UNIVERSITAS INDONESIA

UJI SERIAL : SUATU UJI KEACAKAN UNTUK SUATU BARISAN BILANGAN BINER

SKRIPSI

GAYATRI BAGAWANTI
0806325554

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

UJI SERIAL : SUATU UJI KEACAKAN UNTUK SUATU BARISAN BILANGAN BINER

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

GAYATRI BAGAWANTI
0806325554

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Gayatri Bagawanti
NPM	:	0806325554
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	11 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	:	Gayatri Bagawanti
NPM	:	0806325554
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Uji Serial : Suatu Uji Keacakan untuk Suatu Barisan Bilangan Biner

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dra. Netty Sunandi, M.Si	( )
Penguji I	:	Dra. Rianti Setiadi, M.Si	( )
Penguji II	:	Dra. Siti Nurrohmah, M.Si	( )
Penguji III	:	Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	11 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil ‘aalamiin, segala puji bagi Allah SWT, Tuhan pencipta alam semesta. Atas ridha dan karunia-Nya lah penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Tak lupa sholawat dan salam penulis haturkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW beserta keluarga, dan Sahabat serta orang-orang yang senantiasa mengikutinya dengan benar.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang terdapat dalam tugas akhir ini. Penulis mengharapkan kritik serta saran guna menyempurnakan tugas akhir ini. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada orang-orang yang telah berjasa hingga akhirnya tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik, terutama kepada:

1. Ibu penulis, R.A.S. Rogayah Sulyanti dan ayah penulis, Drs. Bambang Wikanto, Ak. yang selalu medoakan serta mendukung penulis.
2. Ibu Dra. Netty Sunandi, M.Si selaku pembimbing akademis dan sebagai pembimbing tugas akhir yang telah memberi motivasi, saran, waktu, ilmu yang berharga dan bermanfaat, serta membimbing penulis dalam urusan perkuliahan ditiap semesternya dan khususnya selama menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Bapak Dr. Yudhi Satria, M.T. selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu Rahmi Rusin, M.ScTech. selaku Sekretaris Departemen Matematika, Ibu Mila Novita, M.Si. selaku Koordinator Kemahasiswaan, dan Ibu Dr. Dian Lestari, DEA selaku Koordinator Pendidikan yang banyak membantu penulis dalam urusan perkuliahan maupun organisasi.
4. Ibu Dra. Rianti Setiadi, M.Si, Dra. Siti Nurrohmah, M.Si, dan Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si selaku penguji kolokium penulis yang bersedia meluangkan waktunya untuk memberi kritik, saran, serta ilmu yang bermanfaat.
5. Bapak ibu dosen di Departemen Matematika, terutama kepada ibu Dra. Suarsih Utama, Prof. Dr. Belawati HW, Dra. Nora Hariadi, M.Si., Dra. Titin Siswatining, DEA., Dra. Ida Fithriani, M.Si., Dhian Widya, M.Kom., Fevi

Novkaniza, M.Si., Helen Burhan, M.Si., Mila Novita, M.Si., Dra. Netty Sunandi, M.Si., Dra. Rustina, Dra. Siti Aminah, M.Kom., Dra. Siti Nurrohmah, Dra. Sri Harini, M.Kom., dan kepada bapak Alhaji Akbar, M.Sc., Arie Wibowo, M.Si., Prof. Dr. Djati Kerami, Hengki Tasman, M.Si., Drs. Suryadi MT, M.T., Drs. Zuherman Rustam, DEA., terima kasih telah mengajar penulis serta banyak menyumbangkan ilmu pengetahuan yang belum pernah penulis dapatkan sebelumnya.

6. Seluruh staf Departemen Matematika terutama Mba Santi, Pak Saliman, Pak Ansori, Mba Rusmi, Pak Turino, Mas Iwan, serta Mas Tatang dan Mas Wawan yang banyak membantu penulis.
7. Kak Ajat Adriansyah (2004) dan Rizky Reza (2009) yang telah banyak membantu dan membukakan pikiran penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini.
8. Nita Astuti, Citra Natalia Manullang, dan Afriandini Putri Sandika, terimakasih telah menjadi alasan penulis tetap bertahan di sini.
9. Tami Januarti (ADM Negara 2008) dan Solita Tiolina (Psikologi 2008) terimakasih atas cerita dan waktu yang telah dibagi bersama.
10. Tri Budi Novia (2008) dan Eka Hanna Sidabalok (2008) teman seperjuangan sepembimbing tempat berbagi cerita.
11. Teman-teman HMD 2010, terutama CT, BPH dan SC, Arman, Andy, Dheni, Tute, Ines, Ade, Agnes, Aci, Maimun, Maul, Alfian, Luthfa, Dewe, Kak Tino, dan Kak Arif.
12. Teman-teman Matematika 2008, *One Math One Family!*
13. Elvin Marwady (2010) adik asuh yang selalu setia memberikan support.
14. Rangga Rezki (Fisika 2007*) thanks for coming to my life* ☺ .

Dan seluruh manusia, teman, keluarga yang penulis kenal, baik saat senang maupun susah. Semoga tugas akhir ini menjadi sesuatu yang bermanfaat bagi siapapun. Maaf atas kekurangan yang ada. Terima kasih.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI

TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Gayatri Bagawanti
NPM	:	0806325554
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Uji Serial : Suatu Uji Keacakan untuk suatu Barisan Bilangan Biner

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 11 Juni 2012
Yang menyatakan

(Gayatri Bagawanti)

ABSTRAK

Nama : Gayatri Bagawanti
Program Studi : Matematika
Judul : Uji Serial : Suatu Uji Keacakan untuk Suatu Barisan Bilangan Biner

Tugas akhir ini membahas mengenai Uji Serial. Uji keacakan ini didasarkan pada pola m-bit dalam semua blok-blok *overlapping* berukuran m-bit dalam keseluruhan barisan biner berukuran n-bit yang akan diuji. Akan digunakan statistik uji dari frekuensi pola (i_1, i_2, …, i_m) dalam suatu *circular string.* Distribusi statistik uji tersebut di bawah H_0: Barisan yang diuji ialah acak, diperoleh dengan melakukan transformasi dan diagonalisasi secara ortogonal sehingga konvergensinya berdistribusi *Chi-Square.* Selain itu, dalam tugas akhir ini juga diberikan ilustrasi dalam menguji keacakan barisan bilangan biner dengan menggunakan Uji Serial.

Kata Kunci : distribusi multinomial, diagonalisasi matriks, distribusi *chi-square*
xii + 56 halaman : 5 tabel dan 2 gambar
Daftar Pustaka : 7 (1953-2001)

ABSTRACT

Name : Gayatri Bagawanti
Study Program : Mathematics
Title : Serial Test : A Randomness Test of Bit Sequence

This *skripsi* discusses about Serial Test. This randomness test is based on m-bit patterns in overlapping blocks across the entire n-bit sequence. The statistical test from frequency of all possible patterns (i_1, i_2, …, i_m) in circular string will be used in this test. Distribution of that statistical test under H_0: the sequence being tested is a random sequence, is obtained by tranformation and orthogonal diagonalization so it converges to Chi-Square distribution. This paper also gives illustration about how to test the randomness of bit sequence using Serial Test.

Keywords : Multinomial Distribution, matrix diagonalization, Chi- Square distribution
xii + 56 pages : 5 tables and 2 pictures
Bibliography : 7 (1953-2001)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kebutuhan akan bilangan acak muncul dalam banyak aplikasi kriptografi. Aplikasi kriptografi itu sendiri terdiri dari berbagai bidang. Salah satu bidang kriptografi yang sangat membutuhkan peranan bilangan acak adalah *Encryption Theory*. Tujuan penting dalam bidang *Encryption Theory* adalah memastikan kerahasiaan suatu informasi agar tidak dapat dilacak oleh pihak-pihak yang tidak berwenang. Sehingga untuk memenuhi tujuan ini, salah satu solusinya adalah informasi yang dirahasiakan tersebut perlu diubah menjadi barisan bilangan acak.

Untuk menghasilkan suatu barisan bilangan yang bersifat acak diperlukan fungsi atau pembangkit. Suatu fungsi atau pembangkit dikatakan menghasilkan suatu barisan bilangan yang acak jika barisan tersebut lolos dari sejumlah uji keacakan. Salah satu uji keacakan yang dapat digunakan adalah Uji Serial. Pada Uji Serial ini, barisan bilangan yang akan diuji tersebut dipecah menjadi blok-blok di mana pembentukan blok-blok tersebut berturut-turut saling *overlap* antara blok yang satu dengan blok setelahnya, sehingga blok-blok ini disebut sebagai blok *overlapping*.

Uji Serial yang dibahas di sini dikhususkan untuk pengujian keacakan barisan bilangan yang biner yaitu barisan bilangan yang hanya terdiri atas dua angka, 0 dan 1. Selanjutnya akan digunakan istilah bit dalam menyatakan ukuran pola, blok, maupun barisan bilangan, sebagai contoh pola 010 termasuk dalam pola 3-bit.

Uji Serial memiliki statistik uji yang didasarkan pada frekuensi pola. Pola yang dimaksud di sini adalah pola berukuran m-bit dengan bentuk $(i_1 i_2 \dots i_m)$ di mana kemungkinan nilai dari masing-masing i_j adalah 0 atau 1, dengan $j = 1, 2, \ldots, m$. Pola ini nantinya akan dilihat banyak kemunculannya dalam semua blok *overlapping* yang juga berukuran m-bit. Blok-blok *overlapping* ini seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, dibentuk dari barisan bilangan biner yang berukuran n-bit. Banyak kemunculan pola-pola ini selanjutnya disebut sebagai frekuensi pola. Jadi, frekuensi pola m-bit inilah yang menjadi dasar statistik uji yang digunakan dalam Uji Serial. Statistik uji ini akan dilihat distribusinya sehingga dapat ditentukan bagaimana aturan keputusan menggunakan statistik uji tersebut dalam Uji Serial.

Distribusi statistik uji pada Uji Serial akan ditinjau di bawah H_0 : Barisan yang diuji ialah acak. Dengan perkataan lain, tujuan dari uji ini adalah menentukan apakah frekuensi pola tersebut kira-kira sama seperti yang diharapkan untuk suatu barisan yang acak. Dalam Uji Serial, suatu barisan biner dikatakan acak jika setiap pola m-bit mempunyai kemungkinan muncul yang sama pada setiap blok *overlapping*.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

a) Bagaimana menentukan distribusi dari frekuensi pola m-bit dalam blok-blok *overlapping* pada barisan bilangan biner ?
b) Bagaimana menguji keacakan barisan bilangan biner pada Uji Serial ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut :

a) Menjelaskan mengenai penurunan distribusi dari frekuensi pola m-bit dalam blok-blok *overlapping* pada barisan bilangan biner.
b) Melakukan pengujian keacakan barisan bilangan biner pada Uji Serial.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan dasar-dasar teori yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini.

2.1 Macam - macam distribusi

Pada tugas akhir ini akan digunakan beberapa distribusi, seperti distribusi *Bernoulli*, Binomial, Multinomial, dan *Chi-Square*.

2.1.1 Distribusi *Bernoulli*

Percobaan *Bernoulli* adalah suatu percobaan acak di mana hasil yang mungkin adalah sukses atau gagal. Barisan dari percobaan *Bernoulli* dikatakan terjadi apabila percobaan *Bernoulli* dilakukan berkali-kali dan saling bebas. Lebih lanjut, untuk setiap percobaan, probabilitas suksesnya adalah sama yaitu p.

Misalkan variabel acak X yang berhubungan dengan suatu percobaan *Bernoulli* didefinisikan sebagai berikut :

$$X(\text{sukses}) = 1 \text{ dan } X(\text{gagal}) = 0.$$

P.d.f dari X dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f(x) &= p^x(1-p)^{1-x} \quad &, x = 0,1 \\ &= 0 \quad &, \text{yang lainnya}. \end{aligned}$$

Maka variabel acak X seperti ini dikatakan berdistribusi *Bernoulli*. Berikut ini akan dicari *mean* dan variansi dari distribusi *Bernoulli*.

Mean distribusi *Bernoulli* dilambangkan dengan μ yaitu :

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x\, f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x p^x (1-p)^{1-x} \end{aligned}$$

$$\mu = (0)(1-p) + (1)(p)$$

$$\mu = p \tag{2.1}$$

dan variansi dari X dilambangkan dengan σ^2 yaitu :

$$\sigma^2 = var(X)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} (x-p)^2 p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= p^2(1-p) + (1-p)^2 p$$

$$\sigma^2 = p(1-p). \tag{2.2}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa distribusi *Bernoulli* memiliki $\mu = p$ dan $\sigma^2 = p(1-p)$. Distribusi *Bernoulli* dinotasikan dengan $Be(p)$, dengan konstanta p sebagai parameter dari distribusi *Bernoulli*.

2.1.2 Distribusi Binomial

Variabel acak X dikatakan mempunyai distribusi binomial apabila p.d.f $f(x)$ dari variabel acaknya adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad , x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$= 0 \qquad , \text{yang lainnya}.$$

Untuk mencari *mean* dan variansi dari distribusi binomial akan dicari dahulu m.g.f dari distribusi tersebut yang dilambangkan dengan $M(t)$.

$$M(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x}$$

$$M(t) = [(1-p) + pe^t]^n , \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Akan dicari turunan pertama dari persamaan (2.3) :

$$M'(t) = n[(1-p) + pe^t]^{n-1}(pe^t)$$
$$= npe^t[(1-p) + pe^t]^{n-1}$$

Mean didapatkan dari turunan pertama m.g.f. saat $t = 0$.

$$\mu = M'(0)$$
$$\mu = np[(1-p) + p]^{n-1}$$
$$\mu = np \tag{2.4}$$

Selanjutnya akan dicari turunan kedua dari persamaan (2.3) :

$$M"(t) = npe^t[(1-p) + pe^t]^{n-1} + npe^t(n-1)[(1-p) + pe^t]^{n-2}(pe^t)$$
$$M"(t) = n[(1-p) + pe^t]^{n-1}(pe^t) + n(n-1)[(1-p) + pe^t]^{n-2}(pe^t)^2$$

Sekarang akan dicari variansi dari distribusi binomial. Variansi didapatkan dengan cara sebagai berikut :

$$\sigma^2 = M"(0) - (np)^2$$
$$= np[(1-p) + p]^{n-1} + np^2(n-1)[(1-p) + p]^{n-2} - (np)^2$$
$$= np + np^2(n-1) - (np)^2$$
$$= np - np^2$$
$$\sigma^2 = np(1-p) \tag{2.5}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa distribusi binomial memiliki $\mu = np$ dan $\sigma^2 = np(1-p)$. Distribusi binomial dinotasikan sebagai $b(n,p)$, dengan konstanta n dan p adalah parameter dari distribusi binomial.

2.1.3 Distribusi Multinomial

Distribusi binomial diperumum ke distribusi multinomial. Misal percobaan acak diulang sebanyak n kali dan saling independen. Pada setiap pengulangan, percobaan berakhir dalam salah 1 dari k cara yang *mutually exclusive* dan *exhaustive*, sebut saja $C_1, C_2, \dots, C_k$. *Mutually exclusive* dan *exhaustive* di sini maksudnya $C_i \cap C_j = \emptyset,\ i \neq j, di\ mana\ i,j = 1, 2, \dots, k$ dan $P(C_1) + P(C_2) + \cdots + P(C_k) = 1$. Misal p_i adalah probabilitas bahwa hasil yang keluar adalah anggota dari C_i dan misal p_i tetap selama n pengulangan yang independen,

$i = 1,2, \dots, k$. Didefinisikan variable acak X_i adalah banyak hasil yang keluar merupakan elemen dari C_i , $i = 1,2, \dots, k - 1$. Selanjutnya, misal $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ adalah bilangan bulat non-negatif, sedemikian sehingga $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} \leq n$. Maka probabilitas terdapat x_1 elemen di C_1, x_2 elemen di $C_2, \dots, x_{k-1}$ elemen di C_{k-1}, dan $n - (\, x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1})$ elemen di C_k adalah

$$\frac{n!}{x_1! \dots x_{k-1}!\, x_k!} p_1^{x_1} \dots p_{k-1}^{x_{k-1}} p_k^{x_k}$$

di mana x_k adalah singkatan untuk $n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1})$. Ini adalah p.d.f. multinomial dari $k - 1$ variabel acak diskrit $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$.

M.g.f. dari distribusi multinomial adalah :

$$M(t_1, \dots, t_{k-1}) = (p_1 e^{t_1} + \cdots + p_{k-1} e^{t_{k-1}} + p_k)^n \tag{2.6}$$

untuk setiap nilai riil $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$. Jadi setiap p.d.f. marginal 1 variabel adalah binomial.

2.1.4. Distribusi *Chi-Square*

Misal $X_1, X_2, \dots, X_n$ menyatakan sampel acak berukuran n dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$, maka variabel acak

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \tag{2.7}$$

Memiliki distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas n.

Bukti :

Diketahui bahwa $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel acak dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$. Karena diketahui $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, distribusi $N(\mu, \sigma^2)$,$i = 1, 2, \dots, n$. maka

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)\,, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Sehingga bisa didapatkan variabel random Z_i yaitu :

$$Z_i = \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{(1)}\,, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Selanjutnya akan didefinisikan variabel acak Y yaitu :

$$Y = \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2 = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \,.$$

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ saling bebas karena $X_1, X_2, \dots, X_n$ saling bebas.

Selanjutnya perhatikan bentuk berikut ini :

$$\begin{aligned} E(e^{tY}) &= E\left[e^{t(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n)}\right] \\ &= E(e^{tZ_1+tZ_2+\cdots+tZ_n}) \\ &= E(e^{tZ_1}e^{tZ_2} \dots e^{tZ_n}) \\ &= E(e^{tZ_1})E(e^{tZ_2}) \dots E(e^{tZ_n}) \\ &= (1-2t)^{-1/2}(1-2t)^{-1/2} \dots (1-2t)^{-1/2} \\ &= (1-2t)^{-n/2} \end{aligned}$$

Terlihat dari hasil di atas merupakan m.g.f. dari distribusi *Chi-Square* berderajat bebas n.

Jadi, terbukti bahwa Y berdistribusi $\chi^2_{(n)}$.

2.2 Uji *Chi-Square* [8], [9]

Uji *Chi-Square* atau *Goodness of fit* adalah pengujian statistik yang digunakan untuk membandingkan data observasi dengan data yang diharapkan dapat diperoleh dengan mengasumsikan hipotesis tertentu. Uji ini memiliki hipotesis sebagai berikut :

H_0 : Frekuensi setiap kategori memenuhi suatu nilai/perbandingan

H_1 : Ada kategori yang tidak memenuhi nilai/perbandingan tersebut

Statistik uji :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \tag{2.8}$$

di mana k : banyaknya kategori yang dilihat

o_i : frekuensi observasi untuk kategori ke-i

e_i : frekuensi harapan untuk kategori ke-i

Statistik uji tersebut memiliki pendekatan distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas $k-1$.

2.3 Dalil Limit Pusat Multivariat [3], [4]

Misalkan $\boldsymbol{X}_{(1)}, \boldsymbol{X}_{(2)}, \dots, \boldsymbol{X}_{(n)}$ merupakan vektor acak yang berdistribusi sama dari suatu populasi dan saling independen dengan vektor *mean* $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks kovariansi Σ yang definit positif. Misal :

$$\boldsymbol{Y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{X}_{(i)} - \boldsymbol{\mu} \right)$$

di mana :

$$\boldsymbol{X}_{(\boldsymbol{i})} = \begin{bmatrix} X_{1(i)} \\ \vdots \\ X_{k(i)} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n$$

Jumlahan dari vektor-vektor tersebut adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_{(\boldsymbol{i})} = \begin{bmatrix} X_{1(1)} \\ \vdots \\ X_{k(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{1(2)} \\ \vdots \\ X_{k(2)} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} X_{1(n)} \\ \vdots \\ X_{k(n)} \end{bmatrix}$$

Maka dalil limit pusat multivariat ini menyatakan bahwa saat $n \to \infty$, $\boldsymbol{Y}_n$ konvergen dalam distribusi menuju distribusi Multivariat Normal $(\boldsymbol{0}, \Sigma)$ atau dapat ditulis :

$$\boldsymbol{Y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{X}_{(i)} - \boldsymbol{\mu} \right) \xrightarrow{n \to \infty} Multivariat\ Normal\ (\boldsymbol{0}, \Sigma) \qquad (2.9)$$

2.4 Matriks Kovariansi

Misal $\boldsymbol{X}$ adalah vektor acak, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ dengan vektor *mean* $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X})$

maka matriks kovariansi dari $\boldsymbol{X}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\Sigma_X = E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])^T]$$

Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah vektor berukuran $n \times 1$ dan A adalah matriks konstan berukuran $p \times n$ maka matriks kovariansi di atas memiliki sifat yaitu :

$$\Sigma_{\boldsymbol{A}X} = A \Sigma_X A^T \qquad (2.10)$$

Bukti :

Berdasarkan definisi

$$\Sigma_X = E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])^T]$$

Dengan menggunakan sifat $E[\boldsymbol{X}]^T = E[\boldsymbol{X}^T]$ (karena ekspektasi dari vektor adalah ekspektasi dari setiap komponen) maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
\Sigma_X &= E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])^T] \\
&= E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{X}^T - E[\boldsymbol{X}]^T)] \\
&= E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T - E[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{X}^T - \boldsymbol{X}E[\boldsymbol{X}]^T + E[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}]^T] \\
&= E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T] - E[E[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{X}^T] - E[\boldsymbol{X}E[\boldsymbol{X}]^T] + E[E[\boldsymbol{X}]E[X]^T] \\
&= E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T] - E[X]E[\boldsymbol{X}^T] - E[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}]^T + E[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}]^T \\
&= E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T] - E[\boldsymbol{X}]E[X]^T - E[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}]^T + E[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}]^T \\
&= E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T] - E[\boldsymbol{X}]E[X]^T
\end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut diperoleh :

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T] - E[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}]^T$$

Dengan menggunakan rumus di atas untuk $A\boldsymbol{X}$ di mana A adalah matriks berukuran $p \times n$ dan merupakan matriks konstan maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{A}\mathbf{X}} &= E[A\boldsymbol{X}(A\boldsymbol{X})^T] - E[A\boldsymbol{X}]E[A\boldsymbol{X}]^T \\
&= E[A\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T A^T)] - E[A\boldsymbol{X}]E[(A\boldsymbol{X})^T] \\
&= E[A\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T A^T)] - E[A\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}^T A^T] \\
&= AE[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T]A^T - AE[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}^T]A^T \\
&= A(E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T] - E[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{X}^T])A^T \\
&= A\Sigma_{\mathbf{X}}A^T
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\Sigma_{AX} = A\Sigma_X A^T$ untuk $\boldsymbol{X}$ adalah vektor berukuran $n \times 1$ dan A adalah matriks konstan berukuran $p \times n$.

2.5 Diagonalisasi Ortogonal Matriks

Suatu matriks A simetris berukuran $n \times n$ dikatakan dapat didiagonalkan secara ortogonal jika ada suatu matriks P di mana $P^{-1} = P^T$ sedemikian sehingga

$P^{-1}AP = P^TAP = D$,di mana D adalah matriks diagonal. Matriks P dikatakan mendiagonalkan A secara ortogonal.

Kolom-kolom matriks P berisi vektor-vektor basis ortonormal untuk setiap ruang-eigen dari matriks A. Sedangkan elemen diagonal matriks D berisi nilai-eigen yang bersesuaian dari matriks A.

2.6 Matriks Diagonal Blok

Sebuah matriks A berukuran $n \times n$ disebut matriks diagonal blok jika memiliki bentuk sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

A_i adalah submatriks berukuran $n_i \times n_i$, $i = 1, \dots, k$, di mana $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Matriks diagonal blok ini dapat dinyatakan sebagai $diag(A_1, A_2, \dots, A_k)$ yaitu menyatakan matriks diagonal blok dengan submatriks $A_1, A_2, \dots, A_k$ di sepanjang diagonal dan bernilai nol untuk lainnya. Matriks A tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk *direct sum* dari $A_1, A_2, \dots, A_k$ dengan operator $\oplus$, yaitu :

$$diag(A_1, A_2, \dots, A_k) = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k.$$

Sehingga, secara notasi, matriks A dapat ditulis sebagai berikut :

$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ atau secara singkat,

$$\oplus \sum_{i=1}^{k} A_i \ , i = 1, \dots, k \ .$$

Karena dalam tugas akhir ini akan digunakan submatriks A_i berukuran 2×2 untuk setiap $i = 1, \dots, k$ di mana $A_1 = A_2 = \cdots = A_k$ maka dapat dibuktikan bahwa matriks diagonal blok tersebut memiliki sifat yaitu :

$$\det[\oplus\, k(A_1)] = (\det A_1)^k \qquad (2.11)$$

Bukti :

Akan dibuktikan $\det[\oplus\, k(A_1)] = (\det A_1)^k$ menggunakan induksi matematik.

Pertama-tama akan ditunjukkan benar untuk $k = 2$.

Misalkan suatu matriks diagonal blok A merupakan $\oplus\, 2(A_1)$ dengan bentuk sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

di mana submatriks A_1 didefinisikan sebagai berikut :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks A dapat ditulis :

$$A = \oplus\, 2(A_1) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari determinan dari matriks A.

$$\begin{aligned}
\det[\oplus\, 2(A_1)] &= det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\
&= a_1 \left(det \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right) - a_2 \left(det \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right) \\
&= a_1 a_4 \left(det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right) - a_2 a_3 \left(det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right) \\
&= (a_1 a_4 - a_2 a_3) det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\
&= det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\
&= detA_1 detA_1
\end{aligned}$$

$$\det[\oplus\, 2(A_1)] = (detA_1)^2$$

Terbukti benar untuk $k = 2$

Langkah selanjutnya adalah anggap benar untuk $k = m$.

Misalkan suatu matriks diagonal blok A merupakan $\oplus\, m(A_1)$ dengan bentuk sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_1 \end{bmatrix}$$

Maka akan dianggap benar bahwa :

$$\det[\oplus\, m(A_1)] = (detA_1)^m$$

Berikutnya akan dibuktikan benar untuk $k = m + 1$

Misalkan suatu matriks diagonal blok A merupakan $\oplus\,(m+1)(A_1)$ dengan bentuk sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditinjau determinan dari matriks A tersebut.

$$det[\oplus\,(m+1)(A_1)] = det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$= a_1 \left(det \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right)$$

$$- a_2 \left(det \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= a_1 a_4 \left(det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right)$$

$$- a_2 a_3 \left(det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (a_1 a_4 - a_2 a_3)\, det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$= det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} (detA_1)^m$$

$det[\bigoplus (m+1)(A_1)] = (detA_1)^{m+1}$

Terbukti benar untuk $k = m + 1$.

Sehingga berdasarkan pembuktian dengan induksi matematika di atas dapat disimpulkan bahwa

$$det[\bigoplus k(A_1)] = (detA_1)^k \,.$$

BAB 3
UJI SERIAL UNTUK BARISAN BILANGAN BINER

Pada bab 3 ini, akan dibahas mengenai bagaimana mendapatkan statistik uji untuk Uji serial serta bagaimana pengujian dalam Uji Serial untuk barisan bilangan biner.

3.1 Penentuan Distribusi dari Frekuensi Pola m-bit dalam Blok-Blok *Overlapping* pada Barisan Bilangan Biner

Pada subbab ini akan digunakan notasi-notasi sebagai berikut :

ε : barisan bilangan biner yang akan diuji keacakannya

ε' : *circular string* / barisan bilangan biner yang diperbesar

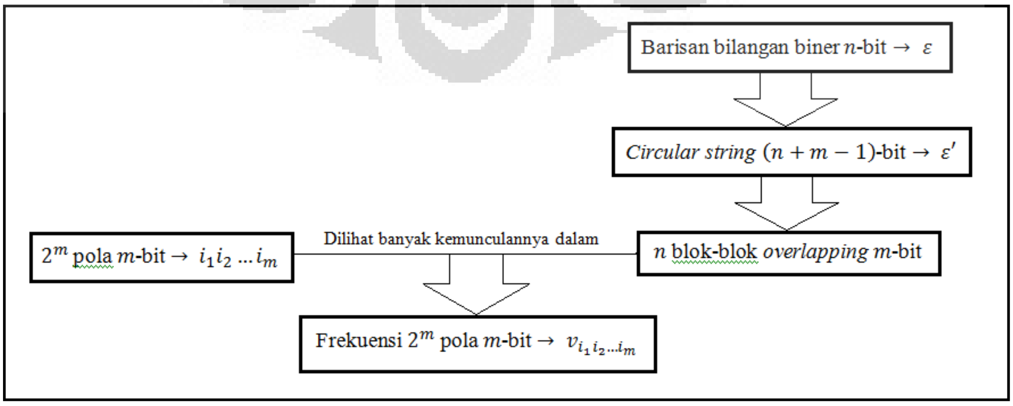
n : panjang bit barisan bilangan biner ε

m : panjang bit tiap blok *overlapping* yang dibentuk dari ε

$i_1 \dots i_m$: pola berukuran m-bit

$v_{i_1 \dots i_m}$: frekuensi pola $i_1 \dots i_m$ dalam n-blok *overlapping*

Berikut ini akan diperlihatkan terlebih dahulu bagan untuk mempermudah pemahaman mengenai bagaimana cara mendapatkan frekuensi pola m-bit dalam blok-blok *overlapping* jika diketahui suatu barisan bilangan biner yang akan diuji keacakannya.



Gambar 3.1 Bagan Penentuan Frekuensi Pola m-bit

Misalkan terdapat suatu barisan bilangan biner berukuran n yang akan diuji keacakannya, dalam kasus ini dilambangkan dengan $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, di mana ε_i bernilai 0 atau 1, $i = 1, 2, \dots, n$. Dari ε ini akan dilihat frekuensi pola. Berikut ini akan dijelaskan bagaimana menentukan frekuensi pola tersebut. Untuk melihat frekuensi pola dari ε perlu ditentukan terlebih dahulu ukuran bit blok *overlapping* yang ingin digunakan. Ukuran blok *overlapping* ini dilambangkan dengan m. Maksud dari *overlapping* di sini adalah pembentukan blok saling *overlap* satu sama lain (mekanisme pembentukan blok *overlapping* akan diperlihatkan dalam ilustrasi). Setelah ukuran blok *overlapping* ditentukan selanjutnya ukuran pola menyesuaikan. Pola yang dimaksud di sini adalah pola berukuran m-bit dengan bentuk $(i_1 i_2 \dots i_m)$ di mana kemungkinan nilai dari masing-masing i_j adalah 0 atau 1, dengan $j = 1, 2, \dots, m$. Berdasarkan hal ini, jika akan digunakan pola berukuran m-bit maka akan terdapat 2^m pola m-bit yang mungkin terbentuk.

Setelah 2^m pola ditentukan, langkah selanjutnya adalah membentuk *circular string* dari ε. Tujuan pembentukan *circular string* ini agar jumlah blok *overlapping* yang terbentuk sama dengan n dan setiap ε_i digunakan sama banyaknya dalam keseluruhan blok *overlapping*. Cara membentuk *circular string* yaitu pada bagian ujung $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ ditambahkan (m-1)-bit pertama dari barisan awal yaitu $\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m-1}$. Sehingga *circular string* yang terbentuk berukuran $(n + m - 1)$-bit yang dilambangkan dengan ε', di mana $\varepsilon' = \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_n\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{m-1}$.

Dari *circular string* yang telah dibentuk akan dibagi menjadi n-blok *overlapping* berukuran m-bit. Setelah n-blok *overlapping* terbentuk, akan dilihat banyaknya frekuensi masing-masing dari 2^m pola m-bit yang muncul pada n-blok *overlapping* tersebut. Frekuensi ini dilambangkan dengan $v_{i_1 \dots i_m}$ yaitu frekuensi untuk pola $i_1 \dots i_m$ yang bersesuaian. Berdasarkan frekuensi pola m-bit tersebut, pada akhirnya akan dapat ditentukan apakah suatu barisan bilangan biner ε merupakan barisan yang acak atau tidak.

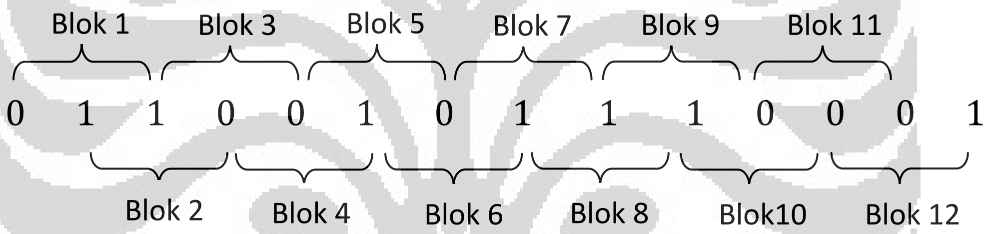
Ilustrasi

Misalkan barisan bilangan biner yang akan ditinjau adalah $\varepsilon = 011001011100$, dengan panjang barisan yaitu $n = 12$. Diinginkan ukuran dari pola yaitu $m = 3$ maka terdapat $2^m = 2^3 = 8$ pola 3-bit yang mungkin yaitu : $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$.

Selanjutnya akan dibentuk *circular string* yaitu dengan menambahkan $m - 1 = 2$ bit pertama dari ε ke bagian akhir barisan ε sehingga membentuk ε'. 2 bit pertama tersebut adalah 01 sehingga *circular string* yang terbentuk adalah :

$$\varepsilon' = 01100101110001$$

Setelah ε' dibentuk maka akan ditentukan 12 blok *overlapping* dengan cara sebagai berikut :



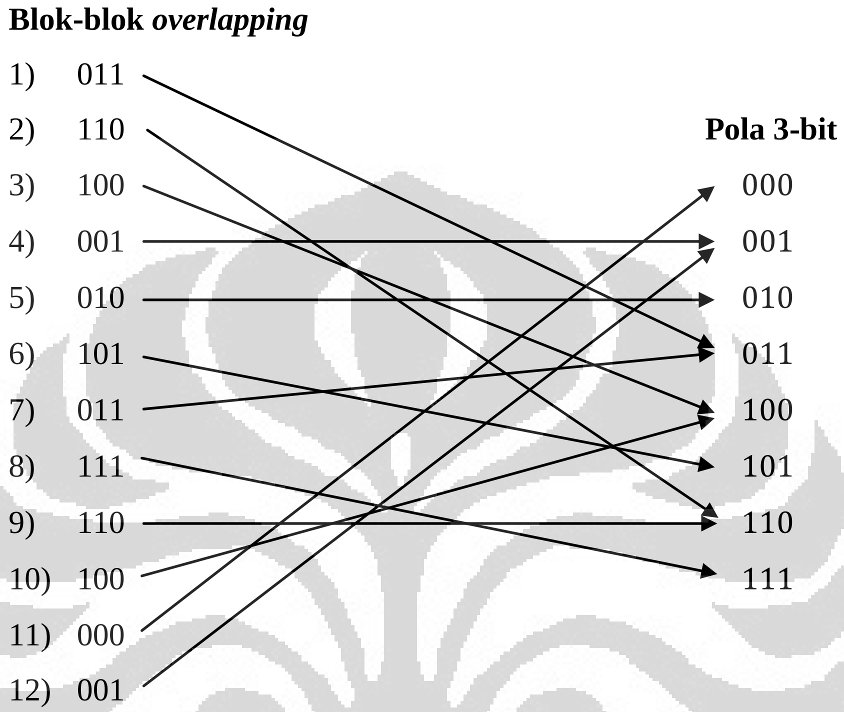
Sehingga 12 blok *overlapping* yang dibentuk adalah :

Tabel 3.1 Hasil 12 Blok *Overlapping* 3-bit

Blok ke-	$i_1i_2i_3$	Blok ke-	$i_1i_2i_3$	Blok ke-	$i_1i_2i_3$
1	011	5	010	9	110
2	110	6	101	10	100
3	100	7	011	11	000
4	001	8	111	12	001

Berikutnya akan dilihat $v_{i_1 i_2 i_3}$, yaitu frekuensi dari suatu pola m-bit $i_1 i_2 i_3$ dalam 12-blok *overlapping* yang dibentuk dari *circular string*. Dari 12-blok *overlapping* berukuran 3-bit yang telah ditentukan, dilihat berapakah jumlah masing-masing dari 8 pola 3-bit yang muncul.

Berdasarkan contoh sebelumnya akan ditentukan frekuensi dari setiap pola. Berikut ilustrasinya :



Berdasarkan pencocokkan di atas dapat dilihat frekuensi dari masing-masing pola 3-bit dan dapat ditulis sebagai berikut :

1) $v_{000} = 1$	3) $v_{010} = 1$	5) $v_{100} = 2$	7) $v_{110} = 2$
2) $v_{001} = 2$	4) $v_{011} = 2$	6) $v_{101} = 1$	8) $v_{111} = 1$

Setelah dijabarkan bagaimana cara menentukan frekuensi dari masing-masing pola m-bit, berikutnya akan ditinjau distribusi frekuensi pola $(i_1 i_2 \dots i_m)$ dalam circular string $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1})$ yang dinyatakan dengan $v_{i_1 \dots i_m}$.

3.1.1 Distribusi Bersama dari $2^m - 1$ Frekuensi Pola m-bit

Akan dibuktikan bahwa distribusi bersama dari $v_{i_1 \dots i_m}$ untuk $2^m - 1$ pola $i_1 \dots i_m$ ialah multinomial $\left(n, p_1, p_2, \dots, p_{2^m-1}\right)$

Bukti :

Berikut akan dilihat distribusi bersama dari frekuensi $2^m - 1$ pola m-bit. Pada setiap blok *overlapping* m-bit, nilai dari blok *overlapping* tersebut akan sesuai dengan salah satu dari pola m-bit yang *mutually exclusive* dan *exhaustive*. Misal p_k adalah probabilitas pola ke-k yang muncul dalam setiap blok *overlapping* m-bit. Dimisalkan variabel acak v_k adalah frekuensi pola $i_1 i_2 \ldots i_m$ ke-k ,di mana $k = 1, 2, \ldots, 2^m - 1$. Selanjutnya, misal $v_1, v_2, \ldots, v_{2^m-1}$ sedemikian sehingga $v_1 + v_2 + \cdots + v_{2^m-1} + v_{2^m} = n$, di mana v_{2^m} adalah singkatan untuk $n - (v_1 + v_2 + \cdots + v_{2^m-1})$.

Dengan demikian, banyak cara memilih $v_1, v_2, \ldots, v_{2^m-1}$ dalam n-blok *overlapping* adalah sebagai berikut :

$$\binom{n}{v_1}\binom{n-v_1}{v_2}\ldots\binom{n-v_1-\cdots-v_{2^m-2}}{v_{2^m-1}} = \frac{n!}{v_1!\ldots v_{2^m-1}!\,v_{2^m}!} \; .$$

Dan bahwa probabilitas dari banyak cara memilih tersebut adalah :

$$(p_1)^{v_1} \ldots (p_2)^{v_{2^m-1}} (p_{2^m})^{v_{2^m}} \quad .$$

Berdasarkan penjabaran tersebut, probabilitas $v_1, v_2, \ldots, v_{2^m-1}$ dalam n-blok *overlapping* adalah sebagai berikut :

$$\frac{n!}{v_1!\ldots v_{2^m-1}!\,v_{2^m}!}(p_1)^{v_1} \ldots (p_2)^{v_{2^m-1}} (p_{2^m})^{v_{2^m}} \; .$$

Terlihat bahwa fungsi di atas adalah p.d.f. multinomial dari $2^m - 1$ variabel acak diskrit $v_1, v_2, \ldots, v_{2^m-1}$. Sehingga terbukti bahwa distribusi bersama dari $v_{i_1 \ldots i_m}$ untuk $2^m - 1$ pola $i_1 \ldots i_m$ ialah multinomial $(n, p_1, p_2, \ldots, p_{2^m-1})$

3.1.2 Distribusi untuk Frekuensi Sebuah Pola m-bit

Pada subbab ini akan dilihat distribusi marginal dari frekuensi pola-pola, $v_{i_1 \ldots i_m}$ di atas yaitu untuk suatu pola $i_1 \ldots i_m$. Dengan perkataan lain, akan dilihat distribusi dari suatu v_k yaitu frekuensi pola ke-k, dengan $k = 1, 2, \ldots, 2^m - 1$.

Berdasarkan subbab 3.1.1 telah didapatkan bahwa distribusi bersama dari $v_{i_1 \ldots i_m}$ untuk $2^m - 1$ pola m-bit adalah multinomial $(n, p_1, \ldots, p_{2^m-1})$.

Telah didapatkan juga pada bab 2 pada persamaan (2.6) bentuk m.g.f. dari suatu distribusi multinomial, sehingga dalam kasus ini m.g.f. untuk distribusi multinomial $(n, p_1, \dots, p_{2^m-1})$ adalah sebagai berikut :

$$M(t_1, t_2, \dots, t_{2^m-1}) = (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + \cdots + p_{2^m})^n$$

Selanjutnya, akan ditinjau m.g.f. marginal untuk 1 variabel acak v_1, yaitu :

$$\begin{aligned} M_{v_1}(t) &= M_{v_1, v_2, \dots, v_{2^m-1}}(t, 0, \dots., 0) \\ &= (p_1 e^t + p_2 + \cdots + p_{2^m})^n \\ &= [p_1 e^t + (1 - p_1)]^n \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil dari m.g.f. marginal di atas jika dibandingkan dengan m.g.f. binomial pada persamaan (2.3) terlihat bahwa variabel acak v_1 berdistribusi binomial (n, p_1)

Sedangkan untuk variabel acak v_2, m.g.f. marginalnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} M_{v_2}(t) &= M_{v_1, v_2, \dots, v_{2^m-1}}(0, t, \dots., 0) \\ &= (p_1 + p_2 e^t + \cdots + p_{2^m})^n \\ &= [p_2 e^t + (1 - p_2)]^n \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil dari m.g.f. marginal di atas jika dibandingkan dengan m.g.f. binomial pada persamaan (2.3) terlihat bahwa variabel acak v_2 berdistribusi binomial (n, p_2)

Sehingga, jika diperumum untuk suatu variabel acak v_k, maka m.g.f. marginalnya yaitu :

$$\begin{aligned} M_{v_k}(t) &= (p_1 + \cdots + p_{k-1} + p_k e^t + p_{k+1} + \cdots + p_{2^m})^n \\ &= [p_k e^t + (1 - p_k)]^n \end{aligned}$$

Jika dibandingkan dengan m.g.f. binomial pada persamaan (2.3) terlihat bahwa hasil akhir tersebut merupakan bentuk m.g.f. $binomial(n, p_k)$ maka dapat disimpulkan v_k berdistribusi binomial (n, p_k) untuk suatu pola $i_1 \dots i_m$ ke-k di mana $k = 1, 2, \dots, 2^m - 1$.

3.2 Pengujian Keacakan Barisan Bilangan Biner pada Uji Serial

Uji Serial merupakan uji keacakan yang memperhatikan frekuensi 2^m pola m-bit dalam n-blok *overlapping* berukuran m-bit yang dibentuk dari barisan bilangan biner berukuran n. Tujuan uji ini adalah menentukan apakah banyak terjadinya pola m-bit tersebut kira-kira sama seperti yang diharapkan untuk suatu barisan yang acak. Sehingga, berdasarkan tujuan ini maka hipotesis dari Uji Serial adalah :

H_0 : Barisan bilangan biner ε adalah barisan yang acak

H_1 : Tidak demikian

Fokus Uji Serial ini adalah yang diharapkan barisan bilangan biner tersebut acak, dalam kasus ini diinginkan frekuensi semua pola m-bit sama. Berdasarkan hal tersebut, karena terdapat 2^m pola berukuran m-bit yang mungkin dan diharapkan pola tersebut mempunyai kemungkinan muncul yang sama di setiap blok *overlapping* maka probabilitas tiap pola muncul dalam blok *overlapping* sebesar $1/2^m$. Sehingga, hipotesis di atas disesuaikan menjadi :

H_0 : P(setiap pola m-bit) $= 1/2^m$

H_1 : Tidak demikian

Sekarang akan dilihat, berdasarkan penjabaran di subbab 3.1.1 telah didapatkan bahwa distribusi bersama dari $v_{i_1 \dots i_m}$ untuk $2^m - 1$ pola $(i_1 i_2 \dots i_m)$ ialah multinomial $(n, p_1, p_2, \dots, p_{2^m - 1})$. Di bawah H_0 yang telah disesuaikan tersebut maka distribusi bersama dari $v_{i_1 \dots i_m}$ menjadi multinomial $\left(n, \frac{1}{2^m}, \dots, \frac{1}{2^m}\right)$. Selain itu, berdasarkan penjabaran di subbab 3.1.2 didapatkan bahwa untuk suatu pola $i_1 i_2 \dots i_m$ ke-k di mana $k = 1, 2, \dots, 2^m - 1$, v_k berdistribusi $binomial\ (n, p_k)$. Sehingga di bawah H_0 yang telah disesuaikan tersebut, distribusi $v_{i_1 \dots i_m}$ untuk suatu pola $i_1 \dots i_m$ adalah $binomial\left(n, \frac{1}{2^m}\right)$.

Berdasarkan bab 2 pada persamaan (2.4) dan (2.5) telah didapatkan bahwa untuk suatu variabel acak yang berdistribusi binomial(n, p) *mean* dan variansinya adalah $\mu = np$ dan $\sigma^2 = np(1-p)$. Sehingga di bawah H_0 yang telah disesuaikan tersebut didapatkan $E\left[v_{i_1\ldots i_m}\right]=\frac{n}{2^m}$ dan $var\left[v_{i_1\ldots i_m}\right]=\frac{n}{2^m}\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$.

Setelah distribusi dari frekuensi pola m-bit didapatkan, selanjutnya akan dicari bentuk statistik yang dapat digunakan untuk uji statistik pada Uji Serial. Statistik tersebut dibentuk berdasarkan frekuensi pola m-bit.

3.2.1 Bentuk Statistik Ψ_m^2

Sekarang akan dibentuk suatu statistik berdasarkan $v_{i_1\ldots i_m}$. Berdasarkan persamaaan (2.8) jika diinginkan uji *Goodness of fit* maka dapat dibentuk suatu statistik Ψ_m^2 dengan bentuk sebagai berikut :

$$\Psi_m^2=\sum_{i_1\ldots i_m}\frac{\left(v_{i_1\ldots i_m}-E\left[v_{i_1\ldots i_m}\right]\right)^2}{E\left[v_{i_1\ldots i_m}\right]}$$

$$=\sum_{i_1\ldots i_m}\frac{\left(v_{i_1\ldots i_m}-\frac{n}{2^m}\right)^2}{\frac{n}{2^m}}$$

$$\Psi_m^2=\frac{2^m}{n}\sum_{i_1\ldots i_m}\left(v_{i_1\ldots i_m}-\frac{n}{2^m}\right)^2 \qquad (3.1)$$

Karena frekuensi pola-pola $i_1\ldots i_m$ dihitung berdasarkan blok-blok *overlapping* yang tidak saling independen maka Ψ_m^2 tidak dapat disimpulkan memiliki pendekatan distribusi *chi-square* kecuali untuk $m=1$. Sehingga nanti akan ditinjau kembali modifikasi dari bentuk statistik Ψ_m^2 dan dicari statistik yang distribusinya mendekati suatu distribusi tertentu.

Dalam memodifikasi bentuk statistik Ψ_m^2 perlu didefinisikan vektor **Z** yaitu vektor berukuran $2^m\times 1$ yang dibentuk oleh 2^m buah $z_{i_1\ldots i_m}$, di mana

$$z_{i_1\ldots i_m}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(v_{i_1\ldots i_m}-\frac{n}{2^m}\right) \qquad (3.2)$$

Bentuk vektor ***Z*** ini akan digunakan dalam pembuktian pada subbab berikutnya namun terlebih dahulu akan dicari distribusinya pada subbab ini untuk mengetahui distribusi dari $z_{i_1\ldots i_m}$.

Akan dibuktikan **Z** mempunyai pendekatan distribusi *multivariat normal* $(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathrm{m}})$ di mana $\Sigma_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2^m} I_m - \frac{1}{2^{2m}} \boldsymbol{e_m}\boldsymbol{e_m}^T$ dengan I_m ialah matriks identitas $2^m \times 2^m$ dan $\boldsymbol{e_m}^T$ ialah $[1, 1, \dots, 1]$.

Pertama-tama akan dibuktikan bahwa $E\left[z_{i_1 \dots i_m}\right] = 0$ dan $var\left[z_{i_1 \dots i_m}\right] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}}$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
E\left[z_{i_1 \dots i_m}\right] &= E\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left(v_{i_1 \dots i_m} - \frac{n}{2^m}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\, E\left[v_{i_1 \dots i_m} - \frac{n}{2^m}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[E\left(v_{i_1 \dots i_m}\right) - \frac{n}{2^m}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{2^m} - \frac{n}{2^m}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $E\left[z_{i_1 \dots i_m}\right] = 0$. Selanjutnya akan dicari nilai dari $var\left[z_{i_1 \dots i_m}\right]$.

$$
\begin{aligned}
var\left[z_{i_1 \dots i_m}\right] &= E\left({z_{i_1 \dots i_m}}^2\right) - \left[E\left(z_{i_1 \dots i_m}\right)\right]^2 \\
&= E\left({z_{i_1 \dots i_m}}^2\right) - 0 \\
&= E\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left(v_{i_1 \dots i_m} - \frac{n}{2^m}\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n} E\left[\left(v_{i_1 \dots i_m} - \frac{n}{2^m}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa bentuk $E\left[\left(v_{i_1 \dots i_m} - \frac{n}{2^m}\right)^2\right]$ merupakan variansi dari $v_{i_1 \dots i_m}$ yang sebelumnya telah didapatkan nilainya. Sehingga,

$$
\begin{aligned}
var\left[z_{i_1 \dots i_m}\right] &= \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2^m}\right)\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \\
&= \frac{1}{2^m}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \\
&= \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}}
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $var\left[z_{i_1 \dots i_m}\right] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}}$.

Selanjutnya akan dicari nilai dari $cov(z_i, z_j)$ dengan $i \neq j$.

Bukti :

$$cov(z_i, z_j) = E(z_i z_j) - \mu_{z_i}\mu_{z_j}$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(v_i - \frac{n}{2^m}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(v_j - \frac{n}{2^m}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n} E\left[\left(v_i - \frac{n}{2^m}\right)\left(v_j - \frac{n}{2^m}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n} E\left(v_i v_j - \frac{n}{2^m} v_i - \frac{n}{2^m} v_j + \frac{n^2}{2^{2m}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left[E(v_i v_j) - \frac{n}{2^m} E(v_i) - \frac{n}{2^m} E(v_j) + \frac{n^2}{2^{2m}}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[E(v_i v_j) - \frac{n}{2^m}\left(\frac{n}{2^m}\right) - \frac{n}{2^m}\left(\frac{n}{2^m}\right) + \frac{n^2}{2^{2m}}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[E(v_i v_j) - \frac{n^2}{2^{2m}}\right]$$

Akan dicari terlebih dahulu $E(v_i v_j)$. Perhatikan bentuk m.g.f. bersama untuk 2^{m-1} frekuensi pola $i_1 \dots i_m$, yaitu :

$$M(t_1, t_2, \dots, t_{2^m-1}) = \left[\frac{1}{2^m}\left(e^{t_1} + e^{t_2} + \dots + e^{t_{2^m-1}}\right) + \frac{1}{2^m}\right]^n$$

m.g.f. marginal untuk 2 variabel acak adalah :

$$Mv_1v_2(t_1, t_2) = M(t_1, t_2, 0, \dots, 0)$$

$$= \left[\frac{1}{2^m}\left(e^{t_1} + e^{t_2}\right) + \frac{2^m - 3}{2^m} + \frac{1}{2^m}\right]^n$$

$$= \left[\frac{1}{2^m}\left(e^{t_1} + e^{t_2}\right) + \frac{2^m - 2}{2^m}\right]^n$$

Tahap selanjutnya adalah menurunkan Mv_1v_2 terhadap t_1

$$\frac{\partial Mv_1v_2}{\partial t_1} = n\left[\frac{1}{2^m}\left(e^{t_1} + e^{t_2}\right) + \frac{2^m - 2}{2^m}\right]^{n-1} \frac{1}{2^m} e^{t_1}$$

Lalu diturunkan lagi terhadap t_2

$$\frac{\partial^2 Mv_1v_2}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{n}{2^m} e^{t_1}\,(n-1)\,\left[\frac{1}{2^m}\left(e^{t_1} + e^{t_2}\right) + \frac{2^m - 2}{2^m}\right]^{n-2} \frac{1}{2^m} e^{t_2}$$

Berdasarkan hasil tersebut disubstitusi $t_1 = t_2 = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 M v_1 v_2}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1=t_2=0} = \frac{n(n-1)}{2^m}\frac{1}{2^m}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2^{2m}}$$

Sehingga, berdasarkan hasil akhir tersebut didapatkan :

$$E(v_i v_j) = \frac{n(n-1)}{2^{2m}} = \frac{n^2}{2^{2m}} - \frac{n}{2^{2m}}$$

Hasil ini disubstitusikan ke dalam $cov(z_i, z_j)$ yang sedang dicari sebelumnya.

$$cov(z_i, z_j) = \frac{1}{n}\left[E(v_i v_j) - \frac{n^2}{2^{2m}}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n^2}{2^{2m}} - \frac{n}{2^{2m}} - \frac{n^2}{2^{2m}}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(-\frac{n}{2^{2m}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2^{2m}}$$

Jadi, $cov(z_i, z_j) = -\frac{1}{2^{2m}}$

Berdasarkan penjabaran di atas didapatkan $var[z_{i_1 \dots i_m}] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}}$ dan $cov(z_i, z_j) = -\frac{1}{2^{2m}}$ sehingga dapat dibentuk matriks kovariansi dari **Z** yaitu :

$$\Sigma_\mathrm{m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}} & -\frac{1}{2^{2m}} & \cdots & -\frac{1}{2^{2m}} \\ -\frac{1}{2^{2m}} & \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}} & \cdots & -\frac{1}{2^{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2^{2m}} & -\frac{1}{2^{2m}} & \cdots & \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}} \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat pada matriks kovariansi Σ_m , elemen non-diagonal bernilai tidak nol sehingga dapat disimpulkan $z_{i_1 \dots i_m}$ tidak saling independen.

Selanjutnya akan ditunjukkan **Z** mempunyai pendekatan distribusi *multivariat normal* $(\mathbf{0}, \Sigma_\mathrm{m})$ dengan Σ_m sebagai matriks kovariansi dari **Z .**

Bukti :

Berdasarkan penjabaran sebelumnya diketahui bahwa frekuensi untuk suatu pola m-bit merupakan banyaknya blok-blok *overlapping* yang elemen-elemennya sama dengan pola m-bit tersebut. Sehingga frekuensi untuk suatu pola m-bit ke-k dapat dinyatakan sbb :

$$v_k = v_{k(1)} + v_{k(2)} + \cdots + v_{k(n)}\ , k = 1, 2, \dots, 2^m$$

di mana $v_{k(j)}$ akan bernilai 1 jika setiap elemen blok *overlapping* ke-j sama dengan elemen-elemen pada pola m-bit ke-k, dengan $j = 1, 2, \dots, n$, dan bernilai 0 jika berbeda.

Jika ditinjau untuk setiap blok *overlapping* dengan asumsi bahwa keadaan acak terpenuhi maka probabilitas suatu blok *overlapping* tersebut cocok dengan salah satu diantara 2^m pola m-bit adalah $1/2^m$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $v_{k(1)}$ berdistribusi bernoulli $(1/2^m)$, $v_{k(2)}$ berdistribusi bernoulli $(1/2^m)$, …, $v_{k(n)}$ berdistribusi bernoulli $(1/2^m)$

Berdasarkan penjabaran tersebut, vektor acak **Z** dapat ditulis sbb :

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2^m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(v_1 - \frac{n}{2^m}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\left(v_{2^m} - \frac{n}{2^m}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2^m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{n}{2^m} \\ \vdots \\ \frac{n}{2^m} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} v_{1(j)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} v_{2^m(j)} \end{bmatrix} - n\begin{bmatrix} \frac{1}{2^m} \\ \vdots \\ \frac{1}{2^m} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix} v_{1(j)} \\ \vdots \\ v_{2^m(j)} \end{bmatrix} - n\begin{bmatrix} \frac{1}{2^m} \\ \vdots \\ \frac{1}{2^m} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} v_{1(j)} \\ \vdots \\ v_{2^m(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2^m} \\ \vdots \\ \frac{1}{2^m} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{v}_{(j)} - \boldsymbol{\mu})$$

Perhatikan bentuk akhir **Z** tersebut berdasarkan Dalil Limit Pusat Multivariat dapat disimpulkan bahwa :

$$\boldsymbol{Z} \xrightarrow{n\to\infty} Multivariat\ Normal\ (\boldsymbol{0}, \Sigma_{\mathrm{m}})$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks kovariansi **Z** dapat dinyatakan sebagai $\left(\frac{1}{2^m} I_m - \frac{1}{2^{2m}} \boldsymbol{e_m}\boldsymbol{e_m}^T\right)$ dengan I_m ialah matriks identitas $2^m \times 2^m$ dan $\boldsymbol{e_m}^T$ ialah $[1, 1, \dots, 1]$

Bukti :

Misalkan terdapat suatu matriks A di mana $A = \frac{1}{2^m} I_m - \frac{1}{2^{2m}} \boldsymbol{e_m}\boldsymbol{e_m}^T$ **.** Akan ditinjau bentuk dari matriks A.

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2^m} I_m - \frac{1}{2^{2m}} \boldsymbol{e_m}\boldsymbol{e_m}^T$$

$$= \frac{1}{2^m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2^{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2^m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2^m} \end{bmatrix} - \frac{1}{2^{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2^m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2^m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{2m}} & \frac{1}{2^{2m}} & \cdots & \frac{1}{2^{2m}} \\ \frac{1}{2^{2m}} & \frac{1}{2^{2m}} & \cdots & \frac{1}{2^{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^{2m}} & \frac{1}{2^{2m}} & \cdots & \frac{1}{2^{2m}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}} & -\frac{1}{2^{2m}} & \cdots & -\frac{1}{2^{2m}} \\ -\frac{1}{2^{2m}} & \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}} & \cdots & -\frac{1}{2^{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2^{2m}} & -\frac{1}{2^{2m}} & \cdots & \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}} \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa bentuk matriks A tersebut sama dengan bentuk matriks Σ_{m}. Sehingga berdasarkan penjabaran ini dapat disimpulkan bahwa dapat dinyatakan $\Sigma_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2^m} I_m - \frac{1}{2^{2m}} \boldsymbol{e_m}\boldsymbol{e_m}^T$.

Berdasarkan penjabaran di atas terbukti bahwa **Z** mempunyai pendekatan distribusi *multivariat normal* $(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathrm{m}})$ di mana $\Sigma_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2^m} I_m - \frac{1}{2^{2m}} \boldsymbol{e_m}\boldsymbol{e_m}^T$ dengan I_m ialah matriks identitas $2^m \times 2^m$ dan $\boldsymbol{e_m}^T$ ialah $[1, 1, \dots, 1]$.

Karena telah didapatkan bahwa **Z** mempunyai pendekatan distribusi *multivariat normal* $(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathrm{m}})$ maka dapat disimpulkan $z_{i_1 \dots i_m} \xrightarrow{n \to \infty} N\left(0, \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}}\right)$ yang tidak saling independen.

Selanjutnya akan dilakukan modifikasi terhadap persamaan (3.1). Pertama-tama perhatikan terlebih dahulu berikut ini. Berdasarkan persamaan (3.2) dapat dibentuk sebagai berikut :

$$z_{i_1 \dots i_m} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(v_{i_1 \dots i_m} - \frac{n}{2^m}\right)$$

$$z_{i_1 \dots i_m}\sqrt{n} = v_{i_1 \dots i_m} - \frac{n}{2^m}$$

$$n\, z_{i_1 \dots i_m}^2 = \left(v_{i_1 \dots i_m} - \frac{n}{2^m}\right)^2 \tag{3.3}$$

Persamaan (3.3) disusbtitusikan ke persamaan (3.1) yaitu :

$$\Psi_{\mathrm{m}}^2 = \frac{2^m}{n} \sum_{i_1 \dots i_m} n \, z_{i_1 \dots i_m}^2$$

$$\Psi_{\mathrm{m}}^2 = 2^m \sum_{i_1 \dots i_m} z_{i_1 \dots i_m}^2 \qquad (3.4)$$

di mana $z_{i_1 \dots i_m} \xrightarrow{n \to \infty} N\left(0, \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{2m}}\right)$ yang tidak saling independen.

Jadi Ψ_m^2 merupakan suatu bentuk kuadratik tetapi tidak memiliki pendekatan distribusi *chi-square*.

3.2.2 Bentuk Statistik $\nabla\Psi_m^2$

Pada subbab sebelumnya terlihat bahwa Ψ_m^2 tidak mendekati distribusi *chi-square* sehingga pada subbab ini akan dibentuk suatu statistik lain yang pendekatan distribusinya bisa dicari namun tetap didasarkan pada statistik Ψ_m^2. Statistik yang dimaksud tersebut dilambangkan dengan $\nabla\Psi_m^2$ dan selanjutnya akan dicari distribusi dari $\nabla\Psi_m^2$.

Didefinisikan statistik $\nabla\Psi_m^2$ sebagai berikut :

$$\nabla\Psi_m^2 = \Psi_m^2 - \Psi_{m-1}^2$$

Ide dari pembentukan statistik ini adalah membandingkan frekuensi pola jika suatu barisan bilangan biner yang diuji dipecah menjadi blok *overlapping* berukuran m-bit dengan frekuensi pola jika barisan yang sama dipecah menjadi blok *overlapping* berukuran (m-1)-bit.

Pada subbab sebelumnya telah didapatkan persamaan (3.4) yaitu :

$$\Psi_{\mathrm{m}}^2 = 2^m \sum_{i_1 \dots i_m} z_{i_1 \dots i_m}^2$$

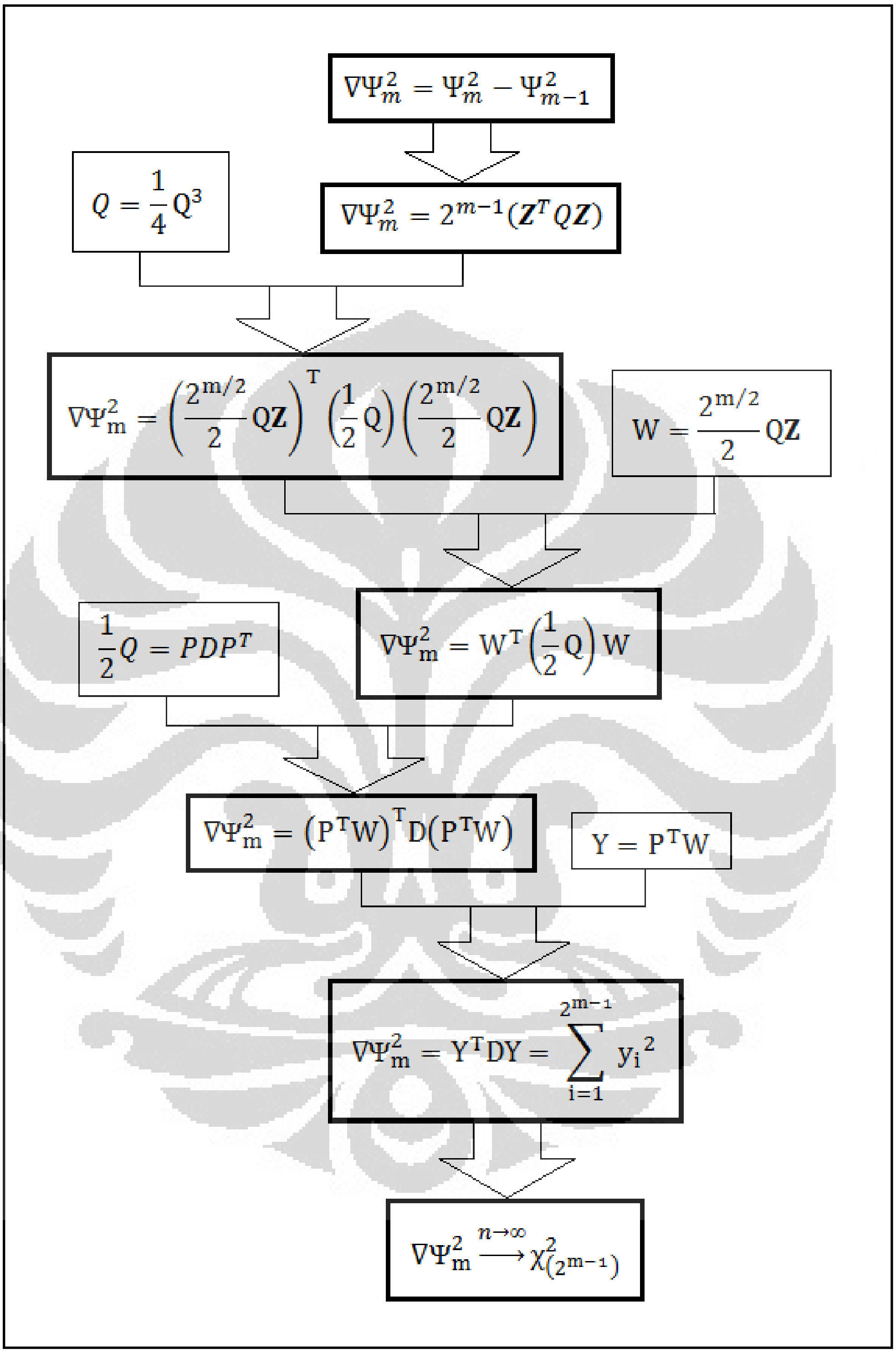
Sehingga bentuk $\nabla\Psi_m^2$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\nabla\Psi_m^2 = 2^m \sum_{i_1 \dots i_m} {z_{i_1 \dots i_m}}^2 - 2^{m-1} \sum_{i_1 \dots i_{m-1}} {z_{i_1 \dots i_{m-1}}}^2 \qquad (3.5)$$

Di bawah ini akan diberikan jabaran pembuktian bahwa :

$$\nabla\Psi_{\mathrm{m}}^2 \xrightarrow{n \to \infty} \chi_{(2^{\mathrm{m}-1})}^2 .$$

Pertama-tama akan diperlihatkan terlebih dahulu bagan untuk memperjelas bagaimana tahap-tahap pembuktian hingga dapat disimpulkan bahwa $\nabla\Psi_{\mathrm{m}}^2$ memiliki pendekatan distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas $2^{\mathrm{m}-1}$.



Gambar 3.2 Bagan Pembuktian Pendekatan Distribusi dari Statistik $\nabla\Psi_m^2$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\nabla\Psi_m^2$ pada persamaan (3.5) dapat ditulis sebagai :

$$\nabla\Psi_m^2 = 2^{m-1}(\boldsymbol{Z}^T Q\boldsymbol{Z}) \tag{3.6}$$

di mana **Z** = vektor acak $2^m \times 1$ dan Q = matriks diagonal blok ukuran $2^m \times 2^m$ yang dibentuk oleh 2^{m-1} blok $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Bukti :

Pembuktian ini akan menggunakan teknik induksi matematik.

Akan dilihat terlebih dahulu untuk $m = 2$

$$\nabla{\Psi_2}^2 = 2^2 \sum_{\mathrm{i_1 i_2}} {\mathrm{z_{i_1 i_2}}}^2 - 2\sum_{\mathrm{i_1}} {\mathrm{z_{i_1}}}^2 = 4({\mathrm{z_{00}}}^2 + {\mathrm{z_{01}}}^2 + {\mathrm{z_{10}}}^2 + {\mathrm{z_{11}}}^2) - 2({\mathrm{z_0}}^2 + {\mathrm{z_1}}^2)$$

z_0 pada bagian ini menyatakan jumlahan antara z_{00} dengan z_{01} , dan z_1 menyatakan jumlahan antara z_{10} dengan z_{11} , sehingga dapat dinyatakan :

$$\begin{aligned}
\nabla{\Psi_2}^2 &= 4({\mathrm{z_{00}}}^2 + {\mathrm{z_{01}}}^2 + {\mathrm{z_{10}}}^2 + {\mathrm{z_{11}}}^2) - 2[(\mathrm{z_{00}} + \mathrm{z_{01}})^2 + (\mathrm{z_{10}} + \mathrm{z_{11}})^2] \\
&= 4({\mathrm{z_{00}}}^2 + {\mathrm{z_{01}}}^2 + {\mathrm{z_{10}}}^2 + {\mathrm{z_{11}}}^2) \\
&\qquad - 2[{\mathrm{z_{00}}}^2 + {\mathrm{z_{01}}}^2 + {\mathrm{z_{10}}}^2 + {\mathrm{z_{11}}}^2 + 2\mathrm{z_{00}}\mathrm{z_{01}} + 2\mathrm{z_{10}}\mathrm{z_{11}}] \\
&= 2({\mathrm{z_{00}}}^2 + {\mathrm{z_{01}}}^2 + {\mathrm{z_{10}}}^2 + {\mathrm{z_{11}}}^2) - 4(\mathrm{z_{00}}\mathrm{z_{01}} + \mathrm{z_{10}}\mathrm{z_{11}}) \\
&= 2[({\mathrm{z_{00}}}^2 + {\mathrm{z_{01}}}^2 + {\mathrm{z_{10}}}^2 + {\mathrm{z_{11}}}^2) - 2(\mathrm{z_{00}}\mathrm{z_{01}} + \mathrm{z_{10}}\mathrm{z_{11}})] \\
&= 2[\mathrm{z_{00}} \quad \mathrm{z_{01}} \quad \mathrm{z_{10}} \quad \mathrm{z_{11}}]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{z_{00}} \\ \mathrm{z_{01}} \\ \mathrm{z_{10}} \\ \mathrm{z_{11}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\nabla{\Psi_2}^2 = 2(\mathrm{Z^T Q Z})$$

Jadi, $\nabla\Psi_m^2 = 2^m \sum_{i_1 \dots i_m} {z_{i_1 \dots i_m}}^2 - 2^{m-1} \sum_{i_1 \dots i_{m-1}} {z_{i_1 \dots i_{m-1}}}^2 = 2^{m-1}(\boldsymbol{Z}^T Q\boldsymbol{Z})$

terbukti benar untuk $m = 2$

Selanjutnya, anggap benar untuk $m = k$

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi_k^2 &= 2^k \sum_{i_1 \dots i_k} {z_{i_1 \dots i_k}}^2 - 2^{k-1} \sum_{i_1 \dots i_{k-1}} {z_{i_1 \dots i_{k-1}}}^2 \\
&= 2^{k-1}\left[{\boldsymbol{Z}^T}_{(1\times 2^k)} Q_{(2^k \times 2^k)} \boldsymbol{Z}_{(2^k \times 1)}\right]
\end{aligned}$$

Akan dibuktikan benar untuk $m = k + 1$

$$
\begin{aligned}
\nabla\Psi_{k+1}^2 &= 2^{k+1}\sum_{i_1\ldots i_{k+1}} {z_{i_1\ldots i_{k+1}}}^2 - 2^k \sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k}}^2 \\
&= 2^{k+1}\sum_{i_1\ldots i_k i_{k+1}} {z_{i_1\ldots i_k i_{k+1}}}^2 - 2^k \sum_{i_1\ldots i_k} \left(z_{i_1\ldots i_k 0} + z_{i_1\ldots i_k 1}\right)^2 \\
&= 2^{k+1}\left(\sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 0}}^2 + \sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 1}}^2\right) - 2^k \sum_{i_1\ldots i_k} \left(z_{i_1\ldots i_k 0} + z_{i_1\ldots i_k 1}\right)^2 \\
&= 2^{k+1}\left(\sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 0}}^2 + \sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 1}}^2\right) \\
&\qquad -2^k\left(\sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 0}}^2 + \sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 1}}^2 + 2\sum_{i_1\ldots i_k} z_{i_1\ldots i_k 0} z_{i_1\ldots i_k 1}\right) \\
&= (2^{k+1} - 2^k)\left(\sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 0}}^2 + \sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 1}}^2\right) - 2.2^k \sum_{i_1\ldots i_k} z_{i_1\ldots i_k 0} z_{i_1\ldots i_k 1} \\
&= 2^k\left(\sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 0}}^2 + \sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 1}}^2\right) - 2^{k+1} \sum_{i_1\ldots i_k} z_{i_1\ldots i_k 0} z_{i_1\ldots i_k 1} \\
&= 2^k\left[\left(\sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 0}}^2 + \sum_{i_1\ldots i_k} {z_{i_1\ldots i_k 1}}^2\right) - 2 \sum_{i_1\ldots i_k} z_{i_1\ldots i_k 0} z_{i_1\ldots i_k 1}\right] \\
&= 2^k \begin{bmatrix} z_{i_1\ldots i_{k+1}} & \cdots & z_{i_1\ldots i_{k+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{i_1\ldots i_{k+1}} \\ \vdots \\ z_{i_1\ldots i_{k+1}} \end{bmatrix} \\
&= 2^k\left[\boldsymbol{Z}^T{}_{(1\times 2^{k+1})} Q_{(2^{k+1}\times 2^{k+1})} \boldsymbol{Z}_{(2^{k+1}\times 1)}\right]
\end{aligned}
$$

Terbukti benar untuk $m = k + 1$

Sehingga dapat disimpulkan

$$\nabla\Psi_m^2 = 2^m \sum_{i_1\ldots i_m} {z_{i_1\ldots i_m}}^2 - 2^{m-1} \sum_{i_1\ldots i_{m-1}} {z_{i_1\ldots i_{m-1}}}^2$$

dapat ditulis sebagai

$$\nabla\Psi_m^2 = 2^{m-1}(\boldsymbol{Z}^T Q \boldsymbol{Z})\,.$$

Perhatikan bentuk dari $\nabla\Psi_m^2 = 2^{m-1}(\boldsymbol{Z}^T Q\boldsymbol{Z})$. Pada tahap ini, statistik tersebut akan dimodifikasi sedemikian sehingga dapat dibuktikan bahwa

$$\nabla\Psi_{\mathrm{m}}^2 \xrightarrow{n\to\infty} \chi^2_{(2^{\mathrm{m}-1})} .$$

Berikut ini adalah jabaran pembuktiannya.

Pertama-tama perhatikan bentuk matriks Q. akan diperlihatkan bahwa ternyata matriks Q tersebut memiliki sifat khusus yaitu $\mathrm{Q}^2 = 2\mathrm{Q}$.

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Q^2

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Q}^2 = 2\mathrm{Q}$

Selanjutnya akan dilihat bentuk dari Q^3.

$\mathrm{Q}^3 = \mathrm{Q}^2\mathrm{Q}$

Telah diketahui bahwa $\mathrm{Q}^2 = 2\mathrm{Q}$. Sehingga,

$\mathrm{Q}^3 = 2\mathrm{Q}.\mathrm{Q} = 2\mathrm{Q}^2 = 2(2\mathrm{Q}) = 4\mathrm{Q}$

Terbukti bahwa $\mathrm{Q}^3 = 4\mathrm{Q}$ atau dapat ditulis sebagai :

$$Q = \frac{1}{4}\mathrm{Q}^3 \tag{3.7}$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (3.7) ke persamaan (3.6) menjadi :

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi_{\mathrm{m}}^2 &= 2^{\mathrm{m}-1}\left[\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\frac{1}{4}\mathrm{Q}^3\mathbf{Z}\right] \\
&= 2^{\mathrm{m}-2}\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\frac{1}{2}\mathrm{Q}^3\mathbf{Z}\right) \\
&= \left(\frac{2^{\mathrm{m}/2}}{2}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\right)\left(\frac{1}{2}\mathrm{Q}\right)\left(\frac{2^{\mathrm{m}/2}}{2}\mathrm{Q}\mathbf{Z}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla\Psi_{\mathrm{m}}^2 = \left(\frac{2^{\mathrm{m}/2}}{2}\mathrm{Q}\mathbf{Z}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Q}\right)\left(\frac{2^{\mathrm{m}/2}}{2}\mathrm{Q}\mathbf{Z}\right) \tag{3.8}$$

Perhatikan persamaan (3.8) di atas. Bentuk $\nabla\Psi_{\mathrm{m}}^2$ akan disederhanakan penulisannya dengan memisalkan suatu vektor yaitu :

$$\mathrm{W} = \frac{2^{\mathrm{m}/2}}{2}\mathrm{Q}\mathbf{Z} \tag{3.9}$$

Telah didapatkan matriks kovariansi dari vektor **Z** yaitu Σ_{m} sehingga berdasarkan persamaan (2.10), matriks kovariansi dari W dapat dicari sebagai berikut :

$$\Sigma_{\mathrm{W}} = \left(\frac{2^{\mathrm{m}/2}}{2}\mathrm{Q}\right)\Sigma_{\mathrm{m}}\left(\frac{2^{\mathrm{m}/2}}{2}\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Q}(2^{\mathrm{m}-2})\Sigma_{\mathrm{m}}\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2^m-1}{2^{2m}} & -\frac{1}{2^{2m}} & \cdots & -\frac{1}{2^{2m}} \\ -\frac{1}{2^{2m}} & \frac{2^m-1}{2^{2m}} & \cdots & -\frac{1}{2^{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2^{2m}} & -\frac{1}{2^{2m}} & \cdots & \frac{2^m-1}{2^{2m}} \end{bmatrix}$$

$$2^{\mathrm{m}-2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2^{\mathrm{m}-2}\left(\frac{1}{2^{2m}}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2^m-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2^m-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 2^m-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{\mathrm{m}+2}}\begin{bmatrix} 2^m & -2^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2^m & 2^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m & -2^m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^m & 2^m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^m & -2^m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2^m & 2^m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2^{m}\left(\frac{1}{2^{\mathrm{m}+2}}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{Q}^2$$

$$= \frac{1}{4}(2\mathrm{Q})$$

$$\Sigma_{\mathrm{W}} = \frac{1}{2}\mathrm{Q}$$

Sehingga didapatkan bahwa matriks kovariansi untuk W adalah matriks $\frac{1}{2}\mathrm{Q}$.

Selanjutnya perhatikan kembali persamaan (3.8). Substitusi persamaan (3.9) ke persamaan (3.8) tersebut sehingga didapatkan :

$$\nabla\Psi_{\mathrm{m}}^2 = \mathrm{W}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Q}\right)\mathrm{W} \qquad (3.10)$$

Sekarang perhatikan matriks $\frac{1}{2}Q$ yang ada di tengah persamaan (3.10) tersebut. Ternyata matriks $\frac{1}{2}Q$ ini dapat didiagonalisasi ortogonal sehingga untuk membentuk hasil dari diagonalisasi ortogonalnya perlu dicari nilai-eigen dari matriks $\frac{1}{2}Q$ terlebih dahulu.

Akan dibuktikan nilai-nilai-eigen dari $\frac{1}{2}Q$ ialah 1 dengan multiplisitas 2^{m-1} dan 0 dengan multiplisitas 2^{m-1}.

Bukti :

Berdasarkan definisi matriks Qsebelumnya maka dapat disimpulkan $\frac{1}{2}Q$ adalah matriks diagonal blok ukuran $2^m \times 2^m$ yang dibentuk oleh 2^{m-1} blok $\frac{1}{2}Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Berikut ini akan ditinjau bentuk dari matriks $\frac{1}{2}Q$.

$$\frac{1}{2}Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{2}Q_1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan sifat matriks diagonal blok pada bab 2, matriks $\frac{1}{2}Q$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}Q_1 \oplus \frac{1}{2}Q_1 \oplus \dots \oplus \frac{1}{2}Q_1 = \oplus\ 2^{m-1}\left(\frac{1}{2}Q_1\right)$$

ini disebut *direct sum* dari 2^{m-1} matriks $\frac{1}{2}Q_1$.

Jika ingin dicari nilai-eigen dari matriks $\frac{1}{2}Q$ maka perlu ditinjau determinan dari matriks $\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q\right)$, yaitu :

$$\lambda I - \frac{1}{2}Q = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I - \frac{1}{2}Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda I - \frac{1}{2}Q_1 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa matriks $\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q\right)$ merupakan matriks diagonal blok yang dibentuk oleh 2^{m-1} matriks $\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q_1\right)$ atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q\right) = \oplus\ 2^{m-1}\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q_1\right)$$

Berdasarkan persamaan (2.11) didapatkan bahwa matriks ini memiliki sifat yaitu :

$$\det\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q\right) = \det\left[\oplus\ 2^{m-1}\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q_1\right)\right] = \left[\det\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q_1\right)\right]^{2^{m-1}}$$

Berdasarkan hal ini akan dicari nilai-eigen untuk matriks $\frac{1}{2}Q$. Nilai-eigen tersebut dilambangkan dengan λ. λ ini didapatkan saat $det\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q\right) = 0$

Berikut ini adalah penentuan nilai-eigen dari $\frac{1}{2}Q$.

$$det\left(\lambda I - \frac{1}{2}Q\right) = 0$$

$$\left(\det\left[\lambda I - \frac{1}{2}Q_1\right]\right)^{2^{m-1}} = 0$$

$$\left(\det\begin{bmatrix}\lambda-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)^{2^{m-1}}=0$$

$$\left[\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]^{2^{m-1}}=0$$

$$\left[\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right]^{2^{m-1}}=0$$

$$(\lambda^2-\lambda)^{2^{m-1}}=0$$

$$[\lambda(\lambda-1)]^{2^{m-1}}=0$$

$\lambda=0$ dengan multiplisitas 2^{m-1} dan $\lambda=1$ dengan multiplisitas 2^{m-1}. Jadi, berdasarkan penjabaran di atas dapat disimpulkan bahwa nilai-eigen untuk $\frac{1}{2}Q$ adalah 0 dan 1 dengan masing-masing memiliki multiplisitas 2^{m-1}.

Selanjutnya, lihat kembali bentuk dari matriks $\frac{1}{2}Q$. Matriks tersebut ialah suatu matriks simetris. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, akan dibuktikan bahwa matriks $\frac{1}{2}Q$ dapat didiagonalkan secara ortogonal. Dengan kata lain, akan dibuktikan bahwa terdapat matriks ortogonal P sehingga

$$P^T\left(\frac{1}{2}Q\right)P=D \text{ atau } \frac{1}{2}Q=PDP^T$$

di mana D ialah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal utamanya ialah nilai-nilai-eigen dari $\frac{1}{2}Q$.

Bukti :

Pada penjabaran sebelumnya telah didapatkan nilai-eigen untuk $\frac{1}{2}Q$ adalah 0 dan 1 dengan masing-masing memiliki multiplisitas 2^{m-1}. Diketahui juga $\frac{1}{2}Q=\oplus\, 2^{m-1}\left(\frac{1}{2}Q_1\right)$. Sehingga akan dicari P_1 dan D_1 sedemikian sehingga

$$[\oplus\, 2^{m-1}(P_1)]^T\left[\oplus\, 2^{m-1}\left(\frac{1}{2}Q_1\right)\right][\oplus\, 2^{m-1}(P_1)]=[\oplus\, 2^{m-1}(D_1)]$$

Di mana $P=\begin{bmatrix}P_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & P_1\end{bmatrix}$ dan $D=\begin{bmatrix}D_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & D_1\end{bmatrix}$, P dan D adalah matriks diagonal blok yang masing-masing dibentuk oleh 2^{m-1} matriks P_1 dan D_1.

Pertama-tama perhatikan $\frac{1}{2}Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Untuk nilai-eigen 0 akan dicari vektor-eigen yang bersesuaian. Berikut adalah cara menentukan vektor-eigen tersebut.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

Dimisalkan $x_1 = c_1$ sehingga $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jadi, vektor-eigen yang bersesuaian untuk nilai-eigen 0 adalah $v_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Selanjutnya akan dibentuk vektor-eigen dengan *norm* 1 dari v_1.

Norm dari v_1 adalah :

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Sehingga vektor-eigen dengan *norm* 1 dari v_1 yang dilambangkan dengan u_1 adalah :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Untuk nilai-eigen 1 akan dicari vektor-eigen yang bersesuaian.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = x_1$$

$$-\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}x_1$$

$$-x_2 = x_1$$

Jadi, vektor-eigennya adalah $v_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vektor-eigen dengan *norm* 1 dalah $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Dari kedua vektor-eigen dengan *norm* 1 tersebut dapat dibentuk matriks P_1 yaitu

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} .$$

Sehingga berlaku $\quad {P_1}^T \left(\frac{1}{2} Q_1\right) P_1 = D_1$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Di mana $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ialah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal utamanya ialah nilai-nilai-eigen dari $\frac{1}{2} Q_1$. Karena telah dijelaskan sebelumnya bahwa $P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_1 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_1 \end{bmatrix}$ maka dapat disimpulkan :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks $\frac{1}{2}Q$ dapat didiagonalkan secara ortogonal yaitu terdapat matriks ortogonal P sehingga

$$\frac{1}{2}Q = PDP^T \tag{3.11}$$

di mana D ialah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal utamanya ialah nilai-nilai-eigen dari $\frac{1}{2}Q$

Perhatikan kembali bentuk (3.10) yaitu :

$$\nabla\Psi_m^2 = W^T\left(\frac{1}{2}Q\right)W$$

Substitusi persamaan (3.11) ke dalam persamaan (3.11) menjadi :

$$\nabla\Psi_m^2 = W^T PDP^T W$$

$$\nabla\Psi_m^2 = (P^T W)^T D(P^T W) \tag{3.12}$$

Terlihat bahwa pemfaktoran $\nabla\Psi_m^2$ memiliki matriks D ditengahnya sehingga jika dimisalkan vektor Y yaitu :

$$Y = P^T W \tag{3.13}$$

di mana $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2^m} \end{bmatrix}$ maka bentuk $\nabla\Psi_m^2$ akan menyisakan separuh dari anggota-anggota vektor Y.

Selanjutnya akan ditinjau matriks kovariansi dari Y.Telah didapatkan matriks kovariansi dari vektor W yaitu $\Sigma_W = \frac{1}{2}Q$ sehingga berdasarkan persamaan (2.10), matriks kovariansi dari Y dapat dicari sebagai berikut :

$$\Sigma_Y = P^T \Sigma_W P$$

$$= P^T\left(\frac{1}{2}Q\right)P$$

$$\Sigma_Y = D$$

Ternyata matriks kovariansi untuk Y merupakan matriks D yang telah didapatkan sebelumnya. Sehingga dapat disimpulkan hanya separuh dari anggota-anggota vektor Y yang memiliki variansi bernilai 1 dan sisanya memiliki variansi 0.

Selanjutnya substitusi persamaan (3.13) ke persamaan (3.12) sehingga didapatkan :

$$\nabla\Psi_m^2 = Y^T DY = \sum_{i=1}^{2^{m-1}} {y_i}^2$$

Terlihat apa yang telah disebutkan sebelumnya yaitu bentuk $\nabla\Psi_m^2$ menyisakan separuh dari anggota-anggota vektor Y yang awalnya berukuran $2^m \times 1$ sekarang menjadi 2^{m-1} buah y_i , $i = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$

Berdasarkan matriks kovariansi dari Y yaitu D terlihat bahwa :

$$var(y_i) = 1, \;\; i = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$$

Sebelumnya telah didapatkan bahwa $\boldsymbol{Z} \xrightarrow{n\to\infty} Multivariat\ Normal\ (\mathbf{0}, \Sigma_m)$ maka dapat disimpulkan $y_i \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1), i = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. Karena y_i memiliki pendekatan distribusi normal dan elemen non-diagonal matriks kovariansi dari Y bernilai nol maka y_i saling independen dengan $i = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$.

Karena $y_i \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1), i = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$ dan saling independen maka berdasarkan persamaan (2.7) dapat disimpulkan bahwa bentuk :

$$\nabla\Psi_m^2 = \sum_{i=1}^{2^{m-1}} {y_i}^2$$

Memiliki pendekatan distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas 2^{m-1} atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$\nabla\Psi_m^2 \xrightarrow{n\to\infty} \chi^2_{(2^{m-1})}$$

3.2.3 Bentuk Statistik $\nabla^2\Psi_m^2$

Pada subbab sebelumnya telah dilihat statistik $\nabla\Psi_m^2$ dan dicari distribusi pendekatan dari statistik ini. Selanjutnya akan dilihat distribusi dari $\nabla^2\Psi_m^2$.

Didefinisikan $\nabla^2\Psi_m^2$ sebagai berikut :

$$\nabla^2\Psi_m^2 = \nabla\Psi_m^2 - \nabla\Psi_{m-1}^2$$

Ide dari pembentukan statistik ini adalah membandingkan frekuensi pola jika suatu barisan bilangan biner yang diuji dipecah menjadi blok *overlapping* berukuran m-bit dengan frekuensi pola jika barisan yang sama dipecah menjadi blok *overlapping* berukuran (m-2)-bit.

Berdasarkan pembahasan di bagian sebelumnya telah didapatkan bahwa :

$$\nabla\Psi_m^2 = \sum_{i=1}^{2^{m-1}} y_i^{\,2}$$

Sehingga bentuk $\nabla^2\Psi_m^2$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\nabla^2\Psi_m^2 = \sum_{i=1}^{2^{m-1}} y_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{2^{m-2}} y_i^{\,2}$$

$$= \left(y_1^2 + \cdots + y_{2^{m-2}}^2 + y_{2^{m-2}+1}^2 + \cdots + y_{2^{m-1}}^2\right) - \left(y_1^2 + \cdots + y_{2^{m-2}}^2\right)$$

Terlihat bahwa terdapat komponen-komponen yang saling menghilangkan sehingga dapat ditulis sebagai berikut :

$$\nabla^2\Psi_m^2 = y_{2^{m-2}+1}^2 + \cdots + y_{2^{m-1}}^2$$

$$\nabla^2\Psi_m^2 = \sum_{i=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} y_i^{\,2}$$

Terlihat bahwa $y_i^{\,2}$ yang tersisa ada 2^{m-2} buah , $i = 2^{m-2} + 1, \dots, 2^{m-1}$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya diketahui :

$$y_i \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)\,, \qquad i = 2^{m-2} + 1, \dots, 2^{m-1}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.7) dapat disimpulkan bahwa :

$$\nabla^2\Psi_m^2 \xrightarrow{n\to\infty} \chi^2_{(2^{m-2})}$$

3.2.4 Bentuk Statistik $\nabla^3\Psi_m^2$

Berkaca pada ide sebelumnya akan dibentuk statistik $\nabla^3\Psi_m^2$ dan dilihat distribusi dari statistik tersebut. Didefinisikan $\nabla^3\Psi_m^2$ sebagai berikut :

$$\nabla^3\Psi_m^2 = \nabla^2\Psi_m^2 - \nabla^2\Psi_{m-1}^2$$

Berdasarkan pembahasan di bagian sebelumnya telah didapatkan bahwa :

$$\nabla^2\Psi_m^2 = \sum_{i=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} y_i^{\,2}$$

Sehingga bentuk $\nabla^3\Psi_m^2$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\nabla^3\Psi_m^2 = \sum_{i=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} y_i^{\ 2} - \sum_{i=2^{m-3}+1}^{2^{m-2}} y_i^{\ 2}$$

$$= \left(y_{2^{m-2}+1}^2 + \cdots + y_{2^{m-1}}^2\right) - \left(y_{2^{m-3}+1}^2 + \cdots + y_{2^{m-2}}^2\right)$$

Terlihat bahwa tidak ada komponen yang saling menghilangkan jadi belum dapat disimpulkan $\nabla^3\Psi_m^2$ memiliki pendekatan distribusi apa. Oleh karena itu akan dilihat bentuk $\nabla^3\Psi_m^2$ untuk $m = 3$ terlebih dahulu.

$$\nabla^3\Psi_3^2 = \sum_{i=3}^{4} y_i^{\ 2} - \sum_{i=1}^{2} y_i^{\ 2} = y_3^{\ 2} + y_4^{\ 2} - y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2}$$

Terlihat bahwa tidak dapat dikatakan bahwa $\nabla^3\Psi_3^2$ memiliki pendekatan distribusi *Chi-Square.*

Berdasarkan hal ini disimpulkan bahwa $\nabla^3\Psi_m^2$ tidak memiliki pendekatan distribusi *Chi-Square.*

3.2.5 Pengujian Statistik pada Uji Serial

Misalkan terdapat suatu barisan bilangan biner yang akan diuji keacakannya menggunakan Uji Serial.

Hipotesis dari uji ini adalah :

H_0 : P(setiap pola m-bit) $= 1/2^m$

H_1 : Tidak demikian

Berdasarkan subbab 3.2.1 – 3.2.4 didapatkan bahwa Uji Serial didasarkan pada statistik uji Ψ_m^2 yang merupakan suatu bentuk kuadratik tetapi tidak memilki pendekatan distribusi *chi-square*, kecuali untuk $m = 1$ statistik uji Ψ_m^2 memiliki pendekatan distribusi *chi-square*. Uji Serial memiliki dua statistik uji yaitu $\nabla\Psi_m^2$ yang memiliki pendekatan distribusi $\chi^2_{(2^{m-1})}$ (chi-square berderajat bebas 2^{m-1}) dan $\nabla^2\Psi_m^2$ yang memiliki pendekatan distribusi $\chi^2_{(2^{m-2})}$. $\nabla^3\Psi_m^2$ tidak dijadikan statistik uji pada Uji Serial karena tidak dapat ditemukan pendekatan distribusinya. Alasan mengapa tidak hanya $\nabla\Psi_m^2$ yang dijadikan statistik uji pada

Uji Serial melainkan harus ditambah dengan statistik uji $\nabla^2\Psi_m^2$ adalah apabila dimiliki suatu barisan bilangan biner yang tidak acak, terdapat kemungkinan kondisi di mana nilai Ψ_m^2 besar dan Ψ_{m-1}^2 juga besar sehingga selisih dari keduanya kecil dan mengakibatkan keputusan yang diambil adalah tidak menolak H_0 padahal seharusnya H_0 ditolak karena barisan tersebut tidak acak. Oleh karena itu, diperlukan juga statistik uji $\nabla^2\Psi_m^2$ yang mengakomodir Ψ_m^2, Ψ_{m-1}^2, dan Ψ_{m-2}^2.

Oleh karena itu, aturan keputusannya adalah sbb :

Jika

$$\nabla\Psi_m^2 < \chi^2_{(2^{\mathrm{m}-1}),\alpha}$$

dan

$$\nabla^2\Psi_m^2 < \chi^2_{(2^{\mathrm{m}-1}),\alpha}$$

Kedua-duanya terpenuhi maka H_0 tidak ditolak, dengan α menyatakan tingkat signifikansi.

Jika H_0 tidak ditolak maka kesimpulan yang diambil adalah barisan bilangan biner yang di uji merupakan barisan yang acak.

Perlu dicatat, karena statistik uji di atas memiliki distribusi pendekatan maka ukuran bit barisan bilangan biner yang diuji harus besar.

BAB 4
ILUSTRASI

Dalam bab ini akan diberikan contoh penentuan apakah suatu barisan bilangan biner merupakan barisan bilangan yang acak atau tidak, menggunakan Uji Serial.

Berikut ini adalah ilustrasinya :

Misalkan terdapat suatu barisan bilangan biner ε yang akan diuji keacakannya dengan hipotesis :

H_0 : ε merupakan barisan bilangan biner yang acak

H_1 : Tidak demikian

Barisan bilangan biner yang akan diuji keacakannya adalah :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon = {} & 10111011110010110100011100101110111110000 \\
& 10110100011101011100001001001010110111001 \\
& 000100100011101111001011011010010110111
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa panjang bit ε tersebut sebanyak $\mathrm{n} = 121$. Dalam ilustrasi ini akan dipilih panjang blok *overlapping* yaitu $\mathrm{m} = 3$. Sehingga untuk menentukan keacakan ε tersebut menggunakan Uji Serial, perlu dicari nilai dari $\nabla\Psi_3^2$ dan $\nabla^2\Psi_3^2$. Berikut akan dijabarkan bagaimana mendapatkan nilai dari $\nabla\Psi_3^2$ dan $\nabla^2\Psi_3^2$.

4.1 Penentuan Nilai $\nabla\Psi_3^2$

Nilai $\nabla\Psi_3^2$ akan dihitung menggunakan rumus :

$$\nabla\Psi_3^2 = 4(\boldsymbol{Z}^T Q \boldsymbol{Z})$$

di mana Q merupakan matriks berukuran 8×8 dengan bentuk :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena ukuran blok *overlapping* yang dipilih adalah $m = 3$ maka panjang pola yang akan digunakan disesuaikan sehingga pola yang dapat terbentuk sebanyak $2^3 = 8$ pola 3-bit yaitu :

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 .$$

Berdasarkan hal ini, maka vektor $\boldsymbol{Z}$ tersebut di atas adalah vektor berukuran 8×1 dengan bentuk sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} z_{000} \\ z_{001} \\ z_{010} \\ z_{011} \\ z_{100} \\ z_{101} \\ z_{110} \\ z_{111} \end{bmatrix}$$

di mana

$$z_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{11}\left(v_{i_1 i_2 i_3} - \frac{121}{8}\right), \quad i_1 i_2 i_3 = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 .$$

Berdasarkan rumus tersebut maka perlu dicari terlebih dahulu $v_{000}, v_{001}, v_{010}, v_{011}, v_{100}, v_{101}, v_{110}$, dan v_{111} yaitu merupakan frekuensi dari pola 3-bit $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110$, dan 111 dalam blok-blok *overlapping*.

Sehingga pertama-tama akan ditentukan *circular string* untuk membentuk blok *overlapping* 3-bit dari barisan bilangan biner ε di atas. Cara mendapatkan *circular string* tersebut yaitu dengan menambahkan 2-bit awal dari ε ke bagian akhir dari ε tersebut. 2 bit awal dari ε yaitu 10. Sehingga *circular string* yang terbentuk adalah sbb :

$$\varepsilon' = 1011101111001011010001110010111011111 0000$$
$$1011010001110101110000100100101011011 1001$$
$$0001001000111011110010110110100101101111 10$$

Langkah berikutnya adalah menentukan 121 blok *overlapping* 3-bit berdasarkan *circular string* yang telah didapatkan tadi. Berikut ini adalah tabel hasil penentuan blok-blok *overlapping* 3-bit.

Tabel 4.1 Hasil penentuan blok-blok *overlapping* 3-bit

No.	Blok	No.	Blok	No.	Blok	No.	Blok	No.	Blok
1	101	26	010	51	111	76	011	101	001
2	011	27	101	52	110	77	111	102	010
3	111	28	011	53	101	78	110	103	101
4	110	29	111	54	010	79	100	104	011
5	101	30	110	55	101	80	001	105	110
6	011	31	101	56	011	81	010	106	101
7	111	32	011	57	111	82	100	107	011
8	111	33	111	58	110	83	000	108	110
9	110	34	111	59	100	84	001	109	101
10	100	35	111	60	000	85	010	110	010
11	001	36	110	61	000	86	100	111	100
12	010	37	100	62	001	87	001	112	001
13	101	38	000	63	010	88	010	113	010
14	011	39	000	64	100	89	100	114	101
15	110	40	001	65	001	90	000	115	011
16	101	41	010	66	010	91	001	116	110
17	010	42	101	67	100	92	011	117	101
18	100	43	011	68	001	93	111	118	011
19	000	44	110	69	010	94	110	119	111
20	001	45	101	70	101	95	101	120	111
21	011	46	010	71	010	96	011	121	110
22	111	47	100	72	101	97	111		
23	110	48	000	73	011	98	111		
24	100	49	001	74	110	99	110		
25	001	50	011	75	101	100	100		

Selanjutnya, akan ditentukan frekuensi dari masing-masing pola 3-bit dalam 121 blok *overlapping* di atas. Berikut ini adalah tabel hasil frekuensi 8 pola 3-bit tersebut.

Tabel 4.2 Hasil frekuensi 8 pola 3-bit

No.	$v_{i_1 i_2 i_3}$	**Frekuensi**
1	v_{000}	8
2	v_{001}	14
3	v_{010}	16
4	v_{011}	17
5	v_{100}	14
6	v_{101}	19
7	v_{110}	17
8	v_{111}	16

Langkah berikutnya adalah menghitung $\mathrm{z}_{\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2\mathrm{i}_3}$ dengan rumus yang telah tertulis di atas. Berikut ini adalah hasil perhitungan $\mathrm{z}_{\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2\mathrm{i}_3}$, dengan $\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2\mathrm{i}_3 = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.$

$$\mathrm{z}_{000} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(\mathrm{v}_{000} - \frac{121}{8}\right) = \frac{1}{11}\left(8 - \frac{121}{8}\right) = \frac{64 - 121}{88} = -\frac{57}{88}$$

$$\mathrm{z}_{001} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(\mathrm{v}_{001} - \frac{121}{8}\right) = \frac{1}{11}\left(14 - \frac{121}{8}\right) = \frac{112 - 121}{88} = -\frac{9}{88}$$

$$\mathrm{z}_{010} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(\mathrm{v}_{010} - \frac{121}{8}\right) = \frac{1}{11}\left(16 - \frac{121}{8}\right) = \frac{128 - 121}{88} = \frac{7}{88}$$

$$\mathrm{z}_{011} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(\mathrm{v}_{011} - \frac{121}{8}\right) = \frac{1}{11}\left(17 - \frac{121}{8}\right) = \frac{136 - 121}{88} = \frac{15}{88}$$

$$\mathrm{z}_{100} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(\mathrm{v}_{100} - \frac{121}{8}\right) = \frac{1}{11}\left(14 - \frac{121}{8}\right) = \frac{112 - 121}{88} = -\frac{9}{88}$$

$$\mathrm{z}_{101} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(\mathrm{v}_{101} - \frac{121}{8}\right) = \frac{1}{11}\left(19 - \frac{121}{8}\right) = \frac{152 - 121}{88} = \frac{31}{88}$$

$$z_{110} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(v_{110} - \frac{121}{8}\right) = \frac{1}{11}\left(17 - \frac{121}{8}\right) = \frac{136 - 121}{88} = \frac{15}{88}$$

$$z_{111} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(v_{111} - \frac{121}{8}\right) = \frac{1}{11}\left(16 - \frac{121}{8}\right) = \frac{128 - 121}{88} = \frac{7}{88}$$

Sehingga bentuk vektor **Z** menjadi seperti berikut :

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{88}\begin{bmatrix} -57 \\ -9 \\ 7 \\ 15 \\ -9 \\ 31 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan vektor **Z** barulah dapat dihitung nilai dari $\nabla\Psi_3^2$.

$\nabla\Psi_3^2 = 2^{3-1}(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\mathbf{Z})$

$$= 4\left(\frac{1}{88}\right)\begin{bmatrix} -57 \\ -9 \\ 7 \\ 15 \\ -9 \\ 31 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{88}\right)\begin{bmatrix} -57 \\ -9 \\ 7 \\ 15 \\ -9 \\ 31 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{22}\right)\left(\frac{1}{88}\right)[-48 \quad 48 \quad -8 \quad 8 \quad -40 \quad 40 \quad 8 \quad -8]\begin{bmatrix} -57 \\ -9 \\ 7 \\ 15 \\ -9 \\ 31 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{22}\right)\left(\frac{1}{11}\right)[-6 \quad 6 \quad -1 \quad 1 \quad -5 \quad 5 \quad 1 \quad -1]\begin{bmatrix} -57 \\ -9 \\ 7 \\ 15 \\ -9 \\ 31 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{22}\right)\left(\frac{1}{11}\right)(342 - 54 - 7 + 15 + 45 + 155 + 15 - 7)$$

$$= \frac{504}{242}$$

$\nabla\Psi_3^2 = 2.083$

Terlihat bahwa nilai dari $\nabla\Psi_3^2$ sebesar 2.083. Setelah nilai $\nabla\Psi_3^2$ didapatkan selanjutnya akan dicari nilai dari $\nabla^2\Psi_3^2$.

4.2 Penentuan Nilai $\nabla^2\Psi_3^2$

Nilai $\nabla^2\Psi_3^2$ akan dihitung menggunakan rumus :

$$\nabla^2\Psi_3^2 = \nabla\Psi_3^2 - \nabla\Psi_2^2$$

Berdasarkan subbab 4.1 telah didapatkan bahwa $\nabla\Psi_3^2 = 2.083$ sehingga untuk mendapatkan nilai dari $\nabla^2\Psi_3^2$ akan dicari terlebih dahulu nilai dari $\nabla\Psi_2^2$.

$\nabla\Psi_2^2$ akan dihitung menggunakan rumus :

$$\nabla\Psi_2^2 = 2(\boldsymbol{Z}^T Q \boldsymbol{Z})$$

di mana Q di sini merupakan matriks berukuran 4×4 dengan bentuk :

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\nabla\Psi_2^2$ di sini berarti $m = 2$ yaitu ukuran blok *overlapping* yang akan ditinjau adalah $2 -$ bit maka panjang pola yang akan digunakan disesuaikan sehingga pola yang dapat terbentuk sebanyak $2^2 = 4$ pola 2-bit yaitu :

$$00, 01, 10, 11.$$

Berdasarkan hal ini, maka vektor $\boldsymbol{Z}$ tersebut di atas adalah vektor berukuran 4×1 dengan bentuk sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} z_{00} \\ z_{01} \\ z_{10} \\ z_{11} \end{bmatrix}$$

di mana

$$z_{i_1 i_2} = \frac{1}{11}\left(v_{i_1 i_2} - \frac{121}{4}\right), \quad i_1 i_2 = 00, 01, 10, 11 .$$

Berdasarkan rumus tersebut maka perlu dicari terlebih dahulu v_{00}, v_{01}, v_{10}, dan v_{11} yaitu merupakan frekuensi dari pola 3-bit $00, 01, 10$, dan 11 dalam blok-blok *overlapping*. Pada tahap ini akan ditentukan *circular string* untuk membentuk 121 blok *overlapping* 2-bit berdasarkan ε di atas. Pembentukan *circular string* kali ini yaitu dengan cara menambahkan 1 bit awal dari ε ke bagian akhir dari ε tersebut. 1 bit awal dari ε yaitu 1. Sehingga *circular string* yang terbentuk adalah sbb :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon' = {} & 10111011110010110100011100101110111110000 \\
& 10110100011101011100001001001010110111001 \\
& 0001001000111011110010110110100101101111
\end{aligned}
$$

Berdasarkan *circular string* ini akan dibentuk 121 blok *overlapping* 2-bit. Berikut ini adalah tabel hasil penentuan blok-blok *overlapping* 2-bit.

Tabel 4.3 Hasil penentuan blok-blok *overlapping* 2-bit

No.	Blok	No.	Blok	No.	Blok	No.	Blok	No.	Blok
1	10	26	01	51	11	76	01	101	00
2	01	27	10	52	11	77	11	102	01
3	11	28	01	53	10	78	11	103	10
4	11	29	11	54	01	79	10	104	01
5	10	30	11	55	10	80	00	105	11
6	01	31	10	56	01	81	01	106	10
7	11	32	01	57	11	82	10	107	01
8	11	33	11	58	11	83	00	108	11
9	11	34	11	59	10	84	00	109	10
10	10	35	11	60	00	85	01	110	01
11	00	36	11	61	00	86	10	111	10
12	01	37	10	62	00	87	00	112	00
13	10	38	00	63	01	88	01	113	01
14	01	39	00	64	10	89	10	114	10
15	11	40	00	65	00	90	00	115	01
16	10	41	01	66	01	91	00	116	11
17	01	42	10	67	10	92	01	117	10
18	10	43	01	68	00	93	11	118	01
19	00	44	11	69	01	94	11	119	11
20	00	45	10	70	10	95	10	120	11
21	01	46	01	71	01	96	01	121	11
22	11	47	10	72	10	97	11		
23	11	48	00	73	01	98	11		
24	10	49	00	74	11	99	11		
25	00	50	01	75	10	100	10		

Selanjutnya, akan ditentukan frekuensi dari masing-masing pola 2-bit dalam 121 blok *overlapping* di atas. Frekuensi ini dilambangkan dengan $v_{i_1 i_2}$, di mana $i_1 i_2 = 00, 01, 10, 00$. Berikut ini adalah tabel hasil frekuensi pola tersebut.

Tabel 4.4 Hasil frekuensi 4 pola 2-bit

No	$v_{i_1 i_2}$	Frekuensi
1	v_{00}	22
2	v_{01}	33
3	v_{10}	33
4	v_{11}	33

Langkah berikutnya adalah menghitung $z_{i_1 i_2}$. Berikut ini adalah hasil perhitungan $z_{i_1 i_2}$, dengan $\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2 = 00, 01, 10, 11.$

$$\mathrm{z}_{00} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(v_{00} - \frac{121}{4}\right) = \frac{1}{11}\left(22 - \frac{121}{4}\right) = \frac{88-121}{44} = -\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{z}_{01} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(v_{01} - \frac{121}{4}\right) = \frac{1}{11}\left(33 - \frac{121}{4}\right) = \frac{132-121}{44} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{z}_{10} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(v_{10} - \frac{121}{4}\right) = \frac{1}{11}\left(33 - \frac{121}{4}\right) = \frac{132-121}{44} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{z}_{11} = \frac{1}{\sqrt{121}}\left(v_{11} - \frac{121}{4}\right) = \frac{1}{11}\left(33 - \frac{121}{4}\right) = \frac{132-121}{44} = \frac{1}{4}$$

Sehingga vektor **Z** di atas bentuknya menjadi sbb :

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berikut ini akan dihitung statistik uji $\nabla\Psi_2^2$.

$$\nabla\Psi_2^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)[-3 \quad 1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla\Psi_2^2 = 2$$

Setelah nilai dari $\nabla\Psi_2^2$ didapatkan maka nilai dari $\nabla^2\Psi_3^2$ dapat dicari.

$$\begin{aligned}\nabla^2\Psi_3^2 &= \nabla\Psi_3^2 - \nabla\Psi_2^2 \\ &= 2.083 - 2 \\ &= 0.083\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan bahwa nilai dari $\nabla^2\Psi_3^2 = 0.083$

4.3 Uji Statistik pada Uji Serial

Setelah nilai dari statistik uji $\nabla\Psi_3^2$ dan $\nabla^2\Psi_3^2$ didapatkan maka akan diambil keputusan terhadap hipotesis di atas. Karena $\nabla\Psi_3^2$ memiliki pendekatan distribusi $\chi^2_{(4)}$ dan $\nabla^2\Psi_3^2$ memiliki pendekatan distribusi $\chi^2_{(2)}$ maka aturan keputusannya adalah sebagai berikut :

Jika $\nabla\Psi_3^2 < \chi^2_{(4),\alpha}$ dan $\nabla^2\Psi_3^2 < \chi^2_{(2),\alpha}$ terpenuhi maka H_0 tidak ditolak , di mana α menyatakan tingkat signifikansi.

Berdasarkan aturan keputusan tersebut maka berikut ini adalah keputusan yang diambil :

Dalam penentuan keputusan ini akan digunakan tingkat signifikansi 0.01. Karena didapatkan $\nabla\Psi_3^2 = 2.083 > 0.297 = \chi^2_{(4),0.01}$ dan

$\nabla^2\Psi_3^2 = 0.083 > 0.020 = \chi^2_{(2),0.01}$

maka H_0 ditolak.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa barisan bilangan biner

$\varepsilon = 10111011110010110100011100101110111110000$

$10110100011101011100001001001010110111001$

$000100100011101111001011011010010110111$

merupakan barisan bilangan biner yang tidak acak.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dalam pembahasan tugas akhir ini didapat kesimpulan bahwa penentuan distribusi dari frekuensi pola m-bit dalam blok-blok *overlapping* pada barisan bilangan biner yang acak adalah sbb :

1. Distribusi bersama dari frekuensi pola m-bit untuk $2^m - 1$ pola $i_1 \dots i_m$ ialah multinomial $\left(n, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^m}, \dots, \frac{1}{2^m}\right)$.
2. Distribusi marginal dari frekuensi pola-pola m-bit di atas yaitu frekuensi pola m-bit untuk suatu pola $i_1 \dots i_m$ adalah binomial dengan parameter n dan $\frac{1}{2^m}$.

Pengujian keacakan barisan bilangan biner menggunakan Uji Serial dilakukan dengan dua statistik uji yaitu statistik uji $\nabla\Psi_m^2$ yang memiliki pendekatan distribusi *chi-square* dengan derajat bebas 2^{m-1} dan $\nabla^2\Psi_m^2$ yang memiliki pendekatan distribusi *chi-square* dengan derajat bebas 2^{m-2} .

Perlu dicatat, karena statistik uji di atas memiliki distribusi pendekatan maka barisan bilangan biner yang diuji harus memiliki ukuran bit yang besar.

5.2 Saran

Saran yang perlu diperhatikan adalah :

1. Tugas akhir ini difokuskan pada Uji Serial untuk barisan bilangan biner. Lebih lanjut dapat dicari distribusi statistik uji dari Uji Serial untuk pengujian barisan bilangan non-biner yaitu angka 0 sampai 9 maupun abjad/huruf yang terdiri dari a sampai z.
2. Untuk penelitian berikutnya dapat dilakukan perbandingan kekurangan maupun kelebihan antara Uji Serial dengan uji-uji lainnya dalam menguji keacakan barisan bilangan biner maupun non-biner.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. (2000). *Elementary Linear Algebra*. America : Drexel University.

[2] D. E. Knuth. (1998). *The Art of Coputer Programming*. Vol.2, 3rd ed. Reading: Addison-Wesley, Inc.,pp.61-80.

[3] Hogg, R. V., & Craig, A. T. (2011). *Introduction to Mathematical Statistics.* New Jersey: Prentice-Hall.

[4] Horn, A. Roger and Charles R. Johnson. (1999). *Matrix Analysis.* United States of America : Cambridge University.

[5] I. J. Good. (1953). *The serial test forsampling numbers and other tests for randomness*. Proc. Cambridge Philos. Soc.. 47, pp.276-284.

[6] Johnson, Richard A. and Dean W. Wichern. (1998). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. United States of America : Prentice-Hall International, Inc.

[7] Rukhin, A., Soto, J., Nechvatal, J., Smid, M., Barker, E., Leigh, S., et al. (2001). *A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications.* Springfield: National Institute of Standards and Technology (NIST).

[8] http://www2.lv.psu.edu/jxm57/irp/chisquar.html diakses pada tangga 21 Juni 2012 pada pukul 09.56 WIB

[9] http://www.scribd.com/doc/7882625/Uji-Chi-Square diakses pada tangga 21 Juni 2012 pada pukul 10.09 WIB