	0
$(v_6, v_5), (v_4, v_7)$	32.7
$(v_6, v_5), (v_5, v_7)$	18.9
$(v_4, v_7), (v_5, v_7)$	17.1

maka $z^*(1) = maks\,\{z(1)\} = 34.1$

Kemudian akan dihitung $c^*_{maks}(1)$

(v_i, v_j)	$c_{maks}(1) = d_{ij} - \frac{z^*(1)}{w_{ij}}$
(v_1, v_3)	-0.1
(v_1, v_6)	3.7
(v_2, v_3)	-0.4
(v_2, v_6)	1.9
(v_3, v_4)	0.9
(v_3, v_5)	2.6
(v_6, v_4)	4.2
(v_6, v_5)	6.1
(v_4, v_7)	1.7
(v_5, v_7)	4.3

❖ Maka didapatkan:

$c^*_{maks}(1) = maks\{-0.1, 3.7, -0.4, 1.9, 0.9, 2.6, 4.2, 6.1, 1.7, 4.3\} = 6.1$

(dalam ribuan rupiah)

atau $c^*_{maks}(1) = \text{Rp}. 6.100$

➢ Untuk $p = 2$

Akan dihitung $z^*(2)$

(v_i, v_j)	w_{ij}	d_{ij}
(v_1, v_4)	21	5
(v_1, v_5)	23	7
(v_2, v_4)	12	5
(v_2, v_5)	20	7
(v_3, v_7)	18	6
(v_6, v_7)	23	8

$(v_{i_1}, v_{j_1}), (v_{i_2}, v_{j_2})$	$z(2) = \frac{w_{i_1j_1} w_{1_2j_2}}{w_{i_1j_1} + w_{i_2j_2}} (d_{i_1j_1} - d_{i_2j_2})$
(v_1, v_4),(v_1, v_5)	21.9
(v_1, v_4), (v_2, v_4)	0
(v_1, v_4), (v_2, v_5)	20.5
(v_1, v_4), (v_3, v_7)	9.7
(v_1, v_4), (v_6, v_7)	32.9
(v_1, v_5), (v_2, v_4)	15.8
(v_1, v_5), (v_2, v_5)	0
(v_1, v_5), (v_3, v_7)	10.1
(v_1, v_5), (v_6, v_7)	11.5
(v_2, v_4), (v_2, v_5)	15
(v_2, v_4), (v_3, v_7)	7.2
(v_2, v_4), (v_6, v_7)	23.6
(v_2, v_5), (v_3, v_7)	9.5
(v_2, v_5), (v_6, v_7)	10.7
(v_3, v_7),(v_6, v_7)	20.2

maka $z^*(2) = maks\{z(2)\} = 32.9$

Kemudian akan dihitung $c^*_{maks}(2)$

(v_i, v_j)	$c_{maks}(2) = d_{ij} - \frac{z^*(2)}{w_{ij}}$
(v_1, v_4)	3.4
(v_1, v_5)	5.6
(v_2, v_4)	2.3
(v_2, v_5)	5.4
(v_3, v_7)	4.2
(v_6, v_7)	6.6

maka $c^*_{maks}(2) = maks\{3.4, 5.6, 2.3, 5.4, 4.2, 6.6\} = 6.6$ (dalam ribuan rupiah)

- Atau $c^*_{maks}(2) =$ Rp. 6.600

- Untuk $p = 3$

Akan dihitung $z^*(3)$

(v_i, v_j)	w_{ij}	d_{ij}
(v_1, v_7)	13	8
(v_2, v_7)	17	7

$(v_{i_1}, v_{j_1}), (v_{i_2}, v_{j_2})$	$z(3) = \frac{w_{i_1j_1}w_{1_2j_2}}{w_{i_1j_1} + w_{i_2j_2}}(d_{i_1j_1} - d_{i_2j_2})$
$(v_1, v_7), (v_2, v_7)$	7.4

maka, $z^*(3) = 7.4$

Kemudian akan dihitung $c^*_{maks}(3)$

(v_i, v_j)	$c_{maks}(3) = d_{ij} - \frac{z^*(3)}{w_{ij}}$
(v_1, v_7)	7.4
(v_2, v_7)	6.6

maka $c^*_{maks}(3) = maks\{7.4, 6.6\} = 7.4$ (dalam ribuan rupiah)

❖ Atau $c^*_{maks}(3) =$ Rp. 7.400

Jadi, didapat $z_{ij} = c^*_{maks}(p)$, untuk $p = 0, 1, 2, 3$ sebagai berikut:

$c^*_{maks}(0) =$ Rp. 3.000

$c^*_{maks}(1) =$ Rp. 6.100

$c^*_{maks}(2) =$ Rp. 6.600

$c^*_{maks}(3) =$ Rp. 7.400

- Akan dicari $z_{ij} = c^*_1(p)$ untuk fungsi tujuan b_1 :

$$z_{ij} = c^*_1(p) = \text{median}\left\{\underbrace{d_{ij}, d_{ij}, \dots \dots, d_{ij}}_{w_{ij} kali} : v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j, n_{ij} = p\right\}$$

misalkan n_p merupakan jumlah anggota M_p

misalkan $m^p_1, m^p_2, \dots, m^p_{n_p} \in M_p$ dimana $d_{m^p_1} \leq d_{m^p_2} \leq \cdots \leq d_{m^p_{n_p}}$

Untuk $p = 0$

n	m_n^0	$w_{m_n^0}$	$d_{m_n^0}$
1	(v_1, v_2)	10	2
2	(v_4, v_5)	10	3
3	(v_3, v_6)	10	4

❖ Maka $c_1^*(0) = d_{m_2}^0 = 3$ (dalam ribuan rupiah)
Jadi, $c_1^*(0)$ = Rp. 3.000

➢ Untuk $p = 1$

n	m_n^1	$w_{m_n^1}$	$d_{m_n^1}$
1	(v_1, v_3)	11	3
2	(v_2, v_3)	10	3
3	(v_3, v_4)	11	4
4	(v_4, v_7)	15	4
5	(v_2, v_6)	11	5
6	(v_3, v_5)	14	5
7	(v_1, v_6)	15	6
8	(v_6, v_4)	19	6
9	(v_5, v_7)	20	6
10	(v_6, v_5)	18	8

❖ Maka $c_1^*(1) = 5.5$ (dalam ribuan rupiah)
Jadi, $c_1^*(1)$ = Rp. 5.500

➢ Untuk $p = 2$

n	m_n^2	$w_{m_n^2}$	$d_{m_n^2}$
1	(v_1, v_4)	21	5
2	(v_2, v_4)	12	5
3	(v_3, v_7)	18	6
4	(v_1, v_5)	23	7
5	(v_2, v_5)	20	7
6	(v_6, v_7)	23	8

❖ Maka $c_1^*(2) = d_{m_4}^2 = 7$ (dalam ribuan rupiah)
Jadi, $c_1^*(2)$ = Rp. 7.000

- Untuk $p = 3$

n	m_n^3	$w_{m_n^3}$	$d_{m_n^3}$
1	(v_2, v_7)	17	7
2	(v_1, v_7)	13	8

- Maka $c_1^*(3) = d_{m_1}^3 = 7$ (dalam ribuan rupiah)
  Jadi, $c_1^*(3)$ = Rp. 7.000

Jadi, didapat $z_{ij} = c_1^*(p)$, untuk $p = 0, 1, 2, 3$ sebagai berikut:

$c_1^*(0) = \text{Rp. } 3.000$

$c_1^*(1) = \text{Rp. } 5.500$

$c_1^*(2) = \text{Rp. } 7.000$

$c_1^*(3) = \text{Rp. } 7.000$

- Akan dicari $z_{ij} = c_2^*(p)$ untuk fungsi tujuan b_2 :

$$z_{ij} = c_2^*(p) = \frac{1}{W_p} \sum_{\substack{v_i, v_j \in V \\ n_{ij} = p}} w_{ij} d_{ij}$$

- Untuk $p = 0$

(v_i, v_j)	w_{ij}	d_{ij}	$w_{ij} d_{ij}$
(v_1, v_2)	10	2	20
(v_4, v_5)	10	3	30
(v_3, v_6)	10	4	40
$\sum w_{ij}$	30	$\sum w_{ij} d_{ij}$	90

- Maka didapat, $c_2^*(0) = \frac{1}{30}(90) = 3$ (dalam ribuan rupiah)
  Jadi, $c_2^*(0)$ =Rp. 3.000

- Untuk $p = 1$

(v_i, v_j)	w_{ij}	d_{ij}	$w_{ij}d_{ij}$
(v_1, v_3)	11	3	33
(v_1, v_6)	15	6	90
(v_2, v_3)	10	3	30
(v_2, v_6)	11	5	55
(v_3, v_4)	11	4	44
(v_3, v_5)	14	5	70
(v_6, v_4)	19	6	114
(v_6, v_5)	18	8	144
(v_4, v_7)	15	4	60
(v_5, v_7)	20	6	120
$\sum w_{ij}$	144	$\sum w_{ij}d_{ij}$	760

- $c_2^*(1) = \frac{1}{144}(760) = 5.3$ (dalam ribuan rupiah)
  Jadi, $c_2^*(1) =$Rp. 5.300

- Untuk $p = 2$

(v_i, v_j)	w_{ij}	d_{ij}	$w_{ij}d_{ij}$
(v_1, v_4)	21	5	105
(v_1, v_5)	23	7	161
(v_2, v_4)	12	5	60
(v_2, v_5)	20	7	140
(v_3, v_7)	18	6	108
(v_6, v_7)	23	8	184
$\sum w_{ij}$	117	$\sum w_{ij}d_{ij}$	758

- $c_2^*(2) = \frac{1}{117}(758) = 6.5$ (dalam ribuan rupiah)
  Jadi, $c_2^*(2) =$Rp. 6.500

- Untuk $p = 3$

(v_i, v_j)	w_{ij}	d_{ij}	$w_{ij}d_{ij}$
(v_1, v_7)	13	8	104
(v_2, v_7)	17	7	119
$\sum w_{ij}$	30	$\sum w_{ij}d_{ij}$	223

- $c_2^*(3) = \frac{1}{30}(223) = 7.4$ (dalam ribuan rupiah)

  Jadi, $c_2^*(3)$ =Rp. 7.400

Jadi, didapat $z_{ij} = c_2^*(p)$, untuk $p = 0, 1, 2, 3$ sebagai berikut:

$c_2^*(0)$ = Rp 3.000

$c_2^*(1)$ = Rp 5.300

$c_2^*(2)$ = Rp 6.500

$c_2^*(3)$ = Rp7.400

Maka didapatkan tarif berdasarkan zone:

Untuk $p = 0$

$c(0) = \min\{c_{maks}^*(0), c_1^*(0), c_2^*(0)\} = \min\{Rp. 3000, Rp. 3000, Rp. 3000\}$

$= Rp. 3000$

Untuk $p = 1$

$c(1) = \min\{c_{maks}^*(1), c_1^*(1), c_2^*(1)\} = \min\{Rp. 6100, Rp. 5500, Rp. 5300\}$

$= Rp. 5300$

Untuk $p = 2$

$c(2) = \min\{c_{maks}^*(2), c_1^*(2), c_2^*(2)\} = \min\{Rp. 6600, Rp. 7000, Rp. 6500\}$

$= Rp. 6500$

Untuk $p = 3$

$c(3) = \min\{c_{maks}^*(3), c_1^*(3), c_2^*(3)\} = \min\{Rp. 7400, Rp. 7000, Rp. 7400\}$

$= Rp. 7000$

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Masalah penentuan tarif baru dari yang semula menggunakan sistem tarif berdasarkan jarak menjadi sistem tarif berdasarkan *zone* dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis. Pemodelan tarif berdasarkan *zone* yang yang didapatkan adalah:

Minimum: $c(p) \epsilon \{c^*_{maks}(p), c^*_1(p), c^*_2(p)\}$, untuk setiap p

dimana:

$c^*_{maks}(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat $b_{maks} = \text{maks}_{v_i,v_j \in V} w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ menjadi minimum.

$c^*_1(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat $b_1 = \frac{1}{W}\sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij}\left|d_{ij} - z_{ij}\right|$ menjadi minimum.

$c^*_2(p)$ merupakan z_{ij} yang membuat $b_2 = \frac{1}{W}\sum_{v_i,v_j \in V} w_{ij}\left(d_{ij} - z_{ij}\right)^2$ menjadi minimum.

dengan syarat: $z_{ij} \geq 0, \quad \forall\, v_i, v_j \in V$

$z_{ij} \in \boldsymbol{N}, \quad \forall\, v_i, v_j \in V$

Kemudian solusi yang didapatkan tarif berdasarkan *zone* untuk

$p = 0, 1, 2, \dots, L-1$ dari fungsi tujuan tersebut adalah

1) $z_{ij} = c^*_{maks}(p) = \max_{\substack{v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j \\ n_{ij}=p}} d_{ij} - \frac{z^*(p)}{w_{ij}}$

dengan $z^*(p) = \max_{\substack{i_1, j_1, i_2, j_2 \in V \\ n_{i_1 j_1} = n_{i_2 j_2} = p}} \frac{w_{i_1 j_1} w_{1_2 j_2}}{w_{i_1 j_1} + w_{i_2 j_2}} (d_{i_1 j_1} - d_{i_2 j_2})$

jika fungsi tujuan yang digunakan adalah $b_{maks} = \text{maks}_{v_i, v_j \in V} w_{ij} \left| d_{ij} - z_{ij} \right|$

2) $z_{ij} = c^*_1(p) = \text{median}\{\underbrace{d_{ij}, d_{ij}, \dots, d_{ij}}_{w_{ij} kali} : v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j, n_{ij} = p\}$

jika fungsi tujuan yang digunakan adalah $b_1 = \frac{1}{W} \sum_{v_i, v_j \in V} w_{ij} \left| d_{ij} - z_{ij} \right|$

3) $z_{ij} = c^*_2(p) = \frac{1}{W_p} \sum_{\substack{v_i, v_j \in V \\ n_{ij}=p}} w_{ij} d_{ij}$

jika fungsi tujuan yang digunakan adalah $b_2 = \frac{1}{W} \sum_{v_i, v_j \in V} w_{ij} \left(d_{ij} - z_{ij} \right)^2$

dimana:

z_{ij} : tarif berdasarkan *zone* dari perjalanan yang dilakukan dari halte v_i ke halte v_j

d_{ij} : tarif berdasarkan jarak dari perjalanan yang dilakukan dari halte v_i ke halte v_j

w_{ij} : banyak penumpang yang melakukan perjalanan dari halte v_i ke halte v_j

n_{ij} : banyak *zone* yang dilewati dari perjalanan yang dilakukan dari halte v_i ke halte v_j

p : banyak *zone* yang dilewati oleh seseorang yang melakukan perjalanan

$c(p)$: tarif yang harus dibayarkan seseorang yang melewati p buah *zone*

W_p : jumlah seluruh penumpang yang melewati p buah *zone* pada perjalanannya

Dengan pemodelan seperti itu, diharapkan perubahan tarif yang terjadi menjadi seminimum mungkin sehingga baik perusahaan maupun penumpang tidak ada yang terlalu dirugikan dengan adanya perubahan tarif tersebut. Hal penting yang harus diketahui adalah *zone* sudah ditetapkan terlebih dahulu, sehingga solusi yang didapatkan merupakan solusi yang optimum untuk *zone* yang telah ditetapkan sebelumnya.

5.2 Saran

Diharapkan untuk penelitian selanjutnya bisa dilakukan dengan memodelkan *zone*nya terlebih dahulu. Sehingga, solusi yang didapatkan bisa menjadi lebih optimal dari pada solusi yang didapatkan pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Deo, N. (1980). *Graph Theory With Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice Hall

Farahani, R. Z.(2009). *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies*. New York: Springer

Hamacher, H. W., Schöbel, A. (2004). Design of Zone Tariff Systems in Public Transportation. *Operation Research*, Vol. 52, No. 6, 897– 908

Love, R. F., Morris, J. G., Wesolowsky, G. O. (1988). *Facilities Location: Models and Methods*. Amsterdam: North-Holland.

Meyer, W. J. (1985). *Concept of Mathematical Modelling*. Singapore: McGraw-Hill Book Company

Hamacher, H. W., Schöbel, A. (1995). On fair zone design in public transportation. *Computer-Aided Transit Scheduling*, no. 430. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, Berlin, Germany and Heidelberg, Germany, 8–22

Schobel, A. (2005). *Optimization in Public Transportation*. New York: Springer .

Siregar , M. (1990). *BeberapaMasalah Ekonomi dan Manajemen Pengangkutan*. Jakarta: LPFE UI.

Verberg, D., Purcell,E. J., Rigdon,S. E. (2004). *Kalkulus*. Jilid 2. Edisi kedelapan. Jakarta:Penerbit Erlangga