UNIVERSITAS INDONESIA

DAMPAK MODIFIKASI PADA JAMINAN ASURANSI TERHADAP DISTRIBUSI BESAR KLAIM DAN BANYAK KLAIM UNTUK PERHITUNGAN PREMI DENGAN IMPLEMENTASI PADA REASURANSI

SKRIPSI

TRI BUDI NOVIA CAHYANI
0806325762

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

DAMPAK MODIFIKASI PADA JAMINAN ASURANSI TERHADAP DISTRIBUSI BESAR KLAIM DAN BANYAK KLAIM UNTUK PERHITUNGAN PREMI DENGAN IMPLEMENTASI PADA REASURANSI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

TRI BUDI NOVIA CAHYANI
0806325762

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK

JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Tri Budi Novia Cahyani
NPM	: 0806325762
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 18 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	: Tri Budi Novia Cahyani
NPM	: 0806325762
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Dampak Modifikasi pada Jaminan Asuransi terhadap Distribusi Besar Klaim dan Banyak Klaim untuk Perhitungan Premi dengan Implementasi pada Reasuransi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra. Netty Sunandi, M.Si	(Netty S)
Pembimbing	: Nico Demus, S.Si, M.Sc, FSAI, AAAIJ	( )
Penguji	: Dra. Rianti Setiadi, M.Si.	( )
Penguji	: Dra. Saskya Mary S, M.Si.	( )
Penguji	: Mila Novita, M.Si.	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 18 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji penulis ucapkan kepada Allah SWT atas rahmat, pertolongan, dan petunjuk-Nya, sehingga penulisan skripsi dengan judul “Dampak Modifikasi pada Jaminan Asuransi terhadap Distribusi Besar Klaim dan Banyak Klaim untuk Perhitungan Premi dengan Implementasi pada Reasuransi“ ini dapat terselesaikan. Penulisan skripsi ini diselesaikan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan skripsi ini maupun selama penulis kuliah, yaitu kepada :

1. Orang tua penulis yang telah mengasuh dan mendidik penulis sampai saat ini dengan berbagai limpahan kasih sayang yang tulus, serta senantiasa mendampingi penulis dengan doa dalam setiap langkah penulis.
2. Ibu Dra. Netty Sunandi, M. Si selaku dosen pembimbing 1 dan pembimbing akademis. Terima kasih sebesar-besarnya untuk semua bantuan, saran, kritik, dorongan, dan bimbingan yang luar biasa yang diberikan kepada penulis dalam perjalanan penulis selama belajar di departemen Matematika UI serta dalam penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Nico Demus, S.Si, M.Sc, FSAI, AAAIJ selaku pembimbing 2. Terima kasih sebesar-besarnya untuk semua bantuan, saran, kritik, dan waktu yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T. selaku ketua departemen dan Mbak Rahmi Rusin, S.Si., M.Sc.Tech selaku sekretaris departemen atas berbagai bantuan, saran, dan nasihat yang telah diberikan kepada penulis selama berada di departemen Matematika UI dan selama penyelesaian skripsi ini.
5. Bu Rianti, Mbak Mila, Mbak Sarini, Mbak Fevi, Bu Sasky, Bu Sri, Bu Dian, Bu Ida, BuNur, Bu Bella, Bu Suarsih, Bu Nora, Bu Helen, dan seluruh staf

pengajar departemen Matematika UI yang tanpa mengurangi rasa hormat tidak dapat disebutkan namanya satu per satu, terima kasih atas segala ilmu yang telah diberikan. Semoga dapat bermanfaat dan memberi berkah.

6. Pak Saliman, Mbak Santi, dan seluruh karyawan departemen Matematika UI, terima kasih atas segala bantuan yang diberikan untuk penulis.
7. Mas Eko Budi Sanyoto, Mbak Dwi Budi Setiari, Mbak Liesca Levy Sandhy, Mas Slamet Rianto, serta dua bidadari mungil Asmaa Pramesti Mahira dan Citta Nadzira Arianto, terima kasih atas doa, dukungan, dan semangatnya.
8. Firda, Tia, Lady, terima kasih untuk LIFT yang sangat berarti, *charger* lahir batin yang luar biasa, serta Mas Rosyid atas semangat yang selalu diberikan.
9. Teman-teman seperjuangan di aktuaria, Eka, Cindy, Numa, terima kasih atas semangat dan perjuangan yang sangat berkesan selama ini.
10. Vika, Nadia, Maimun, Yulial, Dhea, Uchi, Uci, Nora, Janu, dan teman asrama lainnya, terima kasih atas suka, duka, nasihat, dan motivasinya.
11. Dian, Asri, Luthfa, Tuti, Kiki, Hindun, Sita, Andy, Nisah, Siwi, Ega, Emy, Mei, Dhewe, Maul, Ifah, Ade, Nita, Agnes, May, Oline, Citra, Resti, Lian, Ines, Risya, Dhila, Wulan, Fany, Awe, Dheni, Adhi, Bowo, Umbu, Arief, Puput, Arman, Danis, Hendry, Dede, Agy, Masykur, Arkies, Ze, Dini, Juni, terima kasih atas segala hal luar biasa dan tak terlupakan selama kuliah.
12. Mika, Lulu, Kak Zul, Kak Widi, Fauzan, Budhi, Dwi, dan teman Kopma FMIPA UI lainnya atas berbagai pengalaman dan pelajaran yang berkesan.
13. Mbak Elyn, Kak Apri, Tika, Aya, Ika, Puri Handayani, dan semua bagian keluarga kecil yang selalu menghibur dan mendukung penulis.
14. Seluruh kakak dan adik yang mewarnai departemen Matematika UI.
15. Semua pihak yang telah membantu pengerjaan skripsi ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu per satu, penulis mengucapkan terima kasih.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan pada skripsi ini. Sehingga, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembacanya.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI SKRIPSI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Tri Budi Novia Cahyani
NPM	: 0806325762
Program Studi	: S1
Departemen	: Matematika
Fakultas	: MIPA
Jenis karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Dampak Modifikasi pada Jaminan Asuransi terhadap Distribusi Besar Klaim dan Banyak Klaim untuk Perhitungan Premi dengan Implementasi pada Reasuransi

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalty Nonekslusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 18 Juni 2012
Yang menyatakan

(Tri Budi Novia Cahyani)

ABSTRAK

Nama : Tri Budi Novia Cahyani
Program Studi : Matematika
Judul : Dampak Modifikasi pada Jaminan Asuransi terhadap Distribusi Besar Klaim dan Banyak Klaim untuk Perhitungan Premi dengan Implementasi pada Reasuransi

Untuk menghindari kerugian yang besar, perusahaan asuransi biasanya menetapkan modifikasi (*deductible*, *policy limit*, atau *coinsurance*) pada jaminan asuransi. Modifikasi tersebut menyebabkan perubahan pada distribusi besar dan banyak klaim, yang diperlukan dalam perhitungan premi. Pada skripsi ini dibahas perubahan-perubahan distribusi tersebut. Untuk distribusi besarnya klaim, perubahan dilihat dari fungsi distribusi, fungsi probabilitas densitas, dan fungsi survival. Untuk distribusi banyaknya klaim, perubahan dilihat dari fungsi pembangkit probabilitasnya. Distribusi banyaknya klaim yang dibahas adalah distribusi diskrit anggota kelas $(a, b, 0)$ dan $(a, b, 1)$. Selain itu, dibahas pula perhitungan premi pada jaminan asuransi termodifikasi yang melibatkan perubahan-perubahan pada distribusi tersebut, serta beberapa implementasi dari modifikasi pada jaminan asuransi dalam dunia reasuransi.

Kata Kunci : *deductible*, *policy limit*, *coinsurance*, distribusi besar klaim, distribusi banyak klaim, premi, reasuransi, *quota share*, *excess of loss*.
xii + 115 halaman ; 2 gambar ; 7 tabel
Bibliografi : 8 (1984 – 2006)

ABSTRACT

Name : Tri Budi Novia Cahyani
Program Study : Mathematics
Title : The Impacts of Coverage Modifications on Frequency and Severity Distributions for Premium Calculation with the Implementations in Reinsurance

To avoid large losses, insurance companies usually set modifications (deductibles, policy limits, and coinsurance) on insurance coverage. These modifications lead to major changes in the severity and frequency distributions of claims, which is required in the calculation of premiums. This minithesis discussed the changes of those distributions. For severity distribution, the changes will be presented from the distribution function, probability density function, and survival functions. For frequency distribution, the changes will be seen from the probability generating function. Frequency distributions discussed here are the members of $(a, b, 0)$ and $(a, b, 1)$ class of distributions. Beside that, discussed also in this minithesis, the premium calculations of insurance coverage with modifications that use the changes of distribution, as well as some implementations of coverage modifications in the reinsurances.

Keywords : deductible, policy limit, coinsurance, frequency distribution, severity distribution, premium, reinsurance, quota share, excess of loss.
xii + 115 pages ; 2 pictures ; 7 tables
Bibliography : 8 (1984 – 2006)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pada saat ini asuransi semakin dikenal oleh masyarakat. Kontrak asuransi pun telah banyak dimiliki oleh berbagai kalangan. Dengan semakin banyaknya nasabah yang dimiliki, perusahaan asuransi tentunya semakin berhati-hati pula terhadap kerugian yang mungkin dialami. Terkadang, terdapat klaim dari nasabah yang sangat besar sehingga perusahaan asuransi kesulitan untuk membayarnya. Sehingga, perusahaan asuransi berpotensi untuk mengalami kerugian atau bahkan kebangkrutan. Oleh karena itu, perusahaan asuransi perlu menentukan modifikasi pada kontrak jaminan asuransi.

Modifikasi-modifikasi yang sering dilakukan oleh perusahaan asuransi adalah *deductible*, *policy limit*, *coinsurance*, atau gabungan dari beberapa modifikasi tersebut. Pada *deductible*, perusahaan asuransi menetapkan besar *loss* minimum yang dapat dibayar sebagai klaim, misal sebesar d. Hal ini dilakukan untuk menghindari klaim-klaim yang nilainya kecil, yaitu yang kurang dari d, sehingga dapat mengurangi banyaknya klaim yang harus dibayar oleh perusahaan asuransi. Pada *policy limit*, perusahaan asuransi menetapkan batas atas untuk besar klaim yang akan dibayarkan, misal sebesar u. Jadi, apabila terdapat *loss* yang melebihi u, maka perusahaan asuransi hanya akan melakukan pembayaran maksimum sebesar u, meskipun *loss* yang terjadi lebih besar dari u. Dengan menerapkan *policy limit*, maka perusahaan asuransi tidak perlu melakukan pembayaran dengan nilai yang terlalu besar. Sedangkan pada *coinsurance*, perusahaan asuransi hanya membayar sebagian dari besar *loss* yang diajukan sebagai klaim berdasarkan proporsi yang telah ditetapkan di awal.

Ketika modifikasi-modifikasi tersebut dilakukan pada suatu kontrak jaminan asuransi, maka distribusi dari besar dan banyaknya klaim yang dibayarkan oleh perusahaan asuransi akan berubah. Sebagai contoh, adanya *deductible* pada jaminan asuransi dapat menyebabkan distribusi dari banyaknya klaim yang dibayarkan oleh perusahaan asuransi berubah, karena banyaknya klaim yang harus dibayarkan oleh peusahaan asuransi mungkin berkurang dengan tidak dibayarkannya klaim-klaim kecil. Sedangkan *policy limit* dan *coinsurance* hanya mengubah distribusi dari besarnya klaim yang dibayarkan oleh perusahaan asuransi karena perbedaan antara besar *loss* yang diajukan sebagai klaim dan besar pembayaran yang dilakukan.

Tidak hanya modifikasi-modifikasi pada jaminan asuransi, perubahan dari distribusi besar dan banyaknya klaim dipengaruhi pula oleh faktor eksternal, yaitu inflasi. Inflasi sebesar r akan menyebabkan terjadinya peningkatan pada *loss* sebesar $(1 + r)$ dan kemungkinan akan menyebabkan peningkatan pada besar dan banyaknya pembayaran klaim. Dengan demikian, inflasi mungkin pula menyebabkan distribusi dari besar dan banyaknya klaim berubah.

Dalam aktuaria, distribusi dari besar dan banyaknya klaim tersebut sangat penting, karena akan digunakan dalam peramalan atau prediksi biaya-biaya asuransi di masa depan, seperti taksiran nilai premi, dana cadangan, dan lain-lain. Distribusi yang berbeda akan menghasilkan perhitungan yang berbeda pula. Oleh karena itu, taksiran-taksiran biaya untuk jaminan asuransi yang termodifikasi berbeda dengan perhitungan-perhitungan pada jaminan asuransi penuh.

Selain itu, untuk menghindari kerugian, perusahaan asuransi biasanya mengalihkan sebagian dari risiko yang harus ditanggung kepada perusahaan reasuransi. Hal ini merupakan aplikasi dari modifikasi karena perusahaan reasuransi tidak perlu membayar penuh atas risiko / *loss* yang terjadi.

Pada skripsi ini akan dibahas perubahan distribusi dari besar dan banyaknya *loss* menjadi distribusi dari besar dan banyaknya pembayaran klaim, atau hanya disebut distribusi besar dan banyaknya klaim. Kemudian, akan dibahas pula perhitungan premi bersih akibat perubahan dari distribusi-distribusi tersebut, serta aplikasinya pada reasuransi proporsional dan non-proporsional.

1.2. Perumusan Masalah

Permasalahan yang menjadi bahasan dalam skripsi ini adalah bagaimana perhitungan premi berdasarkan perubahan-perubahan yang terjadi pada distribusi besar dan banyaknya klaim akibat modifikasi pada jaminan asuransi dan reasuransi (baik proporsional maupun non-proporsional).

1.3. Metode yang Digunakan

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah tersebut, maka penulisan skripsi ini bertujuan untuk :

a. Melihat efek dari modifikasi pada jaminan asuransi terhadap distribusi besarnya pembayaran klaim.
b. Melihat efek dari modifikasi pada jaminan asuransi terhadap distribusi banyakya pembayaran klaim.
c. Mengetahui perhitungan premi pada jaminan asuransi dengan modifikasi.
d. Mengetahui aplikasi modifikasi pada reasuransi proporsional dan non-proporsional.

1.5. Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah yang digunakan dalam skripsi ini adalah :

a. Jenis-jenis modifikasi pada jaminan asuransi yang dibahas dalam skripsi ini adalah *deductible*, *policy limit*, dan *coinsurance*.
b. Distribusi banyaknya klaim yang dibahas dalam skripsi ini adalah distribusi diskrit anggota kelas $(a, b, 0)$ dan $(a, b, 1)$.
c. Jenis reasuransi proporsional yang dibahas dalam skripsi ini adalah reasuransi *quota share*.
d. Jenis reasuransi non-proporsional yang dibahas dalam skripsi ini adalah reasuransi *excess of loss*.

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Fungsi-Fungsi yang Berhubungan dengan Variabel Acak

Terdapat beberapa fungsi yang berguna dalam menjelaskan variabel acak X, antara lain :

Definisi 2.1

Fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*, disingkat cdf), disebut juga fungsi distribusi dan dilambangkan dengan $F_X(x)$ atau $F(x)$, untuk suatu variabel acak X adalah probabilitas bahwa X bernilai lebih kecil atau sama dengan suatu nilai yang diberikan. Definisi formalnya adalah
$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$.
(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

Definisi 2.2

Fungsi survival, dilambangkan dengan $S_X(x)$ atau $S(x)$, untuk suatu variabel acak X adalah probabilitas bahwa X bernilai lebih besar dari suatu nilai yang diberikan. Definisi formalnya adalah $S_X(x) = \Pr(X > x) = 1 - F_X(x)$.
(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

Definisi 2.3

Fungsi probabilitas densitas (*probability density function*, disingkat pdf) untuk suatu variabel acak kontinu X dan dilambangkan dengan $f_X(x)$ atau $f(x)$, adalah turunan dari fungsi distribusi, atau turunan negatif dari fungsi survival. Definisi formalnya adalah $f(x) = F'(x) = -S'(x)$.
(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

Definisi 2.4

Fungsi probabilitas (*probability function*, disingkat pf) untuk suatu variabel acak diskrit X dan dilambangkan dengan $p_X(x)$ atau $p(x)$ atau p_x, menunjukkan probabilitas pada titik diskrit. Definisi formalnya adalah $p_X(x) = \Pr(X = x)$.
(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

2.2 Probabilitas Bersyarat

Berikut ini adalah definisi dari probabilitas bersyarat dari suatu kejadian.

Definisi 2.5

Misalkan C_2 dan C_1 menyatakan suatu kejadian. Probabilitas bersyarat dari C_2 diberikan C_1 dengan $P(C_1) > 0$ didefinisikan sebagai

$$P(C_2 | C_1) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1)}. \tag{2.1}$$

(Hogg dan Craig, 1995)

Teorema 2.1

Misalkan $C_1, C_2, \ldots, C_k$ menyatakan kumpulan k kejadian yang *mutually exclusive* dan *exhaustive* dimana

$$C_i \cap C_j = \emptyset \text{ untuk } i \neq j$$
$$P(C_i) > 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, k$$
$$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k = \Omega$$

dimana Ω menyatakan seluruh ruang sampel. Dalam hal ini, $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tidak perlu *equally likely*. Misalkan C adalah kejadian lain sedemikian hingga $P(C) > 0$. Maka,

$$P(C) = \sum_{i=1}^{k} P(C_i) P(C | C_i) \tag{2.2}$$

Hasil tersebut disebut dengan *law of total probability*.
(Hogg dan Craig, 1995)

Bukti :

Dengan menggunakan definisi 2.5 diperoleh $P(C|C_i) = \dfrac{P(C \cap C_i)}{P(C_i)}$ sehingga

$P(C \cap C_i) = P(C_i) \cdot P(C|C_i)$.

Maka

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(C \cap \Omega) \\
&= P\left[C \cap (C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k)\right] \\
&= P\left[(C \cap C_1) \cup (C \cap C_2) \cup \ldots \cup (C \cap C_k)\right] \\
&= P(C \cap C_1) + P(C \cap C_2) + \ldots + P(C \cap C_k) \\
&= P(C_1) \cdot P(C \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(C \mid C_2) + \ldots + P(C_k) \cdot P(C \mid C_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(C_i) \cdot P(C \mid C_i)
\end{aligned}$$

■

Selanjutnya, akan dibahas mengenai pdf bersyarat untuk suatu variabel acak.

Definisi 2.6

Pdf bersyarat dari variabel random X_2, diberikan suatu nilai variabel random $X_1 = x_1$ adalah

$$f_{2|1}(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} = \Pr(X_2 | X_1 = x_1) \tag{2.3}$$

di mana $f(x_1, x_2)$ adalah pdf bersama dari X_1 dan X_2, sedangkan $f_1(x_1)$ adalah pdf marginal dari X_1 dengan

$$\begin{aligned}
f_1(x_1) &= \int f(x_1, x_2)\, dx_2 \quad , \quad \text{untuk kasus kontinu} \\
&= \sum_{x_2} f(x_1, x_2) \quad , \quad \text{untuk kasus diskrit}
\end{aligned}$$

(Hogg dan Craig, 1995)

2.3 Ekspektasi dan Ekspektasi bersyarat dari Variabel Acak

Definisi 2.7

Misalkan *X* adalah variabel acak yang memiliki pdf $f(x)$. Ekspektasi dari *X*, dinyatakan dengan $E(X)$, adalah

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \Pr\left(X = x_j\right), \text{ pada kasus diskrit,}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \text{ pada kasus kontinu.} \tag{2.4}$$

(Hogg dan Craig, 1995)

<u>Definisi 2.8</u>

Misalkan $\mathrm{u}(\mathrm{X})$ adalah fugsi dari variabel acak X yang memiliki pdf $f(x)$. Ekspektasi dari $\mathrm{u}(\mathrm{X})$, dinyatakan dengan $E[\mathrm{u}(\mathrm{X})]$, adalah

$$E\left[\mathrm{u}(X)\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{u}\left(x_j\right) \cdot \Pr\left(X = x_j\right), \text{ pada kasus diskrit,}$$

$$E\left[\mathrm{u}(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(x)\, f(x)dx, \text{ pada kasus kontinu.} \tag{2.5}$$

(Hogg dan Craig, 1995)

<u>Definisi 2.9</u>

Jika $\mathrm{u}(\mathrm{X}_2)$ adalah fungsi dari X_2, ekspektasi

$$E\left[u\left(X_2\right)\middle| x_1\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u\left(x_2\right) f_{2|1}\left(x_2 \middle| x_1\right) dx_2 \tag{2.6}$$

disebut ekspektasi bersyarat dari $\mathrm{u}(\mathrm{X}_2)$ diberikan $X_1 = x_1$, di mana

$$\int_a^b f_{2|1}\left(x_2 \middle| x_1\right) dx_2 = \Pr\left(a < X_2 < b \middle| X_1 = x_1\right)$$

adalah probabilitas bersyarat bahwa $a < X_2 < b$ diberikan $X_1 = x_1$.

(Hogg dan Craig, 1995)

Misalkan X dan Y adalah variabel acak, maka

$$E(Y) = E_X\left[E_Y\left(Y \middle| X\right)\right] \tag{2.7}$$

(Hogg dan Craig, 1995)

<u>Bukti</u> :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\,dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy\right] f_X(x)\,dx$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\, dy \right] f_X(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} E_Y(Y|x)\, f_X(x)\, dx$$
$$= E_X\left[E_Y(Y|X) \right]$$

■

Misalkan X dan Y adalah variabel acak, maka

$$\text{Var}_Y(Y) = \text{Var}_X\left[E_Y(Y|X)\right] + E_X\left[\text{Var}_Y(Y|X)\right] \tag{2.8}$$

(Hogg dan Craig, 1995)

Bukti :

$$E_X\left[\text{Var}_Y[Y \mid X]\right] = E_X\left[E_Y\left[Y^2 \mid X\right] - \left(E_Y[Y \mid X]\right)^2\right]$$
$$= E_X\left[E_Y\left[Y^2 \mid X\right]\right] - E_X\left[\left(E_Y[Y \mid X]\right)^2\right]$$
$$= E_Y\left[Y^2\right] - E_X\left[\left(E_Y[Y \mid X]\right)^2\right]$$
$$= E_Y\left[Y^2\right] - E_X\left[\left(E_Y[Y \mid X]\right)^2\right] - \left(E_Y[Y]\right)^2 + \left(E_Y[Y]\right)^2$$
$$= \left\{E_Y\left[Y^2\right] - \left(E_Y[Y]\right)^2\right\} - \left\{E_X\left[\left(E_Y[Y \mid X]\right)^2\right] - \left(E_X\left[E_Y[Y \mid X]\right]\right)^2\right\}$$
$$= \text{Var}_Y[Y] - \text{Var}_X\left[E_Y[Y \mid X]\right]$$

maka

$$\text{Var}_Y[Y] = E_X\left[\text{Var}_Y[Y \mid X]\right] + \text{Var}_X\left[E_Y[Y \mid X]\right]$$

■

2.4 Premi Bersih

Definisi 2.10

Premi bersih (*pure premium* atau *net premium* atau premi risiko) untuk satu periode polis asuransi adalah premi yang ditetapkan atas dasar prinsip nilai ekspektasi dari besarnya *loss* (X).

$$P = E(X) \tag{2.9}$$

(Bowers, et al, 1997)

Perusahaan asuransi biasanya menetapkan bobot sebesar ξ pada premi bersih untuk biaya operasional perusahaan sehingga preminya menjadi

$$P = (1+\xi)E(X) \tag{2.10}$$

2.5 Variabel *Excess Loss*, Variabel Tersensor Kiri dan Digeser, Variabel *loss* Terbatas

Berikut ini akan dibahas bentuk-bentuk variabel pembayaran yang digunakan dalam jaminan asuransi termodifikasi.

Definisi 2.11

Untuk suatu nilai d yang diberikan dengan $\Pr(X > d) > 0$, variabel *excess loss* adalah $Y^P = X - d$ diberikan $X > d$, atau

$$Y^P = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & X \leq d \\ X - d, & X > d \end{cases} \tag{2.11}$$

Nilai ekspektasinya,

$$e_X(d) = e(d) = \mathrm{E}(Y^P) = \mathrm{E}(X - d | X > d), \tag{2.12}$$

disebut *mean excess loss*. (Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

Definisi 2.12

Variabel tersensor kiri dan digeser (*left censored and shifted*) adalah

$$Y^L = (X-d)_+ = \begin{cases} 0, & X - d \leq 0 \\ X - d, & X - d > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d. \end{cases} \tag{2.13}$$

Variabel ini disebut tersensor kiri (*left censored*) karena nilai-nilai di bawah d tidak diabaikan melainkan ditentukan sama dengan 0. Sedangkan disebut digeser (*shifted*) karena nilai X digeser ke kiri sebesar d, artinya, jika nilai X sebenarnya adalah x maka akan berubah menjadi $x - d$.
(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

Definisi 2.13

Variabel *loss* terbatas (*limited loss*) adalah

$$Y = X \wedge u = \begin{cases} X, & X < u, \\ u, & X \geq u. \end{cases} \tag{2.14}$$

Nilai ekspektasinya, $E[X \wedge u]$ disebut nilai ekspektasi terbatas.

(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

2.6 Fungsi Pembangkit Probabilitas

Pada distribusi diskrit, terdapat suatu fungsi yang dapat membangkitkan nilai-nilai probabilitas dari suatu variabel acak. Definisinya adalah sebagai berikut:

Definisi 2.14

Fungsi pembangkit probabilitas (*probability generating function*, disingkat pgf) dari variabel acak diskrit N dengan pf p_k adalah

$$P(z) = P_N(z) = E(z^N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \tag{2.15}$$

untuk $|z| < e^h, h > 0$.

(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

Sesuai namanya, pgf dapat membangkitkan probabilitas.

Bukti :

$$P(z) = P_N(z) = E(z^N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots$$

Untuk $z = 0$, $P(0) = p_0 = \Pr(N = 0)$

$$\begin{aligned} P^{(m)}(z) &= \frac{d^m}{dz^m} E\left(z^N\right) \\ &= E\left(\frac{d^m}{dz^m} z^N\right) \\ &= E\left[N(N-1)\ldots(N-m+1)z^{N-m}\right] \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-m+1)z^{k-m} p_k \end{aligned}$$

maka

$$P^{'}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}p_k = p_1+2zp_2+3zp_3+\ldots$$

$$P^{''}(z)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}p_k = 2p_2+(3\cdot 2)zp_3+(4\cdot 3\cdot 2)z^2p_4+\ldots$$

$$P^{'''}(z)=\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)z^{k-3}p_k = (3\cdot 2)p_3+(4\cdot 3\cdot 2)zp_4+(5\cdot 4\cdot 3)z^2p_5+\ldots$$

dst.

Untuk $z=0$,

$$P^{'}(0)=p_1$$

$$P^{''}(0)=2p_2 \quad \text{atau} \quad p_2=\frac{P^{''}(0)}{2}$$

$$P^{'''}(0)=(3\cdot 2)p_3 \quad \text{atau} \quad p_3=\frac{P^{'''}(0)}{3\cdot 2}$$

dst.

Secara umum,

$$P^{(m)}(0)=m!\,p_m \quad \text{atau} \quad p_m=\frac{P^{(m)}(0)}{m!}$$

■

Pgf dari jumlahan variabel acak yang saling independen adalah hasil perkalian dari pgf masing-masing.

<u>Bukti</u>:

$$\begin{aligned}
P_{N_1+N_2+\ldots+N_n}(z) &= E\left(z^{N_1+N_2+\ldots+N_n}\right)\\
&= E\left(z^{N_1}z^{N_2}\ldots z^{N_n}\right)\\
&= \sum_{n_1}\ldots\sum_{n_n} z^{n_1}z^{n_2}\ldots z^{n_n}\,p_{n_1,n_2,\ldots,n_n}\\
&= \sum_{n_1}\ldots\sum_{n_n} z^{n_1}z^{n_2}\ldots z^{n_n}\,p_{n_1}p_{n_2}\ldots p_{n_n}\\
&= \sum_{n_1} z^{n_1}p_{n_1}\sum_{n_2} z^{n_2}p_{n_2}\ldots\sum_{n_n} z^{n_n}p_{n_n}\\
&= E\left(z^{N_1}\right)E\left(z^{N_2}\right)\ldots E\left(z^{N_n}\right)\\
&= P_{N_1}(z)P_{N_2}(z)\ldots P_{N_n}(z)
\end{aligned}$$

2.7 Kelas Distribusi $(a, b, 0)$

Terdapat beberapa distribusi diskrit yang nilai probabilitasnya dapat dinyatakan secara rekursif, dimulai dari probabilitas saat nilainya nol. Distribusi-distribusi yang probabilitasnya dapat dinyatakan secara rekursif tersebut termasuk dalam kelas distribusi $(a, b, 0)$.

<u>Definisi 2.15</u>

Misalkan p_k adalah pf dari variabel acak diskrit N. Yang merupakan anggota dari kelas distribusi $(a,b,0)$, adalah jika terdapat konstanta a dan b sedemikian sehingga

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.16}$$

(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

Rekursi tersebut menggambarkan ukuran relatif dari probabilitas berturutan pada distribusi diskrit. Kelas distribusi $(a,b,0)$ adalah kelas dengan dua parameter, yaitu a dan b. Salah satu anggota kelas ini adalah distribusi Poisson, karena terdapat a dan b yang memenuhi persamaan (2.17), yaitu $a = 0$ dan $b = \lambda$.

Contoh :

Untuk distribusi Poisson, $p_k = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ dan $p_{k-1} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$, maka

$$\begin{aligned}\frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot \frac{(k-1)!}{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}} \\ &= \frac{\lambda}{k}\end{aligned}$$

■

Dengan mensubstitusikan ke dalam pf binomial negatif, dan binomial pada sisi sebelah kiri dari rekursi tersebut, maka dapat dilihat pula bahwa masing-masing distribusi memenuhi rekursi dengan nilai a dan b diberikan pada tabel berikut. Sebagai tambahan, pada tabel diberikan p_0, nilai awal untuk rekursi.

Distribusi geometrik, distribusi dengan satu parameter sebagai kasus khusus dari distribusi binomial negatif $(r = 1)$ juga terdapat pada tabel.

Tabel 2. 1. Anggota kelas $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{0})$

Distribusi	a	b	p_0
Poisson	0	λ	$e^{-\lambda}$
Binomial	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Binomial negatif	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
Geometrik	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

2.8 Pemancungan dan Modifikasi pada Nol dalam Kelas Distribusi $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{1})$

Untuk data asuransi, probabilitas saat nol adalah probabilitas dari tidak adanya klaim yang terjadi selama masa studi. Untuk penerapan dalam asuransi yang probabilitas dari terjadinya *loss* rendah, probabilitas saat nol memiliki nilai terbesar. Oleh karena itu, penting untuk memberikan perhatian khusus untuk kecocokan pada titik ini.

Terdapat keadaan yang secara alami membangkitkan suatu probabilitas yang besar pada saat nol. Misalkan pada suatu kelompok asuransi kesehatan gigi. Jika dalam suatu keluarga, suami dan istri memiliki jaminan asuransi dari rencana sponsor perusahaan masing-masing dan kedua kelompok kontrak asuransi tersebut menjamin semua anggota keluarga, maka klaim akan diajukan kepada perusahaan asuransi dengan rencana yang memberikan keuntungan lebih baik, sehingga tidak ada klaim yang diajukan di bawah kontrak asuransi yang lainnya. Oleh karena itu, pada suatu perusahaan asuransi, mungkin saja banyaknya orang yang tidak mengajukan klaim akan lebih tinggi daripada ekspektasinya.

Demikian pula, mungkin terdapat keadaan di mana banyaknya orang yang tidak mengajukan klaim lebih rendah daripada ekspektasinya, atau bahkan nol. Sebagai contoh, jika seseorang menghitung banyaknya klaim dari kecelakaan yang pasti menghasilkan klaim, nilai minimum yang terobservasi adalah 1. Sehingga probabilitas saat klaim nol bernilai nol.

Penyesuaian dari probabilitas saat nol mudah diterapkan pada distribusi Poisson, binomial, dan binomial negatif.

<u>Definisi 2.16</u>

Misalkan p_k adalah pf dari variabel acak diskrit N. Yang merupakan anggota dari kelas distribusi $(a,b,1)$ adalah apabila terdapat konstanta a dan b sedemikian sehingga

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \ , \quad k = 2,3,4,\ldots. \tag{2.17}$$

(Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

Satu-satunya perbedaan kelas $(a,b,1)$ dari kelas $(a,b,0)$ adalah rekursinya dimulai dari p_1, bukan p_0. Bentuk distribusinya dari $k=1$ sampai $k=\infty$ sama dengan distribusi pada kelas $(a,b,0)$, yaitu probabilitas-probabilitas bernilai sebanding karena $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ nilainya dapat diatur berada dalam interval $(0,1]$. Probabilitas sisanya ada pada p_0.

Dengan metode induksi, akan ditunjukkan bahwa probabilitas-probabilitas pada kelas $(a,b,1)$ bernilai sebanding dengan probabilitas-probabilitas pada kelas $(a,b,0)$. Untuk kelas $(a,b,0)$,

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0(a+b) \\
p_2 &= p_1\left(a+\frac{b}{2}\right) = p_0(a+b)\left(a+\frac{b}{2}\right) \\
p_3 &= p_2\left(a+\frac{b}{3}\right) = p_0(a+b)\left(a+\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{3}\right) \\
&\vdots \\
p_n &= p_{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right) = p_{n-2}\left(a+\frac{b}{n-1}\right)\left(a+\frac{b}{n}\right) = p_0\prod_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b}{k}\right)
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk kelas $(a,b,1)$,

$$
\begin{aligned}
&p_1^* = p_1^* \\
&p_2^* = p_1^*\left(a+\frac{b}{2}\right) \\
&p_2^* = p_2^*\left(a+\frac{b}{3}\right) = p_1^*\left(a+\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{3}\right) \\
&\vdots \\
&p_n^* = p_{n-1}^*\left(a+\frac{b}{n}\right) = p_{n-2}^*\left(a+\frac{b}{n-1}\right)\left(a+\frac{b}{n}\right) = p_1^*\prod_{k=2}^{n}\left(a+\frac{b}{k}\right)
\end{aligned}
$$

Jika kedua probabilitas tersebut dibandingkan,

$$
\begin{aligned}
&\frac{p_1^*}{p_1} = \frac{p_1^*}{p_0\left(a+b\right)} \\
&\frac{p_2^*}{p_2} = \frac{p_1^*\left(a+\frac{b}{2}\right)}{p_0\left(a+b\right)\left(a+\frac{b}{2}\right)} = \frac{p_1^*}{p_0\left(a+b\right)} \\
&\frac{p_3^*}{p_3} = \frac{p_1^*\left(a+\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{3}\right)}{p_0\left(a+b\right)\left(a+\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{3}\right)} = \frac{p_1^*}{p_0\left(a+b\right)} \\
&\quad\vdots \\
&\quad\frac{p_n^*}{p_n} = \frac{p_1^*\prod_{k=2}^{n}\left(a+\frac{b}{k}\right)}{p_0\prod_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b}{k}\right)} = \frac{p_1^*\prod_{k=2}^{n}\left(a+\frac{b}{k}\right)}{p_0\left(a+b\right)\prod_{k=2}^{n}\left(a+\frac{b}{k}\right)} = \frac{p_1^*}{p_0\left(a+b\right)}
\end{aligned}
$$

Misalkan hal tersebut berlaku untuk setiap $k = n$, maka akan dibuktikan bahwa hal tersebut juga berlaku untuk $k = n + 1$.

Karena $p_{n+1} = p_0\prod_{k=1}^{n+1}\left(a+\frac{b}{k}\right)$ dan $p_{n+1}^* = p_1^*\prod_{k=2}^{n+1}\left(a+\frac{b}{k}\right)$

maka

$$
\frac{p_{n+1}^*}{p_{n+1}} = \frac{p_1^*\prod_{k=2}^{n+1}\left(a+\frac{b}{k}\right)}{p_0\prod_{k=1}^{n+1}\left(a+\frac{b}{k}\right)}
$$

$$\frac{p_{n+1}^*}{p_{n+1}} = \frac{p_1^* \prod_{k=2}^{n}\left(a+\frac{b}{k}\right)\left(a+\frac{b}{n+1}\right)}{p_0 \prod_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b}{k}\right)\left(a+\frac{b}{n+1}\right)}$$

$$= \frac{p_n^*\left(a+\frac{b}{n+1}\right)}{p_n\left(a+\frac{b}{n+1}\right)}$$

$$= \frac{p_1^*\left(a+\frac{b}{n+1}\right)}{p_0\left(a+b\right)\left(a+\frac{b}{n+1}\right)} = \frac{p_1^*}{p_0\left(a+b\right)}$$

■

Terlihat bahwa proporsi dari probabilitas pada kelas $(a,b,1)$ dan $(a,b,0)$ yang bersesuaian menghasilkan suatu konstanta yang sama untuk setiap k. Oleh karena itu, terbukti bahwa nilai-nilai probabilitas pada kelas $(a,b,1)$ sebanding dengan nilai-nilai probabilitas pada kelas $(a,b,0)$ yang bersesuaian.

Dalam kelas distribusi $(a,b,1)$ terdapat dua keadaan yang menjadi dua subkelas, yaitu ketika $p_0 = 0$ dan $p_0 > 0$. Subkelas pertama, yaitu yang memiliki $p_0 = 0$ disebut distribusi terpancung, atau distribusi terpancung-nol (*zero-truncated distribution*). Anggota-anggotanya adalah distribusi Poisson terpancung-nol, binomial terpancung-nol, binomial negatif terpancung-nol (termasuk geometrik terpancung-nol). Subkelas kedua adalah distribusi termodifikasi-nol karena probabilitas saat nol untuk kelas $(a,b,0)$ dimodifikasi dengan suatu nilai sedemikian sehingga $p_0 > 0$.

Pgf dari distribusi termodifikasi-nol, $P^M(z)$ dapat dinyatakan sebagai rata-rata berbobot dari pgf-pgf pada distribusi *degenerate* dan distribusi anggota $(a,b,0)$ yang bersesuaian, yaitu

$$P^M(z) = \left(1 - \frac{1-p_0^M}{1-p_0}\right)\cdot 1 + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}P(z). \qquad (2.18)$$

Distribusi *degenerate* adalah distribusi dengan semua probabilitas berada pada satu titik. Dalam hal ini, distribusi *degenerate* yang digunakan adalah yang semua probabibilitasnya terletak pada titik nol. Pgf dari distribusi ini adalah

$$\begin{aligned} P^d(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k^d z^k \\ &= 1 + 0 + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

<u>Bukti</u> :

Untuk membedakan, pf dari distribusi diskrit pada kelas $(a,b,0)$ dinotasikan dengan $p_k = \Pr(N = k)$, sedangkan pf dari distribusi termodifikasi-nol dinotasikan dengan p_k^M.

Misalkan $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ menunjukkan pgf dari distribusi pada anggota kelas $(a,b,0)$. Misalkan $P^M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k$ menunjukkan pgf dari anggota kelas $(a,b,0)$ yang bersesuaian; karena nilai p_k^M sebanding dengan p_k, dapat dituliskan

$$p_k^M = m \cdot p_k\ , \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

dan p_0^M adalah sembarang bilangan. Maka

$$\begin{aligned} P^M(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k \\ &= p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M z^k \\ &= p_0^M + m \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \\ P^M(z) &= p_0^M + m\left[P(z) - p_0\right]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Karena $P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, begitu pula $P^M(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M$ harus bernilai 1 agar p_k^M memenuhi syarat sebagai pf. Maka untuk $z = 1$, (2.19) menjadi

$$1 = p_0^M + m \cdot (1 - p_0),$$

menghasilkan

$$m = \frac{1-p_0^M}{1-p_0} \quad \text{atau} \quad p_0^M = 1 - m\left(1-p_0\right).$$

Kemudian,

$$\begin{aligned}
P^M(z) &= p_0^M + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}\left[P(z)-p_0\right] \\
&= \frac{p_0^M - p_0 p_0^M + \left[P(z) - p_0 - p_0^M P(z) + p_0^M p_0\right]}{1-p_0} \\
&= \frac{p_0^M + P(z)\left[1-p_0^M\right] - p_0}{1-p_0} \\
&= \frac{p_0^M - p_0}{1-p_0} + \frac{P(z)\left[1-p_0^M\right]}{1-p_0} \\
&= \left(1 - \frac{1-p_0^M}{1-p_0}\right)\cdot 1 + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}P(z).
\end{aligned}$$

■

Pgf dari distribusi termodifikasi-nol, $P^M(z)$ dapat dinyatakan sebagai rata-rata berbobot dari pgf-pgf pada distribusi *degenerate* dan distribusi terpancung-nol yang bersesuaian, yaitu

$$P^M(z) = p_0^M \cdot 1 + \left(1-p_0^M\right)P^T(z) \ . \tag{2.20}$$

<u>Bukti</u> :

Dari hasil yang telah didapat sebelumnya,

$$p_k^M = \frac{1-p_0^M}{1-p_0}p_k \ , \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Misalkan $P^T(z)$ melambangkan pgf dari distribusi terpancung-nol yang bersesuaian dengan pgf $P(z)$ pada distribusi anggota kelas $(a,b,0)$ dan p_k^T adalah pf dari distribusi terpancung-nol yang bersesuaian. Maka, dengan membuat $p_0^M = 0$, diperoleh $P^T(z)$ dan p_k^T sebagai berikut

$$P^M(z) = \left(1 - \frac{1-p_0^M}{1-p_0}\right) + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}P(z)$$

$$P^T(z) = \left(1 - \frac{1}{1-p_0}\right) + \frac{P(z)}{1-p_0}$$
$$= 1 - \frac{1-P(z)}{1-p_0}$$
$$= \frac{P(z)-p_0}{1-p_0}$$

p_k^T dapat dicari melalui pgf

$$p_k^T = \frac{P^{(k)T}(0)}{k!}\ , \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Di mana

$$P^{(k)T}(z) = \frac{d^k}{dz^k} P^T(z)$$
$$= \frac{d^k}{dz^k} \frac{P(z)-p_0}{1-p_0}$$
$$= \frac{P^{(k)}(z)}{1-p_0}$$

sehingga

$$p_k^T = \frac{P^{(k)}(0)}{1-p_0} \cdot \frac{1}{k!}$$
$$= \frac{p_k}{1-p_0}\ , \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Dari hasil tersebut dapat diperoleh hubungan antara distribusi termodifikasi-nol dan distribusi terpancung-nol untuk pf dan pgf sebagai berikut

$$p_k^M = \left(1 - p_0^M\right) p_k^T\ , \quad k = 1, 2, \ldots.$$

dan

$$P^M(z) = p_0^M + \frac{1-p_0^M}{1-p_0} \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$$
$$= p_0^M + \left(1 - p_0^M\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{1-p_0} z^k$$
$$= p_0^M + \left(1 - p_0^M\right) \sum_{k=1}^{\infty} p_k^T z^k$$
$$= p_0^M \cdot 1 + \left(1 - p_0^M\right) P^T(z)$$

■

Contoh

Pandang suatu variabel acak binomial negatif dengan parameter $\beta = 0,5$ dan $r = 2,5$. Tentukan empat probabilitas awal dari variabel acak ini. Kemudian tentukan probabilitas untuk versi terpancung-nol dan termodifikasi-nol (dengan $p_0^M = 0,6$) yang bersesuaian.

Dari tabel 2.1, untuk distribusi binomial negatif

$$p_0 = (1+0,5)^{-2,5} = 0,362887,$$

$$a = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3},$$

$$b = \frac{(2,5-1)(0,5)}{1,5} = \frac{1}{2}.$$

Tiga rekursi awal

$$p_1 = 0,362887\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{1}\right) = 0,302406,$$

$$p_2 = 0,302406\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = 0,176404,$$

$$p_3 = 0,176404\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\right) = 0,088202.$$

Untuk variabel acak terpancung-nol, $p_0^T = 0$ berdasarkan definisi. Rekursi dimulai dari $p_1^T = \frac{p_1}{1-p_0} = \frac{0,302406}{1-0,362887} = 0,474651$. Kemudian

$$p_2^T = 0,474651\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = 0,276880,$$

$$p_3^T = 0,276880\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\right) = 0,138440.$$

Jika semua nilai-nilai probabilitas semula tersedia, maka semua probabilitas terpancung-nol dapat diperoleh dengan mengalikan nilai probabilitas tersebut dengan $\frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-0,362887} = 1,569580$.

Untuk variabel acak termodifikasi-nol, $p_0^M = 0,6$. Maka,

$p_1^M = \frac{1-p_0^M}{1-p_0} p_k = \frac{1-0,6}{1-0,362887} 0,302406 = 0,189860$. Selanjutnya,

$$p_2^M = 0{,}189860\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = 0{,}110752,$$

$$p_3^M = 0{,}110752\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right) = 0{,}055376.$$

Dalam hal ini, masing-masing probabilitas asli dari distribusi binomial negatif dikalikan dengan $\frac{1-p_0^M}{1-p_0} = \frac{1-0{,}6}{1-0{,}362887} = 0{,}627832$. Dan untuk $j \geq 1$, $p_j^M = \left(1-p_0^M\right) p_j^T = 0{,}4 p_j^T$.

■

Tabel 2. 2. Anggota kelas $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{1})$

Distribusi	p_0	a	b	Ruang Parameter
Poisson	$e^{-\lambda}$	0	λ	$\lambda > 0$
ZT Poisson	0	0	λ	$\lambda > 0$
ZM Poisson	Sembarang	0	λ	$\lambda > 0$
Binomial	$(1-q)^m$	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$0 < q < 1$
ZT Binomial	0	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$0 < q < 1$
ZM Binomial	Sembarang	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$0 < q < 1$
Binomial Negatif	$(1+\beta)^{-r}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$r > 0, \beta > 0$
ETNB	0	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$r > -1, \beta > 0$
ZM ETNB	Sembarang	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$r > -1, \beta > 0$
Geometrik	$(1+\beta)^{-1}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta > 0$

ZT Geometrik	0	$\dfrac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta > 0$
ZM Geometrik	Sembarang	$\dfrac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta > 0$
Logaritmik	0	$\dfrac{\beta}{1+\beta}$	$-\dfrac{\beta}{1+\beta}$	$\beta > 0$
ZM Logaritmik	Sembarang	$\dfrac{\beta}{1+\beta}$	$-\dfrac{\beta}{1+\beta}$	$\beta > 0$

Contoh

Tentukan probabilitas untuk distribusi ETNB dengan $r = -0,5$ dan $\beta = 1$ untuk versi terpancung dan termodifikasi dengan $p_0^M = 0,6$.

Berdasarkan yang diketahui, maka $a = \dfrac{1}{1+1} = 0,5$ dan $b = \dfrac{(-0,5-1)(1)}{1+1} = -0,75$.

$$
\begin{aligned}
p_1^T &= \frac{p_1}{1-p_0} \\
&= \frac{r\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)}{1-\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r} \\
&= \frac{r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)}{(1+\beta)^r - 1} \\
&= \frac{r\beta}{(1+\beta)^{r+1} - (1+\beta)} \\
&= \frac{(-0,5)(1)}{(1+1)^{(-0,5+1)} - (1+1)} = 0,853553.
\end{aligned}
$$

Dengan rumus rekursif, nilai probabilitas berikutnya adalah

$$p_2^T = \left(0,5 - \frac{0,75}{2}\right)(0,853553) = 0,106694,$$

$$p_3^T = \left(0,5 - \frac{0,75}{3}\right)(0,106694) = 0,026674.$$

Untuk probabilitas termodifikasi, probabilitas terpancung dikalikan dengan $1-p_0^M=1-0,6=0,4$ menghasilkan

$$p_1^M=0,4\cdot p_1^T=0,341421,$$
$$p_2^M=0,4\cdot p_2^T=0,042678,$$
$$p_3^M=0,4\cdot p_3^T=0,010670.$$

■

2.9 Distribusi Diskrit Gabungan (*Compound Frequency Distribution*)

Misalkan N adalah variabel acak diskrit dan $M_1, M_2, \ldots$ adalah variabel-variabel acak diskrit pula yang berdistribusi identik dan saling bebas. Jika $M_j, j=1,2,\ldots$ tidak bergantung pada N, maka $S=M_1+M_2+\ldots+M_N$ memiliki distribusi gabungan, di mana distribusi dari N disebut sebagai distribusi primer dan distribusi dari M_j disebut sebagai distribusi sekunder. Untuk $N=0$ maka $S=0$.

Pgf dari distribusi gabungan adalah

$$P_S(z)=P_N\left[P_M(z)\right] \tag{2.21}$$

di mana $P_N(z)$ adalah pgf dari distribusi primer dan $P_M(z)$ adalah pgf dari distribusi sekunder. (Klugman, Panjer, & Willmot, 2008)

<u>Bukti</u> :

$$\begin{aligned} P_S(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(S=k) z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S=k \mid N=n)\Pr(N=n) z^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N=n) \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(M_1+M_2+\ldots+M_n=k \mid N=n) z^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N=n)\left[P_M(z)\right]^n \\ &= P_N\left[P_M(z)\right] \end{aligned}$$

■

Ekspektasi dari variabel acak S adalah

$$E(S) = E(N).E(M)$$

(Kaas, Goovaerts, Dhaene, & Denuit, 2001)

Bukti :

$$E(S) = E\left(\sum_{j=1}^{N} M_j\right)$$

Dengan menggunakan (2.7), diperoleh

$$\begin{aligned}
E(S) &= E\left(\sum_{j=1}^{N} M_j\right) \\
&= E_N\left[E_M\left(\sum_{j=1}^{N} M_j \middle| N\right)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[E_M\left(\sum_{j=1}^{N} M_j \middle| N=n\right).P(N=n)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[E_M\left(\sum_{j=1}^{n} M_j\right).P(N=n)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{n} E(M_j).P(N=n)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[nE(M).P(N=n)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[E(M).n.P(N=n)\right] \\
&= E(M)\sum_{n=0}^{\infty}\left[n.P(N=n)\right] \\
&= E[M].E[N] \\
&= E[N].E[M]
\end{aligned}$$

■

Variansi dari variabel acak S adalah

$$\text{Var}(S) = E(N)\text{Var}(M) + \text{Var}(N)[E(M)]^2 \qquad (2.22)$$

(Kaas, Goovaerts, Dhaene, & Denuit, 2001)

Bukti :

Dengan menggunakan (2.8) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= E\left[\mathrm{Var}(S|N)\right] + \mathrm{Var}\left[E(S|N)\right] \\
&= E\left[\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{N} M_j \middle| N\right)\right] + \mathrm{Var}\left[E\left(\sum_{j=1}^{N} M_j \middle| N\right)\right] \\
&= E\left[\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{N} M_j\right)\right] + \mathrm{Var}\left[E\left(\sum_{j=1}^{N} M_j\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Var}(M_j)\right] + \mathrm{Var}\left[\sum_{j=1}^{N} E(M_j)\right] \\
&= E\left[N.\mathrm{Var}(M)\right] + \mathrm{Var}\left[N.E(M)\right] \\
&= \mathrm{Var}(M).E(N) + \left[E(M)\right]^2.\mathrm{Var}(N) \\
&= E(N).\mathrm{Var}(M) + \mathrm{Var}(N).\left[E(M)\right]^2
\end{aligned}$$

■

2.10 Optimasi Konveks dan Kondisi Karush-Kuhn-Tucker

Misalkan terdapat masalah optimasi:

$$\min f(\boldsymbol{x}) \tag{2.23}$$

dengan kendala persamaan dan pertidaksamaan

$$g_j(\boldsymbol{x}) \le c_j \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

$$h_k(\boldsymbol{x}) = d_k \quad , \quad k = 1, \dots, p$$

di mana $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ adalah vektor yang tidak diketahui dan fungsi f, g_j, dan h_k terdefinisi pada $\mathbb{R}^n$.

Bentuk Lagrange dari masalah tersebut adalah:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j\big(g_j(\boldsymbol{x}) - c_j\big) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k(h_k(\boldsymbol{x}) - d_k) \tag{2.24}$$

di mana μ_j $(j = 1, \dots, m)$ dan λ_k $(k = 1, \dots, p)$ adalah pengali Lagrange untuk kendala $g_j(\boldsymbol{x}) \le c_j$ dan $h_k(\boldsymbol{x}) = d_k$ berturut-turut.

Kondisi orde-satu berikut ini, dikenal dengan kondisi Karush-Kuhn-Tucker (KKT), diperlukan untuk memperoleh vektor $\boldsymbol{x}$ yang akan mengoptimalkan fungsi objektif:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \text{untuk} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mu_j \geq 0, g_j(\boldsymbol{x}) \leq c_j, \text{ dan } \mu_j\big(g_j(\boldsymbol{x}) - c_j\big) = 0 \text{ untuk } \; j = 1, \dots, m$$

$$h_k(\boldsymbol{x}) = d_k \text{ untuk } \; k = 1, \dots, p. \tag{2.25}$$

(Glineur dan Walhin, 2005)

Kondisi KKT juga merupakan syarat cukup pada masalah optimasi konveks. Masalah optimasi nonlinear disebut konveks jika dapat dibuktikan bahwa fungsi f dan g_j konveks sedangkan h_k linear.

Definisi 2.17

Suatu fungsi f yang terdefinisi di $\mathbb{R}^n$ disebut konveks jika dan hanya jika memenuhi pertidaksamaan berikut

$$f(\theta\boldsymbol{x} + (1-\theta)\boldsymbol{y}) \leq \theta f(\boldsymbol{x}) + (1-\theta) f(\boldsymbol{y}) \tag{2.26}$$

untuk semua θ dalam interval $[0,1]$ dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

(Glineur dan Walhin, 2005)

2.11 Reasuransi

Definisi 2.18

Reasuransi adalah penerimaan risiko oleh reasuradur dari semua atau sebagian risiko kerugian dari penanggung (*ceding company*). (R.C. Reinarz)

Penanggung atau *reinsured* biasanya adalah perusahaan asuransi, sedangkan reasuradur atau *reinsurer* adalah perusahaan reasuransi. Berdasarkan UU No 2/1992 pasal 1 ayat 7, perusahaan reasuransi adalah perusahaan yang memberikan jasa pertanggungan ulang terhadap risiko yang dihadapi oleh perusahaan asuransi kerugian dan atau jiwa.

Berdasarkan bentuknya, reasuransi dibagi menjadi dua jenis, yaitu reasuransi proporsional dan reasuransi non-proporsional.

2.11.1. Reasuransi Proporsional

Reasuransi proporsional adalah cara termudah untuk melindungi portofolio asuransi. Pada reasuransi proporsional, perusahaan asuransi dan reasuransi menyepakati suatu *cession percentage* α_i untuk setiap polis pada portofolio. Premi bersih yang bersesuaian dengan polis ke-i, P_i, juga akan dibagi secara proporsional antara perusahaan asuransi dan reasuransi. Perusahaan reasuransi menerima $\alpha_i P_i$ sedangkan perusahaan asuransi menerima $(1-\alpha_i)P_i$. Jika X_i adalah klaim / *loss* dari polis ke-i, maka perusahaan reasuransi berkewajiban membayar $\alpha_i X_i$ sedangkan perusahaan asuransi membayar $(1-\alpha_i)X_i$.

Salah satu jenis dari reasuransi proporsional adalah reasuransi *quota share*. Pada reasuransi *quota share* α_i sama untuk seluruh polis pada portofolio asuransi, sehingga dapat dituliskan sebagai α. Kewajiban pembayaran yang harus dilakukan oleh perusahaan reasuransi untuk semua klaim pada portofolio adalah

$$S^{\mathrm{Re}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha X_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} X_i = \alpha S \qquad (2.27)$$

di mana X_i menyatakan besar *loss* dari polis ke-i, dan S menyatakan total *loss* untuk semua polis pada portofolio. Bentuk tersebut sama dengan bentuk pembayaran pada modifikasi *coinsurance*. Dengan demikian, total *loss* yang harus ditanggung oleh perusahaan asuransi adalah

$$S^R = (1-\alpha)S.$$

2.11.2. Reasuransi Non-Proporsional

Pada reasuransi non-proporsional, perusahaan reasuransi membayar *loss* yang melebihi suatu level retensi (d) yang telah ditentukan. Dalam hal ini, meskipun menerima premi, perusahaan reasuransi belum tentu melakukan pembayaran klaim, karena perusahaan reasuransi tidak berkewajiban untuk membayar *loss* yang besarnya kurang dari batas d. Salah satu jenis reasuransi non-proporsional adalah reasuransi *excess of loss*. Pada reasuransi *excess of loss*, perusahaan asuransi hanya membayar *loss* sampai batas d, sedangkan jumlah kelebihan (di atas d) dibayar oleh perusahaan reasuransi.

Jadi kewajiban yang ditanggung oleh perusahaan asuransi untuk suatu *loss* adalah

$$Y^R = \begin{cases} X \ , & \text{jika } X < d \\ d \ , & \text{jika } X \geq d \end{cases}$$

Bentuk tersebut merupakan bentuk *policy limit* pada modifikasi untuk jaminan asuransi. Sedangkan jika dipandang dari kewajiban perusahaan reasuransi, jenis reasuransi *excess of loss* ini adalah bentuk aplikasi dari modifikasi *deductible* biasa, yaitu

$$Y^{Re} = \begin{cases} 0 & \text{, jika } X \leq d \\ X - d & \text{, jika } X > d \end{cases} \tag{2.28}$$

BAB 3

PREMI BERSIH PADA JAMINAN ASURANSI TERMODIFIKASI DAN *CESSION PERCENTAGE* OPTIMAL UNTUK REASURANSI PROPORSIONAL

Jika suatu perusahaam asuransi menetapkan modifikasi pada jaminan asuransi, seperti *deductible, policy limit*, atau *coinsurance*, tentu terdapat perbedaan antara besar *loss* yang diajukan sebagai klaim dengan besar pembayaran yang dilakukan oleh perusahaan asuransi atas klaim tersebut. Selain itu, ketika menetapkan *deductible,* maka perusahaan asuransi tidak akan membayar klaim yang besarnya di bawah suatu nilai yang telah ditetapkan. Adanya klaim-klaim yang tidak dibayarkan tersebut menyebabkan perbedaan antara banyaknya *loss* yang diajukan sebagai klaim dengan banyaknya pembayaran yang dilakukan oleh perusahaan asuransi. Perbedaan-perbedaan dari besar dan banyaknya klaim tersebut tersebut tentu menyebabkan perbedaan pula pada fungsi distribusi dari keduanya. Perbedaan pada distribusi besar dan banyaknya klaim akan menyebabkan perbedaan pula pada nilai ekspektasi atau premi bersih.

3.1. Perhitungan Premi Bersih untuk Klaim Tunggal

Ketika melakukan perhitungan premi bersih untuk klaim tunggal, maka asumsi yang digunakan adalah hanya terjadi satu klaim untuk satu polis dalam satu periode. Klaim tunggal ini biasanya terjadi pada kasus asuransi jiwa. Dengan demikian, premi bersih tersebut dapat dihitung melalui ekspektasi dari pembayaran satu *loss*. Untuk menghitung ekspektasi dari pembayaran tersebut, terlebih dahulu harus diperhatikan perubahan distribusi dari besarnya *loss* menjadi distribusi dari besarnya pembayaran klaim.

3.1.1. Premi Bersih untuk Polis Asuransi dengan *Deductible*

Polis asuransi sering dijual dengan *deductible* per-*loss* sebesar d. Ada dua jenis *deductible* yang sering digunakan, yaitu *deductible* biasa (*ordinary deductible*) dan *deductible* waralaba (*franchise deductible*). Pada *deductible* biasa, ketika besarnya *loss*, x, di bawah d, perusahaan asuransi tidak melakukan pembayaran. Sedangkan ketika besarnya *loss* di atas d, perusahaan asuransi melakukan pembayaran sebesar $x - d$. *Deductible* biasa ini memodifikasi variabel acak *loss* menjadi variabel *excess loss* atau variabel *left censored and shifted*. Perbedaan tersebut berturut-turut bergantung pada apakah hasil dari penerapan *deductible* adalah per pembayaran atau per *loss*.

Variabel per pembayaran adalah variabel acak yang mengukur pembayaran per pembayaran, sehingga nilainya akan tidak terdefinisi ketika tidak ada pembayaran. Sedangkan variabel per *loss* adalah variabel yang mengukur pembayaran per *loss*, sehingga akan bernilai nol ketika terjadi *loss* namun tidak terjadi pembayaran. Sebagai notasi, variabel per-*loss* dilambangkan dengan Y^L dan variabel per-pembayaran dilambangkan dengan Y^P.

Variabel per-*loss* adalah

$$Y^L = (X - d)_+ = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d. \end{cases} \tag{3.1}$$

Sedangkan variabel per-pembayaran adalah

$$Y^P = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & X \leq d, \\ X - d, & X > d. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dari kedua bentuk variabel tersebut terlihat bahwa variabel per-pembayaran, $Y^P = Y^L | Y^L > 0$. Yaitu, variabel per-pembayaran adalah variabel per-*loss* bersyarat pembayaran *loss* bernilai positif.

Variabel per-*loss* yaitu variabel *left censored and shifted* memiliki probabilitas diskrit saat nol dari $F_X(d)$, merepresentasikan probabilitas bahwa pembayaran sebesar nol dilakukan karena *loss* tidak melebihi d. Fungsi distribusinya adalah

$$F_{Y^L}(y) = \Pr\left(Y^L \le y\right)$$

untuk $y = 0,$

$$\begin{aligned} F_{Y^L}(y) &= \Pr\left(Y^L \le 0\right) \\ &= \Pr\left(Y^L = 0\right) \\ &= \Pr\left(X \le d\right) \\ &= F_X(d) \end{aligned}$$

untuk $y > 0,$

$$\begin{aligned} F_{Y^L}(y) &= \Pr\left(Y^L \le y\right) \\ &= \Pr\left(Y^L \le 0\right) + \Pr\left(0 < Y^L \le y\right) \\ &= \Pr\left(Y^L \le 0\right) + \Pr\left(Y^L \le y\right) - \Pr\left(Y^L \le 0\right) \\ &= \Pr\left(Y^L \le y\right) \\ &= \Pr\left(X - d \le y\right) \\ &= \Pr\left(X \le y + d\right) \\ &= F_X(y+d) \end{aligned}$$

jadi,

$$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d), & \text{untuk } y = 0 \\ F_X(y+d), & \text{untuk } y > 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

sementara pdf dan fungsi survival dari variabel per-*loss* adalah

untuk $y = 0,$

$$\begin{aligned} f_{Y^L}(y) &= \Pr\left(Y^L = 0\right) \\ &= \Pr\left(X \le d\right) \\ &= F_X(d) \end{aligned}$$

untuk $y > 0,$ $y = x - d$ maka $dy = dx$ atau $\dfrac{dx}{dy} = 1$

$$\begin{aligned} f_{Y^L}(y) &= \frac{d}{dy} F_{Y^L}(y) \\ &= \frac{d}{dx} F_X(y+d) \frac{dx}{dy} \\ &= f_X(y+d).1 \\ &= f_X(y+d) \end{aligned}$$

jadi,

$$f_{Y^L}(y)=\begin{cases} F_X(d), & \text{untuk } y=0 \\ f_X(y+d), & \text{untuk } y>0 \end{cases} \qquad (3.4)$$

$$\begin{aligned} S_{Y^L}(y) &= 1-F_{Y^L}(y) \\ &= \begin{cases} 1-F_X(d), & \text{untuk } y=0 \\ 1-F_X(y+d), & \text{untuk } y>0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} S_X(d), & \text{untuk } y=0 \\ S_X(y+d), & \text{untuk } y>0 \end{cases} \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Dari pdf di atas, premi bersih untuk pembayaran per-*loss* dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^L\right) \\ &= \int_0^{\infty} y f_{Y^L}(y)\,dy \end{aligned}$$

karena $y=x-d$ maka $dy=dx$ untuk $y=0$ maka $x=d$ dan untuk $y\to\infty$ maka $x\to\infty$ sehingga

$$\begin{aligned} P &= \int_d^{\infty}(x-d)\,f_X(x)\,dx \\ &= E\left[(X-d)_+\right]. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Sementara fungsi distribusi untuk variabel per-pembayaran adalah

untuk $y=0$,

$F_{Y^P}(y)=$ tak terdefinisi

untuk $y>0$,

$$\begin{aligned} F_{Y^P}(y) &= \Pr\left(Y^P \le y\right) \\ &= \Pr\left(Y^L \le y \middle| Y^L>0\right) \\ &= \frac{\Pr\left(0<Y^L\le y\right)}{\Pr\left(Y^L>0\right)} \\ &= \frac{\Pr\left(Y^L\le y\right)-\Pr\left(Y^L\le 0\right)}{1-\Pr\left(Y^L\le 0\right)} \\ &= \frac{\Pr(X-d\le y)-\Pr(X\le d)}{1-\Pr(X\le d)} \end{aligned}$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{\Pr(X \le y+d) - \Pr(X \le d)}{1 - \Pr(X \le d)}$$

$$= \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}$$

jadi,

$$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & \text{untuk } y = 0 \\ \dfrac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}, & \text{untuk } y > 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Pdf dan fungsi survival dapat kita turunkan dari fungsi tersebut

untuk $y = 0$,

$f_{Y^P}(y) = \text{tak terdefinisi}$

untuk $y > 0,\ y = x - d$ maka $dy = dx$ atau $\dfrac{dx}{dy} = 1$

$$f_{Y^P}(y) = \frac{d}{dy} F_{Y^P}(y)$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)} \frac{dx}{dy}$$

$$= \frac{f_X(y+d)}{1 - F_X(d)}.1$$

$$= \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}$$

jadi,

$$f_{Y^P}(y) = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & \text{untuk } y = 0 \\ \dfrac{f_X(y+d)}{S_X(d)}, & \text{untuk } y > 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$S_{Y^P}(y) = 1 - F_{Y^P}(y)$$

$$= \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & \text{untuk } y = 0 \\ 1 - \dfrac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}, & \text{untuk } y > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & \text{untuk } y = 0 \\ \dfrac{1 - F_X(d) - \left[F_X(y+d) - F_X(d)\right]}{1 - F_X(d)}, & \text{untuk } y > 0 \end{cases}$$

$$S_{Y^P}(y) = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & \text{untuk } y = 0 \\ \dfrac{S_X(y+d)}{S_X(d)}, & \text{untuk } y > 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Sedangkan premi bersih untuk pembayaran per-pembayaran adalah

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^P\right) \\ &= E\left[Y^L \middle| Y^L > 0\right] \\ &= E\left[(X-d)_+ \middle| X > d\right] \\ &= \int_d^\infty (x-d)\, f_X(x | X > d)\, dx \\ &= \int_d^\infty \frac{(x-d)\, f_X(x)}{\Pr(X > d)}\, dx \\ &= \frac{\int_d^\infty (x-d)\, f_X(x)\, dx}{1 - F_X(d)} \\ &= \frac{E\left(Y^L\right)}{1 - F_X(d)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sebuah alternatif dari *deductible* biasa adalah *franchise deductible* (*deductible* waralaba). *Deductible* ini berbeda dari *deductible* biasa, di mana ketika *loss* melebihi batas *deductible*, maka *loss* dibayar penuh. *Deductible* waralaba (*franchise deductible*) memodifikasi *deductible* biasa dengan menambahkan nilai *deductible* pada pembayaran klaim ketika terdapat besarnya pembayaran yang positif.

Istilah *left censored and shifted* maupun *excess loss* tidak digunakan di sini. Karena modifikasi ini unik untuk aplikasi asuransi, maka istilah yang digunakan hanyalah per-pembayaran dan per-*loss*.

Variabel per-*loss* adalah

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \le d, \\ X, & X > d, \end{cases} \tag{3.11}$$

sementara variabel per-pembayaran adalah

$$Y^P = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & X \le d, \\ X, & X > d. \end{cases} \tag{3.12}$$

Dari kedua fungsi tersebut juga terlihat bahwa $Y^P = Y^L | Y^L > d$. Dalam *deductible* ini, nilai pembayaran yang mungkin hanyalah $y = 0$ atau $y > d$, dan tidak mungkin terjadi pembayaran sebesar $0 < y < d$. Maka fungsi distribusi untuk variabel per-*loss* sekarang adalah

$$F_{Y^L}(y) = \Pr\left(Y^L \le y\right)$$

untuk $0 \le y \le d$,

$$\begin{aligned} F_{Y^L}(y) &= \Pr\left(Y^L \le y\right) \\ &= \Pr\left(Y^L = 0\right) \\ &= \Pr\left(X \le d\right) \\ &= F_X(d) \end{aligned}$$

untuk $y > d$,

$$\begin{aligned} F_{Y^L}(y) &= \Pr\left(Y^L \le y\right) \\ &= \Pr\left(Y^L = 0\right) + \Pr\left(0 < Y^L \le y\right) \\ &= \Pr\left(Y^L = 0\right) + \Pr\left(Y^L \le y\right) - \Pr\left(Y^L = 0\right) \\ &= \Pr\left(Y^L \le y\right) \\ &= \Pr\left(X \le y\right) \\ &= F_X(y) \end{aligned}$$

jadi,

$$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d), & \text{untuk } 0 \le y \le d \\ F_X(y), & \text{untuk } y > d \end{cases} \tag{3.13}$$

sementara pdf dan fungsi survival dari variabel per-*loss* adalah

untuk $y = 0$,

$$\begin{aligned} f_{Y^L}(y) &= \Pr\left(Y^L = 0\right) \\ &= \Pr\left(X \le d\right) \\ &= F_X(d) \end{aligned}$$

untuk $y > d$, $y = x$ maka $dy = dx$ atau $\frac{dx}{dy} = 1$

$$f_{Y^L}(y) = \frac{d}{dy} F_{Y^L}(y)$$

$$= \frac{d}{dx} F_X(y) \frac{dx}{dy}$$
$$= f_X(y).1$$
$$= f_X(y)$$

jadi,

$$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d), & \text{untuk } y = 0 \\ f_X(y), & \text{untuk } y > d \end{cases} \tag{3.14}$$

$$S_{Y^L}(y) = 1 - F_{Y^L}(y)$$
$$= \begin{cases} 1 - F_X(d), & \text{untuk } 0 \le y \le d \\ 1 - F_X(y), & \text{untuk } y > d \end{cases}$$
$$= \begin{cases} S_X(d), & \text{untuk } 0 \le y \le d \\ S_X(y), & \text{untuk } y > d. \end{cases} \tag{3.15}$$

Premi bersih untuk pembayaran per-*loss* pada *deductible* ini adalah

$$P = E\left(Y^L\right)$$
$$= \int_0^\infty y f_{Y^L}(y)\,dy$$

karena $y = 0$ untuk $x \le d$ dan karena $y = x$ untuk $x > d$ maka $\int_0^\infty y f_{Y^L}(y)\,dy = \int_d^\infty y f_{Y^L}(y)\,dy$ dan karena $y = x$ maka $dy = dx$ untuk $y = d$ maka $x = d$ dan untuk $y \to \infty$ maka $x \to \infty$ sehingga

$$P = \int_d^\infty x f_X(x)\,dx\ . \tag{3.16}$$

Untuk variabel per-pembayaran, fungsi distribusinya adalah

$$F_{Y^P}(y) = \Pr\left(Y^P \le y\right)$$
$$= \Pr\left(Y^L \le y \middle| Y^L > 0\right)$$
$$= \Pr\left(Y^L \le y \middle| Y^L > d\right)$$

untuk $0 \le y \le d$,

$$F_{Y^P}(y) = \Pr\left(Y^L \le y \middle| Y^L > d\right)$$
$$= \frac{\Pr\left(Y^L \le y, Y^L > d\right)}{\Pr\left(Y^L > d\right)} = 0$$

untuk $y > d$,

$$F_{Y^P}(y) = \Pr\left(Y^L \le y \middle| Y^L > d\right)$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{\Pr\left(d < Y^L \le y\right)}{\Pr\left(Y^L > d\right)}$$

$$= \frac{\Pr\left(Y^L \le y\right) - \Pr\left(Y^L \le d\right)}{\Pr\left(Y^L > d\right)}$$

$$= \frac{\Pr\left(X \le y\right) - \Pr\left(X \le d\right)}{\Pr\left(X > d\right)}$$

$$= \frac{\Pr\left(X \le d\right) - \Pr\left(X \le d\right)}{1 - \Pr\left(X \le d\right)}$$

$$= \frac{F_X(d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}$$

jadi,

$$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } 0 \le y \le d \\ \dfrac{F_X(y) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}, & \text{untuk } y > d \end{cases} \tag{3.17}$$

Pdf dan fungsi survival dapat kita turunkan dari fungsi tersebut

untuk $0 \le y \le d$,

$$f_{Y^P}(y) = \text{tak terdefinisi}$$

untuk $y > d$, $y = x$ maka $dy = dx$ atau $\dfrac{dx}{dy} = 1$

$$f_{Y^P}(y) = \frac{d}{dy} F_{Y^P}(y)$$

$$f_{Y^P}(y) = \frac{d}{dx} \frac{F_X(y) - F_X(d)}{1 - F_X(d)} \frac{dx}{dy}$$

$$= \frac{f_X(y)}{1 - F_X(d)}.1$$

$$= \frac{f_X(y)}{S_X(d)}$$

jadi,

$$f_{Y^P}(y)=\begin{cases}\text{tak terdefinisi}, & \text{untuk } 0\le y\le d\\ \dfrac{f_X(y)}{S_X(d)}, & \text{untuk } y>d\end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}S_{Y^P}(y)&=1-F_{Y^P}(y)\\ &=\begin{cases}1-0, & \text{untuk } 0\le y\le d\\ 1-\dfrac{F_X(y)-F_X(d)}{1-F_X(d)}, & \text{untuk } y>d\end{cases}\\ &=\begin{cases}1, & \text{untuk } 0\le y\le d\\ \dfrac{1-F_X(d)-\left[F_X(y)-F_X(d)\right]}{1-F_X(d)}, & \text{untuk } y>d\end{cases}\\ &=\begin{cases}1, & \text{untuk } 0\le y\le d\\ \dfrac{1-F_X(y)}{1-F_X(d)}, & \text{untuk } y>d\end{cases}\end{aligned}$$

$$S_{Y^P}(y)=\begin{cases}1, & \text{untuk } 0\le y\le d\\ \dfrac{S_X(y)}{S_X(d)}, & \text{untuk } y>d\end{cases} \tag{3.19}$$

sedangkan premi bersih untuk pembayaran per-pembayaran adalah

$$\begin{aligned}P&=E\left(Y^P\right)\\ &=E\left[Y^L\middle|Y^L>0\right]\\ &=\int_d^\infty xf_X\left(x\middle|X>d\right)dx\\ &=\int_d^\infty \frac{xf_X(x)}{\Pr(X>d)}dx\\ &=\frac{\int_d^\infty xf_X(x)dx}{1-F_X(d)}\end{aligned}$$

$$P=\frac{E\left(Y^L\right)}{1-F_X(d)}. \tag{3.20}$$

3.1.2. Premi Bersih untuk Polis Asuransi dengan *Policy limit*

Lawan dari *deductible* adalah *policy limit* atau batas polis. *Policy limit* timbul pada kontrak asuransi di mana perusahaan asuransi akan membayar penuh untuk *loss* yang besarnya di bawah u, tetapi untuk *loss* yang besarnya di atas u, perusahaan asuransi hanya membayar sebesar u. Akibat dari limit akan menghasilkan variabel acak yang tersensor kanan atau disebut dengan variabel *loss* terbatas sebagai berikut

$$Y = X \wedge u = \begin{cases} X, & X < u, \\ u, & X \geq u. \end{cases} \tag{3.21}$$

Variabel ini mempunyai distribusi campuran dengan fungsi distribusi, pdf, dan fungsi survival sebagai berikut

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y)$$

untuk $y < u$,

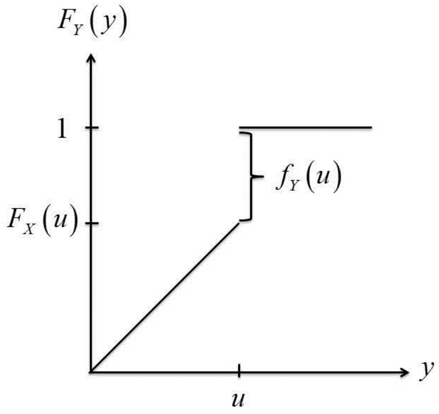
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(X \leq y) \\ &= F_X(y) \end{aligned}$$

untuk $y \geq u$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(Y \leq u) + \Pr(u < Y \leq y) \\ &= \Pr(Y \leq u) + \Pr(Y \leq y) - \Pr(Y \leq u) \\ &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(u \leq y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

jadi,

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u \end{cases} \tag{3.22}$$



Gambar 3. 1. Fungsi Distribusi dari Variabel Acak Pembayaran Polis dengan *Policy limit*

untuk $y < u,\ y = x$ maka $dy = dx$ atau $\frac{dx}{dy} = 1$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \frac{d}{dx} F_X(y) \frac{dx}{dy} \\ &= f_X(y) \cdot 1 \\ &= f_X(y) \end{aligned}$$

untuk $y = u$

$$f_Y(y) = 1 - F_X(u)$$

jadi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} S_Y(y) &= 1 - F_Y(y) \\ &= \begin{cases} 1 - F_X(y), & y < u \\ 1 - 1, & y \geq u \end{cases} \end{aligned}$$

$$S_Y(y) = \begin{cases} 1 - F_X(y), & y < u \\ 0, & y \geq u \end{cases} \tag{3.24}$$

Konsep per-*loss* dan per-pembayaran pada polis terbatas tidak relevan. Hal tersebut disebabkan karena semua *loss* yang menghasilkan pembayaran sebelum dikenakan limit akan tetap menghasilkan pembayaran setelah dikenakan limit.

Premi bersih untuk jaminan asuransi dengan *policy limit* adalah

$$\begin{aligned}
P &= E(Y) \\
&= E(X \wedge u) \\
&= \int_0^u x f_X(x)\,dx + \int_u^\infty u f_X(x)\,dx \\
&= \int_0^u x f_X(x)\,dx + u\left[1 - F_X(u)\right] \\
&= x F_X(x)\Big|_0^u - \int_0^u F_X(x)\,dx + u\left[1 - F_X(u)\right] \\
&= u F_X(u) - \int_0^u F_X(x)\,dx + u\left[1 - F_X(u)\right] \\
&= u - \int_0^u F_X(x)\,dx \\
&= \int_0^u \left[1 - F_X(x)\right] dx \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

3.1.3. Hubungan antara *Deductible* dan *Policy limit* untuk Perhitungan Premi Bersih

Misalkan ada dua polis, polis pertama dengan *deductible* biasa d (tanpa *policy limit*) dan polis kedua dengan *policy limit* d (tanpa *deductible*). Jika *loss* $X \leq d$, polis pertama akan membayar $Y = 0$ (pembayaran per loss) dan polis kedua akan membayar $Y = X$, dan jika *loss* $X > d$, polis pertama akan membayar sebesar $Y = X - d$ dan polis kedua akan membayar sebesar $Y = d$. Secara bersama-sama, total pembayaran dari kedua polis tersebut adalah $Y = X$. Berdasarkan definisi 2.11 dan definisi 2.12, pembayaran Y pada polis pertama adalah $(X - d)_+$ dan pada polis kedua adalah $(X \wedge d)$. Secara matematis,

untuk $X < d \rightarrow (X - d)_+ + (X \wedge d) = 0 + X = X$

untuk $X = d \rightarrow (X - d)_+ + (X \wedge d) = 0 + d = d = X$

untuk $X > d \rightarrow (X - d)_+ + (X \wedge d) = (X - d) + d = X$

sehingga

$$(X-d)_+ + (X \wedge d) = X\,.$$

Jika diekspektasikan persamaan di atas maka menjadi

$$E(X-d)_+ + E(X \wedge d) = E(X) \tag{3.26}$$

Sehingga, premi bersih dari pembayaran per-*loss* untuk polis dengan *deductible* biasa adalah premi bersih pada polis asuransi dengan jaminan penuh dikurangi premi bersih pada polis asuransi dengan *policy limit*.

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^L\right) \\ &= E\left(X-d\right)_+ \\ &= E\left(X\right) - E\left(X \wedge d\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Berdasarkan perhitungan sebelumnya, premi bersih untuk pembayaran per-pembayaran adalah premi bersih untuk pembayaran per-*loss* dibagi $1-F_X\left(d\right)$.

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^P\right) \\ &= \frac{E\left(Y^L\right)}{1-F_X\left(d\right)} \\ &= \frac{E\left(X\right)-E\left(X \wedge d\right)}{1-F_X\left(d\right)}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Untuk *deductible* waralaba, premi bersih untuk pembayaran per-*loss* adalah

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^L\right) \\ &= \int_d^\infty x f_X\left(x\right)dx \\ &= \int_d^\infty x f_X\left(x\right)dx - \int_d^\infty d f_X\left(x\right)dx + \int_d^\infty d f_X\left(x\right)dx \\ &= \int_d^\infty \left(x-d\right) f_X\left(x\right)dx + d\int_d^\infty f_X\left(x\right)dx \\ &= E\left(X-d\right)_+ + d\left[1-F_X\left(d\right)\right] \\ &= E\left(X\right)-E\left(X \wedge d\right)+d\left[1-F_X\left(d\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Sedangkan premi bersih untuk pembayaran per-pembayaran adalah

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^P\right) \\ &= \frac{E\left(Y^L\right)}{1-F_X\left(d\right)} \\ &= \frac{E\left(X\right)-E\left(X \wedge d\right)+d\left[1-F_X\left(d\right)\right]}{1-F_X\left(d\right)} \end{aligned}$$

$$P = \frac{E(X) - E(X \wedge d)}{1 - F_X(d)} + d. \tag{3.30}$$

3.1.4. Premi Bersih untuk Polis Asuransi dengan *Coinsurance*

Modifikasi yang umum selanjutnya adalah *coinsurance*. Dalam hal ini, perusahaan asuransi membayarkan suatu proporsi, α, dari *loss* dan pemegang polis membayar sisanya. Jika hanya *coinsurance* yang ditetapkan, maka variabel *loss* X berubah menjadi variabel pembayaran

$$Y = \alpha \cdot X \quad , \quad 0 < \alpha < 1 . \tag{3.31}$$

Fungsi distribusi, pdf, dan fungsi survival dari variabel pembayaran tersebut adalah

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(\alpha X \leq y) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{y}{\alpha}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right), \end{aligned} \tag{3.32}$$

karena $y = \alpha x$ maka $dy = \alpha dx$ atau $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\alpha}$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \frac{d}{dx} F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right) \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y}{\alpha}\right), \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$S_Y(y) = 1 - F_Y(y)$$
$$= 1 - F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$
$$= S_X\left(\frac{y}{\alpha}\right). \tag{3.34}$$

Premi bersih untuk polis asuransi dengan *coinsurance* adalah

$$P = E(Y)$$
$$= E(\alpha X)$$
$$= \alpha E(X). \tag{3.35}$$

Terlihat bahwa premi bersih dari polis dengan *coinsurance* adalah sebesar α kali premi bersih dari polis dengan jaminan asuransi penuh.

3.1.5. Premi Bersih untuk Polis Asuransi dengan *Deductible*, *Policy limit*, dan *Coinsurance*

Terkadang pada suatu polis untuk jaminan asuransi mungkin terdapat beberapa jenis modifikasi yang digabungkan. Variabel pembayaran per-*loss* pada polis asuransi dengan modifikasi *deductible* biasa sebesar d, *policy limit* sebesar u, dan *coinsurance* sebesar α dapat dituliskan sebagai berikut,

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X < d \\ \alpha(X-d), & d \le X < u \\ \alpha(u-d), & X \ge u \end{cases}. \tag{3.36}$$

Premi bersih dari pembayaran per-*loss* tersebut adalah

$$P = E(Y^L)$$
$$= \int_d^u \alpha(x-d) f_X(x)dx + \alpha\int_u^\infty (u-d) f_X(x)dx$$
$$= \alpha\left\{\left[\int_0^u (x-d) f_X(x)dx - \int_0^d (x-d) f_X(x)dx\right] + (u-d)\left[1-F_X(u)\right]\right\}$$
$$= \alpha\left\{\left[\int_0^u x f_X(x)dx - \int_0^d x f_X(x)dx - dF_X(u) + dF_X(d)\right] + (u-d)\left[1-F_X(u)\right]\right\}$$

$$P = \alpha\left\{\int_0^u x f_X(x)\,dx - \int_0^d x f_X(x)\,dx - dF_X(u) + dF_X(d)\right.$$

$$\left. + u\left[1 - F_X(u)\right] - d\left[1 - F_X(u)\right]\right\}$$

$$= \alpha\left\{\int_0^u x f_X(x)\,dx + u\left[1 - F_X(u)\right] - \int_0^d x f_X(x)\,dx - d\left[1 - F_X(d)\right]\right\}$$

$$= \alpha\left[E(X \wedge u) - E(X \wedge d)\right] \tag{3.37}$$

Sedangkan variabel pembayaran per-pembayaran pada polis asuransi dengan modifikasi *deductible* biasa, *policy limit*, dan *coinsurance* adalah

$$Y^P = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & X < d \\ \alpha(X - d), & d \leq X < u \\ \alpha(u - d), & X \geq u \end{cases} \cdot \tag{3.38}$$

Karena $Y^P = Y^L \middle| Y^L > 0$ maka premi bersih untuk pembayaran per-pembayaran adalah

$$P = E\left(Y^P\right)$$

$$= E\left[Y^L \middle| Y^L > 0\right]$$

$$= \int_d^u \alpha(x-d)\, f_X\left(x \middle| X > d\right) dx + \alpha\int_u^\infty (u-d)\, f_X\left(x \middle| X > d\right) dx$$

$$= \int_d^u \alpha(x-d)\frac{f_X(x)}{\Pr(X > d)}\,dx + \alpha\int_u^\infty (u-d)\frac{f_X(x)}{\Pr(X > d)}\,dx$$

$$= \frac{\int_d^u \alpha(x-d)\, f_X(x)\,dx + \alpha\int_u^\infty (u-d)\, f_X(x)\,dx}{\Pr(X > d)}$$

$$= \frac{\int_d^u \alpha(x-d)\, f_X(x)\,dx + \alpha\int_u^\infty (u-d)\, f_X(x)\,dx}{1 - F_X(d)}$$

$$= \frac{E\left(Y^L\right)}{1 - F_X(d)}. \tag{3.39}$$

Untuk jaminan asuransi dengan modifikasi *deductible* waralaba sebesar d, *policy limit* sebesar u, dan *coinsurance* sebesar α, variabel pembayaran per-*loss* dinyatakan sebagai berikut:

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X < d \\ \alpha X, & d \le X < u \\ \alpha u, & X \ge u \end{cases} \cdot \tag{3.40}$$

Premi bersih untuk polis ini dengan variabel pembayaran dipandang dari segi *loss* adalah:

$$P = E\left(Y^L\right)$$
$$= \int_d^u \alpha x f_X\left(x\right)dx + \alpha\int_u^\infty u f_X\left(x\right)dx$$
$$= \alpha\left\{\left[\int_0^u x f_X\left(x\right)dx - \int_0^d x f_X\left(x\right)dx\right] + u\left[1 - F_X\left(u\right)\right]\right\}$$
$$= \alpha\left\{\int_0^u x f_X\left(x\right)dx + u\left[1 - F_X\left(u\right)\right] - \left[\int_0^d x f_X\left(x\right)dx + d\left[1 - F_X\left(d\right)\right]\right]\right.$$
$$\left. + d\left[1 - F_X\left(d\right)\right]\right\}$$
$$= \alpha\left[E\left(X \wedge u\right) - E\left(X \wedge d\right) + d\left[1 - F_X\left(d\right)\right]\right] \tag{3.41}$$

Sedangkan variabel pembayaran per-pembayaran pada jaminan asuransi ini adalah:

$$Y^P = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & X < d \\ \alpha(X - d), & d \le X < u \\ \alpha(u - d), & X \ge u \end{cases} \cdot \tag{3.42}$$

Karena $Y^P = Y^L \middle| Y^L > 0$ maka premi bersih untuk pembayaran per-pembayaran adalah

$$P = E\left(Y^P\right)$$
$$= E\left[Y^L \middle| Y^L > 0\right]$$
$$= \int_d^u \alpha x f_X\left(x \middle| X > d\right)dx + \int_u^\infty \alpha u f_X\left(x \middle| X > d\right)dx$$
$$= \int_d^u \alpha x \frac{f_X\left(x\right)}{\Pr\left(X > d\right)}dx + \int_u^\infty \alpha u \frac{f_X\left(x\right)}{\Pr\left(X > d\right)}dx$$
$$= \frac{\int_d^u \alpha x f_X\left(x\right)dx + \int_u^\infty \alpha u f_X\left(x\right)dx}{\Pr\left(X > d\right)}$$
$$= \frac{\int_d^u \alpha x f_X\left(x\right)dx + \int_u^\infty \alpha u f_X\left(x\right)dx}{1 - F_X\left(d\right)}$$

$$= \frac{E\left(Y^L\right)}{1 - F_X\left(d\right)}. \tag{3.43}$$

3.1.6. Premi Bersih dengan Efek Inflasi

3.1.6.1. Premi Bersih untuk Asuransi Jaminan Penuh

Inflasi dapat meningkatkan *loss* yang ada. Misalkan r adalah ekspektasi tingkat inflasi di masa mendatang. Jika terjadi inflasi sebesar r, maka besar *loss* akan berubah menjadi $\left(1+r\right)$ kali dari besar *loss* sebelum terjadi inflasi $\left(X\right)$. Sehingga, besar pembayaran yang diperlukan adalah

$$Y = \left(1+r\right)X \tag{3.44}$$

Karena perubahan besarnya *loss* tersebut, maka fungsi distribusi, pdf, dan fungsi survival dari pembayaran adalah

$$\begin{aligned} F_Y\left(y\right) &= \Pr\left(Y \le y\right) \\ &= \Pr\left[\left(1+r\right)X \le y\right] \\ &= \Pr\left(X \le \frac{y}{1+r}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y}{1+r}\right), \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} f_Y\left(y\right) &= \frac{d}{dy}F_Y\left(y\right) \\ &= \frac{1}{1+r}\frac{d}{dx}F_X\left(\frac{y}{1+r}\right) \\ &= \frac{1}{1+r}f_X\left(\frac{y}{1+r}\right), \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} S_Y\left(y\right) &= 1 - F_Y\left(y\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{y}{1+r}\right) \\ &= S_X\left(\frac{y}{1+r}\right). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Sedangkan premi bersih untuk polis asuransi jaminan penuh setelah terjadi inflasi adalah

$$\begin{aligned} P &= E(Y) \\ &= E\left[(1+r)X\right] \\ &= (1+r)E(X). \end{aligned} \tag{3.48}$$

3.1.6.2. Premi Bersih untuk Asuransi dengan *Deductible*

Setelah terjadi inflasi, besar *loss* dilambangkan dengan

$$Z = (1+r)X \tag{3.49}$$

dengan

$$F_Z(z) = \Pr(Z \le z) = \Pr\left[(1+r)X \le z\right] = \Pr\left(X \le \frac{z}{1+r}\right) = F_X\left(\frac{z}{1+r}\right)$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{d}{dx}F_X\left(\frac{z}{1+r}\right)\frac{dx}{dz} = f_X\left(\frac{z}{1+r}\right)\cdot\frac{1}{1+r}$$

dan

$$E(Z) = E\left[(1+r)X\right] = (1+r)E(X)$$

$$\begin{aligned} E(Z \wedge d) &= \int_0^d z f_Z(z)\,dz + d\left[1 - F_Z(d)\right] \\ &= \int_0^d \frac{z}{1+r} f_X\left(\frac{z}{1+r}\right)dz + d\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right] \end{aligned}$$

Karena $z = (1+r)x$ maka $dz = (1+r)dx$.

Untuk $z = 0$ maka $x = 0$ dan untuk $z = d$ maka $x = \frac{d}{1+r}$.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{d}{1+r}} (1+r)x f_X(x)\,dx + d\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right] \\ &= (1+r)\left\{\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x)\,dx + \frac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\} \\ &= (1+r)E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right). \end{aligned}$$

Berdasarkan pembahasan pada 3.1.3, premi bersih untuk pembayaran per-*loss* dan pembayaran per-pembayaran pada asuransi dengan kontrak *deductible* biasa sebesar d dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^L\right) \\ &= E(Z) - E(Z \wedge d) \\ &= (1+r)\left[E(X) - E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^P\right) \\ &= \frac{E\left(Y^L\right)}{1-F_Z(d)} \\ &= \frac{E(Z) - E(Z \wedge d)}{1-F_Z(d)} \\ &= \frac{(1+r)\left[E(X) - E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right)\right]}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Sedangkan premi bersih untuk pembayaran per-*loss* dan pembayaran per-pembayaran pada asuransi dengan kontrak *deductible* waralaba sebesar d adalah

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^L\right) \\ &= E(Z) - E(Z \wedge d) + d\left[1-F_Z(d)\right] \\ &= (1+r)E(X) - (1+r)E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) + d\left[1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right] \\ &= (1+r)\left\{E(X) - E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) + \frac{d}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^P\right) \\ &= \frac{E\left(Y^L\right)}{1-F_Z(d)} \\ &= \frac{E(Z) - E(Z \wedge d) + d\left[1-F_Z(d)\right]}{1-F_Z(d)} \end{aligned}$$

$$P=\frac{(1+r)\left\{E(X)-E\left(X\wedge\frac{d}{1+r}\right)+\frac{d}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\}}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$=\frac{(1+r)\left\{E(X)-E\left(X\wedge\frac{d}{1+r}\right)\right\}}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}+\frac{d}{1+r}. \qquad (3.53)$$

3.1.6.3. Premi Bersih untuk Asuransi dengan *Policy limit*

Premi bersih untuk pembayaran pada asuransi dengan kontrak *policy limit* sebesar u adalah

$$E(Z\wedge u)=\int_0^u zf_Z(z)\,dz+u\left[1-F_Z(u)\right]$$

$$=\int_0^u\frac{z}{1+r}f_X\left(\frac{z}{1+r}\right)dz+u\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]$$

Karena $z=(1+r)x$ maka $dz=(1+r)dx.$

Untuk $z=0$ maka $x=0$ dan untuk $z=u$ maka $x=\frac{u}{1+r}.$

$$E(Z\wedge u)=\int_0^{\frac{u}{1+r}}(1+r)xf_X(x)\,dx+u\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]$$

$$=(1+r)\left\{\int_0^{\frac{u}{1+r}}xf_X(x)\,dx+\frac{u}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]\right\}$$

$$E(Z\wedge u)=(1+r)E\left(X\wedge\frac{u}{1+r}\right). \qquad (3.54)$$

3.1.6.4. Premi Bersih untuk Asuransi dengan *Coinsurance*

Premi bersih untuk pembayaran pada asuransi dengan kontrak *coinsurance* sebesar α adalah

$$
\begin{aligned}
P &= E(Y) \\
&= E(\alpha Z) \\
&= \alpha E(Z) \\
&= \alpha E\left[(1+r)X\right] \\
&= \alpha(1+r)E(X).
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

3.1.6.5. Premi Bersih untuk Asuransi dengan *Deductible, Policy limit,* dan *Coinsurance*

Variabel pembayaran per-*loss* pada polis asuransi dengan modifikasi *deductible* biasa sebesar d, *policy limit* sebesar u, dan *coinsurance* sebesar α setelah terjadi inflasi sebesar r dapat dituliskan sebagai berikut,

$$
Y^L = \begin{cases} 0, & X < \dfrac{d}{1+r} \\ \alpha\left[(1+r)X - d\right], & \dfrac{d}{1+r} \le X \le \dfrac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d), & X \ge \dfrac{u}{1+r} \end{cases}
\tag{3.56}
$$

Premi bersih dari pembayaran per-*loss* tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
P &= E\left(Y^L\right) \\
&= \int_{d/1+r}^{u/1+r} \alpha\left[(1+r)x - d\right] f_X(x)\,dx + \alpha(u-d)\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right] \\
&= \alpha(1+r)\int_{d/1+r}^{u/1+r} x f_X(x)\,dx - \alpha d\int_{d/1+r}^{u/1+r} f_X(x)\,dx + \alpha u\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right] \\
&\quad -\alpha d\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right] \\
&= \alpha(1+r)\left\{\left[\int_0^{u/1+r} x f_X(x)\,dx - \int_0^{d/1+r} x f_X(x)\,dx\right] - \frac{d}{1+r}\left[F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. -F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right] + \frac{u}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right] - \frac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$P=\alpha(1+r)\left\{\int_0^{u/1+r} xf_X(x)\,dx+\frac{u}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]-\int_0^{d/1+r} xf_X(x)\,dx\right.$$
$$\left.-\frac{d}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\}$$
$$=\alpha(1+r)\left[E\left(X\wedge\frac{u}{1+r}\right)-E\left(X\wedge\frac{d}{1+r}\right)\right]. \quad (3.57)$$

Sedangkan variabel pembayaran per-pembayaran pada polis asuransi dengan modifikasi *deductible* biasa sebesar d, *policy limit* sebesar u, dan *coinsurance* sebesar α setelah terjadi inflasi sebesar r adalah

$$Y^P=\begin{cases}\text{tak terdefinisi}, & X<\dfrac{d}{1+r}\\ \alpha\left[(1+r)X-d\right], & \dfrac{d}{1+r}\le X\le\dfrac{u}{1+r}\\ \alpha(u-d), & X\ge\dfrac{u}{1+r}\end{cases} \quad (3.58)$$

Karena $Y^P=Y^L\big|Y^L>0$ maka premi bersih untuk pembayaran per-pembayaran adalah

$$P=E\left(Y^P\right)$$
$$=E\left(Y^L\big|Y^L>0\right)$$
$$=\int_{d/1+r}^{u/1+r}\alpha\left[(1+r)x-d\right]f_X\left(x\middle|X>\frac{d}{1+r}\right)dx+\alpha\int_{u/1+r}^{\infty}(u-d)\,f_X\left(x\middle|X>\frac{d}{1+r}\right)dx$$
$$=\int_{d/1+r}^{u/1+r}\alpha\left[(1+r)x-d\right]\frac{f_X(x)}{\Pr\left(X>\frac{d}{1+r}\right)}dx+\alpha\int_{u/1+r}^{\infty}(u-d)\frac{f_X(x)}{\Pr\left(X>\frac{d}{1+r}\right)}dx$$
$$=\frac{\int_{d/1+r}^{u/1+r}\alpha\left[(1+r)x-d\right]f_X(x)\,dx+\alpha\int_{u/1+r}^{\infty}(u-d)\,f_X(x)\,dx}{\Pr\left(X>\frac{d}{1+r}\right)}$$
$$=\frac{\int_{d/1+r}^{u/1+r}\alpha\left[(1+r)x-d\right]f_X(x)\,dx+\alpha(u-d)\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$P=\frac{\alpha\left(1+r\right)\int_{d/1+r}^{u/1+r}xf_X\left(x\right)dx-\alpha d\int_{d/1+r}^{u/1+r}f_X\left(x\right)dx+\alpha u\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$-\frac{\alpha d\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$=\frac{\alpha\left(1+r\right)\left\{\left[\int_0^{u/1+r}xf_X\left(x\right)dx-\int_0^{d/1+r}xf_X\left(x\right)dx\right]-\frac{d}{1+r}\left[F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right.}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$+\frac{\left.\frac{u}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]-\frac{d}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]\right\}}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$=\frac{\alpha\left(1+r\right)\left\{\int_0^{u/1+r}xf_X\left(x\right)dx+\frac{u}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]-\int_0^{d/1+r}xf_X\left(x\right)dx\right.}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$-\frac{\left.\frac{d}{1+r}\left[1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\}}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$P=\alpha\left(1+r\right)\frac{\left[E\left(X\wedge\frac{u}{1+r}\right)-E\left(X\wedge\frac{d}{1+r}\right)\right]}{1-F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}. \qquad (3.59)$$

Untuk jaminan asuransi dengan modifikasi *deductible* waralaba sebesar d, *policy limit* sebesar u, dan *coinsurance* sebesar α setelah terjadi inflasi sebesar r, variabel pembayaran per-*loss* adalah

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X < \dfrac{d}{1+r} \\ \alpha(1+r)X, & \dfrac{d}{1+r} \le X \le \dfrac{u}{1+r} \\ \alpha u, & X \ge \dfrac{u}{1+r} \end{cases} \tag{3.60}$$

Premi bersih dari pembayaran per-*loss* tersebut adalah

$$\begin{aligned} P &= E\left(Y^L\right) \\ &= \int_{d/1+r}^{u/1+r} \alpha(1+r) x f_X(x)\,dx + \alpha u\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right] \\ &= \alpha(1+r)\int_{d/1+r}^{u/1+r} x f_X(x)\,dx + \alpha u\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \alpha(1+r)\left\{\left[\int_0^{u/1+r} x f_X(x)\,dx - \int_0^{d/1+r} x f_X(x)\,dx\right]\right. \\ &\quad \left. + \frac{u}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right]\right\} \\ &= \alpha(1+r)\left\{\int_0^{u/1+r} x f_X(x)\,dx + \frac{u}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right] - \int_0^{d/1+r} x f_X(x)\,dx\right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right] + \frac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\} \\ &= \alpha(1+r)\left\{E\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) + \frac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Sedangkan variabel pembayaran per-pembayaran pada polis asuransi dengan modifikasi *deductible* waralaba sebesar d, *policy limit* sebesar u, dan *coinsurance* sebesar α setelah terjadi inflasi sebesar r adalah

$$Y^P = \begin{cases} \text{tak terdefinisi}, & X < \dfrac{d}{1+r} \\ \alpha(1+r)X, & \dfrac{d}{1+r} \le X \le \dfrac{u}{1+r} \\ \alpha u, & X \ge \dfrac{u}{1+r} \end{cases} \tag{3.62}$$

Dari bentuk variabel Y^P tersebut terlihat pula $Y^P = Y^L \big| Y^L > 0$ sehingga premi bersih untuk pembayaran per-pembayaran adalah

$$
\begin{aligned}
P &= E\left(Y^P\right) \\
&= E\left(Y^L \middle| Y^L > 0\right) \\
&= \int_{d/1+r}^{u/1+r} \alpha\left(1+r\right) x f_X\left(x \middle| X > \frac{d}{1+r}\right) dx + \int_{u/1+r}^{\infty} \alpha u f_X\left(x \middle| X > \frac{d}{1+r}\right) dx \\
&= \int_{d/1+r}^{u/1+r} \alpha\left(1+r\right) x \frac{f_X\left(x\right)}{\Pr\left(X > \dfrac{d}{1+r}\right)} dx + \int_{u/1+r}^{\infty} \alpha u \frac{f_X\left(x\right)}{\Pr\left(X > \dfrac{d}{1+r}\right)} dx \\
&= \frac{\int_{d/1+r}^{u/1+r} \alpha\left(1+r\right) x f_X\left(x\right) dx + \int_{u/1+r}^{\infty} \alpha u f_X\left(x\right) dx}{\Pr\left(X > \dfrac{d}{1+r}\right)} \\
&= \frac{\int_{d/1+r}^{u/1+r} \alpha\left(1+r\right) x f_X\left(x\right) dx + \alpha u\left[1 - F_X\left(\dfrac{u}{1+r}\right)\right]}{1 - F_X\left(\dfrac{d}{1+r}\right)} \\
&= \frac{\alpha\left(1+r\right) \int_{d/1+r}^{u/1+r} x f_X\left(x\right) dx + \alpha u\left[1 - F_X\left(\dfrac{u}{1+r}\right)\right]}{1 - F_X\left(\dfrac{d}{1+r}\right)} \\
&= \frac{\alpha\left(1+r\right)\left\{\left[\int_0^{u/1+r} x f_X\left(x\right) dx - \int_0^{d/1+r} x f_X\left(x\right) dx\right] + \dfrac{u}{1+r}\left[1 - F_X\left(\dfrac{u}{1+r}\right)\right]\right\}}{1 - F_X\left(\dfrac{d}{1+r}\right)} \\
&= \frac{\alpha\left(1+r\right)\left\{\int_0^{u/1+r} x f_X\left(x\right) dx + \dfrac{u}{1+r}\left[1 - F_X\left(\dfrac{u}{1+r}\right)\right] - \int_0^{d/1+r} x f_X\left(x\right) dx\right.}{1 - F_X\left(\dfrac{d}{1+r}\right)} \\
&\quad \frac{\left. - \dfrac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\dfrac{d}{1+r}\right)\right] + \dfrac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\dfrac{d}{1+r}\right)\right]\right\}}{1 - F_X\left(\dfrac{d}{1+r}\right)}
\end{aligned}
$$

$$P = \alpha(1+r)\frac{\left\{E\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) + \frac{d}{1+r}\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\}}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

$$= \alpha(1+r)\frac{E\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} + \frac{d}{1+r}. \qquad (3.63)$$

3.2. Perhitungan Premi Bersih untuk Total Klaim dalam satu periode

Pada asuransi mungkin terjadi beberapa klaim oleh suatu polis dalam satu periode. Sebagai contoh, pada asuransi kecelakaan, mungkin seseorang mengalami beberapa kecelakaan dalam setahun, sehingga polis dari orang tersebut mengajukan klaim sejumlah kecelakaan yang dialami. Banyaknya pembayaran klaim yang dilakukan oleh perusahaan asuransi biasanya sama dengan banyaknya *loss* atau kecelakaan yang terjadi. Namun, apabila asuransi tersebut dimodifikasi dengan *deductible,* maka banyaknya pembayaran klaim yang dilakukan oleh perusahaan asuransi akan berbeda dengan banyaknya *loss* karena mungkin terdapat *loss* yang besarnya di bawah batas *deductible* sehingga perusahaan asuransi tidak melakukan pembayaran.

Dalam menghitung premi bersih untuk total klaim dalam satu periode perlu diketahui distribusi dari besar dan banyaknya pembayaran klaim. Premi untuk total klaim dapat dihitung sebagai berikut. Misalkan Y_i adalah variabel acak yang menyatakan besarnya pembayaran klaim ke-i dalam satu periode, dan N^P adalah variabel acak yang menyatakan banyaknya pembayaran klaim dalam periode tersebut, maka $i = 1, 2, ..., N^P$. Variabel acak untuk total pembayaran klaim adalah

$$S^P = \sum_{i=1}^{N^P} Y_i \qquad (3.64)$$

Oleh karena itu, premi bersih dari total pembayaran klaim adalah

$$
\begin{aligned}
P &= E\left(S^{P}\right) \\
&= E_{N^{P}}\left[E\left(S^{P} \middle| N^{P}\right)\right] \\
&= E_{N^{P}}\left[E\left(\sum_{i=1}^{N^{P}} Y_i \middle| N^{P}=n\right)\right] \\
&= E_{N^{P}}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \middle| N^{P}=n\right)\right] \\
&= E_{N^{P}}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right] \\
&= E_{N^{P}}\left[\sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i\right)\right] \\
&= E_{N^{P}}\left[nE\left(Y\right)\right] \\
&= E\left(Y\right)E\left(N^{P}\right)
\end{aligned} \tag{3.65}
$$

3.2.1. Premi Bersih untuk Polis Asuransi dengan Modifikasi *Deductible*

Untuk polis asuransi dengan modifikasi *deductible*, distribusi dari banyaknya pembayaran klaim berbeda dengan distribusi dari banyaknya *loss*. Ketika *deductible* dinaikkan, banyaknya pembayaran dalam suatu periode akan berkurang, sedangkan apabila *deductible* diturunkan maka banyaknya pembayaran akan bertambah.

Proses ini akan diukur dengan asumsi bahwa penggunaan modifikasi pada jaminan asuransi tidak mempengaruhi proses yang menghasilkan *loss* atau tipe orang yang akan membeli asuransi. Sebagai contoh, orang yang membeli suatu asuransi dengan *deductible* 250 yang menjamin kerusakan mobil mungkin meyakini bahwa dirinya akan sedikit terlibat dalam kecelakaan daripada orang yang membeli asuransi dengan jaminan penuh. Demikian pula, suatu perusahaan mungkin melihat bahwa rata-rata cacat permanen menurun ketika menetapkan benefit yang kecil untuk pegawai-pegawai baru.

Dalam melihat perubahan distribusi banyaknya pembayaran klaim dari distribusi banyaknya *loss*, akan digunakan beberapa simbol variabel acak.

Misalkan X_j, *severity*, menunjukkan besar *loss* seutuhnya pada *loss* ke- j dan tidak ada modifikasi jaminan asuransi. Misalkan N^L menunjukkan banyaknya *loss*, maka total *loss* dinyatakan sebagai:

$$S = \sum_{j=1}^{N^L} X_j$$

Kemudian dilakukanlah modifikasi *deductible* pada jaminan asuransi sehingga v adalah probabilitas bahwa *loss* akan dibayar. Artinya, jika ditetapkan suatu *deductible* d, maka $v = \Pr(X > d)$. Selanjutnya, didefinisikan variabel acak indikator I_j, di mana $I_j = 1$ jika *loss* ke- j dibayar dan $I_j = 0$ untuk lainnya. Maka I_j berdistribusi Bernoulli dengan parameter v dan pgf dari I_j adalah $P_{I_j}(z) = 1 - v + vz$. Kemudian $N^P = I_1 + I_2 + \ldots + I_{N^L}$ menunjukkan banyaknya pembayaran. Jika $I_1, I_2, \ldots$ saling independen dan juga independen dengan N^L, maka N^P memiliki distribusi gabungan dengan distribusi dari N^L sebagai distribusi primer dan distribusi dari I_j yaitu Bernoulli sebagai distribusi sekunder. Dengan demikian, terjadi perubahan dari variabel total *loss* menjadi variabel total pembayaran kalim, yaitu $S^P = \sum_{i=1}^{N^P} Y_i$ seperti yang telah didefinisikan sebelumnya.

Pgf dari N^P adalah,

$$\begin{aligned}
P_{N^P}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\left(N^P = k\right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \Pr\left(N^P = k \middle| N^L = n\right) \Pr\left(N^L = n\right) z^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\left(N^L = n\right) \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\left(I_1 + I_2 + \ldots + I_n = k \middle| N^L = n\right) z^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{N^P}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\left(N^L = n\right) \left[P_{I_j}(z)\right]^n \\
&= P_{N^L}\left[P_{I_j}(z)\right] \\
&= P_{N^L}\left[1 + v(z-1)\right] \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

Apabila distribusi dari N^L bergantung pada suatu parameter θ sedemikian sehingga

$$P_{N^L}(z) = P_{N^L}(z;\theta) = B\left[\theta(z-1)\right],$$

di mana $B(z)$ adalah fungsi independen terhadap θ, maka

$$\begin{aligned} P_{N^P}(z) &= B\left[\theta(1-v+vz-1)\right] \\ &= B\left[v\theta(z-1)\right] \\ &= P_{N^L}(z;v\theta). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Hasil tersebut menunjukkan bahwa N^L dan N^P berdistribusi sama dan hanya parameter θ yang perlu diubah.

Jika pembayaran dipandang sebagai variabel per-*loss*, maka premi bersih untuk total klaim pada satu periode pada polis dengan modifikasi *deductible* adalah

$$\begin{aligned} P &= E\left(S^P\right) \\ &= E\left(Y^L\right)E\left(N^P\right) \end{aligned} \tag{3.68}$$

Jika pembayaran dipandang sebagai variabel per-pembayaran, maka premi bersih untuk total klaim pada satu periode pada polis dengan modifikasi *deductible* adalah

$$\begin{aligned} P &= E\left(S^P\right) \\ &= E\left(Y^P\right)E\left(N^P\right) \end{aligned} \tag{3.69}$$

Hasil tersebut dapat digeneralisasikan untuk distribusi banyaknya *loss* yang terpancung-nol dan termodifikasi-nol. Seperti yang telah dibahas pada bab 2, pgf dari distribusi termodifikasi-nol adalah:

$$\begin{aligned} P^M(z) &= p_0^M + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}\left[P(z)-p_0\right] \\ &= p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\frac{P(z)-p_0}{1-p_0}. \end{aligned}$$

Misalkan N^L berdistribusi termodifikasi-nol dan bergantung pada parameter θ dan $\alpha = \Pr\left(N^L = 0\right)$. Karena $p_0 = P(0) = B(-\theta)$, maka

$$\begin{aligned}P_{N^L}(z) &= P_{N^L}(z;\theta,\alpha)\\ &= \alpha + (1-\alpha)\frac{B[\theta(z-1)] - B(-\theta)}{1-B(-\theta)}\\ &= P_{N^L}(0) + \left(1 - P_{N^L}(0)\right)\frac{B[\theta(z-1)] - B(-\theta)}{1-B(-\theta)}\end{aligned} \quad (3.70)$$

di mana $B[\theta(z-1)]$ menunjukkan pgf dari distribusi anggota kelas $(a,b,0)$ yang bersesuaian. Dengan menggunakan hasil yang diperoleh sebelumnya, pgf dari N^P dapat dicari sebagai berikut

$$\begin{aligned}P_{N^P}(z) &= P_{N^L}[1+v(z-1);\theta,\alpha]\\ &= P_{N^L}(1-v) + \left(1 - P_{N^L}(1-v)\right)\frac{B[\theta(1+vz-v-1)] - B(-\theta)}{1-B(-\theta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{N^P}(z) &= P_{N^P}(0) + \left(1 - P_{N^P}(0)\right)\frac{B[v\theta(z-1)] - B(-\theta)}{1-B(-\theta)}\\ &= \alpha^* + (1-\alpha^*)\frac{B[v\theta(z-1)] - B(-\theta)}{1-B(-\theta)}\\ &= P_{N^L}(z;v\theta,\alpha^*)\end{aligned} \quad (3.71)$$

di mana $\alpha^* = P_{N^P}(0) = P_{N^L}(1-v;\theta,\alpha)$.

Jika $\alpha = \Pr(N^L = 0) = P_{N^L}(0) = P_{N^L}(0;\theta,\alpha) = 0$ maka distribusi dari N^L adalah distribusi terpancung-nol. Namun, $P_{N^L}(1-v) = P_{N^L}(1-v;\theta,\alpha)$ $= P_{N^P}(0) = \alpha^* \neq 0$ sehingga distribusi dari N^P adalah distribusi termodifikasi-nol.

Tabel berikut ini menunjukkan perubahan-perubahan parameter pada beberapa distribusi diskrit banyaknya klaim yang merupakan anggota kelas $(a,b,0)$ dan $(a,b,1)$.

Tabel 3. 1. Perubahan Parameter Distribusi Banyaknya Klaim

Distribusi	Parameter N^L	Parameter N^P
Poisson	λ	$\lambda^* = v\lambda$

ZM Poisson	λ p_0^M	$\lambda^* = v\lambda$ $p_0^{M*} = \dfrac{p_0^M - e^{-\lambda} + e^{-v\lambda} - p_0^M e^{-v\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$
Binomial	m q	$m^* = m$ $q^* = vq$
ZM Binomial	m q p_0^M	$m^* = m$ $q^* = vq$ $p_0^{M*} = \dfrac{p_0^M - (1-q)^m + (1-vq)^m - p_0^M (1-vq)^m}{1-(1-q)^m}$
Negative Binomial	r β	r $\beta^* = v\beta$
ZM Negative Binomial	r β p_0^M	r $\beta^* = v\beta$ $p_0^{M*} = \dfrac{p_0^M - (1+\beta)^{-r} + (1+v\beta)^{-r} - p_0^M (1+v\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}}$
ZM Logarithmic	β p_0^M	$\beta^* = v\beta$ $p_0^{M*} = 1-\left(1-p_0^M\right)\dfrac{\ln(1+v\beta)}{\ln(1+\beta)}$

Jika distribusi dari banyaknya *loss* berdistribusi gabungan (*compound*), maka dapat dituliskan $P_{N^L}(z) = P_1\left[P_2(z)\right]$ dengan demikian,

$$P_{N^P}(z) = P_{N^L}\left[1+v(z-1)\right] = P_1\left\{P_2\left[1+v(z-1)\right]\right\}. \tag{3.72}$$

3.2.2. Premi Bersih untuk Polis Asuransi dengan Modifikasi Selain *Deductible*

Untuk asuransi dengan modifikasi selain *deductible*, yaitu *policy limit* dan *coinsurance,* atau gabungan dari beberapa modifikasi yang tidak mengandung *deductible*, distribusi dari banyaknya pembayaran klaim sama dengan distribusi dari banyaknya *loss*, karena setiap *loss* yang terjadi pasti menghasilkan pembayaran. Namun, distribusi dari besarnya pembayaran klaim berbeda dengan distribusi dari besarnya *loss*, seperti yang sudah dibahas pada bab 3.1. Variabel acak dari total pembayaran klaim adalah

$$S^P = \sum_{i=1}^{N^P} Y_i$$

di mana Y_i adalah variabel acak yang menunjukkan besarnya pembayaran klaim dengan distribusi besarnya klaim yang telah dimodifikasi dari distribusi besarnya *loss* X. Sedangkan N^P adalah variabel acak diskrit yang menunjukkan banyaknya pembayaran klaim dan N^L adalah variabel acak yang menunjukkan banyaknya *loss* yang terjadi dalam satu periode. Oleh karena itu, distribusi dari N^P sama dengan distribusi dari N^L.

Premi bersih dari total klaim pada asuransi ini adalah

$$\begin{aligned} P &= E\left(S^P\right) \\ &= E(Y)E\left(N^P\right) \\ &= E(Y)E\left(N^L\right) . \end{aligned} \qquad (3.73)$$

3.3. *Cession Percentage* Optimal untuk Reasuransi Proporsional

de Finetti (1940) mengusulkan pemilihan *cession percentage* α_i dengan meminimumkan variansi dari pendapatan perusahaan asuransi dengan diberikan suatu tingkat hasil yang diharapkan. Misalkan perusahaan reasuransi menetapkan premi berdasarkan prinsip nilai ekspektasi dengan bobot ξ_i, sehingga premi reasuransi adalah $(1+\xi_i)E(S_i)$ untuk polis ke-i. Pendapatan perusahaan asuransi adalah

$$Z(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - (1+\xi_i)\alpha_i E(S_i) - (1-\alpha_i)S_i) \qquad (3.74)$$

di mana P_i adalah premi yang diterima oleh perusahaan asuransi dari polis ke-i, S_i adalah total klaim dari polis ke-i, dan $\boldsymbol{\alpha}$ adalah vaktor dari *cession percentage* : $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. *Cession percentage* tersebut ditentukan oleh hasil dari meminimumkan variansi dari pendapatan perusahaan asuransi, yaitu:

$$\min\left[\mathrm{Var}\left(Z(\boldsymbol{\alpha})\right)\right] \tag{3.75}$$

Dengan kendala nilai ekspektasi dan daerah nilai untuk *cession percentage* $0 \leq \alpha_i \leq 1$, yaitu

$$E\left(Z(\boldsymbol{\alpha})\right) = k \tag{3.76}$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,\dots,n \tag{3.77}$$

$$\alpha_i \leq 1 \quad , \quad i = 1,2,\dots,n \tag{3.78}$$

di mana k menyatakan ekspektasi pendapatan yang ditentukan oleh perusahaan asuransi.

de Finetti (1940) memberikan hasil nilai optimal untuk *cession percentage* sebagai berikut

$$\alpha_i = \min\left(1,\max\left(0,1 - \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\mathrm{Var}(S_i)}\right)\right) \tag{3.79}$$

di mana λ adalah konstanta yang harus dihitung dengan memasukkan (3.79) ke (3.76). Pembuktian de Finetti berdasarkan optimasi klasik hanya dengan kendala persamaan, sehingga persamaan (3.77) dan (3.78) yang mendefinisikan daerah yang dapat diterima bagi *cession percentage* diabaikan. Solusi dari meminimumkan variansi $Z(\boldsymbol{\alpha})$ dengan kendala nilai ekspektasi (3.76) adalah

$$\alpha_i = 1 - \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\mathrm{Var}(S_i)} \tag{3.80}$$

di mana λ adalah pengali Lagrange untuk kendala (3.76).

Untuk membuktikan hasil de Finetti tentang masalah meminimumkan fungsi (3.75), akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa masalah tersebut konveks, yang berarti bahwa penulisan dan penyelesaian kondisi optimasi KKT cukup untuk menemukan solusi optimalnya.

Fungsi objektif dari masalah (3.75) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[Z(\boldsymbol{\alpha})] &= \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(P_i - (1+\xi_i)\alpha_i E(S_i) - (1-\alpha_i)S_i\right)\right] \\ &= \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} -(1-\alpha_i)S_i\right]\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i)^2 \text{Var}(S_i). \quad (3.81)$$

Akan dibuktikan bahwa fungsi objektif $\text{Var}[Z(\boldsymbol{\alpha})]$ adalah fungsi konveks, yaitu $\text{Var}[Z(\theta\boldsymbol{x} + (1-\theta)\boldsymbol{y})] \leq \theta\text{Var}[Z(x)] + (1-\theta)\text{Var}[Z(y)]$. Di mana $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ adalah suatu nilai $\boldsymbol{\alpha}$, sehingga $\theta\boldsymbol{x} + (1-\theta)\boldsymbol{y}$ adalah vektor $\begin{pmatrix} \theta x_1 + (1-\theta)y_1 \\ \vdots \\ \theta x_n + (1-\theta)y_n \end{pmatrix}$, $0 \leq x_i \leq 1$ dan $0 \leq y_i \leq 1$ dan θ berada dalam interval $[0,1]$, maka

$$\text{Var}[Z(\theta\boldsymbol{x} + (1-\theta)\boldsymbol{y})] = \sum_{i=1}^{n} [1 - (\theta x_i + (1-\theta)y_i)]^2 \text{Var}(S_i)$$

Akan ditunjukkan bahwa :

$[1 - (\theta x_i + (1-\theta)y_i)]^2 \leq \theta(1-x_i)^2 + (1-\theta)(1-y_i)^2$

<u>Bukti</u> :

Pandang $\theta(1-\theta)(x_i - y_i)^2$

$0 \leq \theta \leq 1$

$0 \leq 1 - \theta \leq 1$

maka

$\theta(1-\theta)(x_i - y_i)^2 \geq 0$

$\theta(1-\theta)(x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2) \geq 0$

$\theta(1-\theta)x_i^2 - 2\theta(1-\theta)x_iy_i + \theta(1-\theta)y_i^2 \geq 0$

$\theta(1-\theta)x_i^2 + (1-1+\theta)(1-\theta)y_i^2 - 2\theta(1-\theta)x_iy_i \geq 0$

$(1-\theta)\theta x_i^2 + [1-(1-\theta)](1-\theta)y_i^2 - 2\theta(1-\theta)x_iy_i \geq 0$

$\theta x_i^2 - \theta^2 x_i^2 + (1-\theta)y_i^2 - (1-\theta)^2 y_i^2 - 2\theta(1-\theta)x_iy_i \geq 0$

$\theta x_i^2 + (1-\theta)y_i^2 \geq \theta^2 x_i^2 + (1-\theta)^2 y_i^2 + 2\theta(1-\theta)x_iy_i$

Kedua ruas ditambahkan dengan $1 - 2\theta x_i - 2(1-\theta)y_i$

Ruas kiri:

$$\begin{aligned} &\theta x_i^2 + (1-\theta)y_i^2 + 1 - 2\theta x_i - 2(1-\theta)y_i \\ &= \theta x_i^2 - 2\theta x_i + \theta + (1-\theta)y_i^2 - 2(1-\theta)y_i + 1 - \theta \\ &= \theta(x_i^2 - 2x_i + 1) + (1-\theta)(y_i^2 - 2y_i + 1) \\ &= \theta(x_i - 1)^2 + (1-\theta)(y_i - 1)^2 \end{aligned}$$

$$= \theta(1 - x_i)^2 + (1 - \theta)(1 - y_i)^2$$

Ruas kanan:

$$\theta^2 x_i^2 + (1 - \theta)^2 y_i^2 + 2\theta(1 - \theta)x_i y_i + 1 - 2\theta x_i - 2(1 - \theta)y_i$$

$$= (1 - \theta x_i - (1 - \theta)y_i)^2$$

$$= [1 - (\theta x_i + (1 - \theta)y_i)]^2$$

sehingga,

$$[1 - (\theta x_i + (1 - \theta)y_i)]^2 \leq \theta(1 - x_i)^2 + (1 - \theta)(1 - y_i)^2$$

Dengan demikian,

$$\mathrm{Var}[Z(\theta \boldsymbol{x} + (1 - \theta)\boldsymbol{y})]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (\theta + \theta x_i^2 - 2\theta x_i + (1 - \theta) + (1 - \theta)y_i^2 - 2(1 - \theta)y_i)\mathrm{Var}(S_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\theta + \theta x_i^2 - 2\theta x_i)\mathrm{Var}(S_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Big((1 - \theta) + (1 - \theta)y_i^2 - 2(1 - \theta)y_i\Big)\mathrm{Var}(S_i)$$

$$= \theta \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i)^2 \mathrm{Var}(S_i) + (1 - \theta) \sum_{i=1}^{n} (1 + y_i)^2 \mathrm{Var}(S_i)$$

$$= \theta \mathrm{Var}[Z(\boldsymbol{x})] + (1 - \theta)\mathrm{Var}[Z(\boldsymbol{y})]$$

■

Ekspektasi dari fungsi $Z(\boldsymbol{\alpha})$ adalah

$$E[Z(\boldsymbol{\alpha})] = E\left[\sum_{i=1}^{n} (P_i - (1 + \xi_i)\alpha_i E(S_i) - (1 - \alpha_i)S_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P_i - (1 + \xi_i)\alpha_i E(S_i) - (1 - \alpha_i)E(S_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P_i - \alpha_i E(S_i) - \xi_i \alpha_i E(S_i) - E(S_i) + \alpha_i E(S_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P_i - \xi_i \alpha_i E(S_i) - E(S_i)] \tag{3.82}$$

Masalah minimasi dari hal tersebut adalah

$$\min \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha_i)^2 \text{Var}(S_i) \tag{3.83}$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i E(S_i) = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(S_i) \tag{3.84}$$

$$\alpha_i \leq 1 \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

$$-\alpha_i \leq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa kendala α_i dan $-\alpha_i$ yang merupakan fungsi linear adalah fungsi konveks.

Fungsi linear dapat dituliskan sebagai $g(\alpha) = \alpha\ , 0 \leq \alpha \leq 1$. Untuk setiap $0 \leq \theta \leq 1$ dan x, y adalah suatu nilai dari α,

$g(\theta x + (1-\theta)y) = \theta x + (1-\theta)y$ dan

$\theta g(x) + (1-\theta)g(y) = \theta x + (1-\theta)y$, maka

$g(\theta x + (1-\theta)y) = \theta g(x) + (1-\theta)g(y)$.

Persamaan tersebut memenuhi sifat kekonveksan suatu fungsi, yaitu $g(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta g(x) + (1-\theta)g(y)$

■

Karena fungsi objektif $\text{Var}[Z(\boldsymbol{\alpha})]$ konveks dalam α, fungsi α_i dan $-\alpha_i$ yang mendefinisikan kendala pertidaksamaan juga konveks dalam α, dan kendala persamaan (3.81) linear dalam α, maka masalah tersebut keseluruhan adalah konveks dan kondisi KKT cukup untuk menjadi kondisi yang optimal.

Fungsi Lagrange dari masalah tersebut adalah

$$\begin{aligned} L(\alpha, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \lambda) &= \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha_i)^2 \text{Var}(S_i) + \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i E(S_i) + k - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} E(S_i) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} y_i(\alpha_i - 1) + \sum_{i=1}^{n} z_i(-\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [(1-\alpha_i)^2 \text{Var}(S_i) + y_i(\alpha_i - 1) + z_i(-\alpha_i)] \\ &\quad + \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i E(S_i) + k - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} E(S_i) \right] \end{aligned}$$

di mana λ adalah pengali Lagrange untuk kendala persamaan serta y_i dan z_i adalah pengali Lagrange untuk kendala pertidaksamaan $\alpha_i \leq 1$ dan $-\alpha_i \leq 0$. Selanjutnya, kondisi KKT dapat dituliskan:

$$2(\alpha_i - 1)\mathrm{Var}(S_i) + \lambda\xi_i E(S_i) + y_i - z_i = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \tag{a}$$

$$y_i(\alpha_i - 1) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \tag{b}$$

$$z_i \alpha_i = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \tag{c}$$

$$y_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \tag{d}$$

$$z_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \tag{e}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i E(S_i) = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(S_i) \tag{f}$$

dengan syarat *cession percentage* untuk reasuransi

$$\alpha_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \tag{g}$$

$$\alpha_i \leq 1 \quad , \quad i = 1, \dots, n \tag{h}$$

Selanjutnya, akan dicari penyelesaian dari sistem tersebut. Dimulai dengan mengabaikan tanda Σ dan memilih polis i tertentu, maka terdapat tiga keadaan yang mungkin:

(1) Jika $z_i > 0$, (c) dan (b) pada kondisi KKT menyatakan secara berturut-turut $\alpha_i = 0$ dan $y_i = 0$, sehingga (a) pada kondisi KKT menghasilkan

$$z_i = \lambda\xi_i E(S_i) - 2\mathrm{Var}(S_i)$$

Karena nilai z_i harus > 0, maka keadaan tersebut hanya dapat terjadi apabila

$$z_i > 0 \Leftrightarrow \lambda\xi_i E(S_i) > 2\mathrm{Var}(S_i) \Leftrightarrow \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\mathrm{Var}(S_i)} > 1$$

Pada keadaan ini, semua kondisi KKT yang lainnya –selain (f)- terpenuhi.

(2) Jika $y_i > 0$, (b) dan (c) pada kondisi KKT menyatakan secara berturut-turut $\alpha_i = 1$ dan $z_i = 0$, sehingga (a) pada kondisi KKT menghasilkan

$$y_i = -\lambda\xi_i E(S_i)$$

Karena nilai y_i harus > 0 dan sifat variansi yang pasti ≥ 0, maka keadaan tersebut hanya dapat terjadi apabila

$$-y_i < 0 \Leftrightarrow \lambda\xi_i E(S_i) < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\mathrm{Var}(S_i)} < 0$$

Pada keadaan ini, semua kondisi KKT yang lainnya –selain (f)- terpenuhi.

(3) Jika $y_i = 0$ dan $z_i = 0$, kendala pertidaksamaan diabaikan, dan hanya kendala persamaan saja yang digunakan dalam optimasi, maka (a) pada kondisi KKT menghasilkan

$$2(\alpha_i - 1)\text{Var}(S_i) + \lambda\xi_i E(S_i) = 0$$

$$\alpha_i - 1 = -\frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\text{Var}(S_i)}$$

$$\alpha_i = 1 - \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\text{Var}(S_i)}$$

Karena nilai α_i harus ≥ 0 dan ≤ 1, maka keadaan tersebut hanya dapat terjadi apabila

$$0 \leq \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\text{Var}(S_i)} \leq 1$$

Pada keadaan ini, semua kondisi KKT yang lainnya –selain (f)- terpenuhi.

Keadaannya sekarang menjadi lebih jelas, dari ketiga kasus di atas, kuantitas krusial

$$\emptyset_i = \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\text{Var}(S_i)}$$

memiliki daerah spesifik ($\emptyset_i > 1$ pada kasus pertama, $\emptyset_i < 0$ pada kasus kedua, dan $0 \leq \emptyset_i \leq 1$ pada kasus ketiga), dan formula berikut ini memberikan deskripsi yang sempurna untuk ketiga kasus tersebut:

$$\alpha_i = \min\big(1, \max(0, 1 - \emptyset_i)\big)\,.$$

Dengan demikian, diperoleh hasil de Finetti seperti pada persamaan (3.79),

$$\alpha_i = \min\left(1, \max\left(0, 1 - \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\text{Var}(S_i)}\right)\right)$$

di mana λ dapat dihitung dengan memasukkan (3.79) ke dalam (3.84).

Karena $0 \leq \alpha_i \leq 1$, maka terdapat tiga kemungkinan nilai α_i, yaitu $\alpha_i = 0$, $\alpha_i = 1$, atau $0 < \alpha_i = 1 - \frac{\lambda\xi_i E(S_i)}{2\text{Var}(S_i)} < 1$. Akan ditinjau masing-masing kondisi untuk ketiga kemungkinan nilai τ_i tersebut :

(1) Jika $\alpha_i = 0$, maka risiko perusahaan asuransi tidak direasuransikan. Apabila disubstitusikan ke persamaan (3.84) maka menjadi

$$0 = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(S_i)$$

$$k = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(S_i)$$

Artinya, ekspektasi dari pendapatan perusahaan asuransi adalah selisih dari premi yang diperoleh dan ekspektasi dari risiko.

(2) Jika $\alpha_i = 1$, maka risiko perusahaan asuransi sepenuhnya direasuransikan. Apabila disubstitusikan ke persamaan (3.84) maka menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i E(S_i) = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(S_i)$$

$$k = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(S_i) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i E(S_i)$$

$$k = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} (1 + \xi_i) E(S_i)$$

Artinya, ekspektasi dari pendapatan perusahaan asuransi adalah selisih dari premi yang diperoleh dan premi reasuransi yang dibayarkan.

(3) Jika $0 < \alpha_i < 1$, maka risiko perusahaan asuransi direasuransikan sebagian. Hal ini sesuai dengan prinsip reasuransi, yaitu menanggung sebagian risiko dari perusahaan asuransi.

Jadi secara umum,

$$\alpha_i = 1 - \frac{\lambda \xi_i E(S_i)}{2\mathrm{Var}(S_i)}.$$

Kemudian, λ diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan tersebut ke (3.84).

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(1 - \frac{\lambda \xi_i E(S_i)}{2\mathrm{Var}(S_i)}\right) E(S_i) = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(S_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i E(S_i) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\xi_i E(S_i)}{2\mathrm{Var}(S_i)} E(S_i) = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(S_i)$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\xi_i E(S_i)}{2\mathrm{Var}(S_i)} E(S_i) = k - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} E(S_i) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i E(S_i)$$

$$\lambda = \frac{k - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} E(S_i) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i E(S_i)}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\xi_i E(S_i)}{2\text{Var}(S_i)} E(S_i)}$$

$$\lambda = \frac{2[k - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} E(S_i) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i E(S_i)]}{\sum_{i=1}^{n} \frac{[\xi_i E(S_i)]^2}{\text{Var}(S_i)}} \quad (3.85)$$

Apabila nilai α yang diperoleh tidak terletak pada $(0,1)$ maka perlu ditentukan nilai k lain yang lebih tepat.

BAB 4
IMPLEMENTASI MODIFIKASI JAMINAN ASURANSI PADA REASURANSI *QUOTA SHARE* DAN *EXCESS OF LOSS*

Pada bab ini akan dibahas contoh perhitungan premi untuk reasuransi *quota share* dan reasuransi *excess of loss*. Misalkan terdapat data klaim kesehatan rawat jalan yang selalu menghasilkan klaim dari suatu perusahaan asuransi sebagai berikut:

Tabel 4. 1. Data Klaim

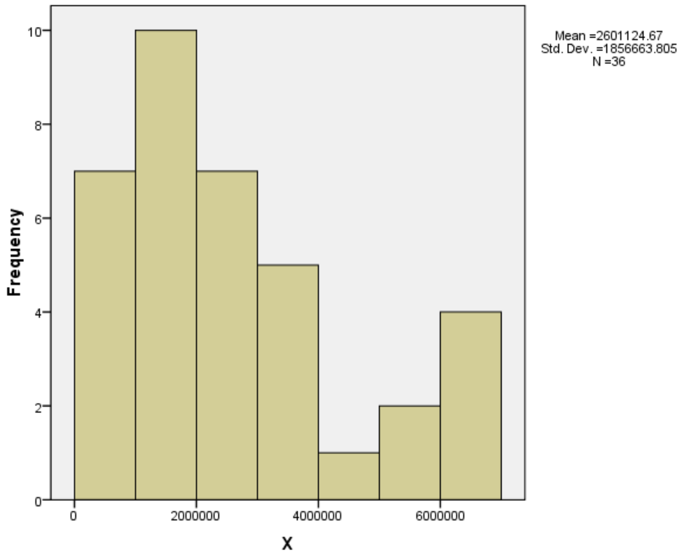
Tahun	X	N^L
1	1430077	7
	825927	
	1072235	
	2181100	
	865683	
	1257501	
	1571429	
2	926561	6
	6512942	
	2971201	
	3042707	
	2065029	
	1292331	
3	2335268	1
4	3937028	6
	1289594	
	723045	
	6135115	
	2049870	
	1279021	

Tahun	X	N^L
5	1390116	3
	829521	
	6200498	
6	757121	5
	6605301	
	5838924	
	1344422	
	3422738	
7	3985005	2
	1022142	
8	3128764	4
	5081062	
	2639189	
	961871	
9	4147754	1
10	2522396	1

Pada tabel tersebut terdapat dua jenis variabel, yaitu X yang menunjukkan besarnya klaim dan N^L yang menunjukkan banyaknya klaim. Selanjutnya akan dicari distribusi dari masing-masing variabel tersebut. Sebelum menghitung premi untuk reasuransi, akan dicari distribusi dari besar *loss* dan banyak *loss* terlebih dahulu, karena kedua distribusi tersebut diperlukan dalam perhitungan premi.

4.1. Distribusi Besar *Loss*

Histogram untuk data besarnya *loss* tersebut adalah :



Gambar 4. 1. Histogram untuk Data Besarnya *Loss*

Dengan menggunakan program fit, diperoleh kandidat distribusi untuk data tersebut adalah:

a. Eksponensial

b. Lognormal

c. Pareto

d. Weibull

Dengan menggunakan program easyfit untuk uji Kolmogorov-Smirnov, diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 4. 2 Taksiran Parameter dan Statistik Uji Kolmogorov-Smirnov untuk Distribusi Besar *Loss*

Distribusi	Parameter	Statistik Uji	Nilai Kritis $= \frac{1,36}{\sqrt{n}}$
Eksponensial	$\hat{\theta} = 3,8445 \times 10^{-7}$	0,24268	0,22667
Lognormal	$\hat{\mu} = 14,532$ $\hat{\sigma} = 0,69263$	0,14198	0, 22667
Pareto	$\hat{\alpha} = 0,96123$ $\hat{\theta} = 7,2305 \times 10^{5}$	0,16254	0,22667
Weibull	$\hat{\tau} = 1,5807$ $\hat{\theta} = 2,7854 \times 10^{6}$	0,15012	0, 22667

Nilai statistik uji $<$ nilai kritis kecuali untuk distribusi eksponensial, maka keputusan yang diperoleh adalah H_0 untuk selain distribusi eksponensial tidak ditolak, artinya, distribusi-distribusi tersebut fit untuk data klaim. Sedangkan distribusi eksponensial tidak fit untuk data klaim tersebut. Keterangan lebih lanjut mengenai uji Kolmogorov-Smirnov terdapat di Lampiran 4.

Kemudian, dari perhitungan NLL (*Negative Loglikelihood*) diperoleh hasil

Tabel 4. 3 Nilai NLL untuk Setiap Kandidat Distribusi Besar *Loss*

Distribusi	NLL
Eksponensial	567,77236
Lognormal	561,00422
Pareto	585,08031
Weibul	562,49512

Karena statistik uji Kolmogorov-Smirnov dan NLL untuk distribusi lognormal memiliki nilai yang paling kecil, maka distribusi lognormal dipilih menjadi distribusi untuk data besarnya *loss*. Maka, pdf dari distribusi besar *loss* adalah

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad , \qquad -\infty < x < \infty$$

$$= \frac{1}{x0{,}69263\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - 14{,}532)^2}{2(0{,}69263)^2}\right]$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(ln\, y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

Misalkan $z = \ln y$ maka $y = e^z$ sehingga $dy = e^z dz$.

$$= \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{1}{e^z\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] e^z dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dz$$

Misalkan $w = \frac{z-\mu}{\sigma}$ maka $z = w\sigma + \mu$ sehingga $dz = \sigma dw$.

$$= \int_{-\infty}^{\frac{\ln x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right] \sigma dw$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{\ln x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right] dw$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

Selanjutnya, akan dihitung ekspektasi dan variansi dari distribusi besar *loss* tersebut. Ekspektasi dari besar *loss* adalah:

$$E(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

Misalkan $y = \ln x$ maka $x = e^y$ sehingga $dx = e^y dy$

$$E(X) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] e^y dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[y - \frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{2\sigma^2 y - y^2 + 2\mu y - \mu^2}{2\sigma^2} - \frac{2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2} + \frac{2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2}\right] dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{[y-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu\sigma^2+\sigma^4}{2\sigma^2}\right\} dy$$

$$= \exp\left(\frac{2\mu\sigma^2+\sigma^4}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{[y-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} dy$$

Karena integrand pada persamaan di atas adalah pdf normal $(\mu+\sigma^2, \sigma^2)$, maka nilainya adalah 1. Jadi,

$$E(X) = \exp\left(\frac{2\mu\sigma^2+\sigma^4}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$= \exp\left(14{,}532 + \frac{(0{,}69263)^2}{2}\right)$$

$$= 2602200{,}935$$

Sedangkan variansi dari besar *loss* dapat dihitung sebagai berikut:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$= \int_0^\infty x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

Misalkan $y = \ln x$ maka $x = e^y$ sehingga $dx = e^y dy$

$$E(X^2) = \int_0^\infty e^y \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] e^y dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[2y - \frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{4\sigma^2 y - y^2 + 2\mu y - \mu^2}{2\sigma^2} - \frac{4\mu\sigma^2+4\sigma^4}{2\sigma^2} + \frac{4\mu\sigma^2+4\sigma^4}{2\sigma^2}\right] dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{[y-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} + \frac{4\mu\sigma^2+4\sigma^4}{2\sigma^2}\right\} dy$$

$$= \exp\left(\frac{4\mu\sigma^2+4\sigma^4}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{[y-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} dy$$

Karena integrand pada persamaan di atas adalah pdf normal $(\mu + 2\sigma^2, \sigma^2)$, maka nilainya adalah 1. Jadi,

$$E(X^2) = \exp\left(\frac{4\mu\sigma^2 + 4\sigma^4}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \exp(2\mu + 2\sigma^2)$$

$$= \exp[2(14{,}532) + 2(0{,}69263)^2]$$

$$= 1{,}094028139 \cdot 10^{13}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 1{,}094028139 \cdot 10^{13} - (2602200{,}935)^2$$

$$= 4{,}168831684 \cdot 10^{12}$$

Jadi, $E(X) = 2602200{,}935$ dan $\text{Var}(X) = 4{,}168831684 \cdot 10^{12}$

4.2. Distribusi Banyak *Loss*

Untuk menentukan distribusi yang tepat dari data banyaknya *loss*, akan dihitung mean dan variansi terlebih dahulu:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} n_i}{36} = 3{,}6$$

$$s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (n_i - \bar{n})^2}{35} = 5{,}377761$$

Karena variansi lebih besar daripada mean, maka kandidat distribusi yang mungkin untuk data adalah distribusi binomial negatif. Hal tersebut disebabkan karena distribusi binomial memiliki mean yang lebih besar daripada variansi, sedangkan pada distribusi Poisson, mean sama dengan variansi. Namun, karena tidak ada ukuran khusus yang menentukan apakah variansi lebih besar secara signifikan terhadap mean, maka dilakukan analisis formal lain untuk distribusi binomial negatif dan distribusi Poisson, yaitu metode maksimum likelihood.

Tabel 4. 4 Taksiran Parameter dan Nilai NLL dari Distribusi Banyak *Loss*

Distribusi	Taksiran parameter	-Loglikelihood
Poisson	$\hat{\lambda} = 3{,}6$	22,0205

Binomial negatif	$\hat{r} = 8{,}3687$ $\hat{\beta} = 0{,}4302$	$21{,}7279$

Karena NLL distribusi binomial negatif lebih kecil daripada distribusi Poisson, maka distribusi binomial negatif lebih fit sebagai distribusi dari banyaknya *loss*. Namun, ternyata kasus untuk asuransi kesehatan tersebut adalah kasus di mana selalu terjadi kliam, sehingga $p_0 = 0$. Oleh karena itu, distribusi dari *loss* tersebut adalah distribusi binomial negatif terpancung-nol, dan karena parameter distribusi tersebut dapat diperluas, maka distribusinya menjadi ETNB. Pf dari distribusi binomial negatif adalah

$$p_k = \binom{k+r-1}{k}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

$$= \frac{(k+r-1)\ldots r}{k!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

dengan probabilitas di saat nol

$$p_0 = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r$$

dan pgf

$$P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-r}$$

dari bab 2 diperoleh bentuk pgf dari distribusi terpancung-nol :

$$P^T(z) = \frac{P(z)-p_0}{1-p_0}$$

dan pf dapat dibangkitkan dari pgf tersebut :

$$p_k^T = \frac{P^{(k)T}(0)}{k!}, \ \ k = 1,2, \ldots.$$

di mana

$$P^{(k)T}(z) = \frac{P^{(k)}(z)}{1-p_0}$$

Melalui pgf tersebut, mean dan variansi dapat dihitung sebagai berikut

$$E(N^L) = P^{(1)T}(1) = \frac{P^{(1)}(1)}{1-p_0}$$

$$= \frac{P'(1)}{1 - p_0}$$

$$= \frac{r\beta}{1 - p_0}$$

$$= \frac{8{,}3687 \cdot 0{,}4302}{1 - \left(\frac{1}{1 + 0{,}4302}\right)^{8{,}3687}}$$

$$= \frac{3{,}60021474}{1 - 0{,}05006463104}$$

$$= \frac{3{,}60021474}{0{,}949935369}$$

$$= 3{,}789957567$$

$$\mathrm{Var}(N^L) = E[N^L(N^L - 1)] + E(N^L) - [E(N^L)]^2$$

$$= P^{(2)T}(1) + \frac{r\beta}{1 - p_0} - \left(\frac{r\beta}{1 - p_0}\right)^2$$

$$= \frac{P''(1)}{1 - p_0} + \frac{r\beta}{1 - p_0} - (\frac{r\beta}{1 - p_0})^2$$

$$= \frac{r^2\beta^2 + r\beta^2}{1 - p_0} + \frac{r\beta}{1 - p_0} - (\frac{r\beta}{1 - p_0})^2$$

$$= \frac{r\beta(1 + \beta)}{1 - p_0}$$

$$= \frac{8{,}3687 \cdot 0{,}4302 \cdot 1{,}4302}{1 - 0{,}05006463104}$$

$$= \frac{5{,}149027121}{0{,}949935369}$$

$$= 5{,}420397313$$

Untuk total klaim S, di mana $S = \sum_{i=1}^{N^L} X_i$, maka ekspektasi dan variansinya adalah

$$E(S) = E(X)E(N^L)$$

$$= 2602200{,}935 \cdot 3{,}789957567$$

$$= 9862231{,}124$$

$$\approx 9.862.231 = P$$ (premi bersih pada jaminan asuransi penuh)

$$\begin{aligned}\text{Var}(S) &= E(N^L)\text{Var}(X) + \text{Var}(N^L)[E(X)]^2 \\ &= 3{,}789957567 \cdot 4{,}168831684 \cdot 10^{12} \\ &\quad +5{,}420397313 \cdot (2602200{,}935)^2 \\ &= 5{,}250364341 \cdot 10^{13}\end{aligned}$$

Jika perusahaan asuransi menetapkan bobot sebesar $\xi^R = 30\%$, maka premi yang diterima oleh perusahaan asuransi adalah sebesar

$$\begin{aligned}P^R &= (1 + \xi^R)E(S) \\ &= (1 + 0{,}3)9862231{,}124 \\ &= 12820900{,}46 \\ &\approx 12.820.900 \text{ rupiah.}\end{aligned}$$

Karena ingin menghindari kerugian yang besar, maka perusahaan asuransi menyerahkan sebagian risikonya kepada perusahaan reasuransi. Premi untuk perusahaan asuransi dihitung berdasarkan prinsip nilai ekspektasi dan diberikan bobot $\xi^{Re} = 15\%$.

4.3. Reasuransi *Quota Share*

Jika perusahaan asuransi menggunakan reasuransi *quota share*, maka premi bersih untuk perusahaan reasuransi akan dihitung menggunakan perhitungan premi bersih pada jaminan asuransi termodifikasi *coinsurance*, karena kewajiban pembayaran bagi perusahaan reasuransi bentuknya sama dengan kewajiban pembayaran pada *coinsurance*. Terlebih dahulu akan ditentukan *cession percentage* yang optimal untuk data klaim tersebut. Misalkan $k = 2.000.000$, dari (3.85) diperoleh

$$\lambda = \frac{2[k - P^R + E(S) + \xi^{Re}E(S)]}{\frac{[\xi^{Re}E(S)]^2}{\text{Var}(S)}}$$

$$\lambda = \frac{2[2000000 - 12820900 + 9862231{,}124 + (0{,}15)(9862231{,}124)]}{\frac{[(0{,}15)(9862231{,}124)]^2}{5{,}250364341 \cdot 10^{13}}}$$

$$= 24983058{,}95$$

Selanjutnya, *cession percentage* dihitung menggunakan persamaan (3.79)

$$\alpha = \min\left(1,\max\left(0,1 - \frac{\lambda\xi^{Re}E(S)}{2\mathrm{Var}(S)}\right)\right)$$

$$= \min\left[1,\max\left(0,1 - \frac{(24983058{,}95)(0{,}15)(9862231{,}124)}{2(5{,}250364341 \cdot 10^{13})}\right)\right]$$

$$= 0{,}648040566$$

Jadi, untuk klaim sebesar X yang ditujukan kepada perusahaan asuransi, perusahaan asuransi membayar sebesar $(1 - 0{,}648040566)X$ sedangkan perusahaan reasuransi membayar sebesar $(0{,}648040566)X$. Oleh karena itu, perusahaan asuransi wajib membayar premi kepada perusahaan reasuransi sebesar

$$\begin{aligned} P^{Re} &= (1+\xi^{Re})P \\ &= (1+\xi^{Re})E(S^P) \\ &= (1+\xi^{Re})E(Y)E(N^P) \\ &= (1+\xi^{Re})\alpha E(X)E(N^L) \\ &= (1+\xi^{Re})\alpha P \\ &= (1+0{,}15)(0{,}648040566)(9862231{,}124) \\ &= 7349794{,}716 \approx 7.349.795 \text{ rupiah} \end{aligned}$$

4.4. Reasuransi *Excess of Loss*

Jika perusahaan asuransi menggunakan reasuransi *excess of loss*, maka premi bersih untuk perusahaan reasuransi akan dihitung menggunakan perhitungan premi bersih pada jaminan asuransi termodifikasi *deductible* biasa, karena kewajibab pembayaran bagi perusahaan reasuransi bentuknya sama dengan kewajiban pembayaran pada *deductible* biasa. Misalkan perusahaan asuransi menetapkan retensi sebesar $d = 1.000.000$ rupiah, maka untuk klaim sebesar X yang diajukan, perusahaan asuransi wajib membayar sebesar

$$Y^R = \begin{cases} X, & X < 1000000, \\ 1000000, & X \geq 1000000. \end{cases}$$

Sedangkan perusahaan reasuransi wajib membayar sebesar

$$Y^{Re} = \begin{cases} 0, & X \leq 1000000, \\ X - 1000000, & X > 1000000. \end{cases}$$

Untuk menghitung premi yang diterima perusahaan reasuransi, terlebih dahulu akan dihitung $E(Y)$ dan $E(N^P)$

a. $E(Y)$ untuk keadaan di mana *loss* dilihat dari segi *loss*

$$E(X \wedge d) = \int_0^d x f_X(x) dx + \int_d^\infty d f_X(x) dx$$

$$= \int_0^d x \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx + d[1 - F_X(d)]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^d \exp\left[-\frac{(ln\, x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx + d[1 - F_X(d)]$$

Misalkan $y = \ln x$ maka $x = e^y$ sehingga $dx = e^y dy$

$$E(X \wedge d) = \int_0^{\ln d} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] e^y dy + d[1 - F_X(d)]$$

$$= \int_0^{\ln d} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[y - \frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy + d[1 - F_X(d)]$$

$$= \int_0^{\ln d} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{[y - (\mu + \sigma^2)]^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2}\right\} dy$$
$$+ d[1 - F_X(d)]$$

$$= \exp\left(\frac{2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\ln d} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{[y - (\mu + \sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} dy$$
$$+ d[1 - F_X(d)]$$

Karena integrand pada persamaan di atas adalah pdf normal $(\mu + \sigma^2, \sigma^2)$, maka nilainya adalah $\Phi\left[\frac{\ln d - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right]$. Jadi,

$$E(X \wedge d) = \exp\left(\frac{2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2}\right) \Phi\left[\frac{\ln d - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right] + d[1 - F_X(d)]$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left[\frac{\ln d - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right]$$
$$+ d\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \exp\left(14{,}532 + \frac{(0{,}69263)^2}{2}\right) \cdot$$

$$\Phi\left[\frac{\ln 1000000-(14{,}532+(0{,}69263)^2)}{0{,}69263}\right]$$

$$+1000000\left[1-\Phi\left(\frac{\ln 1000000-14{,}532}{0{,}69263}\right)\right]$$

$$= \exp(14{,}77186816)\Phi(-1{,}727077601)$$

$$+1000000[1-\Phi(-1{,}034447601)]$$

$$= \exp(14{,}77186816)[1-\Phi(1{,}727077601)]$$

$$+1000000\Phi(1{,}034447601)$$

$$= (2602200{,}939)(1-0{,}9577)+(1000000)(0{,}84928)$$

$$= 959353{,}0997$$

$$E(Y^L) = E(X-d)_+$$

$$= E(X)-E(X\wedge d)$$

$$= 2602200{,}935-959353{,}0997$$

$$= 1642847{,}835$$

b. $E(Y)$ untuk keadaan di mana *loss* dilihat dari segi pembayaran

$$E(Y^P) = \frac{E(Y^L)}{1-F(d)}$$

$$= \frac{E(Y^L)}{\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d-\mu}{\sigma}\right)\right]}$$

$$= \frac{1642847{,}835}{0{,}84928}$$

$$= 1934400{,}71$$

c. $E(N^P)$

Dari hasil pada bab 3.2.1 tabel 3.1 maka N^P berdistribusi binomial negatif termodifikasi-nol dengan $r^* = r = 8{,}3687$, $\beta^* = v\beta$ di mana

$$v = \Pr(X > 1000000)$$

$$= 1 - F_X(1000000)$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{\ln 1000000-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - 0{,}15072$$

$= 0{,}84928$

sehingga $\beta^* = v\beta = (0{,}84928)(0{,}4302) = 0{,}365360256$

Dari tabel 3.1 diketahui

$$\alpha^* = p_0^{M*} = \frac{p_0^M + (1+v\beta)^{-r} - p_0^M(1+v\beta)^{-r} - (1+\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}}$$

dengan p_0^M adalah probabilitas tidak terjadinya pembayaran, yaitu $\Pr(X \le d) = 0{,}15072$, maka

$$\alpha^* = \frac{0{,}15072 + (1+0{,}365360256)^{-8,3687}}{1-(1+0{,}4302)^{-8,3687}}$$

$$-\frac{0{,}15072(1+0{,}365360256)^{-8,3687} + (1+0{,}4302)^{-8,3687}}{1-(1+0{,}4302)^{-8,3687}}$$

$$= 0{,}1719555458$$

Dari persamaan (2.19), diperoleh

$$P^M(z) = \left(1 - \frac{1-p_0^{M*}}{1-p_0}\right) + \frac{1-p_0^{M*}}{1-p_0}P(z)$$

maka

$$\begin{aligned} E(N^P) &= P^{(1)M}(1) \\ &= \frac{1-p_0^{M*}}{1-p_0}P'(z) \\ &= \frac{1-p_0^{M*}}{1-p_0}r^*\beta^* \\ &= \frac{1-0{,}1719555458}{1-0{,}05006463104}(8{,}3687)(0{,}365360256) \\ &= 2{,}665255801 \end{aligned}$$

Dengan demikian, premi yang diterima oleh perusahaan reasuransi jika *loss* dilihat dari segi *loss* adalah

$$\begin{aligned} P^{Re} &= (1+\xi^{Re})E(S^P) \\ &= (1+\xi^{Re})E(Y^L)E(N^P) \\ &= (1+0{,}15)(1642847{,}835)(2{,}665255801) \\ &= 5035401{,}181 \approx 5.035.401 \text{ rupiah} \end{aligned}$$

atau jika *loss* dilihat dari segi pembayaran, maka preminya

$$
\begin{aligned}
P^{Re} &= (1+\xi^{Re})E(S^P) \\
&= (1+\xi^{Re})E(Y^P)E(N^P) \\
&= (1+0{,}15)(1934400{,}71)(2{,}665255801) \\
&= 5929023{,}621 \approx 5.929.023 \text{ rupiah.}
\end{aligned}
$$

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Pada dunia asuransi, modifikasi pada jaminan asuransi perlu dilakukan untuk menghindari kerugian yang besar akibat terjadinya *loss*. Jenis modifikasi yang biasa dilakukan adalah *deductible*, *policy limit*, *coinsurance*, atau gabungan dari beberapa modifikasi tersebut. Pada jaminan asuransi tanpa modifikasi, distribusi dari besar dan banyak klaim sama dengan distribusi dari besar dan banyak *loss*. Namun, dengan adanya modifikasi pada jaminan asuransi, maka distribusi untuk besar dan banyak klaim dapat mengalami perubahan.

Modifikasi *deductible* dapat mengubah distribusi dari besar klaim menjadi tersensor kiri, bergeser, atau campuran. Selain itu, *deductible* juga berdampak pada distribusi banyak klaim, yaitu menyebabkan perubahan parameter distribusi atau bahkan perubahan distribusi (jika awalnya berdistribusi terpancung-nol maka akan menjadi termodifikasi-nol). Modifikasi *policy limit* mengubah fungsi distribusi dari besar klaim menjadi distribusi campuran. Sedangkan modifikasi *coinsurance* pada jaminan asuransi mengubah distribusi dari besar klaim berdasarkan proporsi/persentase dari *coinsurance* tersebut. Baik modifikasi *policy limit* maupun *coinsurance* tidak memberikan dampak pada distribusi banyak klaim.

Bagi perusahaan asuransi, perubahan-perubahan dari distribusi dari besar dan banyak klaim penting untuk diketahui karena diperlukan dalam perhitungan biaya-biaya asuransi, salah satunya premi. Untuk klaim tunggal, premi dapat dihitung menggunakan ekspektasi dari variabel acak besar klaim. Sedangkan untuk total klaim, premi dihitung dengan menggunakan ekspektasi dari variabel acak besar dan banyak klaim.

Selain menetapkan modifikasi, perusahaan asuransi dapat pula membagi sebagian risiko yang harus ditanggung dengan perusahaan reasuransi. Dengan adanya kerjasama tersebut, perusahaan reasuransi berkewajiban membayar sebagian klaim dari perusahaan asuransi dan perusahaan asuransi berkewajiban membayar premi kepada perusahaan reasuransi. Jenis-jenis reasuransi di antaranya adalah reasuransi proporsional dan non-proporsional.

Pada reasuransi proporsional, perusahaan reasuransi menyepakati suatu *cession percentage* sebesar α dalam pembagian risiko. Salah satu cara menentukan *cession percentage* yang optimal adalah dengan menggunakan metode de Finetti. Metode tersebut menentukan *cession percentage* dengan meminimumkan variansi dari pendapatan perusahaan asuransi dengan diberikan suatu tingkat hasil (pendapatan) yang diharapkan. Salah satu jenis reasuransi proporsional adalah reasuransi *quota share*, yang menetapkan *cession percentage* yang sama untuk seluruh polis dalam portofolio. Bentuk kewajiban perusahaan reasuransi pada reasuransi proporsional sama dengan bentuk modifikasi *coinsurance.* Dengan demikian, premi untuk reasuransi proporsional dapat dihitung menggunakan formula yang sama dengan perhitungan premi pada jaminan asuransi termodifikasi *coinsurance*.

5.2. Saran

Terdapat beberapa saran untuk pengembangan skripsi ini :

1. Mencari prediksi biaya-biaya lain pada dunia asuransi dengan perubahan distribusi yang terjadi pada jaminan asuransi termodifikasi, karena skripsi ini hanya membahas perhitungan premi.
2. Membahas jenis-jenis reasuransi proporsional maupun reasuransi non-proporsional lainnya yang berkaitan dengan bentuk modifikasi *deductible, policy limit*, atau *coinsurance*, kecuali reasuransi *quota share*.
3. Membahas metode lain dalam menentukan *cession percentage* yang optimal untuk reasuransi proporsional. Skripsi ini hanya membahas metode de Finetti.
4. Membahas metode-metode dalam menentukan retensi yang optimal untuk reasuransi non-proporsional.

DAFTAR PUSTAKA

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hicman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics.* Schaumburg: The Society of Actuaries.

Glineur, F., & Walhin, J. (2005). *de Finetti's Retention Problem for Proportional Reinsurance Revisited.* Paris: Centre for Operations Research and Econometrics, Universite Catholique de Louvain.

Hogg, Robert V.; Craig, Allen T.;. (1995). *Introduction to Mathematical Statistics 5th edition.* New Jersey: Prentince Hall.

Hogg, Robert V.; Klugman, Stuart A.;. (1984). *Loss Distributions.* Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Kaas, Rob; Goovaerts, Marc; Dhaene, Jan; Denuit, Michael;. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Klugman, Stuart A.; Panjer, Harry H.; Willmot, Gordon E.;. (2008). *Loss Models, From Data to Decisions 3rd edition.* Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Kuhn, M. (2006). *The Karush-Kuhn-Tucker Theorem.* CDSEM Uni Mannheim.

Liebwein, P., & Purvis, K. (2005). *Property and Casualty Simulation Game Reinsurance.* riva.

Lampiran 1. Daftar Notasi

Notasi-notasi yang digunakan dalam skripsi ini adalah :

α	: persentase pembayaran klaim pada modifikasi *coinsurance*, *cession percentage* pada reasuransi proporsional
d	: batas bawah pembayaran klaim pada modifikasi *deductible*, retensi pada reasuransi non-proporsional
ξ	: bobot yang ditetapkan pada premi
$F_X(x)$	: fungsi distribusi dari variabel acak X
$f_X(x)$	: fungsi probabilitas densitas (*probability density function*, pdf) dari variabel acak X
N^L	: variabel acak untuk banyak *loss*
N^P	: variabel acak untuk banyak pembayaran klaim
u	: batas atas pembayaran klaim pada modifikasi *policy limit*
P	: premi bersih
$P_N(z)$	: $P(z)$, $E(z^N)$, fungsi pembangkit probabilitas (*probability generating function*, pgf) untuk variabel acak N
$P^M(z)$	: pgf untuk variabel acak berdistribusi termodifikasi-nol
$P^T(z)$	: pgf untuk variabel acak berdistribusi terpancung-nol
p_k	: $\Pr(N = k)$, fungsi probabilitas (*probability function*, pf) untuk variabel acak N
p_k^T	: pf untuk variabel acak N yang berdistribusi terpancung-nol
p_k^M	: pf untuk variabel acak N yang berdistribusi termodifikasi-nol
r	: tingkat inflasi
$S_X(x)$	: fungsi survival dari variabel acak X
S	: $\sum_{i=1}^{N^L} X_i$, total *loss*
S^P	: $\sum_{i=1}^{N^P} Y_i$, total pembayaran klaim
v	: $\Pr(X > d)$, probabilitas terjadinya pembayaran pada asuransi *deductible*

Lampiran 1. (lanjutan)

$(X-d)_+$: variabel pembayaran per-*loss* pada modifikasi *deductible* biasa, bernilai $X-d$ jika $X-d>0$ dan bernilai 0 untuk lainnya

$X \wedge u$: $\max(X,u)$, variabel pembayaran pada modifikasi *policy limit*

X : variabel acak untuk besar *loss*

Y : variabel acak untuk besar pembayaran klaim

Y^L : besar pembayaran klaim pada asuransi *deductible* jika *loss* dipandang dari segi per-*loss*

Y^P : besar pembayaran klaim pada asuransi *deductible* jika *loss* dipandang dari segi per-pembayaran

$Z(\alpha)$: fungsi pendapatan perusahaan asuransi

Lampiran 2. Distribusi diskrit untuk banyaknya klaim

a. Distribusi Poisson

Pf :

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Pgf :

$$P(z) = P_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{z\lambda}$$

$$P(z) = e^{\lambda(z-1)}.$$

Mean dan variansi dapat dihitung dari pgf sebagai berikut:

$$E(N) = P'(1) = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda$$

$$\mathrm{Var}(N) = E(N^2) - [E(N)]^2$$

$$= E(N^2) - E(N) + E(N) - [E(N)]^2$$

$$= E[N(N-1)] + E(N) - [E(N)]^2$$

$$= P''(1) + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda^2 e^{\lambda(1-1)} + \lambda - \lambda^2$$

$$\mathrm{Var}(N) = \lambda.$$

Untuk distribusi Poisson, variansi sama dengan mean.

b. Distribusi binomial negatif

Pf :

$$\Pr(N = k) = p_k = \binom{k+r-1}{k} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k,$$

$$k = 0,1,2,\ldots, r > 0, \beta > 0$$

$$= \frac{(k+r-1)\ldots r}{k!} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

Lampiran 2. (lanjutan)

$$= \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k+1)\Gamma(r)}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

Pgf :

$$P(z) = E(z^N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k z^k$$

$$= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k}\left(\frac{z\beta}{1+\beta}\right)^k$$

Berdasarkan *sum of negatif binomial series*,

$$f(w) = (1-w)^{-r}$$

Ekspansi deret maclaurin

$f(w) = (1-w)^{-r}$	$f(0) = 1$
$f'(w) = r(1-w)^{-(r+1)}$	$f'(0) = r$
$f''(w) = r(r+1)(1-w)^{-(r+2)}$	$f''(0) = r(r+1)$
$f'''(w) = r(r+1)(r+2)(1-w)^{-(r+3)}$	$f'''(0) = r(r+1)(r+2)$

$$f(w) = (1-w)^{-r}$$

$$= 1 + \frac{r}{1!}w + \frac{r(r+1)}{2!}w^2 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}w^3 + \cdots$$

$$= \binom{r-1}{0}w^0 + \binom{r}{1}w^1 + \binom{r+1}{2}w^2 + \binom{r+2}{3}w^3 + \cdots$$

maka

$$(1-w)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} w^k$$

Dengan stubtitusi $w = \left(\frac{z\beta}{1+\beta}\right)$ maka

$$P(z) = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(1 - \frac{z\beta}{1+\beta}\right)^{-r}$$

Lampiran 2. (lanjutan)

$$= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{r}\left(\frac{1+\beta-z\beta}{1+\beta}\right)^{-r}$$

$$= (1+\beta)^{-r}\left(\frac{1+\beta-z\beta}{1+\beta}\right)^{-r}$$

$$= (1+\beta-z\beta)^{-r}$$

$$P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-r}.$$

Dari pgf tersebut mean dan variansi dapat dihitung sebagai berikut

$$E(N) = P'(1) = r\beta$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N) &= E[N(N-1)] + E(N) - [E(N)]^2\\ &= P''(1) + r\beta - (r\beta)^2\\ &= r^2\beta^2 + r\beta^2 + r\beta - (r\beta)^2\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(N) = r\beta(1+\beta).$$

Karena β positif, variansi dari distribusi binomial negatif lebih besar dari mean.

Distribusi geometrik adalah kasus khusus dari distribusi binomial negatif ketika $r = 1$. Maka, pf untuk distribusi geometrik adalah:

$$\Pr(N=k) = p_k = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{k}, \qquad k = 0,1,2,\ldots, r > 0, \beta > 0.$$

c. Distribusi Binomial

Distribusi binomial menggambarkan situasi fisik di mana tiap-tiap m risiko menjadi klaim atau *loss*. Pandang m risiko yang identik dan saling independen dengan probabilitas masing-masing klaimnya adalah q. Masing-masing dari m memiliki dua kemungkinan risiko (klaim), yaitu keadaan 1 jika mengajukan klaim dan keadaan 0 jika tidak mengajukan klaim. Oleh karena itu, banyaknya klaim untuk satu orang mengikuti distribusi Bernoulli, suatu distribusi dengan probabilitas $1-q$ untuk 0 dan probabilitas q untuk 1. Pgf dari banyaknya klaim per individu :

Lampiran 2. (lanjutan)

$$\begin{aligned}P(z) &= E(z^N)\\ &= \sum_{k=0}^{1} p_k z^k\\ &= p_0 z^0 + p_1 z^1\\ &= (1-q)z^0 + qz^1\\ &= 1 + q(z-1).\end{aligned}$$

Jika terdapat m individu yang saling independen, maka pgf dari total banyaknya klaim yang terjadi dari sekelompok m individu merupakan hasil perkalian dari pgf masing-masing individu.

Pgf :

$$P(z) = [1 + q(z-1)]^m, \qquad 0 < q < 1.$$

Dari pgf tersebut, pf dapat dibangkitkan sebagai berikut:

$$P'(z) = mq[1 + q(z-1)]^{m-1}$$

$$P''(z) = m(m-1)q^2[1 + q(z-1)]^{m-2}$$

$$P'''(z) = m(m-1)(m-2)q^3[1 + q(z-1)]^{m-3}$$

sehingga

$$p_1 = \frac{P'(0)}{1!} = mq(1-q)^{m-1} = \binom{m}{1} q(1-q)^{m-1}$$

$$p_2 = \frac{P''(0)}{2!} = m(m-1)q^2(1-q)^{m-2} = \binom{m}{2} q^2(1-q)^{m-2}$$

$$p_3 = \frac{P'''(0)}{3!} = m(m-1)(m-2)q^3(1-q)^{m-3} = \binom{m}{3} q^3(1-q)^{m-3}$$

Jadi pf :

$$p_k = \Pr(N = k) = \binom{m}{k} q^k(1-q)^{m-k}, \qquad k = 0,1,\ldots,m,$$

Mean dan variansi dari distribusi binomial adalah

$$E(N) = P'(1) = mq[1 + q(1-1)]^{m-1} = mq$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N) &= E(N^2) - [E(N)]^2\\ &= E(N^2) - E(N) + E(N) - [E(N)]^2\end{aligned}$$

Lampiran 2. (lanjutan)

$$
\begin{aligned}
&= E[N(N-1)] + E(N) - [E(N)]^2 \\
&= P''(1) + mq - (mq)^2 \\
&= m(m-1)q^2[1 + q(1-1)]^{m-2} + mq - (mq)^2 \\
&= m^2q^2 - mq^2 + mq - (mq)^2 \\
\mathrm{Var}(N) &= mq(1-q).
\end{aligned}
$$

Karena $0 < q < 1$, maka variansi dari distribusi binomial lebih kecil dari mean.

Lampiran 3. Distribusi *Extended Truncated Negative Binomial* (ETNB) dan Logaritmik

Meskipun pada awalnya dibahas distribusi-distribusi termodifikasi-nol pada kelas $(a,b,0)$, pada kelas $(a,b,1)$ terdapat distribusi tambahan. Ruang parameter (a,b) dapat diperluas untuk mendapatkan perluasan dari distribusi binomial negatif termasuk pada kasus saat $-1<r<0$. Untuk kelas $(a,b,0)$, diperlukan syarat $r>0$. Dengan memberikan daerah tambahan pada ruang sampel, distribusi ETNB, *extended truncated negative binomial* (binomial negatif terpancung yang diperluas) memiliki batasan parameter $\beta>0,\ r>-1,\ r\neq 0$.

Untuk menunjukkan bahwa persamaan rekursif

$$p_k^T = p_{k-1}^T\left(a+\frac{b}{k}\right), \qquad k=2,3,\ldots,$$

Dengan $p_0^T=0$ menegaskan suatu distribusi yang tepat, dan cukup untuk membuktikan bahwa untuk sembarang nilai p_1^T, nilai-nilai p_k^T berturut-turut yang diperoleh secara rekursif harus positif dan $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^T<\infty$. Untuk distribusi binomial negatif terpancung yang diperluas, hal tersebut harus berlaku untuk ruang parameter

$$a=\frac{\beta}{1+\beta},\ \beta>0, \text{ dan } b=(r-1)\frac{\beta}{1+\beta},\ r>\text{-}1,\ r\neq 0.$$

<u>Bukti</u>:

Pf distribusi binomial negatif terpancung-nol adalah

$$\begin{aligned} p_k^T &= \frac{p_k}{1-p_0} \\ &= \frac{\binom{k+r-1}{k}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{1-\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r} \end{aligned}$$

Lampiran 3. (lanjutan)

$$= \frac{\frac{(k+r-1)(k+r-2)\ldots(r+1)(r)}{k!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{1-\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r}$$

$$= \frac{(k+r-1)(k+r-2)\ldots(r+1)(r)\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{k!\left[(1+\beta)^r-1\right]}$$

$$= \frac{(r)(r+1)\ldots(k+r-2)(k+r-1)}{k!\left[(1+\beta)^r-1\right]}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

Fungsi tersebut harus memenuhi syarat sebagai pf, yaitu $p_k^T \geq 0$. Pertama, akan digunakan syarat awal distribusi binomial negatif, yaitu $\beta > 0$ dan $r > 0$. Untuk $r > 0$, $(r)(r+1)\ldots(k+r-1)(k+r-1) > 0$ dan $k!\left[(1+\beta)^r-1\right] > 0$ dengan $\beta > 0$ sehingga p_k^T bernilai positif. Untuk $-1 < r < 0$, $(r)(r+1)\ldots(k+r-1)(k+r-1) < 0$ dan $k!\left[(1+\beta)^r-1\right] < 0$ dengan $\beta > 0$ sehingga p_k^T bernilai positif pula. Namun, penyebut tidak boleh bernilai nol atau $(1+\beta)^r - 1 \neq 0$ sehingga $r \neq 0$.

Selanjutnya, akan dibuktikan $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^T < \infty$ dengan menggunakan uji rasio. Teorema uji rasio menyatakan bahwa :

Misalkan $\sum a_n$ adalah deret positif dan misalkan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

(i) Jika $\rho < 1$, maka deret konvergen.

(ii) Jika $\rho > 1$ atau jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, maka deret divergen.

Lampiran 3. (lanjutan)

(iii) Jika $\rho = 1$, maka tidak dapat diambil kesimpulan.

Jika uji rasio tersebut diterapkan pada pf distribusi binomial negatif terpancung yang diperluas, maka

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}^T}{p_k^T}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{(r)(r+1)\ldots(k+r-1)(k+r)}{(k+1)!\left[(1+\beta)^r - 1\right]}\left(\dfrac{\beta}{1+\beta}\right)^{k+1}}{\dfrac{(r)(r+1)\ldots(k+r-2)(k+r-1)}{k!\left[(1+\beta)^r - 1\right]}\left(\dfrac{\beta}{1+\beta}\right)^{k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+r}{k+1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)$$

$$= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) < 1 \qquad (\text{karena } \beta > 0)$$

Karena $\rho < 1$, maka deret $\sum p_k^T$ konvergen atau $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^T < \infty$.

Ketika $r \to 0$, kasus khusus dari ETNB adalah distribusi logaritmik dengan pf

$$p_k^T = \lim_{r\to\infty} \frac{(r)(r+1)\ldots(k+r-2)(k+r-1)}{k!\left[(1+\beta)^r - 1\right]}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \lim_{r\to\infty} \frac{(r)(r+1)\ldots(k+r-2)(k+r-1)}{\left[(1+\beta)^r - 1\right]}$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \lim_{r\to\infty} \frac{r^k + \ldots + r(k-1)!}{\left[(1+\beta)^r - 1\right]}$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \lim_{r\to\infty} \frac{kr^{k-1} + \ldots + (k-1)!}{(1+\beta)^r \ln(1+\beta)} \qquad (\text{L'Hospital})$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{k\ln(1+\beta)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Lampiran 3. (lanjutan)

Pgf distribusi logaritmik adalah

$$
\begin{aligned}
P^T(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k^T z^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[\beta/(1+\beta)\right]^k}{k\ln(1+\beta)} z^k \\
&= \frac{1}{\ln(1+\beta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z\beta}{1+\beta}\right)^k
\end{aligned}
$$

Berdasarkan jumlahan dari deret geometrik,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \,, \qquad x < 1 \\
\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \left(1 + t + t^2 + t^3 + \dots\right) dt \\
-\ln(1-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}
\end{aligned}
$$

Kemudian dengan mengganti x dengan $\frac{z\beta}{1+\beta}$ maka

$$
\begin{aligned}
P^T(z) &= \frac{1}{\ln(1+\beta)}\left[-\ln\left(1 - \frac{z\beta}{1+\beta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\ln(1+\beta)}\left[-\ln\left(\frac{1+\beta-z\beta}{1+\beta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\ln(1+\beta)}\left[\ln(1+\beta) - \ln(1+\beta-z\beta)\right] \\
&= 1 - \frac{\ln\left[1-\beta(z-1)\right]}{\ln(1+\beta)}
\end{aligned}
$$

Distribusi logaritmik termodifikasi-nol dibentuk dengan menentukan sembarang nilai probabilitas saat nol dan mengurangi probabilitas lainnya.

Lampiran 4. Bukti Tabel 3.1. Perubahan Parameter Distribusi Banyaknya Klaim

a. Distribusi Poisson (λ)

$$B(z) = e^z$$

$$P_{N^L}(z) = B\left[\lambda(z-1)\right]$$

$$\begin{aligned}
P_{N^P}(z) &= P_{N^L}(z)\left[P_{I_j}(z)\right] \\
&= B\left[\lambda\left(P_{I_j}(z)-1\right)\right] \\
&= B\left[\lambda(1-v+vz-1)\right] \\
&= B\left[v\lambda(z-1)\right] \\
&= B\left[\lambda^*(z-1)\right] \\
&= e^{v\lambda(z-1)}
\end{aligned}$$

b. Distribusi ZM Poisson (λ,α)

$$B(z) = e^z$$

$$P_{N^L}(z) = \alpha + (1-\alpha)\frac{B\left[\lambda(z-1)\right]-B(-\lambda)}{1-B(-\lambda)}$$

$$\begin{aligned}
P_{N^P}(z) &= P_{N^L}\left[P_{I_j}(z)\right] \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\frac{B\left[\lambda\left(P_{I_j}(z)-1\right)\right]-B(-\lambda)}{1-B(-\lambda)} \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\frac{B\left[\lambda(1-v+vz-1)\right]-B(-\lambda)}{1-B(-\lambda)} \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\frac{B\left[v\lambda(z-1)\right]-B(-\lambda)}{1-B(-\lambda)} \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\frac{B\left[\lambda^*(z-1)\right]-B(-\lambda)}{1-B(-\lambda)}
\end{aligned}$$

Lampiran 4. (lanjutan)

$$
\begin{aligned}
\alpha^* &= p_0^{M*} \\
&= P_{N^L}\left(1-v\right) \\
&= \alpha + \left(1-\alpha\right)\frac{B\left[\lambda\left(1-v-1\right)\right]-B\left(-\lambda\right)}{1-B\left(-\lambda\right)} \\
&= p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\frac{B\left(-v\lambda\right)-B\left(-\lambda\right)}{1-B\left(-\lambda\right)} \\
&= p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\frac{e^{-v\lambda}-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \\
&= \frac{p_0^M - p_0^M e^{-\lambda} + e^{-v\lambda} - p_0^M e^{-v\lambda} - e^{-\lambda} + p_0^M e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \\
&= \frac{p_0^M + e^{-v\lambda} - p_0^M e^{-v\lambda} - e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}
\end{aligned}
$$

c. Distribusi Binomial $\left(m,q\right)$

$$B\left(z\right)=\left(1+z\right)^m$$

$$
\begin{aligned}
P_{N^L}\left(z\right) &= B\left[q\left(z-1\right)\right] \\
P_{N^P}\left(z\right) &= P_{N^L}\left(z\right)\left[P_{I_j}\left(z\right)\right] \\
&= B\left[q\left(P_{I_j}\left(z\right)-1\right)\right] \\
&= B\left[q\left(1-v+vz-1\right)\right] \\
&= B\left[vq\left(z-1\right)\right] \\
&= B\left[q^*\left(z-1\right)\right] \\
&= \left[1+vq\left(z-1\right)\right]^m
\end{aligned}
$$

d. Distribusi ZM Binomial $\left(\lambda,\alpha\right)$

$$B\left(z\right)=\left(1+z\right)^m$$

Lampiran 4. (lanjutan)

$$P_{N^L}(z) = \alpha + (1-\alpha)\frac{B\left[q(z-1)\right] - B(-q)}{1-B(-q)}$$

$$\begin{aligned}
P_{N^P}(z) &= P_{N^L}\left[P_{I_j}(z)\right] \\
&= \alpha^* + (1-\alpha^*)\frac{B\left[q\left(P_{I_j}(z)-1\right)\right] - B(-q)}{1-B(-q)} \\
&= \alpha^* + (1-\alpha^*)\frac{B\left[q(1-v+vz-1)\right] - B(-q)}{1-B(-q)} \\
&= \alpha^* + (1-\alpha^*)\frac{B\left[vq(z-1)\right] - B(-q)}{1-B(-q)} \\
&= \alpha^* + (1-\alpha^*)\frac{B\left[q^*(z-1)\right] - B(-q)}{1-B(-q)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= p_0^{M*} \\
&= P_{N^L}(1-v) \\
&= \alpha + (1-\alpha)\frac{B\left[q(1-v-1)\right] - B(-q)}{1-B(-q)} \\
&= p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\frac{B(-vq) - B(-q)}{1-B(-q)} \\
&= p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\frac{(1-vq)^m - (1-q)^m}{1-(1-q)^m} \\
&= \frac{p_0^M - p_0^M(1-q)^m + (1-vq)^m - p_0^M(1-vq)^m - (1-q)^m + p_0^M(1-q)^m}{1-(1-q)^m} \\
&= \frac{p_0^M + (1-vq)^m - p_0^M(1-vq)^m - (1-q)^m}{1-(1-q)^m}
\end{aligned}$$

e. Distribusi Binomial Negatif

$$B(z) = (1-z)^{-r}$$

Lampiran 4. (lanjutan)

$$P_{N^L}(z) = B\left[\beta(z-1)\right]$$

$$\begin{aligned}
P_{N^P}(z) &= P_{N^L}(z)\left[P_{I_j}(z)\right] \\
&= B\left[\beta\left(P_{I_j}(z)-1\right)\right] \\
&= B\left[\beta(1-v+vz-1)\right] \\
&= B\left[v\beta(z-1)\right] \\
&= B\left[\beta^*(z-1)\right] \\
&= \left[1+v\beta(z-1)\right]^{-r}
\end{aligned}$$

f. Distribusi ZM Binomial Negatif

$$B(z) = (1-z)^{-r}$$

$$P_{N^L}(z) = \alpha + (1-\alpha)\frac{B\left[\beta(z-1)\right]-B(-\beta)}{1-B(-\beta)}$$

$$\begin{aligned}
P_{N^P}(z) &= P_{N^L}\left[P_{I_j}(z)\right] \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\frac{B\left[\beta\left(P_{I_j}(z)-1\right)\right]-B(-\beta)}{1-B(-\beta)} \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\frac{B\left[\beta(1-v+vz-1)\right]-B(-\beta)}{1-B(-\beta)} \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\frac{B\left[v\beta(z-1)\right]-B(-\beta)}{1-B(-\beta)} \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\frac{B\left[\beta^*(z-1)\right]-B(-\beta)}{1-B(-\beta)}
\end{aligned}$$

Lampiran 4. (lanjutan)

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= p_0^{M*} \\
&= P_{N^L}(1-v) \\
&= \alpha + (1-\alpha)\frac{B\left[\beta(1-v-1)\right]-B(-\beta)}{1-B(-\beta)} \\
&= p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\frac{B(-v\beta)-B(-\beta)}{1-B(-\beta)} \\
&= p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\frac{(1+v\beta)^{-r}-(1+\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}} \\
&= \frac{p_0^M - p_0^M(1+\beta)^{-r} + (1+v\beta)^{-r} - p_0^M(1+v\beta)^{-r} - (1+\beta)^{-r} + p_0^M(1+\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}} \\
&= \frac{p_0^M + (1+v\beta)^{-r} - p_0^M(1+v\beta)^{-r} - (1+\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}}
\end{aligned}$$

g. Distribusi ZM Logaritmik

$$P_{N^L}(z) = \alpha + (1-\alpha)\left[1-\frac{\ln\left[1-\beta(z-1)\right]}{\ln(1+\beta)}\right]$$

$$\begin{aligned}
P_{N^P}(z) &= P_{N^L}\left[P_{I_j}(z)\right] \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\left[1-\frac{\ln\left[1-\beta\left(P_{I_j}(z)-1\right)\right]}{\ln(1+\beta)}\right] \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\left[1-\frac{\ln\left[1-\beta(1-v+vz-1)\right]}{\ln(1+\beta)}\right] \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\left[1-\frac{\ln\left[1-v\beta(z-1)\right]}{\ln(1+\beta)}\right] \\
&= \alpha^* + \left(1-\alpha^*\right)\left[1-\frac{\ln\left[1-\beta^*(z-1)\right]}{\ln(1+\beta)}\right]
\end{aligned}$$

Lampiran 4. (lanjutan)

$$
\begin{aligned}
\alpha^* &= p_0^{M*} \\
&= P_{N^L}\left(1-v\right) \\
&= \alpha + \left(1-\alpha\right)\left[1-\frac{\ln\left[1-\beta\left(1-v-1\right)\right]}{\ln\left(1+\beta\right)}\right] \\
&= p_0^M + \left(1-p_0^M\right)\left[1-\frac{\ln\left(1+v\beta\right)}{\ln\left(1+\beta\right)}\right] \\
&= p_0^M + \left(1-p_0^M\right) - \left(1-p_0^M\right)\frac{\ln\left(1+v\beta\right)}{\ln\left(1+\beta\right)} \\
&= 1-\left(1-p_0^M\right)\frac{\ln\left(1+v\beta\right)}{\ln\left(1+\beta\right)}
\end{aligned}
$$

Lampiran 5. Uji Kolmogorov-Smirnov untuk distribusi besarnya *loss* dan nilai negatif likelihood

Uji Kolmogorov-Smirnov merupakan salah satu uji yang dapat digunakan dalam menentukan distribusi yang fit untuk suatu data. Hipotesis untuk uji ini adalah :

$H_0 : F(x) = F(x;\hat{\theta})$ (data berdistribusi seperti yang telah ditetapkan)

H_1 : tidak demikian (distribusi yang telah ditentukan tidak fit untuk data)

Statistik uji Kolmogorov-Smirnov, dihitung sebagai berikut :

$$D = \max_x \left| F_n(x) - F(x;\hat{\theta}) \right|$$

di mana $F(x;\hat{\theta})$ adalah nilai dari fungsi distribusi pada hipotesis, sedangkan $F_n(x)$ adalah fungsi distribusi empiris, yang didefinisikan sebagai berikut :

$$F_n(x) = \frac{\text{banyaknya data } \leq x}{n},$$

dengan n adalah banyaknya data.

Nilai kritis untuk uji ini adalah

$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$ untuk $\alpha = 0,20$

$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$ untuk $\alpha = 0,10$

$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$ untuk $\alpha = 0,05$

$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$ untuk $\alpha = 0,01$

Aturan keputusan :

H_0 ditolak jika $D >$ nilai kritis.

Lampiran 5. (lanjutan)

Fungsi Likelihood, $L(\theta)$ adalah probabilitas bersama dari $X_1, X_2, \cdots, X_n$ di mana X_i dan X_j saling bebas dengan $i, j = 1,2, \cdots, n, i \neq j$. Fungsi loglikelihood (l) adalah log dari fungsi likelihood. Fungsi loglikelihood dari keempat kandidat distribusi untuk data besarnya klaim sebagai berikut :

(a) Distribusi Eksponensial (θ) :

$$f(x) = \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{36} \frac{e^{-x_i/\theta}}{\theta} = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{36} x_i/\theta}}{\theta^n}$$

$$l = -\sum_{i=1}^{36} \frac{x_i}{\theta} - 36 \ln \theta$$

(b) Distribusi Lognormal (μ, σ) :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{36} \frac{1}{x_i\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$l = -\sum_{i=1}^{36} \ln x_i\sigma\sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^{36} \frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

(c) Distribusi Pareto (α, θ) :

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{36} \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x_i+\theta)^{\alpha+1}}$$

Lampiran 5. (lanjutan)

$$l = \sum_{i=1}^{36} \ln \alpha + \sum_{i=1}^{36} \alpha \ln \theta - \sum_{i=1}^{36} (\alpha + 1) \ln(x_i + \theta)$$

$$l = 36 \ln \alpha + 36\alpha \ln \theta - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^{36} \ln(x_i + \theta)$$

(d) Distribusi Weibull (θ, τ) :

$$f(x) = \frac{\tau \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau}}}{x}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{36} \frac{\tau \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{\tau} e^{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{\tau}}}{x_i}$$

$$l = \sum_{i=1}^{36} \ln \tau + \sum_{i=1}^{36} \tau \ln \left(\frac{x_i}{\theta}\right) - \sum_{i=1}^{36} \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{\tau} - \sum_{i=1}^{36} \ln(x_i)$$

NLL adalah nilai negatif dari loglikelihood, yaitu $-l$. Karena taksiran parameter yang baik adalah taksiran yang dapat memaksimumkan nilai loglikelihood, maka kandidat distribusi dengan taksiran parameter yang menghasilkan nilai loglikelihood terbesar, atau NLL terkecil adalah distribusi yang paling fit untuk data.

Lampiran 6. Metode maksimum likelihood untuk distribusi banyaknya klaim

Metode maksimum likelihood adalah suatu metode yang memaksimumkan fungsi likelihood. Dalam kasus ini, terdapat n polis. Misalkan $N_j, j = 1,2,\ldots,n$ adalah variabel acak yang menunjukkan banyaknya kecelakaan yang dialami polis ke-j. Variabel acak tersebut berdistribusi identik dengan parameter θ dan saling independen. Fungsi likelihood (L) adalah probabilitas bersama dari $N_1 = x_1, N_2 = x_2, \ldots, N_n = x_n$ di mana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah nilai-nilai yang mungkin dari $N_1, N_2, \ldots, N_n$ berturut-turut.

$$L = L(\theta) = \prod_{j=1}^{n} \Pr(N = x_j|\theta)$$

Misalkan $x_j = k, k = 0,1,2,\ldots$ maka untuk distribusi diskrit dengan data berkelompok, fungsi likelihood dapat dituliskan sebagai berikut

$$L = \prod_{k=0}^{\infty} [\Pr(N = k|\theta)]^{n_k} = \prod_{k=0}^{\infty} {p_k}^{n_k}$$

di mana k adalah banyaknya kecelakaan yang dialami suatu polis dan n_k adalah banyaknya polis yang mengalami k kecelakaan dengan $\sum_{k=0}^{\infty} n_k = n$.

Sebagai contoh, jika $n = 5$ dengan $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 7$ maka

$$\begin{aligned}
L &= \prod_{j=1}^{5} \Pr\left(N = x_j\right) \\
&= \Pr(N = 2)\Pr(N = 2)\Pr(N = 4)\Pr(N = 5)\Pr(N = 7) \\
&= \Pr(N = 0)^0\Pr(N = 1)^0\Pr(N = 2)^2\Pr(N = 3)^0\Pr(N = 4)^1 \\
&\quad \Pr(N = 5)^1\Pr(N = 6)^0 Pr(N = 7)^1\Pr(N = 8)^0 \ldots \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \Pr(N = k)^{n_k} = \prod_{k=0}^{\infty} {p_k}^{n_k}
\end{aligned}$$

Lampiran 6. (lanjutan)

Memaksimumkan fungsi likelihood sama dengan memaksimumkan fungsi loglikelihood, karena transformasi logaritma menghasilkan fungsi yang monoton dan naik, atau jika fungsi likelihood mencapai maksimum, fungsi loglikelihood juga maksimum. Cara memaksimumkan fungsi adalah dengan membuat turunan pertamanya sama dengan nol dan hal ini lebih mudah dikerjakan pada fungsi loglikelihood, yaitu

$$l = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \ln p_k.$$

(a) Distribusi Poisson

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

dan

$$\ln p_k = -\lambda + k \ln \lambda - \ln k!\ .$$

Fungsi loglikelihoodnya

$$l = \sum_{k=0}^{\infty} n_k(-\lambda + k \ln \lambda - \ln k!) = -\lambda n + \sum_{k=0}^{\infty} k n_k \ln \lambda - \sum_{k=0}^{\infty} n_k \ln k!$$

di mana $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k$ adalah ukuran sampel. Fungsi loglikelihood diturunkan terhadap λ diperoleh

$$\frac{dl}{d\lambda} = -n + \sum_{k=0}^{\infty} k n_k \frac{1}{\lambda}.$$

Dengan membuat turunan dari loglikelihood sama dengan nol, taksiran maksimum likelihood dapat diperoleh sebagai hasil dari persamaan, yaitu

$$0 = -n + \sum_{k=0}^{\infty} k n_k \frac{1}{\lambda}$$

$$n = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k n_k$$

Lampiran 6. (lanjutan)

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} kn_k}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{n_k}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} k\hat{p}_k = \bar{x}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (3 \cdot 1) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 1) + (6 \cdot 2) + (7 \cdot 1)}{10}$$

$$= \frac{36}{10} = 3{,}6$$

dan nilai negatif loglikelihood adalah

$$-l = -\left[-\lambda n + \sum_{k=0}^{\infty} kn_k \ln \lambda - \sum_{k=0}^{\infty} n_k \ln k!\right]$$

$$= \lambda n - \ln \lambda \sum_{k=0}^{\infty} kn_k + \sum_{k=0}^{\infty} n_k \ln k!$$

$$= (3{,}6)10 - \ln(3{,}6)\, 36 + 32{,}13412$$

$$= 22{,}0205$$

(b) Distribusi Binomial Negatif

$$p_k = \binom{k+r-1}{k}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

Fungsi loglikelihood untuk distribusi binomial negatif adalah

$$l = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \ln p_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} n_k \ln\left[\binom{k+r-1}{k}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left[\ln\binom{r+k-1}{k} - r\ln(1+\beta) + k\ln\beta - k\ln(1+\beta)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left[\ln\binom{r+k-1}{k} + k\ln\beta - (r+k)\ln(1+\beta)\right].$$

Lampiran 6. (lanjutan)

Fungsi tersebut merupakan fungsi dengan dua parameter, β dan r. Untuk memperoleh taksiran maksimum likelihood, fungsi tersebut diturunkan terhadap masing-masing parameter dan turunannya sama dengan nol.

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(\frac{k}{\beta} - \frac{r+k}{1+\beta}\right)$$

$$\frac{\partial l}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{(r+k-1)\ldots r}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} n_k \ln(1+\beta)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{k!} \frac{\partial}{\partial r} \ln \prod_{m=0}^{k-1} (r+m) - n \ln(1+\beta)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{k!} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{m=0}^{k-1} \ln(r+m) - n \ln(1+\beta)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{r+m} - n \ln(1+\beta)$$

kemudian turunannya disamakan dengan nol,

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(\frac{k}{\beta} - \frac{r+k}{1+\beta}\right)$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k n_k}{\beta} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r n_k}{1+\beta} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k n_k}{1+\beta}$$

$$\frac{r}{1+\beta} \sum_{k=0}^{\infty} n_k = \sum_{k=0}^{\infty} k n_k \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{1+\beta}\right)$$

$$\frac{rn}{1+\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} k n_k \left(\frac{1}{\beta(1+\beta)}\right)$$

$$\frac{rn}{1+\beta} \beta(1+\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} k n_k$$

Lampiran 6. (lanjutan)

$$\hat{r}\hat{\beta} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} kn_k}{n} = \bar{x}$$

dan

$$\frac{\partial l}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{r+m} - n\ln(1+\beta)$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{r+m} - n\ln(1+\beta)$$

$$n\ln\left(1+\hat{\beta}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{k!} \left(\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{\hat{r}+m} \right).$$

dengan mengganti $\hat{\beta}$ dengan $\bar{x}/\hat{r}$ pada persamaan terakhir diperoleh

$$H(\hat{r}) = n\ln\left(1+\frac{\bar{x}}{\hat{r}}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{k!} \left(\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{\hat{r}+m} \right) = 0\,.$$

Persamaan tersebut dapat diselesaikan secara numerik dengan metode Newton-Raphson. Iterasi ke-i untuk persamaan tersebut adalah

$$r_i = r_{i-1} - \frac{H(r_{i-1})}{H'(r_{i-1})}\,.$$

Dari data kecelakaan pada contoh 6.2, akan dicari taksiran parameter dengan metode maksimum likelihood menggunakan software Matlab 2009 dengan asumsi data berdistribusi binomial negatif $\left(r, \frac{1}{1+\beta}\right)$.

Pada Matlab 2009, jika sebuah variabel acak N berdistribusi Binomial Negatif, maka bentuk pf-nya adalah

$$\Pr(N = k|r,p) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)\Gamma(k+1)} p^r (1-p)^k\,.$$

Fungsi *nbinfit* pada Matlab 2009 akan memberikan nilai taksiran $\hat{r}$ dan $\hat{p}$ yang didapat dengan menggunakan metode maksimum likelihood.

Berikut ini adalah prosedur pencariannya.

Lampiran 6. (lanjutan)

1. Input data yang terdapat pada tabel 6.2 menjadi matriks-matriks berikut

```
>> a1=ones(1,3);
>> b1=2*ones(1,1);
>> c1=3*ones(1,1);
>> d1=4*ones(1,1);
>> e1=5*ones(1,1);
>> f1=6*ones(1,2);
>> g1=7*ones(1,1);
>> nb1=[a1 b1 c1 d1 e1 f1 g1];
```

Interpretasi:

- Terdapat 3 tahun, di mana pada tahun tersebut terjadi hanya 1 klaim. Jadi, matriks input dinamakan matriks a1 berukuran (1x3) berisi vektor 1.
- Terdapat 1 tahun, di mana pada tahun tersebut terjadi 2 klaim. Jadi, matriks input dinamakan matriks b1 berukuran (1x1) berisi vektor 2.
- Terdapat 1 tahun, di mana pada tahun tersebut terjadi 3 klaim. Jadi, matriks input dinamakan matriks c1 berukuran (1x1) berisi vektor 3.
- Terdapat 1 tahun, di mana pada tahun tersebut terjadi 4 klaim. Jadi, matriks input dinamakan matriks d1 berukuran (1x1) berisi vektor 4.
- Terdapat 1 tahun, di mana pada tahun tersebut terjadi 5 klaim. Jadi, matriks input dinamakan matriks e1 berukuran (1x1) berisi vektor 5.
- Terdapat 2 tahun, di mana pada tahun tersebut terjadi 6 klaim. Jadi, matriks input dinamakan matriks f1 berukuran (1x1) berisi vektor 6.

Lampiran 6. (lanjutan)

- Terdapat 1 tahun, di mana pada tahun tersebut terjadi 7 klaim. Jadi, matriks input dinamakan matriks g1 berukuran (1x1) berisi vektor 7.

Jadi, input data secara keseluruhan adalah gabungan dari matriks a1, b1, c1, d1, e1, f1, dan g1 yang berukuran (1x10).

2. Selanjutnya akan dicari nilai $\hat{r}$ dan $\hat{\beta}$ dari data dengan menggunakan fungsi *nbinfit*. Pada software Matlab 2009, parameter binomial negatif yang digunakan adalah r dan p. Sedangkan data yang kita punya diasumsikan berdistribusi binomial negatif dengan parameter r dan $\frac{1}{1+\beta}$ sehingga $\hat{\beta} = \frac{1-\hat{p}}{\hat{p}}$.

Output untuk estimasi parameter dari distribusi Binomial Negatif $\left(r, \frac{1}{1+\beta}\right)$ adalah

```
>> parmhat=nbinfit(nb1)

parmhat =

    8.3687    0.6992
```

Dari output tersebut diperoleh $\hat{r} = 8{,}3687$ dan $\hat{p} = \frac{1}{1+\hat{\beta}} = 0{,}6992$ atau $\hat{\beta} = 0{,}4302$.

Jadi, nilai dari negatif loglikelihoodnya adalah

$$-l = -\sum_{k=0}^{7} n_k \ln\left[\binom{k+\hat{r}-1}{k}\left(\frac{1}{1+\hat{\beta}}\right)^{\hat{r}}\left(\frac{\hat{\beta}}{1+\hat{\beta}}\right)^{k}\right] = 21{,}7279$$

Lampiran 6. (lanjutan)

Karena tujuan utama penaksiran maksimum likelihood adalah memaksimumkan fungsi likelihood (yang dikerjakan dengan loglikelihood), maka distribusi dengan nilai loglikelihood lebih besar adalah distribusi yang lebih tepat untuk data. Dalam hal ini, nilai negatif loglikelihood untuk distribusi binomial negatif lebih kecil daripada distribusi Poisson, maka dapat disimpulkan bahwa distribusi binomial negatif lebih baik untuk data klaim.