UNIVERSITAS INDONESIA

PRINCIPAL COVARIATE REGRESSION PADA SUATU DATA RUNTUN WAKTU

SKRIPSI

NURUMA NURUL MALIK
0806452274

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PRINCIPAL COVARIATE REGRESSION PADA SUATU DATA RUNTUN WAKTU

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

NURUMA NURUL MALIK
0806452274

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Nuruma Nurul Malik
NPM	:	0806452274
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	15 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	:	Nuruma Nurul Malik
NPM	:	0806452274
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	*Principal Covariate Regression* pada Suatu Data Runtun Waktu.

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Fevi Novkaniza, S.Si, M.Si	( )
Penguji I	:	Dr. Dian Lestari, DEA	( )
Penguji II	:	Netty Sunandi, M.Si	(Netty S)
Penguji III	:	Sarini Abdullah, S.Si, M.Stats	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 15 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil ‘aalamiin, segala puji bagi Allah SWT, Tuhan pencipta alam semesta. Atas ridha dan karunia-Nya lah penulis telah diberikan kekuatan dan kesabaran untuk menyelesaikan tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang terdapat dalam tugas akhir ini. Penulis mengharapkan kritik serta saran guna menyempurnakan tugas akhir ini. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada orang-orang yang telah sangat berjasa membantu penulis hingga akhirnya tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik, terutama kepada:

1. Ibu Fevi Novkaniza, S.Si, M.Si selaku pembimbing tugas akhir penulis yang tidak hanya membantu penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini, tetapi juga memberi dukungan dan kepercayaan kepada penulis serta kesabaran dalam menghadapi ketidaktellitian penulis. Semoga Allah swt membalas setiap kebaikan Mbak dengan kebaikan berlipat ganda ☺.
2. Ibu Dra. Saskya Mary Soemartodjo, M.Si selaku pembimbing akademis penulis yang telah menjadi ibu kedua bagi penulis selama 4 tahun masa perkuliahan di Departemen Matematika.
3. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T. selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu Rahmi Rusin, S.Si., M.ScTech. selaku Sekretaris Departemen Matematika, Ibu Mila Novita S.Si, M.Si dan Bapak Arie Wibowo, S.Si, M.Si. selaku Koordinator Kemahasiswaan, Ibu Dr. Dian Lestari, DEA selaku Koordinator Pendidikan yang banyak membantu penulis dalam masa perkuliahan maupun organisasi selama penulis menjalani kuliah disini.
4. Ibu Dra. Netty Sunandi, M.Si, Ibu Dr. Dian Lestari, DEA, dan Ibu Sarini Abdullah, M.Stats selaku penguji kolokium penulis yang bersedia meluangkan waktunya untuk memberi kritik, saran, serta ilmu yang bermanfaat.
5. Seluruh bapak dan ibu dosen di Departemen Matematika yang telah mengajari penulis ilmu-ilmu yang penulis ingin ketahui.
6. Ibu dan Bapak penulis yang selalu mendoakan, mendukung, dan meyakinkan penulis bahwa penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan tepat waktu.

7. Teteh Nida dan Helmy selaku kakak dan adik penulis. Semoga kita bertiga bisa selalu membanggakan dan membahagiakan Ibu dan Bapak.
8. Ka Ajat Adriansyah, Bang Andy, Risya, Tute, Qq, Cindy dan Kokoh Hendry yang telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini serta pihak-pihak lain yang turut terlibat.
9. Seluruh staff tata usaha serta perpustakaan, Mba Santi, Pak Saliman, Pak Ansori, Mba Rusmi, Mba Via, Pak Turino, Mas Iwan, yang telah banyak membantu seluruh kegiatan penulis selama disini serta Mas Tatang dan Mas Wawan yang banyak membantu saat penulis membutuhkan bantuan.
10. Keluarga Matematika 2008 yang mengisi masa 4 tahun penulis dengan berbagai macam emosi. 2008 *as known as cheerful*, *friendly*, and 'gaul'. Semoga kekeluargaan ini terus berlanjut hingga ke Surga.
11. Sahabat-sahabat penulis yang setengah gila setengah waras tetapi selalu *full energy* (Qq, Sita, Cindy, Risya, Tuti, Ines, Dhila, Ade, Awe, Andy, Dheni, dan Adhi) yang bersama penulis menjalani masa-masa gila di Matematika.
12. Keluarga BEM FMIPA UI 2011, 2010, dan 2009 serta keluarga HMD Matematika 2009, 2010, dan 2011 terima kasih untuk semua kesempatan, kepercayaan, dan kebahagiaan yang diberikan kepada penulis.
13. Anak Kosan Wisma Karunia (Teteh Nida, Ka Nisa, Ka Nisu, Mba Vita, Ka Eka, Tuti, dan Hindun) yang mengisi masa 3,5 tahun penulis dan anak Kosan Wisma Kauhan (Tuti, Ines, Risya, Yiska, Prisna, Vely, dan Yufi) atas kegilaan-kegilaan tengah malam, kegalauan, serta perjalanan hidup yang sudah di-*share* kepada penulis.
14. Para penulis jurnal yang penulis gunakan dan Mr. Heij yang bersedia menjawab pertanyaan penulis.
15. Laptop Asus *εee* PC, handphone Samsung Champ, Google.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Nuruma Nurul Malik
NPM	:	0806452274
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Principal Covariate Regression pada Suatu Data Runtun Waktu.

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan observasi (observasibase), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 15 Juni 2012
Yang menyatakan

(Nuruma Nurul Malik)

ABSTRAK

Nama : Nuruma Nurul Malik
Program Studi : Matematika
Judul : *Principal Covariate Regression* pada Suatu Data Runtun Waktu

Skripsi ini membahas mengenai *principal covariate regression* pada suatu data runtun waktu. *Principal covariate regression* adalah suatu model regresi yang menggambarkan hubungan antara variabel respon dengan banyak variabel kovariat dengan taksiran parameternya diperoleh melalui peminimuman sebuah fungsi kriteria. Fungsi kriteria merupakan fungsi dari *error* peramalan dan *error* kompresi informasi variabel-variabel kovariat yang masing-masing sudah terboboti. Selanjutnya taksiran parameter ini disubstitusikan dalam Persamaan peramalan dan kemudian digunakan untuk meramal nilai variabel respon pada periode selanjutnya. Selain itu, pada tugas akhir ini juga diberikan contoh aplikasi peramalan runtun waktu dengan menggunakan *principal covariate regression*.

Kata Kunci : runtun waktu, banyak variabel kovariat, fungsi kriteria, peramalan, regresi, dan *principal covariate regression.*
xiv + 176 halaman ; 2 gambar, 2 tabel
Daftar Pustaka : 9 (1990 - 2008)

ABSTRACT

Name : Nuruma Nurul Malik
Program Study : Mathematics
Title : Principal Covariate Regression on Time series Data

This paper discusses about principal covariate regression on time series data. Principal covariate regression is a regression model describes a relation between response variable and a large number of covariate variables with the estimation parameters are obtained by minimizing a single criterion. A single criterion is a weighted of forecast error and of predictor compression error. Furthermore, the estimation parameters are substituted in forecast equation and used to forecast value of response variable for next period. Besides, this paper also gives an application of time series forecasting by principal covariate regression.

Keywords : time series, large number of covariate variables, single criterion, forecasting, regression, and principal covariate regression.
xiv + 176 pages ; 2 pictures, 2 tables
Bibliography : 9 (1990 – 2008)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Runtun waktu merupakan himpunan data yang diperoleh dari observasi suatu variabel respon pada titik atau interval waktu yang periodik dalam rentang waktu tertentu. Runtun waktu banyak digunakan di berbagai bidang, salah satunya di bidang makroekonomi dan bisnis. Beberapa contoh dari runtun waktu di bidang makroekonomi dan bisnis antara lain adalah runtun waktu produksi susu sapi dari Januari 1962-Desember 1975 dan runtun waktu temperatur bulanan di Dubuque, Iowa dari Januari 1964-Desember 1975 (Jonathan D. Cryer, 1998).

Dalam peramalan runtun waktu di bidang makroekonomi dan bisnis sering ditemui banyak variabel kovariat yang mempengaruhi variabel respon berdasarkan teori-teori ekonomi yang berlaku. Untuk menggambarkan hubungan antara variabel respon dengan variabel-variabel kovariat tersebut diperlukan sebuah model regresi yang dapat menjelaskan pola hubungan antara banyak variabel kovariat dan variabel respon. Kemudian model tersebut digunakan untuk meramalkan nilai variabel respon pada periode-periode selanjutnya (Heij dkk, 2006).

Akan tetapi, dalam membentuk sebuah model regresi diperlukan asumsi banyaknya variabel kovariat lebih sedikit atau sama dengan jumlah observasi dari setiap variabel. Artinya, jika sebanyak T observasi tersedia untuk variabel respon dan setiap variabel kovariat, maka untuk jumlah variabel kovariat yang lebih banyak dari jumlah observasi tidak dimungkinkan melakukan regresi linier berganda yang melibatkan semua variabel kovariat. Jika jumlah variabel kovariat sangat banyak, dimana banyaknya variabel kovariat lebih sedikit daripada jumlah observasi, maka juga tidak disarankan untuk membentuk model regresi linier yang melibatkan semua variabel kovariat karena hasil peramalan akan mempunyai variansi yang besar disebabkan *overfitting* (Heij dkk, 2006).

Ada banyak metode yang dapat digunakan dalam melakukan peramalan nilai variabel respon periode-periode selanjutnya yang melibatkan banyak variabel kovariat. Secara umum, metode tersebut terdiri atas dua langkah, yaitu sebagai langkah pertama informasi dari variabel-variabel kovariat diringkas menjadi sejumlah komponen utama yang relatif lebih sedikit jumlahnya. Selanjutnya langkah kedua, komponen utama tadi digunakan sebagai variabel kovariat baru untuk melakukan peramalan nilai variabel respon periode-periode selanjutnya (Heij dkk, 2006).

Akan tetapi, kerugian yang mungkin dari metode ini adalah pembentukan komponen utama dalam langkah pertama tidak langsung berkaitan penggunaannya dalam peramalan pada langkah kedua (Heij dkk, 2005). Untuk itu, sebagai metode alternatif De Jong and Kiers pada tahun 1992 memperkenalkan *principal covariate regression* (PCovR), yaitu model regresi yang menggambarkan pola hubungan antara variabel respon dengan banyak variabel kovariat dengan metode penaksiran parameter berupa peminimuman fungsi kriteria.

Fungsi kriteria merupakan fungsi yang menggabungkan dua langkah pada metode-metode sebelumnya, yaitu peringkasan informasi variabel-variabel kovariat menjadi komponen utama dan peramalan nilai variabel respon dengan menggunakan komponen utama sebagai variabel kovariat baru. Fungsi kriteria merupakan fungsi dari *error* peramalan dan *error* peringkasan informasi variabel-variabel kovariat yang masing-masing sudah terboboti (Heij dkk, 2006).

Selanjutnya, pada skripsi ini akan diaplikasikan model *principal covariate regression* pada suatu data runtun waktu.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana mengaplikasikan *principal covariate regression* pada suatu data runtun waktu.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah mengetahui cara mengaplikasikan *principal covariate regression* pada suatu data runtun waktu.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan dasar-dasar teori yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini, yaitu matriks dan operasi matriks dan analisis regresi.

2.1 Matriks dan Operasi Matriks

Berikut ini akan dijelaskan definisi matriks dan beberapa operasi matriks yang akan digunakan pada tugas akhir ini.

2.1.1 Definisi Matriks

Definisi 2. 1

Matriks adalah suatu susunan bilangan yang berbentuk segi empat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut entri dari matriks tersebut (Howard Anton, 1994).

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris dan kolom yang dikandungnya. Sebuah matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom (vektor kolom). Sedangkan matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris (vektor baris) (Howard Anton, 1994).

Pada tugas akhir ini, suatu matriks akan dinotasikan dengan dengan huruf kapital bercetak tebal dan vektor dinotasikan dengan huruf kecil bercetak tebal. Misalkan, suatu matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ dengan m baris dan n kolom dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Misalkan :

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ dan entri pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dari $\boldsymbol{A}$ dinotasikan sebagai berikut :

$$(\boldsymbol{A})_{ij} = a_{ij}.$$

Dua buah matriks didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang berpadanan sama (Howard Anton, 1994). Dalam notasi matriks, jika $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ mempunyai ukuran yang sama, maka $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{A})_{ij} = (\boldsymbol{B})_{ij}$, atau secara setara $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j (Howard Anton, 1994).

2.1.2 Operasi Matriks

Pada subbab ini akan dibahas beberapa operasi aritmatika yang berlaku pada matriks, yaitu penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Selain itu, akan dijelaskan pula definisi dari matriks bujur sangkar dan matriks identitas. Berikut ini adalah beberapa operasi aritmetika yang berlaku pada matriks :

1. Penjumlahan

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks-matriks berukuran sama seperti didefinisikan pada Persamaan (2.1), maka jumlah $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri $\boldsymbol{A}$ dengan entri $\boldsymbol{B}$ yang berpadanan. Dalam notasi matriks, jika $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ mempunyai ukuran yang sama, maka

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{ij} = (\boldsymbol{A})_{ij} + (\boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Untuk matriks yang ukurannya berbeda, penjumlahan tidak dapat dilakukan.

2. Pengurangan

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks-matriks pada Persamaan (2.1), maka selisih $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangi entri $\boldsymbol{A}$ dengan entri $\boldsymbol{B}$ yang berpadanan. Dalam notasi matriks, jika $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ mempunyai ukuran yang sama, maka

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})_{ij} = (\boldsymbol{A})_{ij} - (\boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Untuk matriks yang ukurannya berbeda, pengurangan tidak dapat dilakukan.

3. Perkalian

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times r$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $r \times n$, dimana :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

maka hasil kali $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari $\boldsymbol{AB}$, akan dipilih baris i dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan kolom j dari matriks $\boldsymbol{B}$. Kemudian entri-entri yang berpadanan tersebut dari baris dan kolom secara bersamaan dijumlahkan hasil kalinya.

Terdapat beberapa sifat operasi aritmetika pada matriks yang terdapat pada teorema berikut:

Teorema 2. 1

Misalkan $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, dan $\boldsymbol{C}$ adalah matriks-matriks dengan ukuran matriks memenuhi kondisi sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan :

a) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (hukum komutatif untuk penjumlahan)
b) $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$ (hukum asosiatif untuk penjumlahan)
c) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ (hukum asosiatif untuk pengurangan)
d) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$ (hukum distributif kiri)
e) $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{BC}$ (hukum distributif kanan)
f) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AC}$
g) $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BC}$
h) $a(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = a\boldsymbol{B} + a\boldsymbol{C}$
i) $a(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) = a\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{C}$
j) $(a + b)\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{C} + b\boldsymbol{C}$
k) $(a - b)\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{C} - b\boldsymbol{C}$
l) $a(b\boldsymbol{C}) = (ab)\boldsymbol{C}$
m) $a(\boldsymbol{BC}) = (a\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(a\boldsymbol{C})$

(Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.1 dapat dilihat pada lampiran 1.

Berikut ini adalah definisi dan contoh matriks-matriks yang sering digunakan, yaitu matriks bujur sangkar dan matriks identitas.

a. Matriks Bujur Sangkar

Definisi 2. 2

Sebuah matriks $\boldsymbol{U}$ dengan n baris dan n kolom disebut matriks bujur sangkar berorde n, dan entri-entri $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$ disebut sebagai diagonal utama dari $\boldsymbol{U}$ (Howard Anton, 1994).

Dimana matriks $\boldsymbol{U}$ dinotasikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Sebagai contoh, yaitu :

$$\boldsymbol{U}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan seterusnya.}$$

b. Matriks Identitas

Definisi 2. 3

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar dengan entri pada diagonal utamanya adalah 1 dan 0 untuk entri selain diagonal utama (Howard Anton, 1994).

Secara umum sebuah matriks identitas dengan baris n dan kolom n dinotasikan $\boldsymbol{I}_{n\times n}$ atau $\boldsymbol{I}_n$.

Sebagai contoh :

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan seterusnya.}$$

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks berukuran $m \times n$ seperti didefinisikan pada Persamaan (2.1), maka :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A};\ \ \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

2.1.3 Transpos Matriks dan Sifat-Sifatnya

Transpos dari suatu matriks $\boldsymbol{A}$, dimana $\boldsymbol{A}$ didefinisikan seperti Persamaan (2.2), yaitu :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix}$$

didapat dengan cara menukarkan baris dengan kolom dari matriks $\boldsymbol{A}$ tersebut ataupun sebaliknya. Notasi dari transpos matriks $\boldsymbol{A}$ adalah $\boldsymbol{A}^T$ atau $\boldsymbol{A}'$. Sehingga, jika matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times r$, yang entri-entrinya dinotasikan dengan a_{ij}, maka $\boldsymbol{A}^T$ adalah matriks yang berukuran $r \times m$, dinyatakan dengan:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix}$$

dan entri ke (i, j) dari $\boldsymbol{A}^T$ adalah a_{ji}.

Teorema 2. 2

Misalkan $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks-matriks dengan ukuran matriks memenuhi kondisi sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan :

a) $((\boldsymbol{A})^T)^T = \boldsymbol{A}$.

b) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$ dan $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{B}^T$.

c) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$ dengan k adalah sebuah skalar.

d) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

(Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.2 dapat dilihat pada lampiran 2.

2.1.4 *Trace* Matriks dan Sifat-Sifatnya

Jika $\boldsymbol{U}$ adalah suatu matriks bujur sangkar yang didefinisikan pada Persamaan (2.3), yaitu :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

maka *trace* $\boldsymbol{U}$, dinyatakan dengan tr($\boldsymbol{U}$), didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama $\boldsymbol{U}$. Atau secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\text{tr}(\boldsymbol{U}) = u_{11} + u_{22} + \cdots + u_{nn} = \sum_{i=1}^{n} u_{ii}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Trace $\boldsymbol{U}$ tidak terdefinisi jika $\boldsymbol{U}$ bukan matriks bujur sangkar (Howard Anton, 1994).

Teorema dan lemma berikut ini adalah mengenai beberapa sifat utama dari operasi *trace*.

Lemma 2. 1

Misalkan $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}^T$ adalah matriks berukuran $m \times n$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^T = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & \ldots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \ldots & d_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{1m} & d_{2m} & \ldots & d_{nm} \end{bmatrix}$$

Maka $\text{tr}(\boldsymbol{CD}) = \text{tr}(\boldsymbol{DC})$ (Howard Anton, 1994).

Bukti Lemma 2.1 dapat dilihat pada lampiran 3.

Lemma 2. 2

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $n \times l$ maka

$$\text{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \text{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}).$$

Bukti Lemma 2.2 dapat dilihat pada lampiran 4.

2.1.5 Invers Matriks dan Sifat-Sifatnya

Jika $\boldsymbol{U}$ adalah suatu matriks bujur sangkar didefinisikan sesuai Persamaan (2.3), yaitu:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

dan jika sebuah matriks $\boldsymbol{P}$ yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $\boldsymbol{UP} = \boldsymbol{PU} = \boldsymbol{I}$, maka $\boldsymbol{U}$ disebut bisa dibalik dan $\boldsymbol{P}$ disebut invers dari $\boldsymbol{U}$ (Howard Anton, 1994).

Berikut ini akan dicantumkan beberapa teorema mengenai sifat-sifat dari operasi invers.

Teorema 2. 3

Jika $\boldsymbol{P}$ dan $\boldsymbol{Q}$ keduanya adalah invers matriks $\boldsymbol{U}$, maka $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$ (Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.3 dapat dilihat pada lampiran 5.

Teorema 2. 4

Matriks $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus :

$$\boldsymbol{U^{-1}} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.4 dapat dilihat pada lampiran 6.

Teorema 2. 5

Jika $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ dapat dibalik dan berukuran sama, dan $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

maka

a) $\boldsymbol{UV}$ dapat dibalik.

b) $(\boldsymbol{UV})^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$.

(Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.5 dapat dilihat pada lampiran 7.

Teorema 2. 6

Jika $\boldsymbol{U}$ adalah sebuah matriks yang dapat dibalik, maka $\boldsymbol{U^T}$ juga dapat dibalik dan $(\boldsymbol{U^T})^{-1} = (\boldsymbol{U^{-1}})^T$ (Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.6 dapat dilihat pada lampiran 8.

2.1.6 *Rank* dan *Nullity*

Sebelum membahas mengenai *rank* dan *nullity* terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai definisi dari vektor baris dan vektor kolom.

Definisi 2. 4 Vektor Baris dan Vektor Kolom

Misalkan sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times n$ didefinisikan pada persaman (2.1), yaitu :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vektor-vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ \mathbf{r}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

di R^n membentuk baris dari $\boldsymbol{A}$ yang disebut sebagai vektor baris dari $\boldsymbol{A}$, dan vektor-vektor:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

di R^m membentuk kolom dari $\boldsymbol{A}$ yang disebut sebagai vektor kolom dari $\boldsymbol{A}$ (Howard Anton, 1994).

Definisi 2. 5 Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang *Null*

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, maka subruang R^n yang terentang oleh vektor-vektor baris dari $\boldsymbol{A}$ disebut ruang baris dari $\boldsymbol{A}$, dan subruang R^m yang terentang oleh vektor-vektor kolom dari $\boldsymbol{A}$ disebut ruang kolom dari $\boldsymbol{A}$. Ruang penyelesaian dari sistem Persamaan homogen $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yang merupakan suatu subruang dari R^n disebut ruang *null* dari $\boldsymbol{A}$ (Howard Anton, 1994).

Definisi 2. 6 *Rank* dan *Nullity*

Dimensi bersama dari ruang baris dan ruang kolom dari sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ berukuan $m \times n$ disebut sebagai *rank* dari $\boldsymbol{A}$ dan dinotasikan sebagai *rank*$(\boldsymbol{A})$. Dimensi ruang kosong dari $\boldsymbol{A}$ disebut sebagai *nullity* dari $\boldsymbol{A}$ dinotasikan sebagai *nullity*$(\boldsymbol{A})$ (Howard Anton, 1994).

2.1.7 Matriks-Matriks Khusus

Berikut ini akan dibahas beberapa matriks khusus, yaitu matriks ortogonal, matriks simetris, matriks diagonal, matriks *pseudodiagonal*, matriks definit positif, dan matriks *similar*.

2.1.7.1 Matriks Ortogonal

Berikut ini akan dijabarkan definisi dari matriks ortogonal.

Definisi 2. 7

Sebuah matriks bujur sangkar $\boldsymbol{U}$ berukuran $n \times n$ dengan sifat $\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U}^{-1}$ disebut sebagai matriks ortogonal (Howard Anton, 1994).

Sebagai contoh :

Akan dibuktikan $\boldsymbol{U}$ adalah matriks ortogonal, dimana $\boldsymbol{U}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Bukti :

Akan ditunjukkan $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_3$

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_3$$

Karena $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_3$ terbukti bahwa $\boldsymbol{U}$ adalah matriks ortogonal.

2.1.7.2 Matriks Simetris

Definisi 2. 8

Suatu matriks bujur sangkar $\boldsymbol{U}$ berukuran $n \times n$ disebut simetris jika $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T$ (Howard Anton, 1994).

Sebagai contoh :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Berikut ini adalah teorema mengenai sifat-sifat dari matriks simetris.

Teorema 2. 7

Jika $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks-matriks simetris dengan ukuran $n \times n$, dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

dan jika k adalah sebarang skalar, maka:

a) $\boldsymbol{U}^T$ simetris.

b) $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}$ simetris.

c) $k\boldsymbol{U}$ dan $k\boldsymbol{V}$ adalah simetris.

(Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.7 dapat dilihat pada lampiran 9.

Teorema 2. 8

Jika $\boldsymbol{U}$ adalah suatu matriks simetris yang dapat dibalik maka $\boldsymbol{U}^{-1}$ adalah matriks simetris (Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.8 dapat dilihat pada lampiran 10.

Lemma 2. 3

$\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks-matriks berukuran $n \times n$ yang didefinisikan pada Persamaan (2.4) dimana $\boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris, maka $\mathrm{tr}(\boldsymbol{UV}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{V})$ (Chipman, J. S).

Bukti Lemma 2.2 dapat dilihat pada lampiran 11.

2.1.7.3 Matriks *Pseudodiagonal*

Definisi 2. 9

Sebuah matrik $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$ berukuran $m \times n$ disebut matriks *pseudodiagonal* jika $d_{ij} = 0$ saat $i \neq j$ (Jacob B, 1990).

Entri diagonal dari suatu matriks *pseudodiagonal* adalah $d_{ij}, i = j$.

Sebagai contoh :

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.7.4 Matriks Diagonal

Definisi 2. 10

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua entri selain diagonal utamanya nol (Howard Anton, 1994).

Suatu matriks diagonal $\boldsymbol{D}$ berukuran $n \times n$ dapat dinotasikan sebagai:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

Berikut ini adalah contoh matriks diagonal :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix};\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.7.5 Matriks Definit Positif

Berikut ini akan diberikan definisi dari matriks definit positif.

Definisi 2. 11

Sebuah matriks simetris $\boldsymbol{A}$ dikatakan definit positif jika $\mathbf{x}^T\boldsymbol{A}\mathbf{x} > 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq 0$. (Howard Anton, 1994).

2.1.7.6 Matriks *Similar*

Berikut ini akan diberikan definisi dari matriks *similar*.

Definisi 2. 12

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks bujur sangkar, $\boldsymbol{B}$ dikatakan *similar* dengan $\boldsymbol{A}$ jika terdapat matriks $\boldsymbol{P}$ yang sedemikian sehingga $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ (Howard Anton, 1994).

2.1.8 Turunan Matriks

Berikut ini akan dibahas beberapa teorema mengenai turunan matriks.

Teorema 2. 9

Misalkan matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dan matriks $\boldsymbol{X}$ adalah matriks berukuran $n \times m$, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

Hasil perkalian $\boldsymbol{AX}$ merupakan mariks bujur sangkar berukuran $m \times m$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{AX} = \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1} & \dots & a_{11}x_{1m} + \cdots + a_{1n}x_{nm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_{11} + \cdots + a_{mn}x_{n1} & \dots & a_{m1}x_{1m} + \cdots + a_{mn}x_{nm} \end{bmatrix}$$

maka

$$\frac{\partial \mathrm{tr}(\boldsymbol{AX})}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T$$

(Rencher, A. C,1998).

Bukti Teorema 2.9 dapat dilihat pada lampiran 12.

Teorema 2. 10

Misalkan $\mathbf{x}$ adalah vektor berukuran $n \times 1$, $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetris berukuran $n \times n$ dan $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ adalah vektor berukuran $1 \times n$.

Bentuk $\mathbf{x}^T\boldsymbol{A}\mathbf{x}$ adalah

$$\mathbf{x}^T\boldsymbol{A}\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dimana $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetris, maka

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T\boldsymbol{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\boldsymbol{A}\mathbf{x}.$$

(Rencher, A. C,1998).

Bukti Teorema 2.10 dapat dilihat pada pada lampiran 13.

2.1.9 Ruang Vektor

Pada subbab kali ini akan dibahas mengenai ruang vektor, ruang hasil kali dalam, dan contoh dari ruang vektor dan ruang hasil kali dalam.

Definisi 2. 13

Misalkan V adalah sebarang himpunan tak kosong dari objek dimana dua operasi didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Yang dimaksud penjumlahan adalah aturan yang menghubungkan setiap pasangan objek $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam V dengan suatu objek $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, yang disebut sebagai jumlah $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$. Sedangkan perkalian skalar adalah aturan yang menghubungkan setiap skalar k dan $\mathbf{u}$ dalam V dengan suatu objek $k\mathbf{u}$, yang disebut sebagai perkalian skalar dari

$\mathbf{u}$ dengan k. Jika aksioma berikut ini terpenuhi oleh semua objek $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ dalam V dan semua skalar k dan l, maka V disebut sebagai ruang vektor dan objek dalam V disebut sebagai vektor.

1. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah objek-objek dalam V, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ berada dalam V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
4. Terdapat elemen $\mathbf{0}$ dalam V, yang disebut vektor nol untuk V sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0}$ untuk semua $\mathbf{u}$ dalam V.
5. Untuk setiap $\mathbf{u}$ dalam V, terdapat $-\mathbf{u}$ dalam V, yang disebut sebagai negatif dari $\mathbf{u}$, sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. Jika k adalah sebarang skalar dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang objek dalam V, maka $k\mathbf{u}$ berada dalam V.
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$.
8. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$.
9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

(Howard Anton, 1994).

Sebuah ruang vektor dengan komponen skalarnya adalah bilangan kompleks, maka ruang vektor disebut sebagai ruang vektor kompleks. Akan tetapi, jika sebuah ruang vektor dengan komponen skalarnya adalah bilangan real, maka ruang vektor disebut sebagai ruang vektor real (Howard Anton, 1994).

Berikut ini akan diberikan dua contoh dari ruang vektor beserta pembuktiannya.

1. Akan dibuktikan $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) | r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}\}$ adalah ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian standar, yaitu :

   untuk $k \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

   Operasi penjumlahan : $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)$

   $= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$

   Operasi perkalian : $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$

a. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ adalah himpunan tak kosong

   Bukti : Terdapat $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ sehingga $\mathbb{R}^n$ bukan himpunan kosong.

b. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ memenuhi 10 aksioma ruang vektor.

Bukti :

i. Akan dibuktikan:

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah objek-objek dalam $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ berada dalam $\mathbb{R}^n$.

Ambil : $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

dimana $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

Penjumlahan dari kedua elemen tersebut adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)\\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)\end{aligned}$$

karena u_i dan v_i dimana $i = 1, 2, \dots, n$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ maka $u_i + v_i$ dimana $i = 1, 2, \dots, n$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ sehingga $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ tertutup terhadap penjumlahan.

ii. Akan dibuktikan : $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

Ambil : $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

dimana $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

$\mathbf{v} = (v, v_2, \dots, v_n), \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

Penjumlahan dari kedua elemen tersebut adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)\\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)\end{aligned}$$

karena u_i dan v_i dimana $i = 1, 2, \dots, n$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ maka berlaku $u_i + v_i = v_i + u_i$ dimana $i = 1, 2, \dots, n$ sehingga $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)\\ &= (v_1+u_1, v_2+u_2, \dots, v_n+u_n)\\ &= \mathbf{v}+\mathbf{u}.\end{aligned}$$

iii. Akan dibuktikan : $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

Ambil : $\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

dimana $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

$\mathbf{v} = (v, v_2, \dots, v_n), \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n), \forall w_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

Penjumlahan dari $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) + \big((v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n)\big)$$
$$= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$
$$= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \dots, u_n + (v_n + w_n))$$

karena u_i, v_i , dan v_i dimana $i = 1, 2, \dots, n$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ maka berlaku sifat asosiatif terhadap penjumlahan vektor sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$
$$= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \dots, u_n + (v_n + w_n))$$
$$= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, \dots, u_n + v_n + w_n)$$
$$= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \dots, (u_n + v_n) + w_n)$$
$$= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

iv. Akan dibuktikan :

Terdapat elemen $\mathbf{0}$ dalam $\mathbb{R}^n$, yang disebut vektor nol untuk $\mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0}$ untuk semua $\mathbf{u}$ dalam $\mathbb{R}^n$.

Diketahui sebelumnya terdapat $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = (0, 0, \dots, 0) + (u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{2.5}$$
$$= (0 + u_1, 0 + u_2, \dots, 0 + u_n)$$

Karena 0 elemen identitas terhadap penjumlahan di $\mathbb{R}$ dan dan $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ maka Persamaan (2.5) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$= (0 + u_1, 0 + u_2, \dots, 0 + u_n)$$
$$= (u_1, u_2, \dots, u_n)$$
$$= \mathbf{u}$$

Berlaku sifat komutatif terhadap penjumlahan sehingga

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

v. Akan dibuktikan :

Untuk setiap $\mathbf{u}$ dalam $\mathbb{R}^n$, terdapat $-\mathbf{u}$ dalam $\mathbb{R}^n$, yang disebut sebagai negatif dari $\mathbf{u}$, sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ambil : $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

Akan dicari : $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

dimana

$$\mathbf{u} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(u_1 + a_1, u_2 + a_2, \dots, u_n + a_n) = (0, 0, \dots, 0) \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$u_i + a_i = 0$$

$$a_i = -u_i$$

Karena $u_i + a_i = 0$ maka negatif dari u_i adalah $a_i = -u_i$. Oleh karena itu, $\mathbf{a} = (-\mathbf{u})$.

vi. Akan dibuktikan :

Jika k adalah sebarang skalar dan **u** adalah sebarang objek dalam $\mathbb{R}^n$, maka $k\mathbf{u}$ berada dalam $\mathbb{R}^n$.

Ambil : $k \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

Maka, perkalian skalar terhadap vektor adalah sebagai berikut :

$$k\mathbf{u} = k(u_1, u_2, \dots, u_n) = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

Karena k, u_i dimana $i = 1, 2, \dots, n$ elemen $\mathbb{R}$ maka ku_i dimana $i = 1, 2, \dots, n$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $k\mathbf{u}$ berada di $\mathbb{R}^n$.

vii. Akan dibuktikan : $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$.

Ambil : $k \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

Maka,

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ &= (k(u_1 + v_1), k(u_2 + v_2), \dots, k(u_n + v_n)) \\ &= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2, \dots, ku_n + kv_n) \\ &= (ku_1, ku_2, \dots, ku_n) + (kv_1, kv_2, \dots, kv_n) \\ &= k(u_1, u_2, \dots, u_n) + k(v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= k\mathbf{u} + k\mathbf{v} \end{aligned}$$

viii. Akan dibuktikan : $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

Ambil : $k, l \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

Maka,

$$\begin{aligned}(k+l)\mathbf{u} &= (k+l)(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= ((k+l)u_1, (k+l)u_2, \dots, (k+l)u_n) \\ &= (ku_1 + lu_1, ku_2 + lu_2, \dots, ku_n + lu_n) \\ &= (ku_1, ku_2, \dots, ku_n) + (lu_1, lu_2, \dots, lu_n) \\ &= k(u_1, u_2, \dots, u_n) + l(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= k\mathbf{u} + l\mathbf{v}\end{aligned}$$

ix. Akan dibuktikan : $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

Ambil : $k \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

Maka,

$$\begin{aligned}k(l\mathbf{u}) &= k(lu_1, lu_2, \dots, lu_n) \\ &= (klu_1, klu_2, \dots, klu_n) \\ &= kl(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= (kl)\mathbf{u}.\end{aligned}$$

x. Jika $1 \in \mathbb{R}$ akan dibuktikan $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Diketahui terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2, \dots, u_n) = (1u_1, 1u_2, \dots, 1u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbf{u}$

Berdasarkan uraian di atas karena $\mathbb{R}^n$ bukan himpunan kosong dan memenuhi 10 aksioma ruang vektor maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang vektor.

2. Akan dibuktikan $\boldsymbol{M}_{n\times k} = \left\{ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \middle| \, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nk} \in \mathbb{R} \right\}$ adalah ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian standar, yaitu:

Ambil : $k \in \mathbb{R}$ dan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$

Operasi penjumlahan : $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2k} + b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} \end{bmatrix}$$

Operasi perkalian : $k\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1k} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nk} \end{bmatrix}$

a. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ bukan himpunan kosong

   Karena $\mathbb{R}$ adalah ruang vektor maka terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga terdapat matriks $\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

   Maka $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$ dan $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ bukan himpunan kosong.

b. Akan ditunjukkan $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ memenuhi 10 aksioma ruang vektor

   i. Akan dibuktikan :

      Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah objek-objek dalam $\boldsymbol{M}_{n\times k}$, maka $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ berada dalam $\boldsymbol{M}_{n\times k}$

      Ambil :

      $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k} \text{ ; } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

      dimana $a_{ij}, b_{ij}, i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ adalah elemen $\mathbb{R}$. Penjumlahan dari kedua matriks tersebut adalah sebagai berikut :

      $$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

      $$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2k} + b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} \end{bmatrix}$$

karena $a_{ij}, b_{ij}, i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ maka, $a_{ij} + b_{ij}$ juga merupakan elemen $\mathbb{R}$. Maka, dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ tertutup terhadap penjumlahan.

ii. Akan dibuktikan : $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

Ambil :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k} \; ; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

dimana $a_{ij}, b_{ij}, i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ adalah elemen $\mathbb{R}$. Maka,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2k} + b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} \end{bmatrix}$$

karena $a_{ij}, b_{ij}, i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ maka berlaku $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2k} + b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & \cdots & b_{1k} + a_{1k} \\ b_{21} + a_{21} & \cdots & b_{2k} + a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} + a_{n1} & \cdots & b_{nk} + a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$

iii. Akan dibuktikan : $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$

Ambil :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

dimana a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $i = 1, 2, ..n; j = 1, 2, \dots, k$ adalah elemen $\mathbb{R}$.

Maka,

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & \cdots & b_{1k} + c_{1k} \\ b_{21} + c_{21} & \cdots & b_{2k} + c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} + c_{n1} & \cdots & b_{nk} + c_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+(b_{11} + c_{11}) & \cdots & a_{1k}+(b_{1k} + c_{1k}) \\ a_{21}+(b_{21} + c_{21}) & \cdots & a_{2k}+(b_{2k} + c_{2k}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+(b_{n1} + c_{n1}) & \cdots & a_{nk}+(b_{nk} + c_{nk}) \end{bmatrix}$$

karena $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, i = 1, 2, ..n; j = 1, 2, \dots, k$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ sehingga berlaku sifat asosiatif terhadap penjumlahan matriks maka $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \begin{bmatrix} a_{11}+(b_{11} + c_{11}) & \cdots & a_{1k}+(b_{1k} + c_{1k}) \\ a_{21}+(b_{21} + c_{21}) & \cdots & a_{2k}+(b_{2k} + c_{2k}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+(b_{n1} + c_{n1}) & \cdots & a_{nk}+(b_{nk} + c_{nk}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) + c_{11} & \cdots & (a_{1k}+b_{1k}) + c_{1k} \\ (a_{21}+b_{21}) + c_{21} & \cdots & (a_{2k}+b_{2k}) + c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1}) + c_{n1} & \cdots & (a_{nk}+b_{nk}) + c_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nk}+b_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$$

iv. Akan dibuktikan :

Terdapat elemen $\mathbf{0}$ dalam $\boldsymbol{M}_{n\times k}$, sedemikian sehingga $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$ berlaku $\mathbf{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \mathbf{0}$.

Diketahui terdapat $\mathbf{0} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$.

Ambil : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$

dimana $a_{ij}, i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ adalah elemen $\mathbb{R}$. Maka,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 + a_{11} & \cdots & 0 + a_{1k} \\ 0 + a_{21} & \cdots & 0 + a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 + a_{n1} & \cdots & 0 + a_{nk} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Karena 0 elemen identitas terhadap penjumlahan di $\mathbb{R}$ dan $a_{ij},$ $i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ merupakan elemen $\mathbb{R}$ maka Persamaan (2.7) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 + a_{11} & \cdots & 0 + a_{1k} \\ 0 + a_{21} & \cdots & 0 + a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 + a_{n1} & \cdots & 0 + a_{nk} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

v. Akan dibuktikan :

Untuk setiap $\boldsymbol{A}$ dalam $\boldsymbol{M}_{n\times k}$, terdapat $-\boldsymbol{A}$ dalam $\boldsymbol{M}_{n\times k}$, yang disebut sebagai negatif dari $\boldsymbol{A}$, sedemikian sehingga $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = (-\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

Ambil : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$

Misalkan : $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1k} \\ -a_{21} & \cdots & -a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$,

dimana $a_{ij}, c_{ij}\ i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, \dots, k$ adalah elemen $\mathbb{R}$.

Karena $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1k} \\ -a_{21} & \cdots & -a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nk} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & \cdots & a_{1k} + (-a_{1k}) \\ a_{21} + (-a_{21}) & \cdots & a_{2k} + (-a_{2k}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + (-a_{n1}) & \cdots & a_{nk} + (-a_{nk}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1k} \\ -a_{21} & \cdots & -a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-a_{11}) + a_{11} & \cdots & (-a_{1k}) + a_{1k} \\ (-a_{21}) + a_{21} & \cdots & (-a_{2k}) + a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ (-a_{n1}) + a_{n1} & \cdots & (-a_{nk}) + a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ Maka, $\boldsymbol{C} = -\boldsymbol{A}$ adalah negatif dari $\boldsymbol{A}$.

vi. Akan dibuktikan :

Jika k adalah sebarang skalar dan $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang objek dalam $\boldsymbol{M}_{n\times k}$, maka $k\boldsymbol{A}$ berada dalam $\boldsymbol{M}_{n\times k}$.

Ambil : $k \in \mathbb{R}$ dan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$

dimana $a_{ij}, i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, \dots, k$ adalah elemen $\mathbb{R}$.

Maka, $k\boldsymbol{A} = k \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1k} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nk} \end{bmatrix}$

k, a_{ij} $i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ merupakan elemen ℝ maka ka_{ij}, $i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ juga merupakan elemen ℝ sedemikian sehingga $k\boldsymbol{A}$ elemen $\boldsymbol{M}_{n \times k}$.

vii. Akan dibuktikan : $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{C}$

Ambil : $k \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n \times k}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n \times k}$$

dimana a_{ij}, c_{ij} $i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, ..., k$ adalah elemen ℝ.

Maka,

$$k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}) = k \begin{bmatrix} a_{11} + c_{11} & \dots & a_{1k} + c_{1k} \\ a_{21} + c_{21} & \dots & a_{2k} + c_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + c_{n1} & \dots & a_{nk} + c_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k(a_{11} + c_{11}) & \dots & k(a_{1k} + c_{1k}) \\ k(a_{21} + c_{21}) & \dots & k(a_{2k} + c_{2k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(a_{n1} + c_{n1}) & \dots & k(a_{nk} + c_{nk}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} + kc_{11} & \dots & ka_{1k} + kc_{1k} \\ ka_{21} + kc_{21} & \dots & ka_{2k} + kc_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} + kc_{n1} & \dots & ka_{nk} + kc_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1k} \\ ka_{21} & \dots & ka_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \dots & ka_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kc_{11} & \dots & kc_{1k} \\ kc_{21} & \dots & kc_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ kc_{n1} & \dots & kc_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= k \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{C}$$

viii. Akan dibuktikan : $(k + l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$

Ambil : $k, l \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

dimana $a_{ij}, i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, \dots, k$ adalah elemen di $\mathbb{R}$.

Maka,

$$(k+l)\boldsymbol{A}_{n\times k} = (k+l)\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (k+l)a_{11} & \dots & (k+l)a_{1k} \\ (k+l)a_{21} & \dots & (k+l)a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (k+l)a_{n1} & \dots & (k+l)a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} + la_{11} & \dots & ka_{1k} + la_{1k} \\ ka_{21} + la_{21} & \dots & ka_{2k} + la_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} + la_{n1} & \dots & ka_{nk} + la_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1k} \\ ka_{21} & \dots & ka_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \dots & ka_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} la_{11} & \dots & la_{1k} \\ la_{21} & \dots & la_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ la_{n1} & \dots & la_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= k\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$$

ix. Akan dibuktikan : $k(l\boldsymbol{A}) = (kl)\boldsymbol{A}$

Ambil : $k, l \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

dimana $a_{ij}, i = 1, 2, .. n; j = 1, 2, \dots, k$ adalah elemen di $\mathbb{R}$.

Maka,

$$k(l\boldsymbol{A}_{n\times k}) = k\begin{bmatrix} la_{11} & \dots & la_{1k} \\ la_{21} & \dots & la_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ la_{n1} & \dots & la_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} kla_{11} & \dots & kla_{1k} \\ kla_{21} & \dots & kla_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ kla_{n1} & \dots & kla_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= kl \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= (kl)\, \boldsymbol{A}_{n\times k}$$

x. Akan dibuktikan : $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, 1 \in \mathbb{R}$

Ambil : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$

dimana $a_{ij}, i = 1,2,..n; j = 1,2,\dots,k$ adalah elemen di $\mathbb{R}$.

Terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$1\boldsymbol{A} = 1 \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a_{11} & \dots & 1a_{1k} \\ 1a_{21} & \dots & 1a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1a_{n1} & \dots & 1a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

Berdasarkan uraian di atas karena $M_{n\times k}$ bukan himpunan kosong dan memenuhi 10 aksioma ruang vektor maka dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ adalah ruang vektor.

2.1.9.1 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2. 14

Misalkan V adalah sebuah ruang vektor real. Sebuah hasil kali dalam pada V adalah fungsi yang menghubungkan setiap pasang vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di V dengan bilangan real $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ sedemikian sehingga aksioma berikut dipenuhi oleh vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ di V dan sebarang skalar k.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, dimana $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Sebuah ruang vektor real yang memenuhi 4 aksioma hasil kali dalam disebut sebagai ruang hasil kali dalam (Howard Anton, 1994).

Berikut ini adalah definisi dari *norm* sebuah vektor **u** di ruang hasil kali dalam.

Definisi 2. 15

Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam, maka *norm* dari sebuah vektor **u** di V dinotasikan dengan $\|\mathbf{u}\|$ dan didefinisikan oleh

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

(Howard Anton, 1994).

Berikut ini akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ dan $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ adalah ruang hasil kali dalam.

1. Akan dibuktikan :

   $\mathbb{R}^n$ adalah ruang hasil kali dalam dengan hasil kali dalam *Euclidean* didefinisikan sebagai berikut :

   Misalkan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah sebarang vektor di $\mathbb{R}^n$, maka hasil kali dalam *Euclidean* adalah sebagai berikut :

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

   Akan ditunjukkan :

   Setiap vektor dan skalar di $\mathbb{R}^n$ memenuhi 4 aksioma hasil kali dalam

   i. Aksioma kesimetrisan

      Bukti :

      Ambil : $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

      dimana $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

      $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

      Hasil kali dalam sebagai berikut

      $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \tag{2.8}$$

      Karena $\forall v_i, u_i$ dimana $i = 1, 2, \dots, n$ elemen di $\mathbb{R}$ sehingga berlaku sifat asosiatif terhadap perkalian, yaitu $u_iv_i = v_iu_i$. Sedemikian sehingga Persamaan (2.8) dapat dituliskan menjadi :

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

ii. Aksioma penjumlahan

Ambil : $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

dimana $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n), \forall w_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

maka,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \cdots + (u_n + v_n)w_n \\ &= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + \cdots + u_nw_n + v_nw_n \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\end{aligned}$$

iii. Aksioma kehomogenan

Ambil : $k \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

dimana: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \forall u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

Maka,

$$\begin{aligned}\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + \cdots + (ku_n)v_n \\ &= ku_1v_1 + ku_2v_2 + \cdots + ku_nv_n) \\ &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) \\ &= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\end{aligned}$$

iv. Aksioma kepositifan

Ambil : $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

dimana: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = v_1v_1 + v_2v_2 + \cdots + v_nv_n = {v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2$

Karena ${v_1}^2, {v_2}^2, \dots, {v_n}^2$ bernilai nonnegatif, maka nilai $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$

Akan dibuktikan : $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Bukti :

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = {v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2 = 0$$

Untuk memenuhi Persamaan ini $\mathbf{v}$ yang mungkin hanya $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

2. $\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = {v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2 = 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 0$$

Berdasarkan uraian di atas karena $\mathbb{R}^n$ adalah ruang vektor dan memenuhi 4 aksioma ruang hasil kali dalam maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang hasil kali dalam. Karena hasil kali dalam yang digunakan adalah hasil kali dalam *Euclidean* maka ruang ruang hasil kali dalamnya disebut sebagai ruang hasil kali dalam *Euclidean*.

Berdasarkan Definisi 2.12, maka dapat didefinisikan *Euclidean norm* dari sebuah vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di $\mathbb{R}^n$ adalah sebagai berikut:

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2} \tag{2.9}$$

Berikut ini akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ adalah ruang hasil kali dalam.

1. Akan dibuktikan :

$$\boldsymbol{M}_{n\times k} = \left\{ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nk} \end{bmatrix} \middle| \, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nk} \in \mathbb{R} \right\}$$

adalah ruang hasil kali dalam dengan didefinisikan hasil kali dalam sebagai berikut :

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A})$$

dengan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & \ldots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} \end{bmatrix}$ adalah sebarang vektor di $\boldsymbol{M}_{n\times k}$.

Akan ditunjukkan :

Setiap vektor di $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ memenuhi 4 aksioma hasil kali dalam

i. Aksioma kesimetrisan

Ambil : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

dengan $a_{ij}, b_{ij}, i = 1, 2, . . n; j = 1, 2, \dots, k$ adalah elemen di $\mathbb{R}$.

Maka,

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}) \tag{2.10}$$

berdasarkan Lemma 2.1 pada Subbab 2.1.3 Persamaan (2.10) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A})^T = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B}) = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \rangle$$

Karena $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \rangle$, terbukti bahwa $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ memenuhi aksioma kesimetrisan.

ii. Aksioma penjumlahan

Ambil :

dimana $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k};$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n\times k}$$

dengan $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} i = 1, 2, . . n; j = 1, 2, \dots, k$ adalah elemen $\mathbb{R}$.

Maka,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \rangle &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}^T (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})) \\ &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{B}) \\ &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{B}) \\ &= \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \rangle + \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \rangle \end{aligned}$$

Karena $\langle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \rangle = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \rangle + \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \rangle$, terbukti bahwa $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ memenuhi aksioma penjumlahan.

iii. Aksioma kehomogenan

Ambil : $k \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n \times k}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n \times k}$$

maka,

$\langle k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{tr}(k\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}) = k\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}) = k\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$

Karena $\langle k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = k\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$, terbukti bahwa $\boldsymbol{M}_{n \times k}$ memenuhi aksioma kehomogenan.

iv. Aksioma kepositifan

Ambil : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M}_{n \times k}$

Maka,

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} {a_{ij}}^2$$

Karena ${a_{ij}}^2$ bernilai nonnegatif, maka nilai $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle \geq 0$

Akan dibuktikan : $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Bukti :

1. $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle = 0 \rightarrow \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} {a_{ij}}^2 = 0$$

Untuk memenuhi Persamaan ini $\boldsymbol{A}$ yang mungkin hanya $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$

2. $\boldsymbol{A} = \mathbf{0} \rightarrow \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle = 0$

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} {a_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 0^2 = 0$$

Berdasarkan uraian di atas karena $\boldsymbol{M}_{n \times k}$ adalah ruang vektor dan memenuhi 4 aksioma ruang vektor maka dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{M}_{n \times k}$ adalah ruang hasil kali dalam.

Berdasarkan Definisi 2.12, maka dapat didefinisikan *Frobenius norm* dari sebuah matriks $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$ di $\boldsymbol{M}_{n\times k}$ adalah sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{X}\| = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^{1/2} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} {x_{ij}}^2 \right)^{1/2} \tag{2.11}$$

2.1.9.2 *Norm* pada *Euclidean Norm*

Berikut ini akan disebutkan beberapa sifat *norm* pada ruang *Euclidean* .

Teorema 2. 11

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$, maka :

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Ketaksamaan Segitiga)

(Howard Anton, 1994).

Bukti Teorema 2.11 dapat dilihat pada lampiran 14.

2.1.10 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pada subbab berikut ini akan dibahas mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari sebuah matriks.

Definisi 2. 16

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol pada $\mathbb{R}^n$ disebut sebagai vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ dan jika $\boldsymbol{A}\mathbf{x}$ adalah perkalian skalar dari $\mathbf{x}$, yaitu

$$\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.12}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut sebagai nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ dan $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen yang berpadanan dengan λ (Howard Anton, 1994).

Untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ Persamaan (2.12) dituliskan kembali dalam bentuk :

$$\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \lambda \boldsymbol{I}\mathbf{x}$$

atau ekuivalen dengan,

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.13}$$

Agar λ menjadi suatu nilai eigen, harus terdapat solusi tak nol dari Persamaan (2.13). Persamaan (2.13) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) disebut dengan persamaan karakteristik dari $\boldsymbol{A}$. Skalar yang memenuhi Persamaan (2.14) disebut nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$.

Berikut ini akan diberikan contoh pencarian nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$, yaitu :

Akan dicari nilai eigen dan vektor eigen yang berkorespondensi dengan λ dari :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawaban :

Akan dicari nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$.

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari $\boldsymbol{A}$ adalah

$$|\lambda I - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

Nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ adalah λ yang memenuhi Persamaan berikut :

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

sehingga diperoleh $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$ sebagai nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$.

Selanjutnya akan dicari vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang berkorespondensi dengan λ dengan menggunakan Persamaan (2.13) dibawah ini :

$$(\lambda I - \boldsymbol{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini akan dicari vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang berkorespondensi dengan λ :

$$(\lambda I - \boldsymbol{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi dari sistem persamaan tersebut adalah :

$$x_1 = -s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = s$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang berkorespondensi dengan $\lambda = 2$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

solusi dari sistem persamaan tersebut adalah :

$$x_1 = -2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = s$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka, vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang berkorespondensi dengan $\lambda = 1$ adalah sebagai berikut : $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.1.11 *Singular Value Decomposition* (SVD)

Definisi 2. 17

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks berukuran $m \times n$. Faktorisasi $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UDV}^T$ disebut sebagai *singular value decomposition* untuk $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{U}$ adalah matriks ortogonal berukuran $m \times m$, $\boldsymbol{D}$ adalah matriks *pseudodiagonal* berukuran $m \times n$ dimana semua entri dari $\boldsymbol{D}$ nonnegatif, dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks ortogonal berukuran $n \times n$. Entri diagonal dari matriks $\boldsymbol{D}$ disebut sebagai nilai singular dari $\boldsymbol{A}$.

(Jacob, B, 1990).

Definisi 2. 18

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks berukuran $n \times p$ dengan $rank(\boldsymbol{A}) = k$. Maka *singular value decomposition* dari $\boldsymbol{A}$ dapat dinotasikan sebagai

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UDV}^T$$

dimana $\boldsymbol{U}$ adalah matriks berukuran $n \times k$, $\boldsymbol{D}$ adalah matriks berukuran $k \times k$, dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks berukuran $p \times k$ (Rencher, 2002).

Entri diagonal matriks $\boldsymbol{D} = \text{diag}\ (\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_k})$ adalah akar positif dari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ yang merupakan nilai eigen tidak nol dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ atau $\boldsymbol{AA}^T$. Nilai $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_k}$ disebut sebagai nilai singular dari $\boldsymbol{A}$. Sedangkan, k kolom dari matriks $\boldsymbol{U}$ adalah vektor eigen dari $\boldsymbol{AA}^T$ yang ortonormal dan berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. k kolom dari matriks $\boldsymbol{V}$ adalah vektor eigen dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ yang sudah ortonormal dan berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Karena kolom-kolom $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah vektor eigen dari matriks simetris maka kolom-kolom $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ saling ortogonal sedemikian sehingga $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$.

Sebagai contoh :

Akan dicari *singular value decomposition* dari $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan $rank(A)$=1.

Tahap pertama akan dicari matriks $\boldsymbol{AA}^T$ dan $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ sebagai berikut :

$$\boldsymbol{AA}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{AA}^T$ dan $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ untuk matriks $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$.

- Untuk $\boldsymbol{AA}^T$

$$[\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA}^T] = \begin{bmatrix} \lambda-5 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda-5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik yang terbentuk adalah

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA}^T| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda-5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= ((\lambda-5)^3 - 125 - 125) - (75\lambda - 375)$$

$$= \lambda^3 - 15\lambda^2$$

$$= \lambda^2(\lambda - 15)$$

Nilai eigen dari $\boldsymbol{AA}^T$ adalah λ yang memenuhi Persamaan berikut :

$$\lambda^2(\lambda - 15) = 0$$

sehingga diperoleh $\lambda = 0$ dan $\lambda = 15$ sebagai nilai eigen dari $\boldsymbol{AA}^T$. Karena yang digunakan hanya nilai eigen tak nol maka hanya vektor eigen yang berkorespondensi dengan $\lambda = 15$ yang akan dicari.

Selanjutnya akan dicari vektor eigen dari $\boldsymbol{AA}^T$ yang berkorespondensi dengan $\lambda = 15$ dengan menggunakan Persamaan dibawah ini :

$$(\lambda I - \boldsymbol{AA}^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dengan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Berikut ini akan dicari vektor eigen dari $\boldsymbol{AA}^T$ yang berkorespondensi dengan $\lambda = 15$

$$(\lambda I - \boldsymbol{AA}^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & -5 \\ -5 & -5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi dari sistem persamaan tersebut adalah :

$$x_1 = s, \quad x_2 = s\ , x_3 = s$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka, vektor eigen dari $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ yang berkorespondensi dengan $\lambda = 15$ adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena vektor eigen yang dihasilkan hanya satu, maka vektor eigen tersebut adalah vektor ortogonal. Bentuk ortonormal dari vektor eigen tersebut adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Matriks $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

- Untuk $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$

$$\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -6 \\ -6 & \lambda - 12 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ adalah

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -6 \\ -6 & \lambda - 12 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 12) - 36$$

$$= \lambda^2 - 15\,\lambda$$

Nilai eigen dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ adalah λ yang memenuhi persamaan berikut :

$$\lambda^2 - 15\,\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 15) = 0$$

sehingga diperoleh $\lambda = 0$ dan $\lambda = 15$ sebagai nilai eigen dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$. Karena yang digunakan hanya nilai eigen tak nol maka hanya vektor eigen yang berkorespondensi dengan $\lambda = 15$ yang akan dicari.

Selanjutnya akan dicari vektor eigen dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ yang berkorespondensi dengan $\lambda = 15$ dengan menggunakan persamaan dibawah ini :

$$(\lambda I - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dengan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini akan dicari vektor eigen dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ yang berkorespondensi dengan $\lambda = 15$

$$(\lambda I - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -6 \\ -6 & \lambda - 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

solusi dari sistem persamaan tersebut adalah :

$$x_1 = s, \quad x_2 = 2s$$

atau dapat dituliskan menjadi :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ yang berkorespondensi dengan $\lambda = 2$ adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Karena vektor eigen yang dihasilkan hanya satu, maka vektor eigen tersebut adalah vektor ortogonal. Bentuk ortonormal dari vektor eigen tersebut adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Matriks $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

Singular value decomposition dari $\boldsymbol{A}$ adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Berikut ini adalah bunyi dari Teorema Eckart dan Young

Teorema Eckart dan Young

Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah matriks berukuran $n \times k$ dengan *rank* $p > l$, dimana $l < m = \min(n, k)$. Maka matriks yang meminimumkan $\left\|\boldsymbol{X} - \widetilde{\boldsymbol{X}}\right\|$ atas himpunan $\chi_l = \left\{\widetilde{\boldsymbol{X}} : rank\ \widetilde{\boldsymbol{X}} \le l\right\}$ diberikan oleh $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{P}^T$ dimana $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^T$ adalah *singular value decomposition* dari $\boldsymbol{X}$, dan matriks *pseudodiagonal* $\boldsymbol{D}_{(l)}$ berukuran $n \times k$ diperoleh dari matriks $\boldsymbol{D}$ dengan menggantikan semua entri matriks $\boldsymbol{D}$ dengan nol kecuali pada l entri diagonal terbesarnya. Dengan demikian $\widehat{\boldsymbol{X}}$ memiliki rank l dan $\widehat{\boldsymbol{X}}$ akan meminimumkan $\left\|\boldsymbol{X} - \widetilde{\boldsymbol{X}}\right\|$ hanya jika diperoleh dengan cara ini.

Bukti Teorema Eckart dan Young terdapat pada lampiran 15.

2.2 Analisis Regresi

Analisis regresi adalah teknik statistika untuk menginvestigasi dan memodelkan hubungan antarvariabel (Montgomery dkk, 1992). Berdasarkan jumlah variabel kovariat regresi dapat dibedakan menjadi dua, yaitu regresi linier sederhana dan regresi linier berganda. Berikut ini akan dijelaskan mengenai kedua regresi tersebut.

2.2.1 Regresi Linier Sederhana

Model regresi linier sederhana adalah model dengan sebuah variabel kovariat X yang memiliki hubungan dengan variabel respon Y berupa garis lurus

(Montgomery dkk, 2001). Bentuk model regresi linier sederhana adalah sebagai berikut:

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad (2.12)$$

dimana : $y_i =$ nilai observasi variabel respon ke-i, dimana $i = 1, 2, \dots, T$.

$x_i =$ nilai variabel kovariat ke-i.

$\alpha =$ *intercept*.

$\beta_1 =$ kemiringan merupakan konstanta yang nilainya tidak diketahui.

$\varepsilon_i =$ komponen random error ke-i.

Dengan asumsi bahwa $\varepsilon \sim IID(0, \sigma^2)$:

1. $E(\varepsilon) = 0$
2. $\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2$
3. $\text{Corr}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$

Mean dari Y adalah sebagai berikut:

$$E(Y|x) = \alpha + \beta_1 X.$$

Variansi dari Y adalah sebagai berikut:

$$\text{var}(Y|x) = \text{var}(\alpha + \beta_1 X + \varepsilon) = \sigma^2.$$

Parameter α dan β_1 disebut sebagai parameter regresi. Parameter-parameter ini memiliki interpretasi masing-masing. Kemiringan β_1 menggambarkan perubahan *mean* Y dari setiap perubahan satu unit dari X. Jika pada *range* observasi X terdapat $x = 0$, maka *intercept* α adalah *mean* dari Y saat $x = 0$. Jika pada *range* observasi X tidak terdapat $x = 0$, maka α tidak memiliki interpretasi khusus. Parameter-parameter ini ditaksir dengan menggunakan *least square estimation*. (Montgomery dkk, 2001).

2.2.2 Regresi Linier Berganda

Model regresi yang melibatkan lebih dari satu variabel kovariat $X_1, X_2, \dots, X_k$ disebut model linier regresi berganda (Montgomery dkk, 2001). Bentuk model regresi linier berganda dengan *k* variabel kovariat dan T observasi adalah sebagai berikut:

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$
$$= \alpha + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,\ldots,T$$

Parameter-parameter α dan $\beta_j, j = 1, 2, \ldots, k$ disebut parameter regresi. Parameter α dan β_j merepresentasikan perubahan yang diharapkan pada variabel respon Y dari setiap perubahan satu unit X_j saat semua variabel kovariat tersisa $X_i, i \neq j$ tetap. Karena ini, parameter $\beta_j, j = 1,2,\ldots,k$ disebut sebagai parameter parsial regresi (Montgomery dkk, 2001).

Parameter-parameter α dan $\beta_j, j = 1,2,\ldots,k$ diestimasi dengan menggunakan *least square estimation*. Misalkan terdapat $T > k$ observasi, y_i adalah observasi ke-i dari variabel respon, dan x_{ij} adalah observasi ke-i dari variabel kovariat X_j. Diasumsikan komponen *error* ε pada model memiliki $E(\varepsilon) = 0$, $\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2$, dan $\text{Corr}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$ (Montgomery dkkk, 2001).

Bentuk model regresi linier berganda dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dimana : $\boldsymbol{y} =$ vektor observasi variabel respon berukuran $T \times 1$.

$\boldsymbol{\alpha} =$ vektor parameter regresi berukuran $T \times 1$.

$\boldsymbol{X} =$ matriks observasi berukuran $T \times k$ dari k variabel kovariat, yaitu $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

$\boldsymbol{\beta} =$ vektor parameter regresi berukuran $k \times 1$.

$\boldsymbol{\varepsilon} =$ vektor random error berukuran $T \times 1$.

Maka, untuk menaksir parameter-parameter tersebut, terlebih dahulu didefinisikan fungsi *least square* sebagai berikut:

$$S(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k) = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha - \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}\right)^2$$

Kemudian fungsi S harus diminimumkan terhadap $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k$. Penaksir *least square* dari $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k$ harus memenuhi:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\alpha} - \sum_{j=1}^{k}\hat{\beta}_j x_{ij}) = 0$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{\beta}_j x_{ij}$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \beta_j}\right|_{\hat{\alpha},\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\alpha} - \sum_{j=1}^{k}\hat{\beta}_j x_{ij})\, x_{ij} = 0, j = 1,2,..,k$$

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i x_{ij} + \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\hat{\beta}_j x_{ij} = 0$$

Dalam bentuk matriks penaksiran parameter koefisien regresi dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i{}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= (\boldsymbol{y}^T - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X\beta} \\ &= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X\beta} \end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}$ adalah matriks berukuran 1×1 atau sebuah skalar dan $(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y})^T = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{X\beta}$ merupakan skalar yang sama. Maka, penaksir *least square* harus memenuhi:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right|_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}$$

yang disederhanakan menjadi :

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}$$

maka, penaksir *least square* untuk $\boldsymbol{\beta}$ adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}.$$

Matriks $(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}$ akan selalu ada jika variabel bebas saling bebas linier (Montgomery dkk, 2001).

BAB 3

PRINCIPAL COVARIATE REGRESSION PADA SUATU DATA RUNTUN WAKTU

3.1 Pendahuluan

Pada bab ini akan dibahas mengenai metode PCovR untuk data runtun waktu dengan banyak variabel kovariat. Sebelumnya akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai data runtun waktu yang akan digunakan pada metode ini.

Misalkan data yang digunakan merupakan data runtun waktu sebanyak T, variabel yang akan diprediksi adalah variabel respon Y, variabel kovariat sebanyak k, yaitu $X_1, X_2, \dots, X_k$. Maka, berikut ini adalah vektor dan matriks observasi dari variabel-variabel yang terlibat untuk observasi runtun waktu sebanyak T :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{T-1} \\ y_T \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{X} = [\mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2} \quad \cdots \quad \mathbf{x_k}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(T-1)1} & x_{(T-1)2} & \cdots & x_{(T-1)k} \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{Tk} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

dimana : $\mathbf{y}$ = vektor observasi dari variabel respon Y berukuran $T \times 1$.

$\boldsymbol{X}$ = matriks observasi dari k variabel kovariat $X_1, X_2, \dots, X_k$ berukuran $T \times k$.

$\mathbf{x_j}$ = vektor kolom observasi dari variabel kovariat ke-j berukuran $T \times 1$, $j = 1,2,\dots,k$.

Pada PCovR setiap kolom observasi dari variabel yang terlibat, yaitu Y dan $X_1, X_2, \dots, X_k$ diasumsikan telah distandardisasi sehingga memiliki rata-rata nol dan panjang satuan. Untuk selanjutnya, vektor dan matriks yang sudah distandardisasi dinyatakan dengan $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}$ dan $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$. Berikut ini adalah penjabaran dari asumsi masing-masing variabel tersebut:

1. Variabel respon

Berdasarkan Persamaan (3.1), dimisalkan $\mathbf{y}$ adalah vektor observasi berukuran $T \times 1$ dari variabel respon, yaitu

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{T-1} \\ y_T \end{bmatrix}$$

dari vektor diatas diperoleh rata-rata dari kolom $\mathbf{y}$ sebagai berikut:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_T}{T}$$

Kemudian, akan dibentuk sebuah vektor $\tilde{\mathbf{y}}$ berukuran $T \times 1$ yang merupakan vektor $\mathbf{y}$ dimana setiap observasi dikurangi dengan rata-rata dari $\mathbf{y}$ sehingga $\tilde{\mathbf{y}}$ akan memiliki rata-rata nol.

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{1}\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{T-1} \\ y_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{y} \\ \vdots \\ \bar{y} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_{T-1} - \bar{y} \\ y_T - \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{T-1} \\ \tilde{y}_T \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa rata-rata dari $\tilde{\mathbf{y}}$ adalah 0.

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{\mathbf{y}}} &= \frac{(y_1 - \bar{y}) + (y_2 - \bar{y}) + \cdots + (y_{T-1} - \bar{y}) + (y_T - \bar{y})}{T} \\ &= \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_{T-1} + y_T) - (T\bar{y})}{T} \\ &= \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_{T-1} + y_T)}{T} - \bar{y} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{T} y_i}{T} - \bar{y} \\ &= \bar{y} - \bar{y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa rata-rata dari $\tilde{\mathbf{y}}$ adalah 0.

Selanjutnya, dengan menggunakan vektor $\tilde{\mathbf{y}}$ akan dicari *norm* dari $\tilde{\mathbf{y}}$ yang dinotasikan sebagai $\|\tilde{\mathbf{y}}\|$. Berikut ini adalah perhitungan $\|\tilde{\mathbf{y}}\|$:

$$\|\tilde{\mathbf{y}}\| = \sqrt{\tilde{y}_1{}^2 + \tilde{y}_2{}^2 + \cdots + \tilde{y}_T{}^2}$$

Setelah memperoleh *norm* tersebut kemudian akan dibentuk vektor $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}$ berukuran $T \times 1$ yang merupakan matriks $\tilde{\mathbf{y}}$ dengan *norm* satu

$$\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} = \tilde{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{y}}_1 \\ \tilde{\tilde{y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{y}}_{T-1} \\ \tilde{\tilde{y}}_T \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *norm* dari $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}$ adalah satu.

$$\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\| = \left\| \tilde{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|} \right\| = \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}\|}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|} = 1$$

Terbukti bahwa $\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\| = 1$.

Maka, vektor $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}$ inilah yang merupakan vektor observasi dari variabel respon dengan rata-rata nol dan *norm* satu dan kemudian selanjutnya akan digunakan untuk meramal nilai variabel respon Y periode selanjutnya.

2. Variabel kovariat

Berdasarkan Persamaan (3.2), dimisalkan $\boldsymbol{X}$ adalah matriks observasi berukuran $T \times k$ dari k variabel kovariat, yaitu

$$\boldsymbol{X} = [\mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2} \quad \cdots \quad \mathbf{x_k}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(T-1)1} & x_{(T-1)2} & \cdots & x_{(T-1)k} \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{Tk} \end{bmatrix}$$

dari matriks diatas diperoleh rata-rata dari setiap kolom $\boldsymbol{X}$ adalah sebagai berikut:

$$\bar{\mathrm{x}}_1 = \frac{x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{T1}}{T}$$

$$\bar{\mathrm{x}}_2 = \frac{x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{T2}}{T}$$

$$\vdots$$

$$\bar{\mathrm{x}}_k = \frac{x_{1k} + x_{2k} + \cdots + x_{Tk}}{T}$$

Setelah diperoleh $\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{j}}, j = 1,2, \dots, k$ dapat dibentuk sebuah $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ matriks berukuran $T \times k$ yang merupakan matriks $\boldsymbol{X}$ dimana setiap observasi pada masing-masing kolom dikurangi dengan rata-rata dari masing-masing kolom sehingga setiap kolomnya akan memiliki rata-rata nol.

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = [\mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2} \quad \cdots \quad \mathbf{x_k}] - [\vec{\mathbf{1}}\bar{\mathrm{x}}_1 \quad \vec{\mathbf{1}}\bar{\mathrm{x}}_2 \quad \dots \quad \vec{\mathbf{1}}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{k}}]$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(T-1)1} & x_{(T-1)2} & \cdots & x_{(T-1)k} \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{Tk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_k \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & & \bar{x}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_k \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{1k} - \bar{x}_k \\ x_{21} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & & x_{2k} - \bar{x}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(T-1)1} - \bar{x}_1 & x_{(T-1)2} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{(T-1)k} - \bar{x}_k \\ x_{T1} - \bar{x}_1 & x_{T2} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{Tk} - \bar{x}_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1k} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & & \tilde{x}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{(T-1)1} & \tilde{x}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{x}_{(T-1)k} \\ \tilde{x}_{T1} & \tilde{x}_{T2} & \cdots & \tilde{x}_{Tk} \end{bmatrix}$$

$$= [\tilde{\mathbf{x}}_1 \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}]$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa rata-rata dari setiap kolom ke$-\ i$ dari matriks $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ adalah 0 dengan $i = 1, 2, \dots, k$.

$$\bar{\tilde{x}}_i = \frac{(x_{1i} - \bar{x}_i) + (x_{2i} - \bar{x}_i) + \cdots + (x_{T-1,i} - \bar{x}_i) + x_{Ti} - \bar{x}_i}{T}$$

$$= \frac{(x_{1i} + x_{2i} + \cdots + x_{T-1,i} + x_{Ti}) - (T\bar{x}_i)}{T}$$

$$= \frac{(x_{1i} + x_{2i} + \cdots + x_{T-1,i} + x_{Ti})}{T} - \bar{x}_i$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{T} x_{ji}}{T} - \bar{x}_i$$

$$= \bar{x}_i - \bar{x}_i$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa rata-rata dari setiap kolom ke$-\ i$ dari matriks $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ adalah 0 dengan $i = 1, 2, \dots, k$.

Selanjutnya akan dicari *Euclidean norm* berdasarkan Persamaan (2.9) dari setiap vektor kolom $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_1\| = \sqrt{\tilde{x}_{11}^{\ 2} + \tilde{x}_{21}^{\ 2} + \cdots + \tilde{x}_{T1}^{\ 2}}$$

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_2\| = \sqrt{\tilde{x}_{12}^{\ 2} + \tilde{x}_{22}^{\ 2} + \cdots + \tilde{x}_{T2}^{\ 2}} \qquad (3.3)$$

$$\vdots$$

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}\| = \sqrt{\tilde{x}_{1k}^{\ 2} + \tilde{x}_{2k}^{\ 2} + \cdots + \tilde{x}_{Tk}^{\ 2}}$$

Setelah diperoleh $\|\tilde{\mathrm{x}}_{\mathbf{j}}\|, j = 1,2, \dots, k$ kemudian akan dibentuk matriks baru, yaitu $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ berukuran $T \times k$ dimana *norm* dari setiap kolom matriks $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ adalah satu.

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} = [\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}.\frac{\mathbf{1}}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}\|} \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}.\frac{\mathbf{1}}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}\|} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}.\frac{\mathbf{1}}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}\|}]$$

$$= [\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{1}} \quad \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{2}} \quad \dots \quad \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{k}}]$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *norm* dari setiap kolom matriks $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ adalah satu.

Untuk $i = 1$

$$\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{1}}\| = \left\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}\|}\right\| = \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}\|} = 1$$

Untuk $i = 2$

$$\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{2}}\| = \left\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}\|}\right\| = \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}\|} = 1$$

dan seterusnya dengan cara yang sama dapat diperoleh *norm* dari kolom $i = 3, 4, \dots, k$, yaitu:

$$\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{i}}\| = \left\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}\|}\right\| = \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}\|} = 1$$

Terbukti bahwa *norm* dari setiap kolom $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ adalah satu.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa :

$$\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\|^2 = k$$

telah diketahui bahwa $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ adalah matriks berukuran $T \times k$ dengan entri-entri sebagai berikut :

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} = [\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{1}} \quad \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{2}} \quad \dots \quad \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{k}}]$$

$$= [\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}\|} \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}\|} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}}\|}]$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|} & \tilde{x}_{12}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\|} & \cdots & \tilde{x}_{1k}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|} \\ \tilde{x}_{21}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|} & \tilde{x}_{22}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\|} & & \tilde{x}_{2k}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{(T-1)1}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|} & \tilde{x}_{(T-1)2}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\|} & \cdots & \tilde{x}_{(T-1)k}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|} \\ \tilde{x}_{T1}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|} & \tilde{x}_{T2}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\|} & \cdots & \tilde{x}_{Tk}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|} \end{bmatrix}$$

Maka, *norm* dari matriks $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ berdasarkan definisi *Frobenius norm* pada Persamaan (2.11) adalah :

$$\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\| = \left(\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{k}\tilde{\tilde{x}}_{ij}{}^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\begin{array}{c}\left(\tilde{x}_{11}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|}\right)^2 + \left(\tilde{x}_{21}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|}\right)^2 + \cdots + \left(\tilde{x}_{T1}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|}\right)^2 + \cdots + \left(\tilde{x}_{1k}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|}\right)^2 \\ + \cdots + \left(\tilde{x}_{2k}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|}\right)^2 + \cdots + \left(\tilde{x}_{Tk}.\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|}\right)^2\end{array}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\tilde{x}_{11}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|^2} + \frac{\tilde{x}_{21}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|^2} + \cdots + \frac{\tilde{x}_{T1}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|^2} + \cdots + \frac{\tilde{x}_{1k}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|^2} + \frac{\tilde{x}_{2k}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|^2} + \cdots + \frac{\tilde{x}_{Tk}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|^2}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\tilde{x}_{11}{}^2 + \tilde{x}_{21}{}^2 + \cdots + \tilde{x}_{T1}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|^2} + \cdots + \frac{\tilde{x}_{1k}{}^2 + \tilde{x}_{2k}{}^2 + \cdots + \tilde{x}_{Tk}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Berdasarkan definisi Persamaan (3.3), maka :

$\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|^2 = \tilde{x}_{11}{}^2 + \tilde{x}_{21}{}^2 + \cdots + \tilde{x}_{T1}{}^2$

sehingga Persamaan di atas dapat dituliskan menjadi :

$$= \left(\frac{\tilde{x}_{11}{}^2 + \tilde{x}_{21}{}^2 + \cdots + \tilde{x}_{T1}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|^2} + \cdots + \frac{\tilde{x}_{1k}{}^2 + \tilde{x}_{2k}{}^2 + \cdots + \tilde{x}_{Tk}{}^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\|^2} + \cdots + \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{k}\|^2}\right)^{1/2}$$

$$= (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{sebanyak k}})^{1/2}$$

$$= k^{1/2}$$

Maka, diperoleh bahwa $\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\| = k^{1/2}$. Karena $\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\| = k^{1/2}$ maka terbukti bahwa $\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\|^2 = k$.

Kemudian Matriks $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ inilah yang merupakan matriks observasi dari setiap variabel kovariat X dimana setiap kolom memiliki rata-rata nol dan *norm* satu dan kemudian akan digunakan untuk meramal nilai variabel respon Y pada periode selanjutnya.

Vektor $\mathbf{y}$ dan matriks $\boldsymbol{X}$ ini harus distandardisasi menjadi $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}$ dan $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ karena dengan distandardisasi efek dari skala yang berbeda pada setiap variabel yang terlibat dapat dihilangkan dan variasi dari observasi dapat diperkecil (Heij dkk, 2006). Dan untuk selanjutnya matriks $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}$ dan $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ ini yang akan digunakan pada PCovR.

3.2 *Principal Covariate Regression*

Principal covariate regression adalah model regresi yang menggambarkan hubungan antara variabel respon dengan banyak variabel kovariat dengan metode penaksiran parameter model berupa peminimuman sebuah fungsi kriteria. Fungsi kriteria merupakan fungsi dari *error* peramalan dan *error* peringkasan informasi variabel-variabel kovariat yang masing-masing sudah terboboti. Dengan asumsi nilai bobot bernilai positif dan sudah diberikan serta banyak komponen utama ditentukan. Pada subbab ini akan dibahas penerapan *principal covariate regression* pada observasi runtun waktu.

Selanjutnya akan dibahas mengenai *forecast error*, *predictor compression error*, fungsi kriteria, dan penaksiran parameter dengan metode *principal covariate regression*.

3.2.1.1 *Predictor Compression Error* dan *Forecast Error*

Dalam PCovR dikenal dua macam jenis *error*, yaitu *predictor compression errors* dan *forecast errors*. Berikut ini akan dijelaskan mengenai *predictor compression errors* dan *forecast errors.*

a. *Predictor Compresion Errors*

Untuk mendapatkan *predictor compression error* informasi-informasi yang terkandung pada matriks observasi dari variabel-variabel kovariat ($\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$) tersebut harus diringkaskan terlebih dahulu tanpa mengurangi informasi awal yang diberikan menjadi matriks aproksimasi observasi untuk variabel-variabel kovariat ($\widehat{\boldsymbol{X}}$).

Untuk memperoleh matriks aproksimasi dari $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ definisikan $\widehat{\boldsymbol{X}} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{AB}$ adalah matriks aproksimasi untuk $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$, dimana taksiran $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ akan diperoleh dengan meminimumkan fungsi kriteria. Maka selanjutnya *predictor compression error* dapat dicari dengan menggunakan formula sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{X}} = \left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \widehat{\boldsymbol{X}}\right)$$

$$= (\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{AB})$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1),1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1),p} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1k} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & & \hat{x}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{(T-1)1} & \hat{x}_{(T-1)2} & \cdots & \hat{x}_{(T-1)k} \\ \hat{x}_{T1} & \hat{x}_{T2} & \cdots & \hat{x}_{Tk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1k} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & & \varepsilon_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{(T-1)1} & \varepsilon_{(T-1)2} & \cdots & \varepsilon_{(T-1)k} \\ \varepsilon_{T1} & \varepsilon_{T2} & \cdots & \varepsilon_{Tk} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Maka, matriks (3.4) ini yang disebut dengan matriks *predictor compression errors.*

b. *Forecast Errors*

Setelah meringkas informasi dari $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ menjadi $\widehat{\boldsymbol{X}} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{AB}$ dan mendapatkan variabel kovariat baru yang informasinya sudah diringkaskan, yaitu $\boldsymbol{F} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}$. Maka, untuk memprediksi nilai dari variabel Y digunakan persamaan sebagai berikut :

$$\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} = \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}} \tag{3.5}$$

dimana : $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}$ = vektor observasi yang sudah distandardisasi berukuran $T \times 1$ dari variabel respon

$\boldsymbol{\alpha}$ = vektor parameter regresi berukuran $T \times 1$

$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ = matriks observasi yang sudah distandardisasi berukuran $T \times k$ dari k variabel kovariat, yaitu $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$

$\boldsymbol{A}$ = adalah matriks bobot berukuran $k \times p$

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter regresi berukuran $k \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}}$ = vektor random error dari prediksi Y berukuran $T \times 1$

maka selanjutnya *forecast error* dapat dicari dengan menggunakan formula sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}} = \left(\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \left(\boldsymbol{\alpha} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{y}}_1 \\ \tilde{\tilde{y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{y}}_{T-1} \\ \tilde{\tilde{y}}_T \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1),1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1),p} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{y}}_1 \\ \tilde{\tilde{y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{y}}_{T-1} \\ \tilde{\tilde{y}}_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1),1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1),p} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{y}}_1 \\ \tilde{\tilde{y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{y}}_{T-1} \\ \tilde{\tilde{y}}_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_{T-1} \\ \hat{y}_T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T-1} \\ \varepsilon_T \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Maka, matriks (3.6) ini yang disebut dengan matriks *forecast errors.*

3.2.1.2 Fungsi Kriteria

Pada PCovR parameter-parameter diestimasi dengan meminimumkan fungsi kriteria dari *forecast errors* dan *predictor compression errors* yang sudah terboboti. Diasumsikan bahwa bobot $w_1 > 0$ dan $w_2 > 0$ dan jumlah komponen faktor p sudah diberikan.

Berikut ini adalah fungsi kriteria yang akan diminimumkan:

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = w_1 \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \right\|^2 + w_2 \left\| \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \right\|^2 \tag{3.7}$$

dimana: $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{y}}_1 \\ \tilde{\tilde{y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{y}}_T \end{bmatrix}$

adalah vektor observasi variabel respon yang sudah distandardisasi.

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix}$$

adalah matriks observasi variabel kovariat yang sudah distandardisasi.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1),1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1),p} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \end{bmatrix}$$

adalah matriks bobot.

w_1 = bobot untuk *forecast error*.

w_2 = bobot untuk *predictor compression error*.

Bentuk minimum fungsi kriteria adalah nonlinier karena adanya perkalian elemen $\boldsymbol{A\beta}$ dan $\boldsymbol{AB}$. Sedangkan parameter yang akan diestimasi adalah $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Estimasi parameter ini dapat diperoleh dengan menggunakan teori SVD.

3.2.1.3 Penaksiran Parameter

Pada metode PCovR penaksiran parameter $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ dilakukan dengan meminimumkan fungsi kriteria dengan menggunakan SVD. Diasumsikan bahwa semua variabel telah distandardisasi sehingga memiliki rata-rata nol dan *norm* satu. Berikut ini adalah langkah-langkah pengestimasian parameter $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ dengan meminimumkan fungsi kriteria:

1. Penaksiran parameter $\boldsymbol{\alpha}$

Dengan adanya asumsi bahwa semua variabel telah distandardisasi sehingga memiliki rata-rata nol, maka estimasi terbaik untuk α adalah nol. Pembuktian penaksiran parameter $\boldsymbol{\alpha}$ dapat dilihat pada lampiran 16.

2. Penaksiran parameter $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$

Sebelum melakukan penaksiran parameter fungsi kriteria, bentuk fungsi kriteria akan disederhanakan yang akan dijabarkan sebagai berikut:

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = w_1 \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A\beta} \right\|^2 + w_2 \left\| \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{AB} \right\|^2$$

Karena telah diperoleh bahwa taksiran $\boldsymbol{\alpha}$ adalah 0, maka Persamaan di atas dapat disederhanakan sebagai berikut :

(3.8)

$$f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{\beta}) = \underbrace{w_1 \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \right\|^2}_{1} + \underbrace{w_2 \left\| \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \right\|^2}_{2}$$

Untuk pengerjaannya, akan disederhanakan bentuk 1 dan 2 dari Persamaan (3.8).

Bentuk 1 dari Persamaan (3.8) adalah bentuk dari *Euclidean norm*. Selanjutnya, bentuk 1 akan disederhanakan dengan menggunakan sifat dari *norm* pada ruang *Euclidean* berdasarkan Teorema 2.11, yaitu $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ yang mengakibatkan $\|k\mathbf{u}\|^2 = |k|^2\|\mathbf{u}\|^2$. Dengan memisalkan bahwa :

$$w_1 = k^2 \text{ atau } \sqrt{w_1} = k$$

Maka, bentuk 1 dapat dimodifikasi menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} w_1 \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \right\|^2 &= \left\| \sqrt{w_1}\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \sqrt{w_1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \right\|^2 \\ &= \left\| \sqrt{w_1}\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\sqrt{w_1}\boldsymbol{\beta} \right\|^2 \end{aligned}$$

Misalkan :

$$\grave{\mathbf{y}} = \sqrt{w_1}\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\,;\ \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{w_1}\boldsymbol{\beta}$$

dengan pemisalan tersebut diperoleh bentuk 1 sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &= \left\| \sqrt{w_1}\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\sqrt{w_1}\boldsymbol{\beta} \right\|^2 \\ &= \left\| \grave{\mathbf{y}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\beta}} \right\|^2 \end{aligned} \qquad (3.9).$$

Bentuk 2 adalah bentuk dari *Frobenius norm*. Selanjutnya, bentuk 2 akan disederhanakan dengan menggunakan sifat dari *norm*, yaitu $\|k\boldsymbol{X}\| = |k|\|\boldsymbol{X}\|$ yang mengakibatkan $\|k\boldsymbol{X}\|^2 = |k|^2\|\boldsymbol{X}\|^2$. Dengan memisalkan bahwa :

$$w_2 = k^2 \text{ atau } \sqrt{w_2} = k$$

Maka, bentuk 2 dapat dimodifikasi menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} w_2 \left\| \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \right\|^2 &= \left\| \sqrt{w_2}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \sqrt{w_2}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \right\|^2 \\ &= \left\| \sqrt{w_2}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\sqrt{w_2}\boldsymbol{B} \right\|^2 \end{aligned}$$

Misalkan :

$$\grave{\boldsymbol{X}} = \sqrt{w_2}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\,;\ \tilde{\boldsymbol{B}} = \sqrt{w_2}\boldsymbol{B}$$

dengan pemisalan tersebut diperoleh bentuk 2 sebagai berikut :

$$= \left\| \sqrt{w_2}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\sqrt{w_2}\boldsymbol{B} \right\|^2$$

$$= \left\| \dot{\boldsymbol{X}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{B}} \right\|^2 \qquad (3.10).$$

Sehingga dengan menggabungkan kembali Persamaan (3.9) dan (3.10) diperoleh fungsi kriteria yang sudah disederhanakan, yaitu :

$$f(\boldsymbol{A}, \tilde{\boldsymbol{B}}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \underbrace{\left\| \dot{\mathbf{y}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\beta}} \right\|^2}_{1} + \underbrace{\left\| \dot{\boldsymbol{X}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{B}} \right\|^2}_{2} \qquad (3.11)$$

Selanjutnya, bentuk sederhana dari fungsi kriteria tersebut akan kembali disederhanakan dengan memisalkan :

$\boldsymbol{C} = [\tilde{\boldsymbol{\beta}} \quad \tilde{\boldsymbol{B}}]$ adalah matriks parameter berukuran $p \times (k+1)$

$\boldsymbol{D} = [\dot{\mathbf{y}} \quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}]$ adalah matriks observasi berukuran $T \times (k+1)$.

Maka, Persamaan (3.11) akan disederhanakan menjadi :

$$f(\boldsymbol{G}) = \left\| \boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \right\|^2 = \left\| \boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G} \right\|^2 \qquad (3.12)$$

dimana $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ adalah matriks tereduksi dengan ukuran $k \times (k+1)$ yang memiliki *rank* p. Pembuktian penyederhanaan Persamaan (3.11) menjadi (3.12) terdapat pada lampiran 17.

Untuk menaksir parameter $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$, maka harus dicari $\boldsymbol{G}$ yang akan meminimumkan $f(\boldsymbol{G})$.

Berikut ini akan dijabarkan tahap-tahap penaksiran parameter $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ dengan menggunakan dua SVD.

- **Tahap 1**

Misalkan *m* = *rank* $(\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}})$ dan $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{USV}^T$ adalah SVD dari $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$, $m \leq \min(T, k)$.

Dimana:

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}_{T\times k} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix}$$

adalah matriks observasi dari variabel kovariat sebanyak k yang distandardisasi.

$$\boldsymbol{U}_{T\times m} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1p} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1p} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{T1} & u_{T2} & \cdots & u_{Tp} & \cdots & u_{Tm} \end{bmatrix}$$

m kolom dari matriks $\boldsymbol{U}$ adalah vektor eigen dari $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T$ yang ortonormal dan berkorespondensi dengan nilai eigen tak nol dan terurut $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0$.

$$\boldsymbol{V}_{k\times m} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1p} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2p} & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & u_{k2} & \cdots & v_{kp} & \cdots & v_{kk} \end{bmatrix}$$

m kolom dari matriks $\boldsymbol{V}$ adalah vektor eigen dari $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ yang ortonormal dan berkorespondensi dengan nilai eigen tak nol dan terurut $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0$.

$$\boldsymbol{S}_{m\times m} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \cdots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \ldots & s_{pp} & \cdots & s_{pm} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ s_{m1} & s_{k2} & \cdots & s_{mm} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix}$$

Entri diagonal matriks $\boldsymbol{D} = \text{diag}\ (\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_m})$ adalah akar positif dari $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0$ yang merupakan nilai eigen tidak nol dan terurut dari $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$atau $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T$.

sedemikian sehingga berlaku $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_m$.

- **Tahap II**

Akan dibentuk sebuah fungsi $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$ dimana dengan meminimumkan $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$ akan sama dengan meminimumkan $f(\boldsymbol{G})$.

Misalkan: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{P}\\ &= \boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G})\\ &= \boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{USV}^T\boldsymbol{G})\\ &= \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}-\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{USV}^T\boldsymbol{G}\end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{U}$ adalah matriks yang berisi vektor-vektor eigen yang ortonormal sedemikian sehingga $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}_m$ maka $\boldsymbol{U}$ adalah matriks yang ortogonal sehingga $\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U}^{-1}$. Maka, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}-\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{USV}^T\boldsymbol{G}$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}-\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{USV}^T\boldsymbol{G}\\ &= \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{USV}^T\boldsymbol{G}\\ &= \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}-\boldsymbol{SV}^T\boldsymbol{G}\end{aligned}$$

Maka, $\tilde{f}(\boldsymbol{G})=\|\boldsymbol{Q}\|^2$, yaitu :

$$\tilde{f}(\boldsymbol{G})=\|\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}-\boldsymbol{SV}^T\boldsymbol{G}\|^2$$

Akan dibuktikan bahwa meminimumkan $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$ sama saja dengan meminimumkan $f(\boldsymbol{G})$.

Berikut ini $f(\boldsymbol{G})$ akan dijabarkan sesuai dengan sifatnya sebagai *Frobenius norm.*

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{G}) &= \left\|\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right\|^2\\ &= \mathrm{tr}[\left(\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)^T\left(\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)]\\ &= \mathrm{tr}[\left(\boldsymbol{D}^T-\boldsymbol{G}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\right)\left(\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)]\\ &= \mathrm{tr}[\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\boldsymbol{D}+\boldsymbol{G}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}]\\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})-\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)-\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\boldsymbol{D})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G})\end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 2. 1

Misalkan: $(\boldsymbol{A})_{(k+1)\times k}=\boldsymbol{D}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}$ dan $(\boldsymbol{B})_{k\times(k+1)}=\boldsymbol{G}$, maka $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)=$ $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)^T=\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\boldsymbol{D})$. Sehingga Persamaan $f(\boldsymbol{G})$ diatas menjadi:

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{G}) &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})-\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)-\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G})\\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})-2\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^T\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G})\end{aligned}$$

Karena $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}=\boldsymbol{USV}^T$, maka:

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{G}) &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})-2\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^T(\boldsymbol{USV}^T)\boldsymbol{G})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{USV}^T)^T(\boldsymbol{USV}^T)\boldsymbol{G})\\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})-2\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{USV}^T\boldsymbol{G})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{VS}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{USV}^T\boldsymbol{G})\end{aligned}$$

$$= \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}) - 2\text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) + \text{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G})$$
$$= \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}) - 2\text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) + \text{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G})$$
$$= \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}) - 2\text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) + \text{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G})$$

Berikut ini $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$ akan dijabarkan sesuai dengan sifatnya sebagai *Frobenius norm.*

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\boldsymbol{G}) &= \|\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}\|^{\boldsymbol{2}} \\
&= \text{tr}[(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G})^T(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G})] \\
&= \text{tr}[(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U} - \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T)(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G})] \\
&= \text{tr}[(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} + \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}V^T\boldsymbol{G})] \\
&= \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}) - \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) - \text{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}) \\
&\quad + \text{tr}(\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{G})
\end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 2.1

Misalkan: $(\boldsymbol{A})_{(k+1)\times m} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}$ dan $(\boldsymbol{B})_{m\times(k+1)} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}$, maka $\text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) = \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G})^T = \text{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})$. Sehingga persamaan $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$ diatas menjadi:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\boldsymbol{G}) &= \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T D) - \text{tr}(\boldsymbol{D}^T U\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) - \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) \\
&\quad + \text{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) \\
&= \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T D) - 2\text{tr}(\boldsymbol{D}^T U\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) + \text{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) \\
&= \text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}) - 2\text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}) + \text{tr}(\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G})
\end{aligned}$$

Maka, dari persamaan fungsi $f(\boldsymbol{G})$ dan $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$ diatas dapat dilihat bahwa elemen $\text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D})$ dan $\text{tr}(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})$ merupakan sebuah fungsi konstan yang independen terhadap pemilihan $\boldsymbol{G}$, kedua elemen terakhir berada pada fungsi $f(\boldsymbol{G})$ dan $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$. Sehingga fungsi $f(\boldsymbol{G})$ dan $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$ akan mencapai nilai minimum pada $\boldsymbol{G}$ yang sama.

Diantara kedua bentuk fungsi $f(\boldsymbol{G})$ dan $\tilde{f}(\boldsymbol{G})$ tersebut , untuk mencari $\boldsymbol{G}$ akan lebih mudah jika menggunakan fungsi $\tilde{f}(\boldsymbol{G}) = \|\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}\|^{\boldsymbol{2}}$. Untuk mencari $\boldsymbol{G}$ akan digunakan SVD.

- **Tahap III**

Akan dicari $\boldsymbol{G}$ yang meminimumkan $\tilde{f}(\boldsymbol{G}) = \|\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}\|^{\boldsymbol{2}}$ dengan menggunakan Teorema *Eckart-Young*.

Misalkan : *rank* $(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}) = m$.

Akan dicari : Matriks aproksimasi dari $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D}$ yang dapat meminimumkan

$$\|\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}\|.$$

Berdasarkan Teorema *Eckart-Young*, matriks aproksimasi yang dapat meminimumkan$\|\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G}\|$ diberikan oleh $(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})_p = \boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$ matriks berukuran $m \times (k+1)$, dimana *rank* $(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})_{\boldsymbol{p}} = p, p < m$.

$$\boldsymbol{U}_p = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mp} \end{bmatrix}$$

p kolom dari matriks $\boldsymbol{U}$ adalah vektor eigen dari $(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})^T$ yang ortonormal dan berkorespondensi dengan nilai eigen tak nol dan terurut $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$.

$$\boldsymbol{V}_p = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{(k+1)1} & v_{(k+1)2} & \dots & v_{(k+1)p} \end{bmatrix}$$

p kolom dari matriks $\boldsymbol{V}$ adalah vektor eigen dari $(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})^T(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})$ yang ortonormal dan berkorespondensi dengan nilai eigen tak nol dan terurut $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$.

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

Entri diagonal matriks $\boldsymbol{D} = \text{diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p})$ adalah akar positif dari $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$ yang merupakan nilai eigen tidak nol dan terurut dari $(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})^T(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})$ atau $(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})^{\boldsymbol{T}}$.

Maka, $\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$. Maka, nilai $\boldsymbol{G}$ yang memenuhi adalah:

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$

Karena $\boldsymbol{V}$ adalah matriks yang berisi vektor-vektor eigen yang ortonormal sedemikian sehingga $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_p$ maka $\boldsymbol{V}$ adalah matriks yang ortogonal sehingga $\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{V}^{-1}$. Maka

$$(\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$

$$(\boldsymbol{V}^{-1})^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$

$$VV^{-1}\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$
$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$
$$= (\boldsymbol{V}^T)^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$
$$= (\boldsymbol{V}^{-1})^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{p}}{}^T$$
$$= \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$
$$= \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})_p$$

- **Tahap IV**

Akan dicari $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}$ yang meminimumkan $f(\boldsymbol{G}) = \left\|\boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right\|^{\boldsymbol{2}}$ dengan menggunakan Teorema *Eckart-Young*.

Dari tahap III telah diperoleh :

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})_p = \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T$$

dan diketahui bahwa

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T$$

maka:

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T)\big(\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})_p\big)$$
$$= \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V})\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})_p$$
$$= \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D})_p$$
$$= \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})_p$$

Maka, diperoleh $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{D})_p$ yang mengaproksimasi matriks $\boldsymbol{D}$ dan meminimumkan $f(\boldsymbol{G})$.

- **Tahap V**

Misalkan : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{V}_p = \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{w_{\mathbf{1}}}}(\boldsymbol{V}_p{}^T)_1$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{w_{\mathbf{2}}}}(\boldsymbol{V}_p{}^T)_{2-(k+1)}$$
$$\boldsymbol{F} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}$$

Maka, $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{V}_p{}^T = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_p{}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{V}_p{}^T$. Substitusi matriks $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}$ pada persamaan :

$$f(\boldsymbol{G}) = \left\|\boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right\|^2$$

$$= \left\|\boldsymbol{D} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{V}_p{}^T\right\|^2$$

$$= \left\|\left[\sqrt{w_1}\boldsymbol{y} \quad \sqrt{w_2}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right] - \boldsymbol{F}\left[\sqrt{w_1}\mathbf{b} \quad \sqrt{w_2}\boldsymbol{B}\right]\right\|^2$$

$$= \left\|\left[\sqrt{w_1}\boldsymbol{y} \quad \sqrt{w_2}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right] - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\left[\sqrt{w_1}\mathbf{b} \quad \sqrt{w_2}\boldsymbol{B}\right]\right\|^2$$

$$= \left\|\left[\sqrt{w_1}\boldsymbol{y} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\sqrt{w_1}\mathbf{b}\right] + \left[\sqrt{w_2}\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\sqrt{w_2}\boldsymbol{B}\right]\right\|^2$$

$$= \left\|\sqrt{w_1}\left[\boldsymbol{y} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\mathbf{b}\right] + \sqrt{w_2}\left[\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right]\right\|^2$$

$$= \left\|\sqrt{w_1}\left[\boldsymbol{y} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\mathbf{b}\right]\right\|^2 + \left\|\sqrt{w_2}\left[\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right]\right\|^{\mathbf{2}}$$

$$= w_{\mathbf{1}}\left\|\left[\boldsymbol{y} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\mathbf{b}\right]\right\|^2 + w_{\mathbf{2}}\left\|\left[\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right]\right\|^{\mathbf{2}}$$

Karena $\boldsymbol{XG}$ ini menyebabkan $f(\boldsymbol{G})$ ini minimum, maka berdasarkan penurunan diatas solusi $\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{V}_p = \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{S}_p,\ \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{w_1}}(\boldsymbol{V}_p{}^T)_1$, $\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{\sqrt{w_2}}(\boldsymbol{V}_p{}^T)_{2-(k+1)}$, dan $\boldsymbol{F} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\widehat{\boldsymbol{A}}$ menyebabkan $f(\boldsymbol{G})$ minimum.

3.2.1.4 Pemilihan Faktor Bobot

Faktor bobot w_1 dan w_2 pada fungsi kriteria metode PCovR ditentukan setelah terlebih dahulu nilai w dipilih oleh peneliti. Pemilihan nilai w dilihat berdasarkan data dan kondisi lapangan. Nilai w dipilih untuk menyeimbangkan kontribusi yang diberikan oleh peringkasan informasi untuk semua variabel kovariat dan ketepatan prediksi untuk variabel respon. Nilai w kecil jika hasil peringkasan informasi dari variabel kovariat bagus dan w besar jika hasil ketepatan prediksi untuk variabel respon bagus. Pemilihan w yang besar harus dihindari untuk mencegah *overfitting* (Heij dkk, 2006) .

Karena fungsi kriteria terdiri atas dua elemen, yaitu *forecast error* dan *predictor compression error* maka akan dibentuk dua faktor bobot untuk masing-masing elemen, yaitu w_1 dan w_2. Karena yang dipertimbangkan adalah bobot relatif (w_1/w_2), maka bobot w_1 dan w_2 adalah sebagai berikut :

$$w_1 = \frac{w}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} \; ; \; w_2 = \frac{1-w}{\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\|^2}$$

(Heij dkk, 2006).

Nilai bobot *w* harus terletak antara 0 dan 1 agar fungsi kriteria memiliki batas dan solusi optimal. Jika nilai *w* mendekati 1, maka metode PCovR akan konvergen menuju metode OLS (*Ordinary Least Square*), maksudnya adalah ketika melakukan penaksiran parameter melalui fungsi kriteria pada metode PCovR dengan menggunakan nilai *w* mendekati 1 maka penaksiran tersebut hampir mirip dengan melakukan penaksiran parameter melalui metode OLS (*Ordinary Least Square*) (Heij dkk, 2006). Berikut akan dibuktikan pernyataan tersebut :

Fungsi kriteria :

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \;= w_1 \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + w_2 \left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right\|^2$$

Untuk $w \rightarrow 1$:

$$\lim_{w\to 1} w_1 = \lim_{w\to 1} \frac{w}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} = \frac{1}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2}$$

$$\lim_{w\to 1} w_2 = \lim_{w\to 1} \frac{1-w}{\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\|^2} = 0$$

Maka,

$$\lim_{w\to 1} f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \lim_{w\to 1} \left(w_1 \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + w_2 \left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right\|^2 \right)$$

$$= \lim_{w\to 1} w_1 \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + \lim_{w\to 1} w_2 \left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right\|^2$$

$$= \lim_{w\to 1} \frac{w}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + \lim_{w\to 1} \frac{1-w}{\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\|^2} \left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right\|^2$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + 0$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{1} \varepsilon_{ij}{}^2 \tag{3.13}$$

Dari Persamaan (3.13) terlihat bahwa persamaan tersebut adalah fungsi *least square* dengan bobot sebesar $\frac{\mathbf{1}}{\|\tilde{\tilde{y}}\|^{2}}$, sehingga dikatakan bahwa jika w mendekati 1 maka penaksiran parameter dengan metode PCovR akan mirip penggunaannya dengan penaksiran parameter dengan metode OLS (*Ordinary Least Square*).

3.2.1.5 Pemilihan Komponen Faktor (p)

Untuk meringkaskan informasi-informasi dari variabel-variabel kovariat diperlukan komponen faktor (p). Penentuan komponen faktor (p) terbaik menurut Bai dan Ng (2002) adalah dengan menggunakan *Bayesian Information Criteria* (BIC). Nilai p yang dipilih adalah yang dapat meminimumkam BIC.

$$\text{BIC}\ (p) = \log\left(s_p{}^2\right) + (p+1)\frac{\log T}{T} \tag{3.14}$$

Dimana: $s_p{}^2 = \frac{\|\tilde{\tilde{y}} - \hat{y}\|^2}{T}$, adalah variansi residual dari y diperoleh dengan p komponen faktor.

Berdasarkan paper *"Forecast Comparison of PCR and PCovR"* oleh James H. Stock dan Mark W. Watson (2005) banyaknya komponen utama (p) yang dipilih untuk metode PCovR adalah p = 1, 2, dan 3

3.3 Model Peramalan

Persamaan peramalan untuk satu periode selanjutnya $\hat{y}_{T+1}$ dengan asumsi nilai $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{T+1}$ diberikan adalah sebagai berikut :

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{T+1}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\boldsymbol{T+1}}\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{3.15}$$

dimana: $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{T+1}}$ = nilai peramalan variabel respon $\boldsymbol{Y}$ pada saat $\boldsymbol{T+1}$.

α = taksiran konstanta.

$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix}$, taksiran parameter-parameter regresi.

$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{T+1} = [\tilde{x}_{(T+1),1} \quad \tilde{x}_{(T+1),2} \quad \cdots \quad \tilde{x}_{(T+1),k}]$, nilai k variabel kovariat yang sudah distandarisai saat T+1.

$\widehat{\boldsymbol{A}}$ = taksiran matriks bobot berukuran $k \times p$.

Peramalan $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{T+1}}$ bersifat kondisional karena bergantung kepada nilai $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\boldsymbol{T+1}}$, yang diasumsikan diberikan. Persamaan peramalan untuk h-periode selanjutnya, untuk $\boldsymbol{h} > 1$, memiliki struktur yang sama dengan Persamaan (3.15) dengan mengganti nilai $\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{T+1}}$ dan $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\boldsymbol{T+1}}$ dengan $\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{T+h}}$ dan $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{\boldsymbol{T+h}}$.

3.4 Pengukuran Kualitas Nilai Peramalan

Nilai peramalan yang dihasilkan untuk periode selanjutnya dari Persamaan peramalan (3.13) masih perlu dicek kembali apakah nilai tersebut merupakan nilai peramalan terbaik atau bukan. Kualitas nilai peramalan periode selanjutnya dilihat dari *error* yang terbentuk. Semakin kecil *error* maka kualitas peramalan semakin baik. Untuk mengukurnya digunakan *root mean square error* (RMSE).

Secara matematis *root mean square error* (RMSE) dinyatakan sebagai berikut :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(\tilde{\tilde{y}}_i - \hat{y}_i\right)^2} \tag{3.16}$$

dimana : RMSE = nilai *root mean square error*

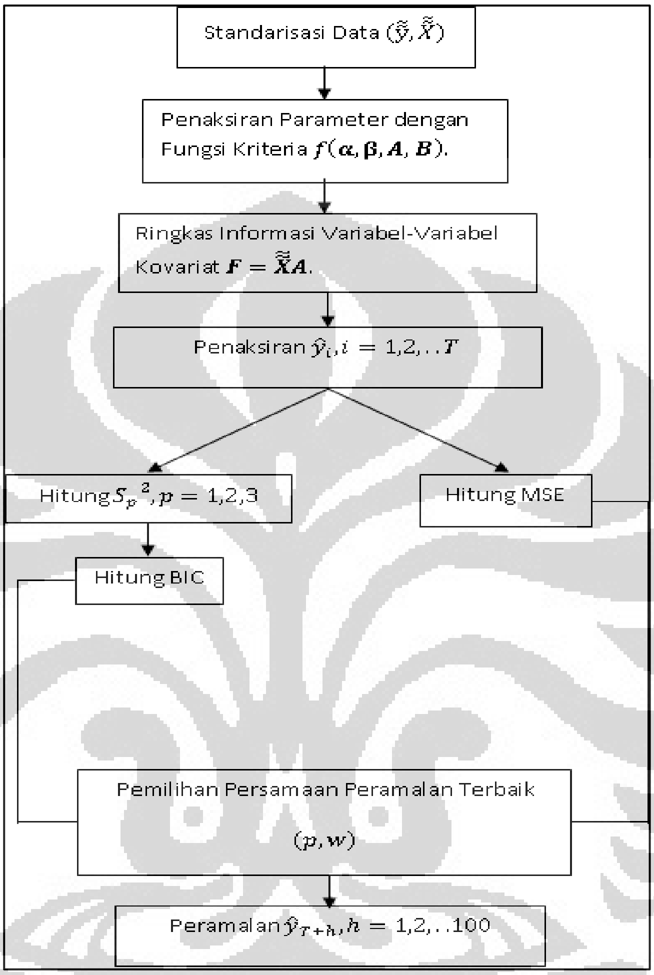
$\tilde{\tilde{y}}_i$ = nilai variabel respon yang sudah distandardisasi saat ke$-i$

$\hat{y}_i$ = nilai penaksiran variabel respon saat ke$-i$

T = jumlah observasi

3.5 Bagan *Principal Covariate Regression*

Berikut ini adalah bagan alur pengerjaan *principal covariate regression* :



Gambar 3. 1 Alur Kerja PCovR

BAB 4
CONTOH APLIKASI

Pada bab ini akan dibahas mengenai penerapan metode *principal covariate regression* pada runtun waktu di bidang makroekonomi dan bisnis. Data diolah dengan menggunakan Matlab 7.8.0 (R2009a) dan algoritma PCovR dapat dilihat pada lampiran 18.

4.1 Sumber Data

Runtun waktu yang digunakan pada aplikasi PCovR kali ini adalah data sekunder yang diperoleh dari "*Forecasting In Dynamic Factor Models Subject to Strutural Instability*" oleh James H. Stock dan Mark W. Watson (Agustus 2007, direvisi April 2008). Runtun waktu ini adalah runtun waktu makroekonomi bulanan di Amerika Serikat dari Januari 1959 – Agustus 1998 dengan total observasi sebanyak 476 observasi yang menggambarkan indeks total produksi per bulan yang dipengaruhi oleh indeks produksi terakhir per bulan, indeks pemakaian barang-barang konsumen, indeks pemakaian barang-barang konsumen tahan lama, jumlah bahan bakar yang digunakan untuk produksi, dan 104 variabel lain yang mempengaruhi.

Dari observasi tersebut, maka variabel respon yang akan diperhatikan pada aplikasi ini adalah indeks total produksi per bulan dan variabel kovariat yang berpengaruh terhadap variabel respon adalah indeks pemakaian barang-barang konsumen, indeks pemakaian barang-barang konsumen tahan lama, jumlah bahan bakar yang digunakan untuk produksi, dan 104 variabel kovariat lain yang mempengaruhi. Daftar variabel-variabel yang digunakan dapat dilihat pada lampiran 19.

4.2 Analisis Data

Pada aplikasi ini, akan dilakukan peramalan nilai variabel yang akan diprediksi, yaitu *Industrial Production Index-Total Index,* untuk 100 periode selanjutnya, yaitu dari September 1998-Desember 2006. Peramalan nilai variabel *Industrial Production Index-Total Index* ini akan melibatkan 107 variabel kovariat lain.

Berdasarkan paper *"Forecast Comparison of PCR and PCovR"* oleh James H. Stock dan Mark W. Watson (2005) banyaknya komponen utama (p) yang dipilih untuk metode PCovR adalah p = 1, 2, dan 3 dan nilai w yang dipilih adalah w = 0,0001; 0,001; 0,1; 0,5; dan 0,9.

Analisis data akan dilakukan sesuai dengan Gambar 3.1 pada subbab 3.5. Analisis data yang akan ditampilkan pada bab 4 hanya untuk p = 1, 2, dan 3 dengan w = 0,5 dengan asumsi bahwa kontribusi kompresi informasi variabel-variabel kovariat dan ketepatan prediksi nilai variabel respon mencapai keseimbangan di saat w = 0,5. Sedangkan output untuk p dan w lainnya hanya akan ditampilkan nilai BIC dan RMSE.

Sebelum dianalisis, terlebih dahulu observasi-observasi akan distandardisasi. Pada subbab selanjutnya akan dibahas tahapan-tahapan untuk standardisasi data

4.2.1 Standardisasi Data

Observasi yang akan distandardisasi adalah observasi yang berasal dari variabel Y, yaitu *Industrial Production Index-Total Index* dan observasi yang berasal dari variabel-variabel kovariat $(X_1, X_2, \ldots, X_{107})$.

4.2.1.1 Standardisasi Data dari Variabel Y

Berikut ini observasi dari variabel Y akan distandardisasi dengan tahap-tahap standardisasi observasi sebagai berikut :

1. Perhitungan nilai rata-rata observasi
$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{476}}{476} = -0.0146$$
2. Pengurangan setiap observasi dengan rata-rata observasi
$$\tilde{y}_i = y_i - \bar{y}, i = 1, 2, 3, \dots, 476$$
Hasil dapat dilihat pada lampiran 20.
3. Perhitunga nilai $\|\tilde{\mathbf{y}}\|$
$$\|\tilde{\mathbf{y}}\| = \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_{476}}^2} = 591.5933$$
4. Pembagian setiap observasi $\tilde{y}_i$ dengan $\|\tilde{\mathbf{y}}\|$
$$\tilde{\tilde{y}}_i = \tilde{y}_i \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|}$$
Hasil dapat dilihat pada lampiran 21.
$\tilde{\tilde{y}}_i, i = 1, 2, 3, \dots, 476$ adalah observasi yang sudah distandardisasi dan akan digunakan pada aplikasi dalam bab ini.

4.2.1.2 Standardisasi Data dari Variabel ***X***

Berikut ini akan distandardisasi observasi dari variabel X_j, $j = 1, 2, \dots, 107$ dengan tahap-tahap standardisasi observasi sebagai berikut :

1. Perhitungan nilai rata-rata observasi
$$\bar{x}_j = \frac{x_{1,j} + x_{2,j} + \cdots + x_{n,j}}{n}, j = 1, 2, \dots, 107; n = 1, 2, \dots, 476$$
Nilai rata-rata observasi dari setiap variabel dapat dilihat pada lampiran 22.
2. Pengurangan setiap observasi dengan rata-rata observasi
$$\tilde{x}_{n,j} = x_{n,j} - \bar{x}_j, j = 1, 2, \dots, 107; n = 1, 2, \dots, 476$$
Hasil dapat dilihat pada lampiran 23.
3. Perhitungan *norm* dari setiap kolom
$$\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{j}\| = \sqrt{{x_{1,j}}^2 + {x_{2,j}}^2 + \cdots + {x_{n,j}}^2} \quad ; j = 1, 2, \dots, 107; n = 1, 2, \dots, 476$$
Hasil dapat dilihat pada lampiran 24.
4. Pembagian setiap observasi $\tilde{x}_{n,j}$ dengan $\|\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{j}\|$

$$\tilde{\tilde{x}}_{n,j} = \tilde{x}_{n,j} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{j}}\|}$$

Hasil dapat dilihat pada lampiran 25.

$\tilde{\tilde{x}}_{n,j}, j = 1, 2, \ldots, 107; n = 1, 2, \ldots, 476$ adalah observasi yang sudah distandardisasi dan akan digunakan pada aplikasi dalam bab ini.

4.2.2 Penaksiran Parameter Persamaan Peramalan

Berikut ini data akan dianalisis untuk *p* = 1, 2, dan 3 dengan *w* = 0,5 dengan asumsi bahwa kontribusi kompresi informasi variabel-variabel kovariat dan ketepatan prediksi nilai variabel respon mencapai keseimbangan di saat *w* = 0,5.

a. Untuk *p* =1 dan *w* = 0,5

1. Penaksiran parameter dengan meminimumkan fungsi kriteria

   Taksiran parameter diperoleh dengan meminimumkan sebuah fungsi kriteria. Berdasarkan Persamaan (3.7) pada subbab 3.2.1.2. fungsi kriteria adalah:

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = w_1 \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + w_2 \left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right\|^2$$

Dimana : $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} =$ vektor observasi yang sudah distandardisasi dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* berukuran 476×1.

$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} =$ matriks observasi yang sudah distandardisasi dari 107 variabel-variabel kovariat berukuran 476×107.

$\boldsymbol{\alpha} =$ vektor konstanta parameter regresi berukuran 476×1.

$\boldsymbol{A} =$ matriks bobot berukuran 107×1.

$\boldsymbol{\beta} =$ vektor parameter regresi berukuran 1×1.

$\boldsymbol{B} =$ matriks berukuran 1×107.

Solusi dari peminimuman fungsi kriteria ini adalah taksiran parameter-parameter yaitu $\widehat{\boldsymbol{A}}, \widehat{\boldsymbol{B}}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{b}$. Untuk mencari taksiran parameter akan dipih *p* = 1 dan *w* = 0,5. Karena *w* yang dipilih adalah 0,5 maka

$$w_1 = \frac{w}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} = \frac{0{,}5}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} = \frac{0{,}5}{591.5933} = 8{,}451 \times 10^{-4}$$

$$w_2 = \frac{1-w}{\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\|^2} = \frac{0.5}{107} = 4{,}672897 \times 10^{-3}$$

Sehingga bentuk fungsi kriteria menjadi :

$$f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 8{,}451 \times 10^{-4}\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + 4{,}672897 \times 10^{-3}\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right\|^2$$

dengan meminimumkan $f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ diperoleh taksiran parameter $\boldsymbol{\alpha}$ adalah $\mathbf{0}$ dan taksiran parameter-parameter lainnya dapat dilihat pada lampiran 26.

2. Peringkasan informasi dari variabel-variabel kovariat

Informasi-informasi dari observasi yang berasal dari 107 variabel kovariat yang memiliki hubungan dengan variabel *Industrial Production Index-Total Index* akan diringkas menjadi matriks komponen utama. Matriks ini dapat dicari dengan menggunakan rumus :

$$\boldsymbol{F} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\widehat{\boldsymbol{A}}$$

dimana : $\boldsymbol{F}$ = matriks komponen utama yang berukuran 476×1

$\widehat{\boldsymbol{A}}$ = taksiran dari matriks bobot berukuan107×1

Hasil dari matriks komponen utama dapat dilihat pada lampiran 29.

3. Penaksiran $\hat{y}_i, i = 1, 2, \dots, 476$

Taksiran dari $\hat{y}_i, i = 1, 2, \dots, 476$ dapat dicari dengan menggunakan komponen utama yang digunakan sebagai variabel kovariat baru kemudian diregresikan. Berdasarkan Persamaan (3.5) pada subbab 3.2.1.1 taksiran model regresi yang didapatkan adalah sebagai berikut :

$$\hat{\mathbf{y}} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

dimana : $\hat{\mathbf{y}}$ = vektor taksiran nilai dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* dari Januari 1959-Agustus 1998.

$\widehat{\boldsymbol{A}}$ = taksiran matriks bobot berukuran 107×1.

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ = taksiran parameter regresi berukuran 1×1.

Hasil taksiran nilai dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* dapat dilihat pada lampiran 32.

4. Penghitungan BIC dan RMSE

Berikut ini akan dihitung nilai BIC untuk menentukan banyaknya komponen utama dan RMSE untuk melihat kualitas peramalan dari sebuah Persamaan peramalan.

i. Penghitungan BIC

Untuk mencari nilai BIC sebelumnya akan terlebih dahulu dihitung ${S_p}^2$ untuk $p = 1$ dan $T = 476$ dengan menggunakan Persamaan (3.14) dalam subbab 3.2.1.5, yaitu :

$$ {S_1}^2 = \frac{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2}{T} = \frac{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2}{476} = 0{,}000108 $$

Selanjutnya akan dicari nilai BIC (1) dengan menggunakan rumus sebagai berikut

$$ \begin{aligned} \text{BIC (1)} &= \log({s_1}^2) + 2\frac{\log T}{T} \\ &= \log(0{,}000108) + 2\ \frac{\log(476)}{476} \\ &= -3{,}955325795 \end{aligned} $$

ii. Penghitungan RMSE

Nilai RMSE dicari dengan menggunakan Persamaan (3.16) subbab 3.4

$$ \text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{476}\sum_{i=1}^{476}\left(\tilde{\tilde{y}}_i - \hat{y}_i\right)^2} = 0{,}010412 $$

b. Untuk *p* =2 dan *w* = 0,5

1. Penaksiran parameter dengan meminimumkan fungsi kriteria

Taksiran parameter diperoleh dengan meminimumkan sebuah fungsi kriteria. Berdasarkan Persamaan (3.7) pada subbab 3.2.1.2. fungsi kriteria adalah:

$$ f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = w_1 \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + w_2 \left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right\|^2 $$

Dimana : $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} =$ vektor observasi yang sudah distandardisasi dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* berukuran 476×1.

$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} =$ matriks observasi yang sudah distandardisasi dari 107 variabel-variabel kovariat berukuran 476×107.

$\boldsymbol{\alpha} =$ vektor konstanta parameter regresi berukuran 476×1.

$\boldsymbol{A} =$ matriks bobot berukuran 107×2.

$\boldsymbol{\beta} =$ vektor parameter regresi berukuran 2×1.

$\boldsymbol{B} =$ matriks berukuran 2×107.

Solusi dari peminimuman fungsi kriteria ini adalah taksiran parameter-parameter yaitu $\widehat{\boldsymbol{A}}, \widehat{\boldsymbol{B}}$, $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{b}$. Untuk mencari taksiran parameter akan dipih *p* = 2 dan *w* = 0,5. Karena *w* yang dipilih adalah 0,5 maka

$$w_1 = \frac{w}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} = \frac{0{,}5}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} = \frac{0{,}5}{591.5933} = 8{,}451 \times 10^{-4}$$

$$w_2 = \frac{1-w}{\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\|^2} = \frac{0.5}{107} = 4{,}672897 \times 10^{-3}$$

sehingga bentuk fungsi kriteria menjadi :

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 8{,}451 \times 10^{-4} \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right\|^2 + 4{,}672897 \times 10^{-3} \left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right\|^2$$

dengan meminimumkan $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ diperoleh taksiran parameter $\boldsymbol{\alpha}$ adalah $\mathbf{0}$ dan taksiran parameter-parameter lainnya dapat dilihat pada lampiran 27.

2. Peringkasan informasi dari variabel-variabel kovariat

Informasi-informasi dari observasi yang berasal dari 107 variabel kovariat yang memiliki hubungan dengan variabel *Industrial Production Index-Total Index* akan diringkas menjadi matriks komponen utama. Matriks ini dapat dicari dengan menggunakan rumus :

$$\boldsymbol{F} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\widehat{\boldsymbol{A}}$$

dimana : $\boldsymbol{F} =$ matriks komponen utama yang berukuran 476×2

$\widehat{\boldsymbol{A}}$ = taksiran dari matriks bobot berukuan107×2

Hasil dari matriks komponen utama dapat dilihat pada lampiran 30.

3. Penaksiran $\hat{y}_i, i = 1, 2, \dots, 476$

Taksiran dari $\hat{y}_i, i = 1, 2, \dots, 476$ dapat dicari dengan menggunakan komponen utama yang digunakan sebagai variabel kovariat baru kemudian diregresikan. Berdasarkan Persamaan (3.5) pada subbab 3.2.1.1 taksiran model regresi yang didapatkan adalah sebagai berikut :

$$\hat{\mathbf{y}} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

dimana : $\hat{\mathbf{y}}$ = vektor taksiran nilai dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* dari Januari 1959-Agustus 1998.

$\hat{\boldsymbol{A}}$ = taksiran matriks bobot berukuran 107×2.

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ = taksiran parameter regresi berukuran 2×1.

Hasil taksiran nilai dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* dapat dilihat pada lampiran 33.

4. Penghitungan BIC dan RMSE

Berikut ini akan dihitung nilai BIC untuk menentukan banyaknya komponen utama dan RMSE untuk melihat kualitas peramalan dari sebuah Persamaan peramalan.

i. Penghitungan BIC

Untuk mencari nilai BIC sebelumnya akan terlebih dahulu dihitung $S_p{}^2$ untuk $p = 2$ dan $T = 476$ dengan menggunakan Persamaan (3.14) dalam subbab 3.2.1.5, yaitu :

$$S_2{}^2 = \frac{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2}{T} = \frac{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2}{476} = 5{,}2 \times 10^{-5}$$

Selanjutnya akan dicari nilai BIC (2) dengan menggunakan rumus sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\text{BIC } (2) &= \log(s_2{}^2) + 3\frac{\log T}{T} \\ &= \log(5{,}2 \times 10^{-5}) + 3\ \frac{\log(476)}{476} \\ &= -4{,}266718\end{aligned}$$

ii. Penghitungan RMSE

Nilai RMSE dicari dengan menggunakan Persamaan (3.16) subbab 3.4

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{476}\sum_{i=1}^{476}\left(\tilde{\tilde{y}}_i - \hat{y}_i\right)^2} = 0{,}007214$$

c. Untuk p = 3 dan w = 0,5

1. Penaksiran parameter dengan meminimumkan fungsi kriteria

Taksiran parameter diperoleh dengan meminimumkan sebuah fungsi kriteria. Berdasarkan Persamaan (3.7) pada subbab 3.2.1.2. fungsi kriteria adalah:

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = w_1 \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \right\|^2 + w_2 \left\| \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \right\|^2$$

Dimana : $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} =$ vektor observasi yang sudah distandardisasi dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* berukuran 476×1.

$\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} =$ matriks observasi yang sudah distandardisasi dari 107 variabel-variabel kovariat berukuran 476×107.

$\boldsymbol{\alpha} =$ vektor konstanta parameter regresi berukuran 476×1.

$\boldsymbol{A} =$ matriks bobot berukuran 107×3.

$\boldsymbol{\beta} =$ vektor parameter regresi berukuran 3×1.

$\boldsymbol{B} =$ matriks berukuran 3×107.

Solusi dari peminimuman fungsi kriteria ini adalah taksiran parameter-parameter yaitu $\widehat{\boldsymbol{A}}, \widehat{\boldsymbol{B}}$, $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{b}$. Untuk mencari taksiran parameter akan dipih p = 3 dan w = 0,5. Karena w yang dipilih adalah 0,5 maka

$$w_1 = \frac{w}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} = \frac{0{,}5}{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2} = \frac{0{,}5}{591.5933} = 8{,}451 \times 10^{-4}$$

$$w_2 = \frac{1-w}{\left\|\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right\|^2} = \frac{0.5}{107} = 4{,}672897 \times 10^{-3}$$

sehingga bentuk fungsi kriteria menjadi :

$$f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 8{,}451 \times 10^{-4} \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \boldsymbol{\alpha} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \right\|^2 + 4{,}672897 \times 10^{-3} \left\| \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \right\|^2$$

dengan meminimumkan $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ diperoleh taksiran parameter $\boldsymbol{\alpha}$ adalah $\mathbf{0}$ dan taksiran parameter-parameter lainnya dapat dilihat pada lampiran 28.

2. Peringkasan informasi dari variabel-variabel kovariat

Informasi-informasi dari observasi yang berasal dari 107 variabel kovariat yang memiliki hubungan dengan variabel *Industrial Production Index-Total Index* akan diringkas menjadi matriks komponen utama. Matriks ini dapat dicari dengan menggunakan rumus :

$$\boldsymbol{F} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\widehat{\boldsymbol{A}}$$

dimana : $\boldsymbol{F}$ = matriks komponen utama yang berukuran 476×3

$\widehat{\boldsymbol{A}}$ = taksiran dari matriks bobot berukuan107×3

Hasil dari matriks komponen utama dapat dilihat pada lampiran 31.

3. Penaksiran $\hat{y}_i, i = 1, 2, \ldots, 476$

Taksiran dari $\hat{y}_i, i = 1, 2, \ldots, 476$ dapat dicari dengan menggunakan komponen utama yang digunakan sebagai variabel kovariat baru kemudian diregresikan. Berdasarkan Persamaan (3.5) pada subbab 3.2.1.1 taksiran model regresi yang didapatkan adalah sebagai berikut :

$$\hat{\mathbf{y}} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

dimana : $\hat{\mathbf{y}}$ = vektor taksiran nilai dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* dari Januari 1959-Agustus 1998.

$\widehat{\boldsymbol{A}}$ = taksiran matriks bobot berukuran 107×3

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ = taksiran parameter regresi berukuran 3×1.

Hasil taksiran nilai dari variabel *Industrial Production Index-Total Index* dapat dilihat pada lampiran 34.

4. Penghitungan BIC dan RMSE

Berikut ini akan dihitung nilai BIC untuk menentukan banyaknya komponen utama dan RMSE untuk melihat kualitas peramalan dari sebuah Persamaan peramalan.

i. Penghitungan BIC

Untuk mencari nilai BIC sebelumnya akan terlebih dahulu dihitung ${S_p}^2$ untuk $p = 3$ dan $T = 476$ dengan menggunakan Persamaan (3.14) dalam subbab 3.2.1.5, yaitu :

$${S_3}^2 = \frac{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2}{T} = \frac{\|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2}{476} = 2{,}84 \times 10^{-5}$$

Selanjutnya akan dicari nilai BIC (3) dengan menggunakan rumus sebagai berikut :

$$\text{BIC}(3) = \log(s_3{}^2) + 4\frac{\log T}{T}$$

$$= \log(2{,}84 \times 10^{-5}) + 4\,\frac{\log(476)}{476}$$

$$= -4{,}524180761$$

ii. Penghitungan RMSE

Nilai RMSE dicari dengan menggunakan Persamaan (3.16) subbab 3.4

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{476}\sum_{i=1}^{476}\left(\tilde{\tilde{y}}_i - \hat{y}_i\right)^2} = 0{,}005326$$

4.2.3 Pemilihan Persamaan Peramalan Terbaik

Kriteria pemilihan Persamaan peramalan terbaik pada skripsi ini berdasarkan pada dua hal, yaitu pemilihan banyak komponen faktor yang dilihat dari nilai BIC (*p*) dan kualitas Persamaan peramalan dilihat dari nilai RMSE, (Heij dkk, 2006). Banyaknya komponen utama yang dipilih adalah yang dapat meminimumkan nilai BIC (*p*), sedangkan Persamaan peramalan yang baik adalah yang memiliki RMSE yang terkecil. Berikut ini adalah nilai BIC (*p*) dan RMSE untuk Persamaan peramalan dengan p =1, 2, dan 3 serta *w* = 0,0001; 0,01; 0,1; 0,5; 0,9.

Tabel 4. 1 Nilai BIC (*p*)

p \ w	0,0001	0,01	0,1	0,5	0,9
1	0,693857	-1,423406	-2,771119	-3,95371	-3,766834
2	0,724069	-1,393888	-2,75677	-4,266718	-3,927226
3	0,739626	-1,378601	-2,747532	-4,524701	-4,016167

Tabel 4. 2 Nilai RMSE

p \ w	0,0001	0,01	0,1	0,5	0,9
1	2,194336	0,191722	0,040627	0,010412	0,012911
2	2,25734	0,197069	0,041037	0,007214	0,010665
3	2,283298	0,199273	0,041208	0,005326	0,009565

Sesuai dengan kriteria pemilihan Persamaan peramalan terbaik, terlebih dahulu akan dipilih p yang meminimumkan nilai BIC (p). Berdasarkan Tabel 4.1 nilai BIC terkecil diperoleh ketika p = 3 dan w = 0,5 dengan nilai sebesar -4,524701. Maka, berdasarkan Bai dan Ng (2002) banyaknya komponen utama yang dipilih adalah p = 3 untuk mendapatkan Persamaan peramalan terbaik.

Setelah banyaknya komponen utama (p) dipilih, selanjutnya akan dicek kualitas dan keakurasian Persamaan peramalan tersebut. Untuk mengecek kualitas keakurasian Persamaan peramalan dalam meramal nilai suatu variabel respon pada periode selanjutnya dilihat nilai RMSEnya. Berdasarkan Tabel 4.2 Persamaan peramalan saat p = 3 dan w = 0,5 memiliki nilai RMSE terkecil dibandingkan dengan Persamaan peramalan lainnya. Maka, berdasarkan kedua kriteria tersebut Persamaan peramalan terbaik yang akan digunakan untuk meramal nilai variabel respon *Industrial Production Index-Total Index* pada periode selanjutnya adalah Persamaan peramalan saat p = 3 dan w = 0,5.

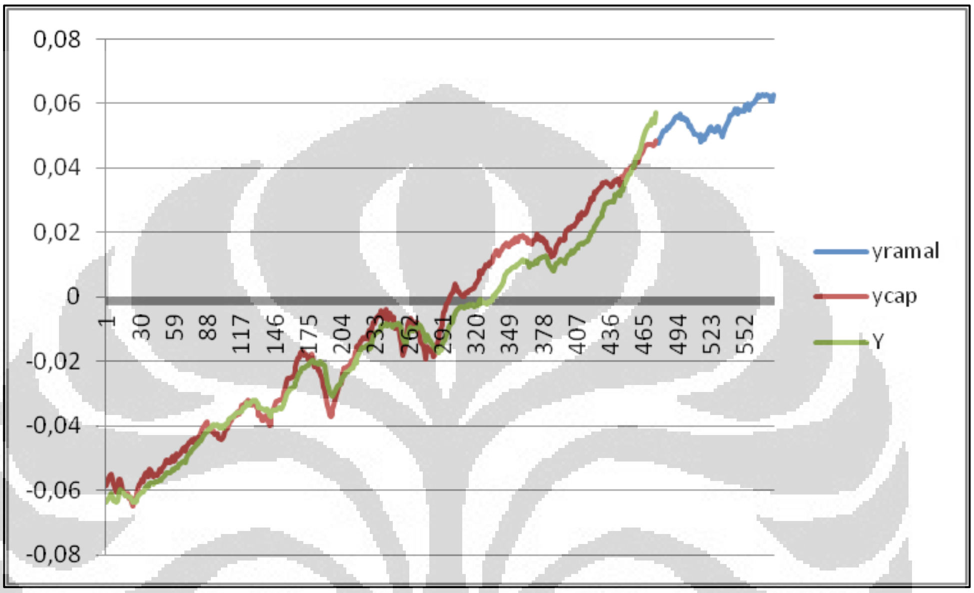
4.2.4 Peramalan Nilai ke- $\hat{y}_{T+h}$

Selanjutnya nilai-nilai dari *Industrial Production Index-Total Index* pada periode September 1998 – Desember 2006 (h = 1, 2, ..., 100) akan diramal dengan menggunakan Persamaan peramalan saat p = 3 dan w = 0,5 dengan asumsi nilai $\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{T+h}$ sudah diketahui. Berikut ini adalah Persamaan peramalan yang akan digunakan :

$$\tilde{\tilde{y}}_{T+h} = \hat{\alpha} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{T+h}\widetilde{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

Dimana taksiran parameter-parameter yang digunakan adalah taksiran yang diperoleh ketika meminimumkan fungsi kriteria saat $p = 3$ dan $w = 0,5$. Nilai peramalan tersebut dapat dilihat pada lampiran 29.

Berikut ini adalah grafik dari nilai sebenarnya dan penaksiran dari Januari 1959-Agustus 1998, dan peramalan dari September 1998-Desember 2006 variabel respon *Industrial Production Index-Total Index*.



Gambar 4. 1 Grafik Nilai dari Variabel *Industrial Production Index-Total Index*

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, kesimpulan yang dapat diperoleh dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. *Principal covariate regression* (PCovR) adalah model regresi yang menggambarkan hubungan antara variabel respon dengan banyak variabel kovariat dengan metode penaksiran parameter model berupa peminimuman sebuah fungsi kriteria. Fungsi kriteria merupakan fungsi dari *error* peramalan dan *error* kompresi variabel-variabel kovariat yang masing-masing sudah terboboti.
2. Metode PCovR sudah mempertimbangkan kesalahan prediksi dari nilai variabel respon dan kesalahan peringkasan informasi variabel-variabel kovariat yang tercakup dalam fungsi kriteria dengan bobot yang disesuaikan dengan kontribusi masing-masing.
3. Taksiran parameter diperoleh dengan meminimumkan fungsi kriteria dengan menggunakan *singular value decomposition*.
4. Pemilihan Persamaan peramalan terbaik didasarkan pada dua kriteria, yaitu BIC (p) dan RMSE. Persamaan peramalan yang dipilih adalah Persamaan peramalan yang memiliki banyaknya komponen utama (p) yang dapat meminimumkan BIC (p) dan mengahasilkan RMSE minimum.

5.2 Saran

Saran untuk pengembangan skripsi ini adalah :

1. Dapat dijelaskan mengenai peramalan runtun dengan mengikutsertakan variabel preferensial.
2. Dapat dijelaskan mengenai peramalan runtun dengan mengikutsertakan variabel preferensial dan pengaruh lag.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. (1994). *Elementary Linear Algebra.* Canada: John Wiley & Sons.

Chipman, J. S. *Lectures in Econometric Theory.* University of Minnesota.

Heij, C., Groenen, P. J., & van Dick, D. J. (2006). *Time Series Forecasting by Principal Covariate Regression.* Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam.

Heij, C., P. G., & D. v. (2005). *Forecast Comparison of Principal Component and Principal Covariate Regression.* Econometric Institute Rotterdam.

Jacob, B. (1990). *Linear Algebra.* New York: W.H. Freeman and Company.

Montgomery, D. C., A. Peck, E., & Vining, G. G. (2001). *Introduction to Linear Regression Analysis, Third Edition.* Canada: A Wiley Interscience Publication.

Rencher, A. C. (1998). *Multivariate Statistical Inference and Applications.* Canada: A Wiley-Interscience Publication.

Rencher, A. C. (2002). *Methods of Multivariate Analysis, Second Addition.* Canada: A John Wiley & Sons, Inc Publication.

Stock, J. H., & W. Watson, M. (2008). *Forecasting in Dynamic Factor Models Subject to Strutural Instability.*

LAMPIRAN

Lampiran 1 Pembuktian Teorema 2.1

Diketahui :

Diasumsikan bahwa ukuran matriks memenuhi kondisi sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan.

Misalkan :

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$; $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$; $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ dimana $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$.

entri pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dari $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ dinotasikan sebagai berikut :

$$(\boldsymbol{A})_{ij} = a_{ij}, (\boldsymbol{B})_{ij} = b_{ij}, \text{dan } (\boldsymbol{C})_{ij} = c_{ij}$$

Akan dibuktikan :

a. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ adalah matriks yang memiliki m baris dan n kolom.

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$; $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ dimana $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{ij} &= (\boldsymbol{A})_{ij} + (\boldsymbol{B})_{ij} \\ &= a_{ij} + b_{ij} \\ &= b_{ij} + a_{ij} \\ &= (\boldsymbol{B})_{ij} + (\boldsymbol{A})_{ij} \\ &= (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A})_{\boldsymbol{ij}}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ adalah sama, maka $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$.

b. $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ adalah matriks yang memiliki m baris dan n kolom.

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$; $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$; $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ dimana $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$.

(lanjutan)

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ dan $(\boldsymbol{A}+$ $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}))_{ij} &= (\boldsymbol{A})_{ij}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})_{ij} \\
&= a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \\
&= a_{ij}+b_{ij}+c_{ij} \\
&= \left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij} \\
&= (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ij}+(\boldsymbol{C})_{ij} \\
&= ((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C})_{ij}
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ dan $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+$ $\boldsymbol{C}$ adalah sama, maka $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$.

(lanjutan)

c. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $n \times m$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $m \times r$.

Perkalian dari ketiga matriks tersebut adalah :

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (b_{11}c_{11} + \cdots + b_{1m}c_{m1}) & \dots & (b_{11}c_{1r} + \cdots + b_{1m}c_{mr}) \\ (b_{21}c_{11} + \cdots + b_{2m}c_{m1}) & \dots & (b_{21}c_{1r} + \cdots + b_{2m}c_{mr}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{n1}c_{11} + \cdots + b_{nm}c_{m1}) & \dots & (b_{n1}c_{1r} + \cdots + b_{nm}c_{mr}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + \cdots + b_{1m}c_{m1}) + \cdots + a_{1n}(b_{n1}c_{11} + \cdots + b_{nm}c_{m1}) & \dots & a_{11}(b_{11}c_{1r} + \cdots + b_{1m}c_{mr}) + \cdots + a_{1n}(b_{n1}c_{1r} + \cdots + b_{nm}c_{mr}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(b_{11}c_{11} + \cdots + b_{1m}c_{m1}) + \cdots + a_{mn}(b_{n1}c_{11} + \cdots + b_{nm}c_{m1}) & \dots & a_{m1}(b_{11}c_{1r} + \cdots + b_{1m}c_{mr}) + \cdots + a_{mn}(b_{n1}c_{1r} + \cdots + b_{mn}c_{mr}) \end{bmatrix}$$

(lanjutan)

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) & \dots & (a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm}) \\ (a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1}) & \dots & (a_{21}b_{1m} + \cdots + a_{2n}b_{nm}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1}) & \dots & (a_{m1}b_{1mn} + \cdots + a_{mn}b_{nm}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1})c_{11} + \cdots + (a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm})c_{m1} & \dots & (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1})c_{1r} + \cdots + (a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm})c_{mr} \\ (a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{m1})c_{11} + \cdots + (a_{21}b_{1m} + \cdots + a_{2n}b_{nm})c_{m1} & \dots & (a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1})c_{1r} + \cdots + (a_{21}b_{1m} + \cdots + a_{2n}b_{nm})c_{mr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{m1})c_{11} + \cdots + (a_{m1}b_{1mn} + \cdots + a_{mn}b_{nm})c_{m1} & \dots & (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1})c_{1r} + \cdots + (a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm})c_{mr} \end{bmatrix}$$

dari hasil akhir kedua persamaan tersebut, yaitu :

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + \cdots + b_{1m}c_{m1}) + \cdots + a_{1n}(b_{n1}c_{11} + \cdots + b_{nm}c_{m1}) & \dots & a_{11}(b_{11}c_{1r} + \cdots + b_{1m}c_{mr}) + \cdots + a_{1n}(b_{n1}c_{1r} + \cdots + b_{nm}c_{mr}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(b_{11}c_{11} + \cdots + b_{1m}c_{m1}) + \cdots + a_{mn}(b_{n1}c_{11} + \cdots + b_{nm}c_{m1}) & \dots & a_{m1}(b_{11}c_{1r} + \cdots + b_{1m}c_{mr}) + \cdots + a_{mn}(b_{n1}c_{1r} + \cdots + b_{mn}c_{mr}) \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1})c_{11} + \cdots + (a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm})c_{m1} & \dots & (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1})c_{1r} + \cdots + (a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm})c_{mr} \\ (a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{m1})c_{11} + \cdots + (a_{21}b_{1m} + \cdots + a_{2n}b_{nm})c_{m1} & \dots & (a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1})c_{1r} + \cdots + (a_{21}b_{1m} + \cdots + a_{2n}b_{nm})c_{mr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{m1})c_{11} + \cdots + (a_{m1}b_{1mn} + \cdots + a_{mn}b_{nm})c_{m1} & \dots & (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1})c_{1r} + \cdots + (a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm})c_{mr} \end{bmatrix}$$

diperoleh bahwa entri-entri matriks $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ sama dengan entri-entri matriks $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$. Hal ini diperlihatkan sebagai berikut :

entri baris 1 kolom 1:

$$a_{11}(b_{11}c_{11} + \cdots + b_{1m}c_{m1}) + \cdots + a_{1n}(b_{n1}c_{11} + \cdots + b_{nm}c_{m1}) = (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1})c_{11} + \cdots + (a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm})c_{m1}$$

(lanjutan)

entri baris m kolom 1:

$a_{m1}(b_{11}c_{11} + \cdots + b_{1m}c_{m1}) + \cdots + a_{mn}(b_{n1}c_{11} + \cdots + b_{nm}c_{m1}) = (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{m1})c_{11} + \cdots + (a_{m1}b_{1mn} + \cdots + a_{mn}b_{nm})c_{m1}$

dengan cara yang sama untuk entri baris i kolom j

$a_{i1}(b_{11}c_{1j} + \cdots + b_{1m}c_{mj}) + \cdots + a_{in}(b_{n1}c_{1j} + \cdots + b_{nm}c_{mj}) = (a_{i1}b_{11} + \cdots + a_{in}b_{m1})c_{1j} + \cdots + (a_{i1}b_{nm} + \cdots + a_{in}b_{nm})c_{mj}$

Sehingga entri-entri matriks $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ sama dengan entri-entri matriks $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$. Maka, terbukti bahwa $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.

(lanjutan)

d. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $r \times m$, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $m \times n$.

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]; \boldsymbol{B} = [b_{ij}]; \boldsymbol{C} = [c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ dan $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})]_{ij} &= a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj}+c_{mj}) \\
&= a_{i1}b_{1j} + a_{i1}c_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} + a_{im}c_{mj} \\
&= \left(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}\right) \\
&\quad +\left(a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj}\right) \\
&= [\boldsymbol{AB}]_{ij} + [\boldsymbol{AC}]_{ij} \\
&= [\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}]_{ij}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ dan $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ adalah sama, maka $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$.

e. $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BC}$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $r \times m$, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $n \times r$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $n \times r$.

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]; \boldsymbol{B} = [b_{ij}]; \boldsymbol{C} = [c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BC}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
[(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}]_{ij} &= (b_{i1}+c_{i1})a_{1j} + (b_{i2}+c_{i2})a_{2j} + \cdots + (b_{ir}+c_{ir})a_{rj} \\
&= b_{i1}a_{1j} + c_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + c_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{ir}a_{rj} + c_{ir}a_{rj} \\
&= \left(b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{ir}a_{rj}\right) \\
&\quad +\left(c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + \cdots + c_{ir}a_{rj}\right) \\
&= [\boldsymbol{BA}]_{ij} + [\boldsymbol{CA}]_{ij} \\
&= [\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}]_{ij}
\end{aligned}$$

(lanjutan)

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BC}$ adalah sama, maka $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BC}$.

f. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $r\times m$, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $m\times n$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $m\times n$.

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]; \boldsymbol{B}=[b_{ij}]; \boldsymbol{C}=[c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$ dan $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})]_{ij} &= a_{i1}(b_{1j}-c_{1j})+a_{i2}(b_{2j}-c_{2j})+\cdots+a_{im}(b_{mj}-c_{mj})\\ &= a_{i1}b_{1j}-a_{i1}c_{1j}+a_{i2}b_{2j}-a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}-a_{im}c_{mj}\\ &= (a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj})\\ &\quad -(a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{im}c_{mj})\\ &= [\boldsymbol{AB}]_{ij}-[\boldsymbol{AC}]_{ij}\\ &= [\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}]_{ij}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$ dan $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}$ adalah sama, maka $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}$.

g. $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{CA}$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $r\times m$, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $n\times r$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $n\times r$.

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]; \boldsymbol{B}=[b_{ij}]; \boldsymbol{C}=[c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{BC}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}]_{ij} &= (b_{i1}-c_{i1})a_{1j}+(b_{i2}-c_{i2})a_{2j}+\cdots+(b_{ir}-c_{ir})a_{rj}\\ &= b_{i1}a_{1j}-c_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}-c_{i2}a_{2j}+\cdots+b_{ir}a_{rj}-c_{ir}a_{rj}\\ &= (b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+\cdots+b_{ir}a_{rj})\\ &\quad -(c_{i1}a_{1j}+c_{i2}a_{2j}+\cdots+c_{ir}a_{rj})\\ &= [\boldsymbol{BA}]_{ij}-[\boldsymbol{CA}]_{ij}\end{aligned}$$

(lanjutan

$$= [\boldsymbol{BA} - \boldsymbol{CA}]_{ij}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BC}$ adalah sama, maka $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BC}$.

h. $a(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = a\boldsymbol{B} + a\boldsymbol{C}$

Bukti :

Misalkan a adalah sebarang skalar, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $n \times r$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $n \times r$.

$\boldsymbol{B} = [b_{ij}]; \boldsymbol{C} = [c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $a(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ dan $a\boldsymbol{B} + a\boldsymbol{C}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}[a(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})]_{ij} &= a(b_{ij} + c_{ij}) \\ &= ab_{ij} + ac_{ij} \\ &= a(\boldsymbol{B})_{ij} + a(\boldsymbol{C})_{ij}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari$a(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ dan $a\boldsymbol{B} + a\boldsymbol{C}$ adalah sama, maka $a(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = a\boldsymbol{B} + a\boldsymbol{C}$.

i. $a(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) = a\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{C}$

Bukti :

Misalkan a adalah sebarangskalar, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $n \times r$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $n \times r$.

$\boldsymbol{B} = [b_{ij}]; \boldsymbol{C} = [c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $a(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})$ dan $a\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{C}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}[a(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})]_{ij} &= a(b_{ij} - c_{ij}) \\ &= ab_{ij} - ac_{ij} \\ &= a(\boldsymbol{B})_{ij} - a(\boldsymbol{C})_{ij}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari$a(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})$ dan $a\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{C}$ adalah sama, maka $a(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) = a\boldsymbol{B} - a\boldsymbol{C}$.

j. $(a + b)\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{C} + b\boldsymbol{C}$

Bukti :

Misalkan a, b adalah sebarang skalar, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $n \times r$.

(lanjutan)

$\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari$(a+b)\boldsymbol{C}$ dan $a\boldsymbol{C} + b\boldsymbol{C}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\left((a+b)\boldsymbol{C}\right)_{ij} &= (a+b)c_{ij}\\ &= ac_{ij} + bc_{ij}\\ &= a(\boldsymbol{C})_{ij} + b(\boldsymbol{C})_{ij}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(a+b)\boldsymbol{C}$ dan $a\boldsymbol{C} + b\boldsymbol{C}$ adalah sama, maka $(a+b)\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{C} + b\boldsymbol{C}$.

k. $(a-b)\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{C} - b\boldsymbol{C}$

Bukti :

Misalkan a, b adalah sebarang skalar, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $n \times r$.

$\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari$(a-b)\boldsymbol{C}$ dan $a\boldsymbol{C} - b\boldsymbol{C}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\left((a-b)\boldsymbol{C}\right)_{ij} &= (a-b)c_{ij}\\ &= ac_{ij} - bc_{ij}\\ &= a(\boldsymbol{C})_{ij} - b(\boldsymbol{C})_{ij}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(a-b)\boldsymbol{C}$ dan $a\boldsymbol{C} - b\boldsymbol{C}$ adalah sama, maka $(a-b)\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{C} - b\boldsymbol{C}$.

l. $a(b\boldsymbol{C}) = (ab)\boldsymbol{C}$

Bukti :

Misalkan a, b adalah sebarangskalar, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $n \times r$.

$\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari$a(b\boldsymbol{C})$ dan $(ab)\boldsymbol{C}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}(a(b\boldsymbol{C}))_{ij} &= a(bc_{ij})\\ &= (abc_{ij})\\ &= abc_{ij}\\ &= ab(\boldsymbol{C})_{ij}\end{aligned}$$

(lanjutan)

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $a(b\boldsymbol{C})$ dan $(ab)\boldsymbol{C}$ adalah sama, maka $a(b\boldsymbol{C}) = (ab)\boldsymbol{C}$

m. $a(\boldsymbol{BC}) = (a\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(a\boldsymbol{C})$

Bukti :

Misalkan a adalah sebarang skalar, $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $n \times r$, $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $r \times m$.

$\boldsymbol{B} = [b_{ij}]; \boldsymbol{C} = [c_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $a(\boldsymbol{BC})$dan $\boldsymbol{B}(a\boldsymbol{C})$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a[\boldsymbol{BC}]_{ij} &= a(b_{i1}c_{1j}) + a(b_{i2}c_{2j}) + \cdots + a(b_{ir}c_{rj}) \\ &= (ab_{i1})c_{1j} + (ab_{i2})c_{2j} + \cdots + (ab_{ir})c_{rj} \\ &= b_{i1}(ac_{1j}) + b_{i2}(ac_{2j}) + \cdots + b_{ir}(ac_{rj}) \\ &= (\boldsymbol{B})_{ij}(a\boldsymbol{C})_{ij} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $a(\boldsymbol{BC})$ dan $\boldsymbol{B}(a\boldsymbol{C})$ adalah sama, maka $a(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{B}(a\boldsymbol{C})$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $a(\boldsymbol{BC})$dan $(a\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a[\boldsymbol{BC}]_{ij} &= a(b_{i1}c_{1j}) + a(b_{i2}c_{2j}) + \cdots + a(b_{ir}c_{rj}) \\ &= (ab_{i1})c_{1j} + (ab_{i2})c_{2j} + \cdots + (ab_{ir})c_{rj} \\ &= (a\boldsymbol{B})_{ij}\boldsymbol{C}_{ij} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $a(\boldsymbol{BC})$ dan $(a\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ adalah sama, maka $a(\boldsymbol{BC}) = (a\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$.

Karena, $a(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{B}(a\boldsymbol{C})$ dan $a(\boldsymbol{BC}) = (a\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ maka $a(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{B}(a\boldsymbol{C}) = (a\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$.

Terbukti bahwa $a(\boldsymbol{BC}) = (a\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(a\boldsymbol{C})$

Lampiran 2 Pembuktian Teorema 2.2

Diketahui :

Diasumsikan bahwa ukuran matriks memenuhi kondisi sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan.

Akan dibuktikan :

a) $((\boldsymbol{A})^T)^T = \boldsymbol{A}$

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $n \times m$.

Dimana : $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$

$$((\boldsymbol{A})^T)^T = ([a_{ij}]^T)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = \boldsymbol{A}$$

b) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$ dan $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{B}^T$

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $n \times m$.

Dimana : $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]; \boldsymbol{B} = [b_{ij}]$

Akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T$ dan $\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$((\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T)_{ij} = ((\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{ij})^T = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = ((\boldsymbol{A})_{ij})^T + ((\boldsymbol{B})_{ij})^T$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T$ dan $\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$ adalah sama, maka $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^T$ dan $\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{B}^T$ adalah sama, yaitu sebagai berikut :

$$((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^T)_{ij} = ((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})_{ij})^T = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})_{ji} = a_{ji} - b_{ji} = ((\boldsymbol{A})_{ij})^T - ((\boldsymbol{B})_{ij})^T$$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^T$ dan $\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{B}^T$ adalah sama, maka $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$.

c) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$ dengan k adalah sebuah skalar

Bukti:

Misalkan k adalah sebarangskalar dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $n \times m$.

Dimana : $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$

akan ditunjukkan entri-entri yang bersesuaian dari $(k\boldsymbol{A})^T$ dan $k\boldsymbol{A}^T$adalah sama, yaitu sebagai berikut :

(lanjutan)

$(k\boldsymbol{A})^T = [ka_{ij}]^T = k[a_{ij}]^T = k[a_{ji}] = k\boldsymbol{A}^T$

Terbukti bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(k\boldsymbol{A})^T$ dan $k\boldsymbol{A}^T$ adalah sama, maka $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$.

d) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times r$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks berukuran $r \times n$.

Dimana : $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]; \boldsymbol{B} = [b_{ij}]$

Akan dilihat bentuk $(\boldsymbol{AB})^T$

$((\boldsymbol{AB})^T)_{ij} = (\boldsymbol{AB})_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}$

Selanjutnya akan dilihat bentuk $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

Misalkan : $a'_{ij} = a_{ji};\ b'_{ij} = b_{ji}$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T)_{ij} &= b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + \cdots + b'_{ir}a'_{rj} \\ &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr} \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}\end{aligned}$$

Dari kedua bentuk di atas terlihat bahwa kedua bentuk sama sehingga $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

Lampiran 3 Pembuktian Lemma 2.1

Diketahui :

Misalkan matriks $\boldsymbol{C}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dan $\boldsymbol{D}$ adalah matriks berukuran $n \times m$

Akan dibuktikan :

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{CD}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{DC})$

Bukti:

Definisikan $\boldsymbol{C} = [c_{ij}],\ \boldsymbol{D} = [d_{ij}]$, maka

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{CD}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}d_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} d_{ji}c_{ij} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{DC}).$$

Lampiran 4 Pembuktian Lemma 2.2

Diketahui :

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $n \times l$.

Akan dibuktikan :

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$$

Bukti ;

Misal : $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1l} & a_{2l} & \dots & a_{nl} \end{bmatrix}$$

Berikut adalah hasil perkalian dan *trace* dari $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1l} & a_{2l} & \dots & a_{nl} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {a_{11}}^2 + \cdots + {a_{1l}}^2 & \dots & a_{11}a_{n1} + \cdots + a_{1l}a_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}a_{11} + \cdots + a_{nl}a_{1l} & \dots & {a_{n1}}^2 + \cdots + {a_{nl}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = ({a_{11}}^2 + \cdots + {a_{1l}}^2) + \cdots + ({a_{n1}}^2 + \cdots + {a_{nl}}^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} {a_{ij}}^2$$

Berikut adalah hasil perkalian dan *trace* dari $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1l} & a_{2l} & \dots & a_{nl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {a_{11}}^2 + \cdots + {a_{n1}}^2 & \dots & a_{11}a_{1l} + \cdots + a_{n1}a_{nl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1l}a_{11} + \cdots + a_{nl}a_{n1} & \dots & {a_{1l}}^2 + \dots + {a_{nl}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = ({a_{11}}^2 + \cdots + {a_{n1}}^2) + \cdots + ({a_{1l}}^2 + \dots + {a_{nl}}^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} {a_{ij}}^2$$

Terbukti bahwa

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} {a_{ij}}^2$$

Lampiran 5 Pembuktian Teorema 2.3

Diketahui :

$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ adalah matriks bujur sangkar berukura $n \times n$ dan matriks $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ adalah invers matriks $\boldsymbol{U}$

Akan dibuktikan :

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$$

Bukti :

Karena $\boldsymbol{P}$ adalah invers dari $\boldsymbol{U}$ maka $\boldsymbol{PU} = \boldsymbol{I}$. Kalikan kedua ruas dengan $\boldsymbol{Q}$, maka diperoleh :

$$(\boldsymbol{PU})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{IQ} = \boldsymbol{Q}$$

Karena $\boldsymbol{Q}$ adalah invers dari $\boldsymbol{U}$,

$$(\boldsymbol{PU})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{UQ}) = \boldsymbol{PI} = \boldsymbol{P}$$

sehingga $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$.

Lampiran 6 Pembuktian Teorema 2.4

Akan dibuktikan :

Matriks $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus :

$$\boldsymbol{U^{-1}} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi, sebuah matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ dikatakan dapat dibalik jika dan hanya jika $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ untuk suatu $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{B}$ disebut invers $\boldsymbol{A}$.

Maka akan ditunjukkan bahwa : $\boldsymbol{UB} = \boldsymbol{BU} = \boldsymbol{I}$

Misalkan $\boldsymbol{B} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Maka,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{UB} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & -ba + ab \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & -ba + ba \\ cd - cd & ad - bc \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{ad - bc}{ad - bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad - bc}{ad - bc} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{BU} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & bd - bd \\ -ac + ac & ad - cb \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad - bc}{ad - bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad - bc}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $\boldsymbol{UB} = \boldsymbol{BU} = \boldsymbol{I}$ jika $ad - bc \neq 0$. Maka $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}^{-\mathbf{1}}$

Lampiran 7 Pembuktian Teorema 2.5

Diketahui :

$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ adalah matriks bujur sangkar berukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ yang dapat dibalik

Akan dibuktikan :

a. $\boldsymbol{UV}$ dapat dibalik

b. $(\boldsymbol{UV})^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{V}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{U}^{-\mathbf{1}}$

Bukti :

Berdasarkan definisi, sebuah matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ dikatakan dapat dibalik jika dan hanya jika $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ untuk suatu $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{B}$ disebut invers $\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{UV})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{UVB} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{IVB} = \boldsymbol{U}^{-1}$$
$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{VB} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$$
$$\boldsymbol{IB} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$$

Dari uraian di atas, diperoleh bahwa invers dari $\boldsymbol{UV}$ adalah $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$. Atau bisa juga dituliskan : $(\boldsymbol{UV})^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{UV}$ dapat dibalik.

$$\boldsymbol{UV}(\boldsymbol{UV})^{-1} = \boldsymbol{UVV}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{UIU}^{-1} = \boldsymbol{UU}^{-1} = \boldsymbol{I}$$
$$(\boldsymbol{UV})^{-1}\boldsymbol{UV} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{UV} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{IV} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$$

Terbukti bahwa $\boldsymbol{UV}$ dapat dibalik dan $(\boldsymbol{UV})^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$.

Lampiran 8 Pembuktian Teorema 2.6

Diketahui :

$\boldsymbol{U}$ adalah sebuah matriks yang dapat dibalik.

Akan dibuktikan :

$\boldsymbol{U}^T$ dapat dibalik dan $(\boldsymbol{U}^T)^{-1} = (\boldsymbol{U}^{-1})^T$

Bukti :

Dengan menggunakan Teorema 2.2.d dan $\boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}$ diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{U}^{-1})^T = (\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U})^T = \boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}$$

$$(\boldsymbol{U}^{-1})^T\boldsymbol{U}^T = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1})^T = \boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}$$

Terbukti bahwa $\boldsymbol{U}^T$ dapat dibalik dan $(\boldsymbol{U}^T)^{-1} = (\boldsymbol{U}^{-1})^T$.

Lampiran 9 Pembuktian Teorema 2.7

Diketahui:

$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris berukuran $n \times n$ dan k adalah sebarangskalar

Akan dibuktikan :

a. $\boldsymbol{U}^T$ simetris

b. $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}$ simetris

c. $k\boldsymbol{U}$ dan $k\boldsymbol{V}$ adalah simetris

Bukti:

a. $\boldsymbol{U}^T$ simetris

Diketahui $\boldsymbol{U}$ matriks simetris , maka $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T$. Karena $(\boldsymbol{U}^T)^T = \boldsymbol{U}$, maka $\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}^T)^T$. Sehingga$\boldsymbol{U}^T$ simetris.

b. $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}$ simetris

Akan ditunjukkan : $(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V})^T$

Karena $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris maka memenuhi definisi $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T$ dan $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^T$. Sehingga $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$ dapat dituliskan kembali menjadi :

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}^T + \boldsymbol{V}^T$$

berdasarkan Teorema 2.2.b Persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}^T + \boldsymbol{V}^T = (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V})^T$$

Terbukti bahwa $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris.

Akan ditunjukkan : $(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V})^T$

Karena $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris maka memenuhi definisi $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T$ dan $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^T$. Sehingga $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}$ dapat dituliskan kembali menjadi :

$$\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}^T - \boldsymbol{V}^T$$

berdasarkan Teorema 2.2.b Persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi

$$\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}^T - \boldsymbol{V}^T = (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V})^T$$

Terbukti bahwa $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris.

c. $k\boldsymbol{U}$ dan $k\boldsymbol{V}$ adalah simetris

Akan ditunjukkan :

$k\boldsymbol{U} = (k\boldsymbol{U})^T$

(lanjutan)

Karena $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris maka memenuhi definisi $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T$ dan $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^T$

sehingga :

$$k\boldsymbol{U} = k\boldsymbol{U}^T$$

Berdasarkan Teorema 2.2.c Persamaan di atas dapat dituliskan menjadi :

$$k\boldsymbol{U} = k\boldsymbol{U}^T = (k\boldsymbol{U})^T$$

Terbukti bahwa $k\boldsymbol{U}$ adalah matriks simetris.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $k\boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris.

Bukti :

Akan ditunjukkan :

$k\boldsymbol{V} = (k\boldsymbol{V})^T$

Karena $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris maka memenuhi definisi $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T$ dan $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^T$

sehingga :

$$k\boldsymbol{V} = k\boldsymbol{V}^T$$

Berdasarkan Teorema 2.2.c Persamaan di atas dapat dituliskan menjadi :

$$k\boldsymbol{V} = k\boldsymbol{V}^T = (k\boldsymbol{V})^T$$

Terbukti bahwa $k\boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris.

Lampiran 10 Pembuktian Teorema 2.8

Diketahui :

$\boldsymbol{U}$ adalah matriks yang simetris dan dapat dibalik.

Akan dibuktikan :

$\boldsymbol{U}^{-1}$ adalah matriks simetris

Bukti :

Akan ditunjukkan : $\boldsymbol{U}^{-1} = (\boldsymbol{U}^{-1})^T$

Berdasarkan Teorema 2.3 dan kesimetrisan dari $\boldsymbol{U}$, maka diperoleh :

$$(\boldsymbol{U}^{-1})^T = (\boldsymbol{U}^T)^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}$$

Terbukti bahwa $\boldsymbol{U}^{-1}$ adalah matriks simetris.

Lampiran 11 Pembuktian Lemma 2.2

Diketahui :

$\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks-matriks berukuran $n \times n$ dimana $\boldsymbol{V}$ adalah matriks simetris.

Akan dibuktikan :

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{UV}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V})$$

Bukti :

Berdasarkan kesimetrisan dari $\boldsymbol{D}$ dan Lemma 2.1, maka:

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{UV}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{UV})^T = \mathrm{tr}(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{U}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{V})$$

Lampiran 12 Pembuktian Teorema 2.9

Diketahui :

$\boldsymbol{AX}$ adalah matriks bujur sangkar

Akan dibuktikan :

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AX})}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^T.$$

Bukti :

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dan $\boldsymbol{X}$ adalah mariks berukuran $n \times m$. Dengan $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{X}$ adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & a_{1m} \\ x_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

hasil perkalian $\boldsymbol{AX}$ adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{AX} = \begin{bmatrix} (a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1}) & \dots & (a_{11}a_{1m} + \cdots + a_{1n}a_{nm}) \\ (a_{21}x_{11} + \cdots + a_{2n}x_{n1}) & \dots & (a_{21}a_{1m} + \cdots + a_{2n}a_{nm}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}x_{11} + \cdots + a_{mn}x_{n1}) & \dots & (a_{m1}a_{1m} + \cdots + a_{mn}a_{nm}) \end{bmatrix}$$

dan

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AX}) = (a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1}) + (a_{21}x_{12} + \cdots + a_{2n}x_{n2}) + \cdots + (a_{m1}x_{1m} + \cdots + a_{mn}x_{nm})$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ji}$$

sehingga diperoleh :

$$b_{11} = \frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AX})}{\partial x_{11}}$$

$$= \frac{\partial (a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1}) + (a_{21}x_{12} + \cdots + a_{2n}x_{n2}) + \cdots + (a_{m1}x_{1m} + \cdots + a_{mn}x_{nm})}{\partial x_{11}}$$

$$= a_{11}$$

$$b_{12} = \frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AX})}{\partial x_{12}}$$

$$= \frac{\partial (a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1}) + (a_{21}x_{12} + \cdots + a_{2n}x_{n2}) + \cdots + (a_{m1}x_{1m} + \cdots + a_{mn}x_{nm})}{\partial x_{11}}$$

$$= a_{21}$$

(lanjutan)

secara umum dapat dituliskan menjadi :

$$b_{ij} = \frac{\partial \mathrm{tr}(\boldsymbol{AX})}{\partial x_{ij}}$$

$$= \frac{\partial (a_{11}x_{11} + \cdots + a_{1n}x_{n1}) + (a_{21}x_{12} + \cdots + a_{2n}x_{n2}) + \cdots + (a_{m1}x_{1m} + \cdots + a_{mn}x_{nm})}{\partial x_{ij}}$$

$$= a_{ji}$$

sehingga

$$\frac{\partial \mathrm{tr}(\boldsymbol{AX})}{\partial \boldsymbol{X}} = \left(\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ji} \right)}{\partial x_{kl}} \right) = \left(a_{ji} \right) = \boldsymbol{A}^{T}$$

Lampiran 13 Pembuktian Teorema 2.10

Diketahui :

$$\mathbf{x}^T \boldsymbol{A}\mathbf{x} = [x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dimana $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetris.

Akan dibuktikan :

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \boldsymbol{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\boldsymbol{A}\mathbf{x}$$

Bukti :

Akan terlebih dahulu diuraikan bentuk dari $\mathbf{x}^T \boldsymbol{A}\mathbf{x}$ sebagai berikut

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\mathbf{x} = [a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n \quad a_{12}x_1 + \cdots + a_{n2}x_n \quad \ldots \quad a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n)x_1 + (a_{12}x_1 + \cdots + a_{n2}x_n)x_2 + \cdots + (a_{1n}x_1 + \cdots + annxnxn$$

$$= (a_{11}{x_1}^2 + \cdots + a_{n1}x_nx_1) + (a_{12}x_2x_1 + \cdots + a_{n2}x_2x_n) + \cdots + (a_{1n}x_1x_n + \cdots + a_{nn}{x_n}^2)$$

Setelah diuraikan, dicari penurunan $\frac{\partial(\mathbf{x}^T \boldsymbol{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ sebagai berikut :

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n) + (a_{12}x_2) + \cdots + (a_{1n}x_n) \\ (a_{21}x_1) + (a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n) + \cdots + (a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ (a_{n1}x_1) + (a_{n2}x_2) + \cdots + (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n) \end{bmatrix}$$

Karena $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetris, maka bentuk diatas menjadi

(lanjutan)

$$= \begin{bmatrix} (2a_{11}x_1 + 2a_{21}x_2 + \cdots + 2a_{n1}x_n) \\ (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + 2a_{n2}x_n) \\ \vdots \\ (2a_{1n}x_1 + 2a_{2n}x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n) \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n) \\ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n) \\ \vdots \\ (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= 2\boldsymbol{A}^T\mathbf{x}$$

$$= 2\boldsymbol{Ax}$$

Lampiran 14 Pembuktian Teorema 2.11

Diketahui : **u** dan **v** adalah vektor-vektor pada ruang n-*Eclidean* (R^n) dan k adalah sebarangskalar, dengan hasil kali dalam :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Dan *Euclidean norm* :

$$\|\mathbf{u}\| = (u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u_2{}^2)^{1/2}$$

Akan dibuktikan :

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Bukti :

1. Akan dibuktikan : $\|\mathbf{u}\| \geq 0$

   Ambil : $\mathbf{u} \in R^n$

   $$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = (u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n)^{\frac{1}{2}}$$
   $$= (u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u_n{}^2)^{1/2}$$

   Karena nilai $u_i{}^2 \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ maka

   $\|\mathbf{u}\| = (\sum_{i=1}^{n} u_i{}^2)^{1/2} \geq 0$.

2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

   Akan dibuktikan : jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ maka $\|\mathbf{u}\| = 0$

   Bukti :

   Ambil : $\mathbf{u} = \mathbf{0} \in R^n$

   $$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = (u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n)^{\frac{1}{2}}$$
   $$= (u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u_n{}^2)^{1/2}$$
   $$= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
   $$= 0$$

   Terbukti bahwa jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ maka $\|\mathbf{u}\| = 0$.

Akan dibuktikan : jika $\|\mathbf{u}\| = 0$ maka $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = {u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 = 0$$

Vektor $\mathbf{u}$ yang memenuhi Persamaan ini hanyalah $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Terbukti bahwa jika $\|\mathbf{u}\| = 0$ maka $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

3. Akan dibuktikan : $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$

   Ambil : $k \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{u} \in R^n$

   $$\|k\mathbf{u}\| = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + \cdots + (ku_n)^2}$$
   $$= |k|\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2}$$
   $$= |k|\|\mathbf{u}\|$$

   Terbukti bahwa : $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$

4. Akan dibuktikan : $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

   Ambil : $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$

   $$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}, \mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

   Dengan mengakarkan kedua sisi diperoleh hasil sebagai berikut :

   $$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Terbukti bahwa :

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Lampiran 15 Pembuktian Teorema Eckart-Young

Misalkan $\boldsymbol{X}$ adalah matriks berukuran $n \times k$ dengan *rank* $p > l$, dimana $l < m = \min(n,k)$. Maka matriks yang meminimumkan $\|\boldsymbol{X} - \widetilde{\boldsymbol{X}}\|$ atas himpunan $\boldsymbol{\chi_l} = \{\widetilde{\boldsymbol{X}}: rank\ \widetilde{\boldsymbol{X}} \leq l\}$ diberikan oleh $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{QD}_{(l)}\boldsymbol{P}^T$ dimana $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QDP}^T$ adalah *singular value decomposition* dari $\boldsymbol{X}$, dan matriks *pseudodiagonal* $\boldsymbol{D}_{(l)}$ berukuran $n \times k$ diperoleh dari matriks $\boldsymbol{D}$ dengan menggantikan semua entri matriks $\boldsymbol{D}$ dengan nol kecuali pada l entri diagonal terbesarnya. Dengan demikian $\widehat{\boldsymbol{X}}$ memiliki rank l dan $\widehat{\boldsymbol{X}}$ akan meminimumkan $\|\boldsymbol{X} - \widetilde{\boldsymbol{X}}\|$ hanya jika diperoleh dengan cara ini.

Diketahui :

$\boldsymbol{X}_{n\times k}$, dimana $rank(\boldsymbol{X}) = p, p > l$, dimana $l < m = \min(n,k)$.

Akan dibuktikan :

Matriks yang meminimumkan $\|\boldsymbol{X} - \widetilde{X}\|$ atas himpunan $\chi_l = \{\widetilde{\boldsymbol{X}} | rank(\widetilde{\boldsymbol{X}}) \leq l\}$ dberikan oleh $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{QD}_{(l)}\boldsymbol{P}^T$ dimana $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QDP}^T$ adalah SVD dari $\boldsymbol{X}$, matriks *pseudodiagonal* $\boldsymbol{D}_{(l)}$ berukuran $n \times k$ diperoleh dari matriks $\boldsymbol{D}$ dengan menggantikan semua entri matriks $\boldsymbol{D}$ dengan nol kecuali pada l entri diagonal terbesarnya

Bukti:

Pembuktian teorema Eckart-Young akan dilakukan dalam beberapa tahap, yaitu :

1. Tahap 1

   Misalkan $\widehat{\boldsymbol{X}}$ adalah matriks berukuran $n \times k$ merupakan matriks aproksimasi terbaik untuk $\boldsymbol{X}$ sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}\|$ minimum, dimana $rank(\widehat{\boldsymbol{X}}) = l$. l dipilih berdasarkan analisis komponen utama.
2. Tahap 2

   Akan dibuktikan : setiap baris dari $\widehat{\boldsymbol{X}}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari l vektor ortonormal berukuran $1 \times k$.

(lanjutan)

Bukti :

Diketahui bahwa $rank(\widehat{\boldsymbol{X}}) = l$ sehingga terdapat l vektor baris yang saling bebas linier. Untuk mempermudah $\widehat{\boldsymbol{X}}$ dapat dinotasikan seperti berikut :

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \dots & \hat{x}_{1k} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \dots & \hat{x}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{l1} & \hat{x}_{l2} & \dots & \hat{x}_{lk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan :

$$\mathbf{v}_i = [\hat{x}_{i1} \quad \hat{x}_{i2} \quad \dots \quad \hat{x}_{ik}] \in \mathbb{R}^k, i = 1, 2, \dots, l\,;\ \forall \hat{x}_{ij} \in \mathbb{R}; j = 1, 2, \dots, k.$$

adalah vektor baris dari $\widehat{\boldsymbol{X}}$ berukuran $1 \times k$, dimana $\mathbb{R}^k$adalah ruang hasil kali dalam.

$\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^k$ saling bebas linier dan $\mathbb{R}^k$adalah ruang hasil kali dalam sehingga dengan menggunakan Teorema Gram-Schmidt, $\mathbf{v}_i$ dapat diortogonalkan kemudian diortonormalkan menjadi $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^k$ dan $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l) = \text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l)$.

Misalkan :

$$\boldsymbol{B} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_l]$$

adalah matriks berisi vektor-vektor kolom yang ortonormal berukuran $k \times l$. $\boldsymbol{B}^T$ adalah matriks berukuran $l \times k$ sebagai berikut :

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema Gram-Schimdt,$\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l) = \text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l)$ sehingga $\widehat{\boldsymbol{X}}$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \dots & \hat{x}_{1k} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \dots & \hat{x}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{l1} & \hat{x}_{l2} & \dots & \hat{x}_{lk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ll} \\ a_{(l+1)1} & a_{(l+1)2} & \dots & a_{(l+1)l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix} = \boldsymbol{AB}^T$$

(lanjutan)

dimana $\boldsymbol{A}$ adalah matriks koefisien berukuran $n \times l$. Tebukti bahwa setiap baris dari $\widehat{\boldsymbol{X}}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari l vektor ortonormal.

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T, \quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_l$$

3. Tahap 3

   Akan dicari $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ yang meminimumkan $\left\|\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}\right\|$ dengan kendala $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_l$.

   dimana $\left\|\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}\right\|$ adalah *Frobenius norm* :

$$\left\|\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}\right\| = \|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\| = \mathrm{tr}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)]$$

3.1 Akan dicari bentuk lain dari $\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)]$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)] &= \mathrm{tr}[(\boldsymbol{X}^T - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)] \\ &= \mathrm{tr}[(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) \\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) \\ &\quad +\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) \end{aligned} \tag{1}$$

Berdasarkan sifat *trace*, yaitu $\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{D})^T$

Misalkan : $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$ dan $\boldsymbol{D}^T = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}$

Maka diperoleh

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) \tag{2}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2) pada Persamaan (1), maka Persamaan (1) menjadi :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)] &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) \\ &\quad +\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) \\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) \\ &\quad +\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) \\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) - 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)\end{aligned}$$

Diperoleh bentuk lain dari $\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)]$ adalah sebagai berikut :

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)] = \underbrace{\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})}_{1} - \underbrace{2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X})}_{2} + \underbrace{\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)}_{3} \tag{3}$$

(lanjutan)

3.2 Akan ditunjukkan bahwa bentuk 3 dari Persamaan (3) dapat dinotasikan ulang menjadi :

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$$

Bukti :

Berdasarkan Lemma 2.1

Misal: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T$; $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$ matriks $\boldsymbol{C}$ dan $\boldsymbol{D}^T$ berukuran $k \times n$

Maka diperoleh :

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \qquad (4)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4) pada Persamaan (3) sehingga Persamaan (3) dapat dinotasikan kembali menjadi :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)] &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) - 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)\\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) - 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) - [2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})]\end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T)] = \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}) - [2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})] \qquad (5)$$

Untuk untuk meminimumkan Persamaan (5) ekuivalen dengan memaksimumkan ψ dengan kendala $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_l$, dimana

$$\psi = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$$

3.3 Untuk mencari $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ yang memaksimumkan ψ akan digunakan metode Lagrange

Akan dibentuk sebuah fungsi Lagrange, yaitu :

$$\varphi = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}((\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})))$$

karena $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_l$ adalah matriks simetris, tanpa kehilangan keumuman dari $\boldsymbol{L}$ dapat diasumsikan bahwa $\boldsymbol{L}$ adalah matriks simetris berukuran $l \times l$. Dimana $\boldsymbol{L}$ adalah matriks pengali Lagrange.

3.4 Akan dicari :

Akan dicari *differential* total dari φ terhadap $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$, yaitu :

$$\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{A}} = \frac{d(2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) - \mathrm{tr}[\boldsymbol{L}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}_l)])}{d\boldsymbol{A}} \qquad (6)$$

(lanjutan)

Karena *trace* adalah sebuah operator linier, maka Persamaan (6) diatas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{A}} = \frac{2\,\mathrm{tr}[d(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X})] - \mathrm{tr}[d(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})] - \mathrm{tr}\left[d\left(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})\right)\right]}{d\boldsymbol{A}}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{tr}[d(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X})]}{d\boldsymbol{A}} - \frac{\mathrm{tr}[d(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}{d\boldsymbol{A}} - \frac{\mathrm{tr}\left[d\left(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})\right)\right]}{d\boldsymbol{A}} \qquad (7)$$

Dengan menggunakan sifat turunan pada *trace*, maka Persamaan (7) dapat dituliskan menjadi :

$$\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{A}} = 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X}^T) + \ 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T)$$

$$d\varphi = 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X}^T)d\boldsymbol{A} + 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T)d\boldsymbol{A} \qquad (8)$$

Selanjutnya, akan dicari turunan φ terhadap $\boldsymbol{B}$, yaitu :

$$\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{B}} = \frac{d(2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) - \mathrm{tr}[\boldsymbol{L}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})])}{d\boldsymbol{B}} \qquad (9)$$

Karena *trace* adalah sebuah operator linier, maka Persamaan (9) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{B}} = \frac{2\,\mathrm{tr}[d(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X})] - \mathrm{tr}[d(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})] - \mathrm{tr}\left[d\left(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})\right)\right]}{d\boldsymbol{B}}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{tr}[d(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X})]}{d\boldsymbol{B}} - \frac{\mathrm{tr}[d(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}{d\boldsymbol{B}} - \frac{\mathrm{tr}\left[d\left(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}_l)\right)\right]}{d\boldsymbol{B}} \qquad (10)$$

Dengan menggunakan sifat turunan pada *trace*, maka Persamaan (10) dapat dituliskan menjadi :

$$\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{B}} = 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{B}^T)$$

karena $\boldsymbol{L}$ adalah matriks simetris, maka

$$= 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T)$$

$$= 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - 2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T)$$

(lanjutan)

$$d\varphi = 2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X})d\boldsymbol{B} - 2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T)\ d\boldsymbol{B} \tag{11}$$

Dari Persamaan (8) dan Persamaan (11) diperoleh

$$d\varphi = 2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X}^T)d\boldsymbol{A} + 2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T)d\boldsymbol{A} + 2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X})d\boldsymbol{B} - 2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T)\ d\boldsymbol{B}$$

$$= 2\ \mathrm{tr}\ \underbrace{(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X}^T - \boldsymbol{A}^T)}_{1}\ d\boldsymbol{A} + 2\ \mathrm{tr}\ \underbrace{(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} - \ \boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T)}_{2}\ d\boldsymbol{B} \tag{12}$$

Misalkan $d\varphi = 0$ maka bentuk 1 dan 2 pada Persamaan (12) harus memenuhi kondisi dibawah ini dengan fungsi kendala yang diberikan:

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \tag{i}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T \tag{ii}$$

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_l \tag{iii}$$

dari Persamaan (i), (ii), (iii) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A}^T\underline{\boldsymbol{A}} \underbrace{=}_{(i)} \underline{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}}\boldsymbol{B} \underbrace{=}_{(ii)} \boldsymbol{L}\underline{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}} \underbrace{=}_{(iii)} \boldsymbol{L}\boldsymbol{I}_l = \boldsymbol{L} \tag{iv}$$

Karena $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \ \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}$ adalah matriks positif definit.

Selanjutnya, dari Persamaan (i) dan (ii) dan kesimetrisan dari $\boldsymbol{L}$ diperoleh

$$\boldsymbol{X}^T\underline{\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}} \underbrace{=}_{(i)} \underline{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}} \underbrace{=}_{(ii)} \boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\ ,$$

dari Persamaan (ii) dan (iv) diperoleh

$$\psi = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = 2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}) \tag{13}$$

Akan dibuktikan : $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{L})$

Misal : $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$ berukuran $k \times l$

$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T$ berukuran $l \times k$, $\boldsymbol{D}^T$ berukuran $k \times l$

Dengan menggunakan Lemma 2.1 diperoleh

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{C})$

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{L})$

Terbukti bahwa $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{L})$.

Sehingga Persamaan (13) dapat dituliskan menjadi :

$$\psi = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = 2\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}^T) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}) = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}) - \ \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{L})$$

Jadi, yang akan dimaksimumkan untuk mencari $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ bukan lagi

$$\psi = 2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \text{ dengan kendala } \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_l$$

tetapi menjadi

(lanjutan)

$$\psi = \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}).$$

3.5 Diagonalisasi Matriks $\boldsymbol{L}$

$\boldsymbol{L}$ adalah matriks simetris maka $\boldsymbol{L}$ dapat didiagonalisasi. Berikut ini adalah bentuk diagonalisasi dari matriks $\boldsymbol{L}$.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T\Lambda T}^T$$

dimana $\boldsymbol{T}$ ortogonal dan $\boldsymbol{\Lambda}$ matriks diagonal.

Definisikan : $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{AT}$

$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{BT}$

Maka, diperoleh :

$\widetilde{\boldsymbol{A}}^T \widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AT} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{LT} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T\Lambda T}^T\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$

$\widetilde{\boldsymbol{B}}^T\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{BT} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$

Dari Persamaan (i) dan (iii) diperoleh:

$\boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{XBT} = \boldsymbol{AT} = \widetilde{\boldsymbol{A}}$ (i')

$\widetilde{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{LB}^T = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{LT}\widetilde{\boldsymbol{B}}^T = \boldsymbol{\Lambda}\widetilde{\boldsymbol{B}}^T$ (ii')

$\widetilde{\boldsymbol{B}}^T\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{I}$ (iii')

Dari ketiga Persamaan (i'), (i'), (iii') diperoleh :

$\boldsymbol{X^TX}\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{X^T}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AT} = \boldsymbol{BLT} = \widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{T^T}\boldsymbol{LT} = \widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\Lambda}$ (iv')

$\widetilde{\boldsymbol{B}}^T\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{I}$ (v')

Karena $\boldsymbol{L}$ dan $\boldsymbol{\Lambda}$ adalah matriks similar maka $\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda})$ sehingga untuk memaksimumkan $\mathrm{tr}(\boldsymbol{L})$sama saja dengan memaksimumkan $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda})$, dimana $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda}) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i$.

Maka, untuk memaksimumkan $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda})$ sama saja dengan memaksimumkan nilai eigen tak nol dari matriks $\boldsymbol{\Lambda}$ dimana $\boldsymbol{\Lambda}$ adalah matriks diagonal dari l nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ dan $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ adalah matriks yang kolomnya merupakan vektor eigen orto*norm*al dari $\boldsymbol{X^TX}$, sehingga $\boldsymbol{\Lambda}$ maksimum.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa nilai eigen dari $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ sama dengan entri diagonal dari $\boldsymbol{\Lambda}$.

Bukti :

(lanjutan)

Misalkan : $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{BT} = [\tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \dots \quad \tilde{v}_l]$

Dari persamaan (iv')

$$\boldsymbol{X^T X \widetilde{B}} = \boldsymbol{\widetilde{B} \Lambda}$$

$$\boldsymbol{X^T X}\,[\tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \dots \quad \tilde{v}_l] = [\tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \dots \quad \tilde{v}_l] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_l & 0 \end{bmatrix}$$

$[\boldsymbol{X^T X}\,\tilde{v}_1 \quad \boldsymbol{X^T X}\,\tilde{v}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{X^T X}\,\tilde{v}_n] = [\lambda_1 \tilde{v}_1 \quad \lambda_2 \tilde{v}_2 \quad \dots \quad \lambda_l \tilde{v}_l]$

Maka,

$$\boldsymbol{X^T X}\,\tilde{v}_i = \lambda_i \tilde{v}_i, i = 1, 2, \dots, l$$

Sedemikian sehingga $\tilde{v}_i$ adalah vektor eigen dari $\boldsymbol{X^T X}$ dan λ_i adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{X^T X}$. Karena λ_i adalah entri diagonal dari $\boldsymbol{\Lambda}$ maka terbukti bahwa nilai eigen dari $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ sama dengan entri diagonal dari $\boldsymbol{\Lambda}$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AB}^T$ yang meminimumkan $\|\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}\|$ memenuhi syarat-syarat berikut :

$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{BT}$ adalah matriks yang kolomnya merupakan vektor eigen dari $\boldsymbol{X^T X}$, dimana $\boldsymbol{T}$ memenuhi $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T\Lambda T}^T$ dan $\boldsymbol{\Lambda}$ adalah matriks diagonal dengan entri diagonalnya adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{X^T X}$ dengan paling banyak l nilai eigen tak nol, dan $\boldsymbol{A^T A} = \boldsymbol{L}$. (14)

Akan dibuktikan bahwa SVD dari $\boldsymbol{X}$ memenuhi syarat-syarat (14).

Misalkan : $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{QD}_{(l)}\boldsymbol{P}^T$

Perhatikan bahwa $\boldsymbol{D}_{(l)}$ mengandung l akar positif dari nilai eigen tak nol terbesar dari $\boldsymbol{X^T X}$. Jadi, ${\boldsymbol{D}_{(l)}}^2 = \boldsymbol{\Lambda}$ adalah matriks diagonal yang mengandung l nilai eigen terbesar yang mungkin dari $\boldsymbol{X^T X}$. $\boldsymbol{P}$ adalah matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor eigen dari $\boldsymbol{X^T X}$.

Misalkan :

$\boldsymbol{T}$ adalah matriks ortogonal.

(lanjutan)

$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{T}^T$, dimana $\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{T}^T$ karena $\boldsymbol{D}_{(l)}$ adalah matriks diagonal.

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}^T$, sehingga $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{U}$, sehingga $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{U})^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^2$

Maka,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^2 &= \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} \\
&= \left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{T}^T\right)\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{T}^T\right) \\
&= \boldsymbol{T}{\boldsymbol{D}_{(l)}}^2\boldsymbol{T}^T \\
&= \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^T \\
&= \boldsymbol{L}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{P}^T$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T &= (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{U})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}^T)^T \\
&= (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{U})(\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^T) \\
&= (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^T) \\
&= (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T)(\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{T}^T)(\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^T) \\
&= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{P}^T \\
&= \widetilde{\boldsymbol{X}} \\
&= \widehat{\boldsymbol{X}}
\end{aligned}$$

Maka, terbukti bahwa $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$ yang meminimumkan $\left\|\boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}\right\|$ memenuhi persyaratan (6) dimana $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{P}^T$ sehingga terbukti juga bahwa matriks yang meminimumkan $\left\|\boldsymbol{X} - \widetilde{\boldsymbol{X}}\right\|$ atas himpunan $\chi_1 = \{\widetilde{\boldsymbol{X}} | rank(\widetilde{\boldsymbol{X}}) \leq l\}$ dberikan oleh $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{(l)}\boldsymbol{P}^T$.

Lampiran 16 Penaksiran Parameter $\boldsymbol{\alpha}$

Berikut ini adalah model regresi linier berganda dengan hanya melibatkan variabel kovariat yang sudah diringkas informasinya :

$$\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} = \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\tilde{X}}A\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{y}}_1 \\ \tilde{\tilde{y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{y}}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1),1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1),p} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|} \begin{bmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_{T-1} - \bar{y} \\ y_T - \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11} + \tilde{\tilde{x}}_{12}a_{21} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})\beta_1 + \cdots + (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p} + \tilde{\tilde{x}}_{12}a_{2p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})\beta_p \\ \vdots \\ (\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11} + \tilde{\tilde{x}}_{T2}a_{21} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1})\beta_1 + \cdots + (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p} + \tilde{\tilde{x}}_{12}a_{2p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})\beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

dimana :

$$\tilde{\tilde{x}}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_j\|}, i = 1, 2, \dots, T; j = 1, 2, \dots, k$$

Dari matriks diatas dapat dicari nilai $\tilde{\tilde{y}}_i$ sebagai berikut :

$$\tilde{\tilde{y}}_i = \alpha + (\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{11} + \tilde{\tilde{x}}_{i2}a_{21} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{k1})\beta_1 + (\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{12} + \tilde{\tilde{x}}_{i2}a_{22} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{k2})2 + \cdots + (\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{1p} + \tilde{\tilde{x}}_{i2}a_{2p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{kp})\beta_p + \varepsilon_i$$

somasikan kedua ruas sehingga menjadi :

$$\sum_{i=1}^{T} \tilde{\tilde{y}}_i = \sum_{i=1}^{T} \alpha + \sum_{i=1}^{T} \left((\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{11} + \tilde{\tilde{x}}_{i2}a_{21} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{k1})\beta_1 + (\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{12} + \tilde{\tilde{x}}_{i2}a_{22} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{k2})2 + \cdots + (\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{1p} + \tilde{\tilde{x}}_{i2}a_{2p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{kp})\beta_p \right) + \sum_{i=1}^{T} \varepsilon_i$$

(lanjutan)

$$\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|}\sum_{i=1}^{T}(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{T}\alpha+\sum_{i=1}^{T}\left(\begin{array}{r}\left(\frac{x_{i1}-\bar{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{11}+\frac{x_{i2}-\bar{x}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{21}+\cdots+\frac{x_{ik}-\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{k1}\right)\beta_1+\left(\frac{x_{i1}-\bar{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{12}+\frac{x_{i2}-\bar{x}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{22}+\cdots+\frac{x_{ik}-\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{k2}\right)\beta_2+\cdots\\ +\left(\frac{x_{i1}-\bar{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{1p}+\frac{x_{i2}-\bar{x}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{2p}+\cdots+\frac{x_{ik}-\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{kp}\right)\beta_p\end{array}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i$$

Karena $\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i=0$, maka

$$\frac{T\bar{y}-T\bar{y}}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|}=T\alpha+\left(\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{i1}-T\bar{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{11}+\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{i2}-T\bar{x}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{21}+\cdots+\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{ik}-T\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{k1}\right)\beta_1$$

$$+\left(\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{i1}-T\bar{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{12}+\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{i2}-\overline{Tx}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{22}+\cdots+\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{ik}-T\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{k2}\right)\beta_2$$

$$+\cdots\left(\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{i1}-T\bar{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{1p}+\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{i2}-T\bar{x}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{2p}+\cdots+\frac{\sum_{i=1}^{T}x_{ik}-T\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{kp}\right)\beta_p$$

$$0=T\alpha+\left(\frac{T\bar{x}_1-T\bar{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{11}+\frac{T\bar{x}_2-T\bar{x}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{21}+\cdots+\frac{T\bar{x}_k-T\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{k1}\right)\beta_1$$

$$+\left(\frac{T\bar{x}_1-T\bar{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{12}+\frac{T\bar{x}_2-T\bar{x}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{22}+\cdots+\frac{T\bar{x}_k-T\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{k2}\right)\beta_2$$

$$+\cdots\left(\frac{T\overline{x}_1-T\overline{x}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{1p}+\frac{T\overline{x}_2-T\overline{x}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{2p}+\cdots+\frac{T\overline{x}_k-T\overline{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{kp}\right)\beta_p$$

(lanjutan)

$$0 = T\alpha + \left(\frac{0}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{11} + \frac{0}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{21} + \cdots + \frac{0}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{k1}\right)\beta_1 + \left(\frac{0}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{12} + \frac{0}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{22} + \cdots + \frac{0}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{k2}\right)\beta_2$$
$$+ \cdots \left(\frac{0}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|}a_{1p} + \frac{0}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|}a_{2p} + \cdots + \frac{0 - T\bar{x}_k}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|}a_{kp}\right)\beta_p$$

$$0 = T\alpha$$

$$\alpha = 0$$

Maka terbukti bahwa taksiran untuk α adalah 0.

Lampiran 17 Pembuktian $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{A}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{G})$

Akan dibuktikan bahwa :

$$f\left(\boldsymbol{A}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \left\| \grave{y} - \tilde{\tilde{X}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} \right\|^2 + \left\| \grave{\boldsymbol{X}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{B}} \right\|^2 = \left\| \boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{X}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \right\|^2 = \left\| \boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{X}}\boldsymbol{G} \right\|^2 = f(\boldsymbol{G})$$

dimana :

$\boldsymbol{C} = [\widetilde{\boldsymbol{\beta}} \quad \widetilde{\boldsymbol{B}}]$ adalah matriks parameter berukuran $p \times (k+1)$

$\boldsymbol{D} = \left[\grave{\mathbf{y}} \quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\right]$ adalah matriks observasi berukuran $T \times (k+1)$.

Bukti :

Sebelumnya fungsi kriteria bentuk sederhana akan dinyatakan dalam bentuk definisi dari masing-masing *norm*.

Dengan memisalkan :

$$f\left(\boldsymbol{A}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \underbrace{\left\| \grave{\boldsymbol{y}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} \right\|^2}_{1} + \underbrace{\left\| \grave{X} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{B}} \right\|^2}_{2} \tag{3.10}$$

Berikut ini adalah matriks dari bentuk 1 pada Persamaan (3.10) :

(lanjutan)

$$\grave{\boldsymbol{y}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \grave{y}_1 \\ \grave{y}_2 \\ \vdots \\ \grave{y}_{T-1} \\ \grave{y}_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1),1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1),p} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \grave{y}_1 \\ \grave{y}_2 \\ \vdots \\ \grave{y}_{T-1} \\ \grave{y}_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \grave{y}_1 \\ \grave{y}_2 \\ \vdots \\ \grave{y}_{T-1} \\ \grave{y}_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})\beta_1 + \cdots + (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})\beta_p \\ (\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})\beta_1 + \cdots + (\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})\beta_p \\ \vdots \\ (\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1})\beta_1 + \cdots + (\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p} + \cdots + \beta_p\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})\beta_p \\ (\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1})\beta_1 + \cdots + (\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p} + \cdots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})\beta_p \end{bmatrix}$$

(lanjutan)

$$=\begin{bmatrix} \grave{y}_1-\left[(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right] \\ \grave{y}_2-\left[(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right] \\ \vdots \\ \grave{y}_{T-1}-\left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1}\right)\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\beta_{\mathrm{p}}\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right] \\ \grave{y}_T-\left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1}\right)\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right] \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Maka, *Euclidean norm* dari vektor (1) adalah sebagai berikut :

$$\left\|\grave{\boldsymbol{y}}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|^2=\sum_{i=1}^{T}(\grave{y}_i-\left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{k1}\right)\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right]^2 \qquad (2)$$

Selanjutnya, berikut ini adalah matriks dari bentuk 2 pada Persamaan (3.10) :

$$\grave{\boldsymbol{X}}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix} \grave{x}_{11} & \grave{x}_{12} & \cdots & \grave{x}_{1k} \\ \grave{x}_{21} & \grave{x}_{22} & & \grave{x}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \grave{x}_{(T-1)1} & \grave{x}_{(T-1)2} & \cdots & \grave{x}_{(T-1)k} \\ \grave{x}_{T1} & \grave{x}_{T2} & \cdots & \grave{x}_{Tk} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1),1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1),p} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pk} \end{bmatrix}$$

(lanjutan)

$$
=\begin{bmatrix}
\grave{x}_{11} & \grave{x}_{12} & \cdots & \grave{x}_{1k}\\
\grave{x}_{21} & \grave{x}_{22} & & \grave{x}_{2k}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\grave{x}_{(T-1)1} & \grave{x}_{(T-1)2} & \cdots & \grave{x}_{(T-1)k}\\
\grave{x}_{T1} & \grave{x}_{T2} & \cdots & \grave{x}_{Tk}
\end{bmatrix}
$$

$$
-\begin{bmatrix}
\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp}\\
\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1} & \ldots & \tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1} & \ldots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp}\\
\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k}\\
b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k}\\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\
b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pk}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\grave{x}_{11} & \grave{x}_{12} & \cdots & \grave{x}_{1k}\\
\grave{x}_{21} & \grave{x}_{22} & \ddots & \grave{x}_{2k}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\grave{x}_{(T-1)1} & \grave{x}_{(T-1)2} & \cdots & \grave{x}_{(T-1)k}\\
\grave{x}_{T1} & \grave{x}_{T2} & \cdots & \grave{x}_{Tk}
\end{bmatrix}
$$

$$
-\begin{bmatrix}
(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})b_{p1} & \cdots & (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})b_{1k}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})b_{pk}\\
(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})b_{p1} & \ldots & (\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})b_{1k}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})b_{pk}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})b_{p1} & \ldots & (\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1})b_{1k}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})b_{pk}\\
(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})b_{p1} & \cdots & (\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1})b_{1k}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})b_{pk}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\grave{x}_{11}-[(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})b_{p1}] & \ldots & \grave{x}_{1k}-[(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})b_{1k}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})b_{pk}]\\
\grave{x}_{21}-[(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})b_{p1}] & \ldots & \grave{x}_{2k}-[(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})b_{1k}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})b_{pk}]\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
\grave{x}_{(T-1)1}-[(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})b_{p1}] & \ldots & \grave{x}_{(T-1)k}-[(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1})b_{1k}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})b_{pk}]\\
\grave{x}_{T1}-[(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})b_{p1}] & \ldots & \grave{x}_{Tk}-[(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1})b_{1k}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})b_{p1}]
\end{bmatrix}
$$

(lanjutan)

Maka, *Frobenius norm* dari matriks di atas adalah sebagai berikut :

$$\left\|\dot{\boldsymbol{X}}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{B}}\right\|^2=\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{k}(\dot{x}_{ij}-\left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{kp}\right)\mathrm{b}_{1\mathrm{j}}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{kp})\mathrm{b}_{\mathrm{pj}}\right]^2 \quad (3)$$

Dengan menggabungkan bentuk *Euclidean norm* dan *Frobenius norm* dari Persamaan (2) dan (3), maka fungsi kriteria menjadi sebagai berikut :

$$f\left(\boldsymbol{A},\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right)=\left\|\dot{\boldsymbol{y}}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|^2+\left\|\dot{\boldsymbol{X}}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{B}}\right\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{T}(\dot{y}_i-\left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{k1}\right)\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right]^2$$

$$+\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{k}(\dot{x}_{ij}-\left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{kp}\right)\mathrm{b}_{1\mathrm{j}}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{kp})\mathrm{b}_{\mathrm{pj}}\right]^2 \quad (4)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan :

$$\left\|\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{G}\right\|^2=\left\|\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right\|^2=\left\|\dot{\boldsymbol{y}}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|^2+\left\|\dot{\boldsymbol{X}}-\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{B}}\right\|^2$$

(lanjutan)

dimana :

$\boldsymbol{C} = [\widetilde{\boldsymbol{\beta}} \quad \widetilde{\boldsymbol{B}}]$ adalah matriks parameter berukuran $p \times (k+1)$.

$\boldsymbol{D} = [\grave{\mathbf{y}} \quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}]$ adalah matriks observasi berukuran $T \times (k+1)$.

$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{AC}$ adalah matriks matriks tereduksi dengan ukuran $k \times (k+1)$ yang memiliki *rank* p.

Berikut ini adalah bentuk matriks dari $\boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{AC}$, yaitu

$$\boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{AC} = [\grave{\mathbf{y}} \quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}] - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}[\widetilde{\boldsymbol{\beta}} \quad \widetilde{\boldsymbol{B}}]$$

$$= \begin{bmatrix} \grave{y}_1 & \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \grave{y}_2 & \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \grave{y}_{T-1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \grave{y}_T & \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1),1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1),p} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ \beta_2 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p-1} & b_{(p-1)1} & b_{(p-1)2} & \cdots & b_{(p-1)k} \\ \beta_p & b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pk} \end{bmatrix}$$

(lanjutan)

$$=\begin{bmatrix} \grave{y}_1 & \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \grave{y}_2 & \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \grave{y}_{T-1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \grave{y}_T & \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp} \\ \tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1} & \dots & \tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1} & \dots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp} \\ \tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ \beta_2 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p-1} & b_{(p-1)1} & b_{(p-1)2} & \dots & b_{(p-1)k} \\ \beta_p & b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pk} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \grave{y}_1 & \tilde{\tilde{x}}_{11} & \tilde{\tilde{x}}_{12} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{1k} \\ \grave{y}_2 & \tilde{\tilde{x}}_{21} & \tilde{\tilde{x}}_{22} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \grave{y}_{T-1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1} & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k} \\ \grave{y}_T & \tilde{\tilde{x}}_{T1} & \tilde{\tilde{x}}_{T2} & \cdots & \tilde{\tilde{x}}_{Tk} \end{bmatrix}-$$

$$\left[\begin{matrix} (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})\beta_p & (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})b_{p1} \\ (\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})\beta_p & (\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})b_{p1} \\ \vdots & \vdots \\ (\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1})\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\beta_p\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})\beta_p & (\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})b_{p1} \\ (\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1})\beta_1+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})\beta_p & (\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1})b_{11}+\cdots+(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p}+\cdots+\tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})b_{p1} \end{matrix}\right.$$

(lanjutan)

$$\left.\begin{array}{cc}
\dots & \left(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1}\right)b_{1k} + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})b_{pk} \\
\dots & \left(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1}\right)b_{1k} + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})b_{pk} \\
\ddots & \vdots \\
\dots & \left(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1}\right)b_{1k} + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})b_{pk} \\
\dots & \left(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1}\right)b_{1k} + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})b_{pk}
\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c}
\grave{y}_1 - \left[(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1})\beta_1 + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right] \\
\grave{y}_2 - \left[(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1})\beta_1 + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right] \\
\vdots \\
\grave{y}_{T-1} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1}\right)\beta_1 + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p} + \dots + \beta_{\mathrm{p}}\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right] \\
\grave{y}_T - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1}\right)\beta_1 + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right] \\
\begin{array}{ccc}
\grave{x}_{11} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1}\right)b_{11} + \dots + \left(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp}\right)b_{p1}\right] & \dots & \grave{x}_{1k} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{k1}\right)b_{1k} + \dots + \left(\tilde{\tilde{x}}_{11}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{1k}a_{kp}\right)b_{pk}\right] \\
\grave{x}_{21} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1}\right)b_{11} + \dots + \left(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp}\right)b_{p1}\right] & \dots & \grave{x}_{2k} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{k1}\right)b_{1k} + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{21}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{2k}a_{kp})b_{pk}\right] \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\grave{x}_{(T-1)1} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1}\right)b_{11} + \dots + \left(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp}\right)b_{p1}\right] & \dots & \grave{x}_{(T-1)k} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{k1}\right)b_{1k} + \dots + \left(\tilde{\tilde{x}}_{(T-1)1}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{(T-1)k}a_{kp}\right)b_{pk}\right] \\
\grave{x}_{T1} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1}\right)b_{11} + \dots + \left(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp}\right)b_{p1}\right] & \dots & \grave{x}_{Tk} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{k1}\right)b_{1k} + \dots + \left(\tilde{\tilde{x}}_{T1}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{Tk}a_{kp}\right)b_{p1}\right]
\end{array}
\end{array}\right]$$

Maka,

$$\left\|\boldsymbol{D} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{AC}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{T} (\grave{y}_i - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{k1}\right)\beta_1 + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{i1}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{ik}a_{kp})\beta_{\mathrm{p}}\right]^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{k} (\grave{x}_{ij} - \left[\left(\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{11} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{kp}\right)\mathrm{b}_{1\mathrm{j}} + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{1p} + \dots + \tilde{\tilde{x}}_{ij}a_{kp})\mathrm{b}_{\mathrm{pj}}\right]^2$$

$$= \left\|\grave{\boldsymbol{y}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|^2 + \left\|\grave{\boldsymbol{X}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{B}}\right\|^2$$

(lanjutan)

Terbukti bahwa

$$\left\|\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right\|^2 = \left\|\grave{\boldsymbol{y}}-\tilde{\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right\|^2 + \left\|\grave{\boldsymbol{X}}-\tilde{\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{B}}\right\|^2$$

dengan memisalkan $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$

maka, fungsi kriteria $f(\boldsymbol{A}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}})$ menjadi fungsi dalam $\boldsymbol{G}$, yaitu $f(\boldsymbol{G})$.

$$f(\boldsymbol{G}) = \left\|\boldsymbol{D}-\tilde{\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}}\boldsymbol{G}\right\|^2.$$

Lampiran 18 *Listing* Algoritma *Principal Covariate Regression*

```
clear; clc;
[f p]=uigetfile({'*.xls;*.xlsx;','*.xls,*,xlsx,*.txt';'*.*','All
FIles'},'Pilih File', ...
    'D:\kuliah\skripsi\principal covariate regression-Nuruma Nurul
Malik\principal component\Excel\Hendry\Hendry_Ddisk\observasi\');

D = xlsread([p f],3);
[Td kd] = size(D);
k = kd - 1;
T = Td - 100;
X = D(:,2:kd);
Y = D(:,1);

meanX = mean(X);
Xmm = X - ones(Td,1)*mean(X);
normX = sqrt(sum(Xmm.^2));
Xfinal = Xmm./(ones(Td,1)*normX);
X = Xfinal(1:T,:);

meanY = mean(Y);
Ymm = Y-ones(Td,1)*mean(Y);
normY = sqrt(sum(Ymm.^2));
Yfinal = Ymm./(ones(Td,1)*normY);
Y = Yfinal(1:T,:);

p = input('Masukkan p = ');
W = input('Masukkan w = ');

normY2 = sum(Y.^2);
w(1) = W/normY2;
normX = sum(X.^2);
w(2) = (1 - W)/sum(normX.^2);

[U S V] = svd(X,0);

UD = U'*([Y X]);
[Up Sp Vp] = svds(UD,p);
size(Vp)
A = V*inv(S)*Up*Sp;
b = Vp(1,:)'./sqrt(w(1));
B = Vp(2:k+1,:)'./sqrt(w(2));

MCor = X'*X/(T-1);

F = X*A;
ycap = X*A*b;
sp2 = sum((Y - ycap).^2)/(T);
BIC = log10(sp2) + (p+1)*log10(T)/(T);

% RMSE
sum_r = 0;
for i=1:T
```

(lanjutan)

```
     yij(i)=Xfinal(i,:)*A*b;
    eij(i) = yij(i) - Yfinal(i);
    r = eij(i)^2;

 sum_r = sum_r + r;
end
MSE = sum_r/T;
RMSE = sqrt(sum_r/T);

sig_e2 = sum((eij-mean(eij)).^2)/999;

fprintf('%8s%11s%8s\n','h','yramal','y');
h = [1:100]';
yramal = Xfinal(T+1:Td,:)*A*b;
disp([h yramal Yfinal(T+1:Td,:)]);
fprintf('Nilai MSE = %f\n',MSE);
fprintf('Nilai RMSE = %f\n',RMSE);
fprintf('Nilai BIC = %f\n',BIC);

[fs ps]=uiputfile({'*.xls;*.xlsx;','*.xls,*,xlsx,';'*.*','All
FIles'},'Save File', ...
    'D:\kuliah\skripsi\principal covariate regression-Nuruma Nurul
Malik\principal component\Excel\Hendry\Hendry_Ddisk\observasi\');
sheet = input('Simpan di sheet ke : ');
fprintf('Sedang menyimpan ...');
xlswrite([ps fs],{['p = ' num2str(p)] ['w = ' num2str(W)]},sheet);
xlswrite([ps fs],{'h' 'yramal' 'y'},sheet,'A3');
xlswrite([ps fs],[h yramal],sheet,'A4');
xlswrite([ps fs],{'ycap' 'Y'},sheet,'C3');
xlswrite([ps fs],[ycap Y],sheet,'C4');
xlswrite([ps fs],'B',sheet,'A488');
xlswrite([ps fs],B,sheet,'A489');
xlswrite([ps fs],'A',sheet,'E3');
xlswrite([ps fs],A,sheet,'E4');
xlswrite([ps fs],'b',sheet,'I3');
xlswrite([ps fs],b,sheet,'I4');
xlswrite([ps fs],{['MSE = ' num2str(MSE)];['BIC = '
num2str(BIC)];['RMSE = ' num2str(RMSE)]},sheet,'I7');
xlswrite([ps fs],'F',sheet,'A493');
xlswrite([ps fs],F,sheet,'A494');
fprintf(' [Selesai]\n');
```

Lampiran 19 Variabel-Variabel dalam Aplikasi PcovR

No	Notasi	Variabel	Keterangan
1	Y	IP (products)	Total produksi
2	X_1	IP (final products)	Produksi industri terakhir
3	X_2	IP (cons gds)	Jumlah barang-barang konsumsi yang digunakan untuk produksi
4	X_3	IP (cons dble)	Jumlah barang-barang konsumsi tahan lama yang digunakan untuk produksi
5	X_4	IP (cons nondble)	Jumlah barang-barang konsumsi tidak tahan lama yang digunakan untuk produksi
6	X_5	IP (bus eqpt)	Business equipment (jumlah produksi industri perlengkapan bisnis)
7	X_6	IP (matls)	Jumlah material yang digunakan untuk produksi
8	X_7	IP (dble mats)	Jumlah produksi industri material tahan lama yang digunakan untuk produksi
9	X_8	IP (nondble mats)	Jumlah material tidak tahan lama yang digunakan untuk produksi
10	X_9	IP (mfg)	Jumlah manufacturing (SIC) yang digunakan untuk produksi
11	X_{10}	IP (res util)	Jumlah produksi residen
12	X_{11}	IP (fuels)	Jumlah bahan bakar yang digunakan untuk produksi
13	X_{12}	NAPM prodn	Produksi NAPM (%)
14	X_{13}	Capacity Util	Capacity Utilization - Manufacturing (SIC)
15	X_{14}	AHE (goods)	Average Hourly Earnings, Production Workers, Nonfarm - Goods-Producing
16	X_{15}	AHE (const)	Average Hourly Earnings, Production Workers, Nonfarm - Construction
17	X_{16}	AHE (mfg)	Average Hourly Earnings, Production Workers, Nonfarm - MFG
18	X_{17}	Real AHE (goods)	Real Average Hourly Earnings, Production Workers, Nonfarm - Goods-Producing (CES275/PI071)
19	X_{18}	Real AHE (const)	Real Average Hourly Earnings, Production Workers, Nonfarm - Construction (CES277/PI071)
20	X_{19}	Real AHE (mfg)	Real Average Hourly Earnings, Production Workers, Nonfarm - Mfg (CES278/PI071)
21	X_{20}	Emp (total)	Employees, Nonfarm - Total Private
22	X_{21}	Emp (gds prod)	Employees, Nonfarm - Goods-Producing
23	X_{22}	Emp (mining)	Employees, Nonfarm - Mining
24	X_{23}	Emp (const)	Employees, Nonfarm - Construction
25	X_{24}	Emp (mfg)	Employees, Nonfarm - MFG
26	X_{25}	Emp (dble gds)	Employees, Nonfarm - Durable Goods
27	X_{26}	Emp (nondbles)	Employees, Nonfarm - Nondurable Goods
28	X_{27}	Emp (services)	Employees, Nonfarm - Service-Providing
29	X_{28}	Emp (TTU)	Employees, Nonfarm - Trade, Transport, Utilities
30	X_{29}	Emp (wholesale)	Employees, Nonfarm - Wholesale Trade
31	X_{30}	Emp (retail)	Employees, Nonfarm - Retail Trade
32	X_{31}	Emp (FIRE)	Employees, Nonfarm - Financial Activities
33	X_{32}	Emp (Govt)	Employees, Nonfarm - Government
34	X_{33}	Help wanted indx	Index Of Help-Wanted Advertising In Newspapers (1967=100;SA)

35	X_{34}	Help wanted/emp	Employment: Ratio; Help-Wanted Ads:No. Unemployed CLF
36	X_{35}	Emp CPS total	Civilian Labor Force: Employed, Total (THOUS.,SA)
37	X_{36}	Emp CPS nonag	Civilian Labor Force: Employed, Nonagric.Industries (THOUS.,SA)
38	X_{37}	U (all)	Unemployment Rate: All Workers, 16 Years & Over (%) SA
39	X_{38}	U (mean duration)	Unemploy.By Duration: Average (Mean) Duration In Weeks (SA)
40	X_{39}	U < 5 wks	Unemployment By Duration: Persons Unemployment Less Than 5 WKS (THOUS.,SA)
41	X_{40}	U 5-14 wks	Unemployment By Duration: Persons Unemployment 5 To 14 Wks (THOUS.,SA)
42	X_{41}	U 15+ wks	Unemployment By Duration: Persons Unemployment 15 Weeks + (THOUS.,SA)
43	X_{42}	U 15-26 wks	Unemployment By Duration: Persons Unemployment .15 To 26 Weeks (THOUS.,SA)
44	X_{43}	U 27+ wks	Unemploy. By Duration: Persons Unemployment 27 Weeks + (THOUS,SA)
45	X_{44}	Avg hrs	Average Weekly Hours, Production Workers, Nonfarm - Goods-Producing
46	X_{45}	Overtime (mfg)	Average Weekly Overtime Hours, Production Workers, Nonfarm- MFG
47	X_{46}	BuildPermits	Housing Authorized: Total New Priv Housing Units (THOUS.,SAAR)
48	X_{47}	HStarts (Total)	Housing Starts:Nonfarm(1947-58);Total Farm&Nonfarm(1959-) (THOUS.,SA)
49	X_{48}	HStarts (NE)	Housing Starts:Northeast (THOUS.U.)S.A.
50	X_{49}	HStarts (MW)	Housing Starts:Midwest (THOUS.U.)S.A.
51	X_{50}	HStarts (South)	Housing Starts:South (THOUS.U.)S.A.
52	X_{51}	HStarts (West)	Housing Starts:West (THOUS.U.)S.A.
53	X_{52}	FedFunds	Interest Rate: Federal Funds (Effective) (% Per Annum,NSA)
54	X_{53}	3 mo T-bill	Interest Rate: U.S.Treasury Bills,SEC MKT,3-MO.(% PER ANN,NSA)
55	X_{54}	6 mo T-bill	Interest Rate: U.S.Treasury Bills,SEC MKT,6-MO.(% PER ANN,NSA)
56	X_{55}	1 yr T-bond	Interest Rate: U.S.Treasury Const Maturities,1-YR.(% PER ANN,NSA)
57	X_{56}	5 yr T-bond	Interest Rate: U.S.Treasury Const Maturities,5-YR.(% PER ANN,NSA)
58	X_{57}	10 yr T-bond	Interest Rate: U.S.Treasury Const Maturities,10-YR.(% PER ANN,NSA)
59	X_{58}	Aaabond	Bond Yield, Moody's Aaa Corporate (% Per Annum)
60	X_{59}	Baa bond	Bond Yield Moody's Baa Corporate (% Per Annum)
61	X_{60}	fygm6-fygm3	fygm6-fygm3
62	X_{61}	fygm1-fygm3	fygm1-fygm3
63	X_{62}	fygm10-fygm3	fygm10-fygm3
64	X_{63}	FYBAAC-Fygt10	FYBAAC-Fygt10
65	X_{64}	M1	Money Stock, M1(Curr,Trav.Cks,Dem Dep,Other Ck'able Dep)(Bil$,Sa)
66	X_{65}	MZM	MZM (SA) FRB St. Louis
67	X_{66}	M2	Money Stock
68	X_{67}	MB	Monetary Base, Adj For Reserve Requirement Changes
69	X_{68}	Reserves tot	Depository Inst Reserves

70	X_{69}	Reserves nonbor	Depository Inst Reserves:Nonborrowed
71	X_{70}	BUSLOANS	Commercial and Industrial Loans at All Commercial Banks
72	X_{71}	Cons credit	Consumer Credit Outstanding - Nonrevolving
73	X_{72}	PCED-All	Personal Consumption Expenditures
74	X_{73}	PCED-Du	Personal Consumption Expenditures - Durable Goods
75	X_{74}	PCED-Ndur	Personal Consumption Expenditures - Nondurable Good
76	X_{75}	PCED-Serv	Personal Consumption Expenditures - Services
77	X_{76}	CPI-ALL	CPI All Items (SA)
78	X_{77}	CPI-Core	CPI Less Food and Energy (SA)
79	X_{78}	PCED-Core	PCE Price Index Less Food and Energy (SA)
80	X_{79}	PPI (fin gds)	Procedur price index untuk barang-barang yang sudah habis
81	X_{80}	PPI (cons gds)	Procedur price index untuk barang-barang konsumsi yang sudah habis
82	X_{81}	PPI (int mat'ls)	Procedur price index untuk komponen dan penawara menengah
83	X_{82}	PPI (crude mat'ls	Procedur price index untuk bahan-bahan mentah
84	X_{83}	Real PPI (crude mat'ls)	Procedur price index sebenarnya
85	X_{84}	Commod (spot price)	Indeks harga spot market
86	X_{85}	Com (spot price real)	Indeks harga spot market sebenarnya
87	X_{86}	PPI CrudeOil	Indeks harga produser petroleum
88	X_{87}	OilPrice (Real)	Indeks harga produser petroleum sebenarnya
89	X_{88}	NAPM com price	Indeks harga komoditas NAPM (%)
90	X_{89}	Ex rate (avg)	Nilai tukar mata uang asing efektif
91	X_{90}	Ex rate (Switz)	Nilai tukar mata uang asing untuk Swiss
92	X_{91}	Ex rate (Japan)	Nilai tukar mata uang asing untuk Jepang
93	X_{92}	Ex rate (UK)	Nilai tukar mata uang asing untuk UK
94	X_{93}	EX rate (Canada)	Nilai tukar mata uang asing untuk Kanada
95	X_{94}	S&P 500	Indeks harga saham gabungan berdasarkan S&P
96	X_{95}	S&P (indust)	Indeks harga saham industri berdasarkan S&P
97	X_{96}	S&P div yield	Hasil dividen berdasarkan S&P's Composite Common Stock (%, per tahun)
98	X_{97}	S&P PE ratio	Rasio price-earnings
99	X_{98}	DJIA	Harga saham berdasarkan Dow Jones Industrial Average
100	X_{99}	Consumer expect	Indeks konsumen yang diharapkan
101	X_{100}	PMI	Purchasing Manager's Index (Indeks pembelian oleh manager)
102	X_{101}	NAPM new orders	Indeks pesanan NAPM terbaru (%)
103	X_{102}	NAPM vendor del	Indeks penjaja keliling NAPM (%)
104	X_{103}	NAPM Invent	Indeks inventaris NAPM (%)
105	X_{104}	Orders (ConsGoods)	Barang-barang konsumsi dan material terbaru ($)
106	X_{105}	Orders (NDCapGoo	Pesanan produksi terbaru pada tahun 1996

107	X_{106}	Cons-Dur	Real Personal Consumption Expenditures - Durable Goods Quantity Index
108	X_{107}	ConsNondur	Real Personal Consumption Expenditures - Nondurable Goods, Quantity Index

Lampiran 20 Observasi $\tilde{y}$

No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$
1	-377.870	42	-342.918	83	-263.321	124	-196.177	165	-157.415	206	-143.775
2	-373.171	43	-340.275	84	-258.916	125	-197.771	166	-151.255	207	-143.393
3	-369.646	44	-339.981	85	-255.391	126	-193.667	167	-145.738	208	-140.441
4	-364.360	45	-338.219	86	-253.041	127	-191.427	168	-140.512	209	-138.273
5	-360.541	46	-337.925	87	-248.048	128	-190.447	169	-137.457	210	-138.182
6	-360.247	47	-336.750	88	-247.460	129	-190.544	170	-130.128	211	-135.416
7	-366.416	48	-336.750	89	-243.936	130	-190.418	171	-130.062	212	-132.019
8	-374.933	49	-334.694	90	-242.174	131	-194.447	172	-130.877	213	-130.733
9	-375.227	50	-331.463	91	-240.118	132	-195.584	173	-127.473	214	-130.079
10	-376.989	51	-329.701	92	-239.824	133	-203.403	174	-126.998	215	-122.787
11	-375.521	52	-327.058	93	-236.299	134	-203.676	175	-124.852	216	-117.592
12	-360.541	53	-323.533	94	-233.656	135	-204.213	176	-125.780	217	-120.498
13	-353.786	54	-322.652	95	-236.300	136	-205.277	177	-121.370	218	-113.050
14	-356.135	55	-323.827	96	-235.418	137	-205.758	178	-118.003	219	-106.713
15	-358.485	56	-323.239	97	-233.614	138	-207.091	179	-115.592	220	-101.863
16	-360.541	57	-320.302	98	-237.972	139	-206.082	180	-116.802	221	-97.985
17	-360.835	58	-318.246	99	-240.113	140	-206.816	181	-120.308	222	-94.266
18	-364.066	59	-316.778	100	-236.551	141	-209.650	182	-121.761	223	-93.015
19	-364.947	60	-317.365	101	-239.877	142	-217.815	183	-121.750	224	-92.375
20	-365.241	61	-314.722	102	-239.925	143	-220.238	184	-122.861	225	-89.848
21	-367.884	62	-312.665	103	-240.785	144	-211.107	185	-119.460	226	-88.431
22	-368.178	63	-312.665	104	-233.561	145	-207.978	186	-119.946	227	-88.241
23	-371.702	64	-307.672	105	-234.185	146	-208.759	187	-119.917	228	-87.266
24	-376.402	65	-305.910	106	-231.061	147	-209.202	188	-124.484	229	-94.395
25	-376.108	66	-305.029	107	-225.529	148	-206.908	189	-124.129	230	-92.094
26	-376.402	67	-302.973	108	-221.304	149	-204.822	190	-125.947	231	-82.408
27	-374.933	68	-300.917	109	-221.731	150	-203.090	191	-142.102	232	-71.289
28	-369.940	69	-299.742	110	-220.311	151	-204.294	192	-158.885	233	-69.519
29	-366.122	70	-304.148	111	-219.070	152	-206.694	193	-165.065	234	-65.435
30	-362.597	71	-294.455	112	-218.493	153	-200.012	194	-175.910	235	-65.674
31	-359.660	72	-290.637	113	-214.014	154	-196.885	195	-180.583	236	-63.706
32	-357.310	73	-287.112	114	-212.530	155	-195.098	196	-180.301	237	-62.311
33	-357.604	74	-285.056	115	-213.152	156	-190.218	197	-181.157	238	-57.509
34	-352.611	75	-280.651	116	-212.023	157	-180.070	198	-178.038	239	-53.327
35	-348.499	76	-279.182	117	-210.486	158	-176.126	199	-173.364	240	-49.956
36	-346.149	77	-276.538	118	-209.677	159	-172.838	200	-169.234	241	-53.739
37	-348.499	78	-273.895	119	-204.397	160	-168.352	201	-163.338	242	-50.302
38	-344.093	79	-270.664	120	-203.092	161	-168.254	202	-161.540	243	-48.432
39	-342.624	80	-269.196	121	-200.582	162	-166.818	203	-160.382	244	-54.425
40	-342.037	81	-268.314	122	-197.912	163	-166.767	204	-154.721	245	-50.120
41	-342.331	82	-264.790	123	-194.620	164	-160.893	205	-147.920	246	-49.975

(lanjutan)

No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$	No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$
247	-51.060	261	-75.475	275	-64.357	289	-93.985	303	-29.163	317	-14.829
248	-54.994	262	-68.672	276	-70.385	290	-97.102	304	-25.449	318	-14.432
249	-54.486	263	-59.219	277	-80.945	291	-92.460	305	-22.461	319	-18.333
250	-51.367	264	-55.982	278	-70.440	292	-86.074	306	-20.256	320	-15.532
251	-51.827	265	-59.032	279	-74.319	293	-82.141	307	-18.623	321	-12.867
252	-51.242	266	-62.037	280	-78.938	294	-79.086	308	-17.956	322	-15.093
253	-48.680	267	-58.850	281	-82.453	295	-70.514	309	-18.843	323	-12.990
254	-48.481	268	-61.492	282	-84.530	296	-64.399	310	-19.452	324	-0.6670
255	-50.295	269	-57.476	283	-86.330	297	-55.899	311	-17.131	325	-0.3587
256	-61.527	270	-54.646	284	-90.808	298	-51.101	312	-16.398	326	-0.8353
257	-75.584	271	-50.806	285	-92.993	299	-49.315	313	-17.911	327	-12.099
258	-82.403	272	-50.722	286	-97.290	300	-46.465	314	-15.337	328	-11.707
259	-85.880	273	-54.268	287	-99.467	301	-34.798	315	-14.320	329	-10.676
260	-84.096	274	-58.420	288	-103.616	302	-32.037	316	-15.345	330	-12.516

No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$
331	-0.8926
332	-0.9845
333	-0.8610
334	-0.5982
335	-0.3089
336	0.2358
337	0.0354
338	0.8240
339	0.9345
340	12.935
341	17.270
342	20.510
343	24.499
344	29.089
345	30.847
346	40.301
347	43.736
348	46.780
349	46.964
350	49.362
351	51.055
352	54.609
353	54.022
354	55.605
355	56.647
356	59.918
357	58.029
358	61.884
359	63.212
360	66.256
361	67.881
362	64.592
363	66.482
364	66.284
365	61.697
366	61.752
367	55.355
368	61.945
369	59.952
370	59.180
371	61.235
372	65.993
373	62.076
374	68.019
375	71.227
376	70.428
377	71.536

No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$
378	71,536
379	73,533
380	72,478
381	74,371
382	75,793
383	70,808
384	62,69
385	57,949
386	54,631
387	50,046
388	46,863
389	48,311
390	55,028
391	61,719
392	61,669
393	62,767
394	68,767
395	67,423
396	66,627
397	64,381
398	60,677
399	65,332
400	70,645
401	75,574
402	78,051
403	78,434
404	84,297
405	80,935
406	82,652
407	87,623
408	90,334
409	90,726
410	94,47
411	96,912
412	96,773
413	99,168
414	96,505
415	98,313
416	101,04
417	101,238
418	104,693

No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$
419	110,121
420	113,195
421	117,301
422	120,755
423	121,116
424	128,18
425	132,346
426	136,338
427	141,29
428	142,884
429	146,636
430	148,626
431	155,152
432	10,212
433	169,03
434	172,168
435	172,616
436	173,676
437	172,948
438	174,636
439	176,879
440	173,942
441	184,623
442	188,122
443	186,627
444	189,054
445	191,742
446	185,476
447	197,776
448	196,216
449	203,61
450	109,194
451	2126,388
452	215,091
453	220,523
454	223,107
455	225,492
456	233,419
457	239,448
458	240,795
459	251,016
460	257,014

No	$\tilde{y}=y-\bar{y}$
461	262,012
462	265,905
463	270,443
464	281,6
465	290,13
466	297,484
467	306,99
468	310,396
469	314,688
470	315,458
471	315,872
472	320,332
473	326,464
474	32,921
475	318,925
476	339,229

Lampiran 21 Observasi $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}$

No	y	$\tilde{\tilde{y}}=\tilde{y}_t\frac{1}{\|y\|}$	No	y	$\tilde{\tilde{y}}=\tilde{y}_t\frac{1}{\|y\|}$	No	y	$\tilde{\tilde{y}}=\tilde{y}_t\frac{1}{\|y\|}$	No	y	$\tilde{\tilde{y}}=\tilde{y}_t\frac{1}{\|y\|}$
1	0,9671	-0.0639	46	1,076	-0.0571	91	1,0751	-0.0406	136	1,073	-0.0347
2	0,9748	-0.0631	47	1,077	-0.0569	92	1,0754	-0.0405	137	1,073	-0.0348
3	0,9698	-0.0625	48	1,076	-0.0569	93	1,0764	-0.0399	138	1,039	-0.0350
4	0,9636	-0.0616	49	1,077	-0.0566	94	1,0796	-0.0395	139	1,032	-0.0348
5	0,963	-0.0609	50	1,078	-0.0560	95	1,0823	-0.0399	140	1,022	-0.0350
6	0,959	-0.0609	51	1,078	-0.0557	96	1,0832	-0.0398	141	1,016	-0.0354
7	0,9573	-0.0619	52	1,077	-0.0553	97	1,0796	-0.0395	142	1,022	-0.0368
8	0,9546	-0.0634	53	1,078	-0.0547	98	1,0807	-0.0402	143	1,02	-0.0372
9	0,9517	-0.0634	54	1,079	-0.0545	99	1,0821	-0.0406	144	1,018	-0.0357
10	0,9478	-0.0637	55	1,08	-0.0547	100	1,0825	-0.0400	145	1,012	-0.0352
11	0,9504	-0.0635	56	1,083	-0.0546	101	1,0823	-0.0405	146	1,007	-0.0353
12	0,9513	-0.0609	57	1,08	-0.0541	102	1,0806	-0.0406	147	1,006	-0.0354
13	0,9532	-0.0598	58	1,078	-0.0538	103	1,078	-0.0407	148	1,008	-0.0350
14	0,9518	-0.0602	59	1,078	-0.0535	104	1,076	-0.0395	149	1,009	-0.0346
15	0,951	-0.0606	60	1,08	-0.0536	105	1,0754	-0.0396	150	1,021	-0.0343
16	0,963	-0.0609	61	1,081	-0.0532	106	1,0735	-0.0391	151	1,021	-0.0345
17	0,978	-0.0610	62	1,08	-0.0529	107	1,0752	-0.0381	152	1,013	-0.0349
18	0,9824	-0.0615	63	1,081	-0.0529	108	1,0804	-0.0374	153	1,013	-0.0338
19	0,9785	-0.0617	64	1,081	-0.0520	109	1,0848	-0.0375	154	1,005	-0.0333
20	0,9699	-0.0617	65	1,081	-0.0517	110	1,0874	-0.0372	155	1,004	-0.0330
21	0,9726	-0.0622	66	1,081	-0.0516	111	1,0849	-0.0370	156	0,999	-0.0322
22	0,9787	-0.0622	67	1,081	-0.0512	112	1,0803	-0.0369	157	1,006	-0.0304
23	0,9769	-0.0628	68	1,079	-0.0509	113	1,078	-0.0362	158	1,005	-0.0298
24	0,9825	-0.0636	69	1,076	-0.0507	114	1,0771	-0.0359	159	0,998	-0.0292
25	0,9931	-0.0636	70	1,076	-0.0514	115	1,0738	-0.0360	160	0,996	-0.0285
26	0,9898	-0.0636	71	1,074	-0.0498	116	1,0728	-0.0358	161	0,989	-0.0284
27	0,9875	-0.0634	72	1,075	-0.0491	117	1,0732	-0.0356	162	0,98	-0.0282
28	0,989	-0.0625	73	1,074	-0.0485	118	1,0729	-0.0354	163	0,984	-0.0282
29	0,9876	-0.0619	74	1,076	-0.0482	119	1,0732	-0.0346	164	0,982	-0.0272
30	1,0053	-0.0613	75	1,081	-0.0474	120	1,0732	-0.0343	165	0,983	-0.0266
31	1,0341	-0.0608	76	1,079	-0.0472	121	1,0729	-0.0339	166	0,983	-0.0256
32	1,0316	-0.0604	77	1,08	-0.0467	122	1,0746	-0.0335	167	0,987	-0.0246
33	1,0309	-0.0604	78	1,083	-0.0463	123	1,0769	-0.0329	168	0,997	-0.0238
34	1,0305	-0.0596	79	1,084	-0.0458	124	1,0764	-0.0332	169	0,999	-0.0232
35	1,0359	-0.0589	80	1,079	-0.0455	125	1,0772	-0.0334	170	0,996	-0.0220
36	1,0429	-0.0585	81	1,077	-0.0454	126	1,0796	-0.0327	171	0,997	-0.0220
37	1,0452	-0.0589	82	1,075	-0.0448	127	1,0808	-0.0324	172	1,001	-0.0221
38	1,0489	-0.0582	83	1,075	-0.0445	128	1,0782	-0.0322	173	1,001	-0.0215
39	1,0496	-0.0579	84	1,076	-0.0438	129	1,0784	-0.0322	174	0,998	-0.0215
40	1,0501	-0.0578	85	1,075	-0.0432	130	1,078028	-0.0322	175	1	-0.0211
41	1,0823	-0.0579	86	1,077	-0.0428	131	1,075951	-0.0329	176	1,004	-0.0213
42	1,088	-0.0580	87	1,076	-0.0419	132	1,07431	-0.0331	177	1,008	-0.0205
43	1,0793	-0.0575	88	1,077	-0.0418	133	1,072973	-0.0344	178	1,001	-0.0199
44	1,0779	-0.0575	89	1,077	-0.0412	134	1,073203	-0.0344	179	0,999	-0.0195
45	1,077	-0.0572	90	1,077	-0.0409	135	1,072823	-0.0345	180	0,999	-0.0197

(lanjutan)

No	y	$\hat{y} = \hat{y}_t \frac{1}{\|y\|}$	No	y	$\hat{y} = \hat{y}_t \frac{1}{\|y\|}$	No	y	$\hat{y} = \hat{y}_t \frac{1}{\|y\|}$	No	y	$\hat{y} = \hat{y}_t \frac{1}{\|y\|}$
181	0,991	-0.0203	226	1,098785	-0.0149	271	1,2107	-0.0086	316	1,366	-0.0026
182	0,977	-0.0206	227	1,109319	-0.0149	272	1,2232	-0.0086	317	1,376	-0.0025
183	0,972	-0.0206	228	1,097309	-0.0148	273	1,2008	-0.0092	318	1,368	-0.0024
184	0,968	-0.0208	229	1,101205	-0.0160	274	1,2029	-0.0099	319	1,353	-0.0031
185	0,962	-0.0202	230	1,112961	-0.0156	275	1,1872	-0.0109	320	1,358	-0.0026
186	0,966	-0.0203	231	1,125829	-0.0139	276	1,1851	-0.0119	321	1,37	-0.0022
187	0,976	-0.0203	232	1,141662	-0.0121	277	1,1926	-0.0137	322	1,367	-0.0026
188	0,98	-0.0210	233	1,118606	-0.0118	278	1,214	-0.0119	323	1,377	-0.0022
189	0,986	-0.0210	234	1,121794	-0.0111	279	1,2205	-0.0126	324	1,395	-0.0011
190	0,983	-0.0213	235	1,124595	-0.0111	280	1,2252	-0.0133	325	1,407	-0.0006
191	0,987	-0.0240	236	1,14038	-0.0108	281	1,2336	-0.0139	326	1,404	-0.0014
192	0,988	-0.0269	237	1,16633	-0.0105	282	1,2756	-0.0143	327	1,401	-0.0020
193	0,995	-0.0279	238	1,182787	-0.0097	283	1,2699	-0.0146	328	1,388	-0.0020
194	1	-0.0297	239	1,173102	-0.0090	284	1,2452	-0.0153	329	1,376	-0.0018
195	1	-0.0305	240	1,179761	-0.0084	285	1,2348	-0.0157	330	1,39	-0.0021
196	1,011	-0.0305	241	1,189895	-0.0091	286	1,2301	-0.0164	331	1,381	-0.0015
197	1,029	-0.0306	242	1,195629	-0.0085	287	1,2262	-0.0168	332	1,389	-0.0017
198	1,026	-0.0301	243	1,173888	-0.0082	288	1,2385	-0.0175	333	1,387	-0.0015
199	1,031	-0.0293	244	1,146329	-0.0092	289	1,2287	-0.0159	334	1,389	-0.0010
200	1,035	-0.0286	245	1,155612	-0.0085	290	1,2277	-0.0164	335	1,386	-0.0005
201	1,026	-0.0276	246	1,172388	-0.0084	291	1,2263	-0.0156	336	1,38	0.0004
202	1,025	-0.0273	247	1,163873	-0.0086	292	1,2325	-0.0145	337	1,361	0.0001
203	1,014	-0.0271	248	1,170618	-0.0093	293	1,2292	-0.0139	338	1,334	0.0014
204	1,014	-0.0262	249	1,165311	-0.0092	294	1,2323	-0.0134	339	1,319	0.0016
205	1,006	-0.0250	250	1,175309	-0.0087	295	1,2323	-0.0119	340	1,318	0.0022
206	0,994	-0.0243	251	1,179649	-0.0088	296	1,2338	-0.0109	341	1,341	0.0029
207	0,986	-0.0242	252	1,169987	-0.0087	297	1,2326	-0.0094	342	1,339	0.0035
208	0,984	-0.0237	253	1,163982	-0.0082	298	1,232	-0.0086	343	1,326	0.0041
209	0,98	-0.0234	254	1,155459	-0.0082	299	1,2367	-0.0083	344	1,326	0.0049
210	0,974	-0.0234	255	1,172956	-0.0085	300	1,2469	-0.0079	345	1,315	0.0052
211	0,972	-0.0229	256	1,186081	-0.0104	301	1,2484	-0.0059	346	1,31	0.0068
212	0,985	-0.0223	257	1,174012	-0.0128	302	1,248	-0.0054	347	1,317	0.0074
213	0,975	-0.0221	258	1,151596	-0.0139	303	1,2697	-0.0049	348	1,308	0.0079
214	0,973	-0.0220	259	1,152299	-0.0145	304	1,2796	-0.0043	349	1,286	0.0079
215	0,986	-0.0208	260	1,159246	-0.0142	305	1,2944	-0.0038	350	1,268	0.0083
216	1,018	-0.0199	261	1,164679	-0.0128	306	1,304	-0.0034	351	1,249	0.0086
217	1,01	-0.0204	262	1,169067	-0.0116	307	1,3238	-0.0031	352	1,235	0.0092
218	1,028	-0.0191	263	1,186441	-0.0100	308	1,3035	-0.0030	353	1,237	0.0091
219	1,051	-0.0180	264	1,196743	-0.0095	309	1,3145	-0.0032	354	1,218	0.0094
220	1,051	-0.0172	265	1,1908	-0.0100	310	1,3189	-0.0033	355	1,208	0.0096
221	1,049	-0.0166	266	1,1984	-0.0105	311	1,3168	-0.0029	356	1,224	0.0101
222	1,058	-0.0159	267	1,1914	-0.0099	312	1,3201	-0.0028	357	1,227	0.0098
223	1,061	-0.0157	268	1,191	-0.0104	313	1,324	-0.0030	358	1,206	0.0105
224	1,075	-0.0156	269	1,201	-0.0097	314	1,3547	-0.0026	359	1,219	0.0107
225	1,073	-0.0152	270	1,2041	-0.0092	315	1,384	-0.0024	360	1,196	0.0112

(lanjutan)

No	y	[illegible]
406	1,2453	0.0148
407	1,2674	0.0153
408	1,2725	0.0153
409	1,2779	0.0160
410	1,2602	0.0164
411	1,2471	0.0164
412	1,2621	0.0168
413	1,2698	0.0163
414	1,2789	0.0166
415	1,282	0.0171
416	1,308	0.0171
417	1,3215	0.0177
418	1,3263	0.0186
419	1,3174	0.0191
420	1,3308	0.0198
421	1,3173	0.0204
422	1,3424	0.0205
423	1,3644	0.0218
424	1,383	0.0224
425	1,3808	0.0230
426	1,3836	0.0239
427	1,3826	0.0242
428	1,3783	0.0248
429	1,354	0.0251
430	1,3503	0.0262
431	1,3647	0.0271
432	1,3893	0.0286
433	1,4132	0.0291
434	1,4005	0.0292
435	1,4077	0.0294
436	1,3762	0.0292
437	1,3609	0.0295
438	1,3775	0.0299
439	1,3612	0.0294
440	1,3552	0.0312
441	1,3509	0.0318
442	1,3458	0.0315
443	1,3534	0.0320
444	1,3693	0.0324
445	1,3669	0.0314
446	1,3752	0.0334
447	1,3656	0.0332
448	1,3592	0.0344
449	1,3693	0.0354
450	1,3658	0.0366

No	y	[illegible]
361	1,191	0.0115
362	1,189	0.0109
363	1,195	0.0112
364	1,189	0.0112
365	1,193	0.0104
366	1,199	0.0104
367	1,189	0.0094
368	1,176	0.0105
369	1,183	0.0101
370	1,175	0.0100
371	1,17	0.0104
372	1,161	0.0112
373	1,172	0.0105
374	1,197	0.0115
375	1,18	0.0120
376	1,164	0.0119
377	1,175	0.0121
378	1,173	0.0124
379	1,157	0.0123
380	1,145	0.0126
381	1,158	0.0128
382	1,16	0.0120
383	1,164	0.0106
384	1,16	0.0098
385	1,156	0.0092
386	1,155	0.0085
387	1,157	0.0079
388	1,154	0.0082
389	1,15	0.0093
390	1,144	0.0104
391	1,149	0.0104
392	1,145	0.0106
393	1,137	0.0116
394	1,128	0.0114
395	1,13	0.0113
396	1,147	0.0109
397	1,157	0.0103
398	1,183	0.0110
399	1,193	0.0119
400	1,187	0.0128
401	1,199	0.0132
402	1,196	0.0133
403	1,192	0.0142
404	1,191	0.0137
405	1,223	0.0140

No	y	[illegible]
451	1,3697	0.0364
452	1,3722	0.0373
453	1,3694	0.0381
454	1,3508	0.0381
455	1,3381	0.0395
456	1,3622	0.0405
457	1,3494	0.0407
458	1,3556	0.0424
459	1,3725	0.0436
460	1,3942	0.0434
461	1,3804	0.0443
462	1,3843	0.0449
463	1,3775	0.0457
464	1,3905	0.0476
465	1,3872	0.0490
466	1,3869	0.0503
467	1,4128	0.0518
468	1,4271	0.0525
469	1,4409	0.0532
470	1,4334	0.0533
471	1,4166	0.0534
472	1,4298	0.0541
473	1,4452	0.0552
474	1,4655	0.0544
475	1,4869	0.0539
476	1,5346	0.0573

Lampiran 22 Nilai $\bar{x}_j$

j	$\bar{x}_j$	j	$\bar{x}_j$	j	$\bar{x}_j$
1	0,0006	46	0,0000	91	0,0010
2	0,0006	47	0,0145	92	0,0000
3	0,0007	48	0,0155	93	0,0023
4	0,0005	49	0,0019	94	0,0020
5	0,0007	50	0,0032	95	0,0000
6	0,0005	51	0,0067	96	0,0039
7	0,0006	52	0,0037	97	0,0045
8	0,0005	53	0,0001	98	0,0000
9	0,0008	54	0,0001	99	0,0002
10	0,0006	55	0,0001	100	0,0326
11	0,0007	56	0,0001	101	0,0008
12	0,0008	57	0,0001	102	0,0005
13	0,0006	58	0,0001	103	0,0006
14	0,0008	59	0,0001	104	0,0005
15	0,0001	60	0,0001	105	0,0005
16	0,0001	61	0,0000	106	0,0010
17	0,0001	62	0,0000	107	0,0003
18	0,0001	63	0,0000		
19	0,0002	64	0,0000		
20	0,0001	65	0,0000		
21	0,7802	66	0,0062		
22	0,2250	67	0,0205		
23	0,0067	68	0,0241		
24	0,0468	69	2,5646		
25	0,1707	70	0,2921		
26	0,1041	71	0,2852		
27	0,0666	72	0,0044		
28	0,7145	73	4,6965		
29	0,1893	74	0,0006		
30	0,0445	75	0,0008		
31	0,1070	76	0,0006		
32	0,0532	77	0,0006		
33	0,1593	78	0,0010		
34	0,0007	79	0,0010		
35	0,0000	80	0,0006		
36	1,0271	81	0,0009		
37	0,9925	82	0,0009		
38	0,0001	83	0,0009		
39	0,0001	84	0,0008		
40	0,0263	85	0,0014		
41	0,0195	86	0,0021		
42	0,0183	87	0,0039		
43	0,0087	88	0,0005		
44	0,0096	89	0,0008		
45	0,0004	90	0,0006		

Lampiran 23 Nilai $\tilde{x}_{n,1} = x_{n,1} - \bar{x}_1$

n	$\tilde{x}_{n,1} = x_{n,1} - \bar{x}_1$	n	$\tilde{x}_{n,1} = x_{n,1} - \bar{x}_1$	n	$\tilde{x}_{n,1} = x_{n,1} - \bar{x}_1$	n	$\tilde{x}_{n,1} = x_{n,1} - \bar{x}_1$
1	-38,97180226	46	-34,88370226	91	-25,92470226	136	-22,20270226
2	-38,65290226	47	-34,70970226	92	-26,04070226	137	-22,19050226
3	-38,50790226	48	-34,68080226	93	-25,77980226	138	-22,28520226
4	-38,16000226	49	-34,39080226	94	-25,43190226	139	-22,25010226
5	-37,95700226	50	-34,15890226	95	-25,48980226	140	-22,68160226
6	-37,78310226	51	-34,15890226	96	-25,37390226	141	-22,95410226
7	-37,75410226	52	-33,83990226	97	-24,98560226	142	-23,57690226
8	-37,92800226	53	-33,72400226	98	-25,22070226	143	-23,81260226
9	-38,04400226	54	-33,66600226	99	-25,11990226	144	-22,91080226
10	-38,10200226	55	-33,66600226	100	-24,76510226	145	-22,76390226
11	-38,36290226	56	-33,40510226	101	-25,03910226	146	-22,72890226
12	-37,63810226	57	-33,31810226	102	-24,99620226	147	-22,84600226
13	-37,02930226	58	-33,05710226	103	-25,12630226	148	-22,64480226
14	-37,17420226	59	-32,94110226	104	-24,65800226	149	-22,61530226
15	-37,26120226	60	-32,91220226	105	-24,60500226	150	-22,45290226
16	-37,20320226	61	-32,62220226	106	-24,40640226	151	-21,99850226
17	-37,05820226	62	-32,62220226	107	-23,78720226	152	-22,23350226
18	-37,34820226	63	-32,62220226	108	-23,43230226	153	-21,65510226
19	-37,49310226	64	-32,01330226	109	-23,61420226	154	-21,23240226
20	-37,55110226	65	-31,92640226	110	-23,38890226	155	-20,99240226
21	-37,75410226	66	-31,92640226	111	-23,28610226	156	-20,75620226
22	-37,60910226	67	-31,60750226	112	-23,38610226	157	-19,95910226
23	-37,87000226	68	-31,63650226	113	-23,04920226	158	-19,59990226
24	-38,21800226	69	-31,78140226	114	-22,91550226	159	-19,37410226
25	-38,24700226	70	-32,10030226	115	-23,04360226	160	-18,91620226
26	-38,21800226	71	-31,20150226	116	-22,67100226	161	-18,97540226
27	-38,10200226	72	-30,79560226	117	-22,52990226	162	-18,78210226
28	-37,72510226	73	-30,44770226	118	-22,43170226	163	-18,52940226
29	-37,55110226	74	-30,18680226	119	-21,99240226	164	-18,01590226
30	-37,29020226	75	-29,80980226	120	-21,92030226	165	-17,77510226
31	-37,08720226	76	-29,80990226	121	-21,64910226	166	-17,05590226
32	-36,91330226	77	-29,46200226	122	-21,50740226	167	-16,62610226
33	-36,97130226	78	-29,28800226	123	-21,10610226	168	-16,30090226
34	-36,53640226	79	-29,02710226	124	-21,43900226	169	-16,09110226
35	-36,10140226	80	-28,99810226	125	-21,63630226	170	-15,38340226
36	-35,92750226	81	-28,67910226	126	-21,33560226	171	-15,24910226
37	-36,15940226	82	-28,33120226	127	-20,98690226	172	-15,46280226
38	-35,81150226	83	-28,01230226	128	-21,10340226	173	-15,11520226
39	-35,60860226	84	-27,57740226	129	-21,18600226	174	-15,10300226
40	-35,40560226	85	-27,28740226	130	-21,15540226	175	-14,90140226
41	-35,26060226	86	-27,17150226	131	-21,65510226	176	-15,06970226
42	-35,23160226	87	-26,79450226	132	-21,67190226	177	-14,49400226
43	-34,97070226	88	-26,62060226	133	-22,30310226	178	-14,17890226
44	-34,97070226	89	-26,35960226	134	-22,19470226	179	-14,03060226
45	-34,79670226	90	-26,15670226	135	-22,21630226	180	-14,45450226

(lanjutan)

n	$\tilde{x}_{n1} = x_{n1} - \bar{x}_1$	n	$\tilde{x}_{n1} = x_{n1} - \bar{x}_1$	n	$\tilde{x}_{n1} = x_{n1} - \bar{x}_1$	n	$\tilde{x}_{n1} = x_{n1} - \bar{x}_1$
181	-14,76980226	226	-10,52330226	271	-5,504302257	316	0,442297743
182	-14,95560226	227	-10,51580226	272	-5,478602257	317	0,537497743
183	-14,79840226	228	-9,842202257	273	-5,715102257	318	0,737397743
184	-14,97530226	229	-10,76100226	274	-5,779602257	319	0,365497743
185	-14,57810226	230	-10,18740226	275	-5,997102257	320	0,774597743
186	-14,48840226	231	-9,079502257	276	-6,470702257	321	1,010097743
187	-14,70800226	232	-8,458702257	277	-7,689502257	322	0,907797743
188	-14,77530226	233	-8,595802257	278	-6,168802257	323	1,225897743
189	-14,84420226	234	-8,041502257	279	-6,622502257	324	1,725297743
190	-14,93620226	235	-8,107702257	280	-6,842702257	325	2,236997743
191	-16,06740226	236	-7,879302257	281	-6,927702257	326	1,551197743
192	-17,54830226	237	-7,694402257	282	-7,157502257	327	1,395197743
193	-18,36720226	238	-7,341502257	283	-7,128902257	328	1,571897743
194	-19,37630226	239	-6,955202257	284	-7,515402257	329	1,781197743
195	-19,70000226	240	-6,540002257	285	-7,626702257	330	1,696297743
196	-19,39180226	241	-6,566802257	286	-7,942502257	331	2,024997743
197	-19,32950226	242	-6,334302257	287	-8,171802257	332	2,075797743
198	-19,04820226	243	-6,068002257	288	-8,552402257	333	2,133597743
199	-18,33030226	244	-6,932102257	289	-7,758302257	334	2,323497743
200	-18,17820226	245	-6,362502257	290	-8,235402257	335	2,623697743
201	-17,59780226	246	-6,379102257	291	-7,767002257	336	3,249397743
202	-17,49670226	247	-6,406102257	292	-7,082702257	337	2,960297743
203	-17,45820226	248	-6,847502257	293	-6,716702257	338	3,828897743
204	-17,01800226	249	-6,423802257	294	-6,449902257	339	3,915297743
205	-16,40150226	250	-6,337202257	295	-5,604402257	340	4,141797743
206	-16,21290226	251	-6,321102257	296	-5,100202257	341	4,702197743
207	-16,28010226	252	-6,133802257	297	-4,127502257	342	4,975197743
208	-16,04990226	253	-6,062902257	298	-3,944302257	343	5,324197743
209	-15,70480226	254	-5,877202257	299	-3,871202257	344	5,832897743
210	-15,81410226	255	-6,183302257	300	-3,512802257	345	5,959097743
211	-15,39480226	256	-7,082802257	301	-2,343102257	346	6,989997743
212	-15,19750226	257	-8,231602257	302	-2,134302257	347	7,170897743
213	-15,01680226	258	-8,645902257	303	-1,792602257	348	7,464597743
214	-14,67930226	259	-8,555502257	304	-1,447202257	349	7,693997743
215	-13,88730226	260	-8,339902257	305	-1,252002257	350	7,954597743
216	-13,41400226	261	-7,671602257	306	-0,963802257	351	8,035997743
217	-13,56090226	262	-7,092402257	307	-0,784202257	352	8,361997743
218	-12,80800226	263	-6,431102257	308	-0,606402257	353	8,194397743
219	-12,52030226	264	-6,320202257	309	-0,505802257	354	8,293797743
220	-11,99610226	265	-6,243502257	310	-0,113602257	355	8,325897743
221	-11,64010226	266	-6,654402257	311	0,134297743	356	8,708397743
222	-11,12060226	267	-6,394702257	312	0,397897743	357	8,561297743
223	-10,91150226	268	-6,101202257	313	0,077797743	358	9,094597743
224	-10,70270226	269	-5,645402257	314	0,382997743	359	9,173997743
225	-10,56930226	270	-5,891302257	315	0,660897743	360	9,452097743

(lanjutan)

n	$\tilde{x}_{n,1} = x_{n,1} - \bar{x}_1$
361	9,636697743
362	9,485597743
363	9,588497743
364	9,637497743
365	8,952397743
366	9,213397743
367	8,290097743
368	9,201797743
369	9,028197743
370	8,761097743
371	9,012097743
372	10,06079774
373	9,422397743
374	9,985497743
375	10,42819774
376	10,20319774
377	10,30239774
378	10,59939774
379	10,42679774
380	10,44519774
381	10,77239774
382	10,08669774
383	9,248497743
384	8,825797743
385	8,561097743
386	7,987197743
387	7,798397743
388	7,834997743
389	8,620897743
390	9,496997743
391	9,094097743
392	9,270797743
393	10,06999774
394	9,729297743
395	9,777097743
396	9,344697743
397	8,675197743
398	9,325397743
399	9,851997743
400	10,40859774
401	10,83059774
402	10,63059774
403	11,31309774
404	11,28209774
405	11,18919774

n	$\tilde{x}_{n,1} = x_{n,1} - \bar{x}_1$
406	11,81969774
407	12,04029774
408	12,19659774
409	12,59049774
410	12,68699774
411	12,79199774
412	12,99819774
413	12,69469774
414	12,71549774
415	13,19129774
416	13,12799774
417	13,54539774
418	14,02179774
419	14,18239774
420	14,50659774
421	15,02639774
422	14,83249774
423	15,61009774
424	15,91429774
425	16,26189774
426	16,81799774
427	16,80299774
428	17,17039774
429	17,19639774
430	17,97099774
431	18,23509774
432	18,90359774
433	19,14249774
434	19,21159774
435	19,31179774
436	19,11549774
437	19,32119774
438	19,73559774
439	19,48999774
440	20,76499774
441	21,09219774
442	20,69899774
443	20,91249774
444	21,25819774
445	20,37279774
446	21,86189774
447	21,57019774
448	22,31629774
449	22,76659774
450	23,52549774

n	$\tilde{x}_{n,1} = x_{n,1} - \bar{x}_1$
451	23,31879774
452	23,71749774
453	24,32859774
454	24,16699774
455	25,18019774
456	25,80969774
457	25,81679774
458	26,67439774
459	27,47019774
460	27,05059774
461	27,65189774
462	27,95379774
463	28,18829774
464	29,51509774
465	30,29069774
466	31,41319774
467	32,15089774
468	32,37089774
469	32,89029774
470	32,92229774
471	33,03539774
472	33,50739774
473	34,13689774
474	33,75449774
475	33,38219774
476	35,64559774

Untuk $\tilde{x}_{n,j} = x_{n,j} - \bar{x}_j, j = 2, 3, \dots, 107; n = 1, 2, \dots, 476$ dapat dicari menggunakan cara yang sama seperti $\tilde{x}_{n,1}$.

Lampiran 24 Nilai $\|\tilde{x}_j\|$, $j = 1, 2, \ldots, 107$

j	$\|\tilde{x}_j\|$	j	$\|\tilde{x}_j\|$	j	$\|\tilde{x}_j\|$
1	0,5517	46	0,7862	91	0,8457
2	0,5547	47	0,7447	92	0,8662
3	0,5899	48	0,8525	93	0,7936
4	0,461	49	0,9436	94	0,8889
5	0,6721	50	0,9317	95	0,6099
6	0,4531	51	0,7724	96	0,3479
7	0,4664	52	0,8435	97	0,3477
8	0,3341	53	0,842	98	0,6408
9	0,7749	54	0,8163	99	0,4951
10	0,4913	55	0,8048	100	0,3376
11	0,6574	56	0,8106	101	0,8868
12	0,6595	57	0,84	102	0,8988
13	0,8762	58	0,8699	103	0,8742
14	0,8127	59	0,9236	104	0,9698
15	0,5972	60	0,9364	105	0,9354
16	0,614	61	0,926	106	0,6476
17	0,6037	62	0,8777	107	0,5963
18	0,7796	63	0,8158		
19	0,9686	64	0,5601		
20	0,7665	65	0,7626		
21	0,6201	66	0,6154		
22	0,8925	67	0,3382		
23	0,8419	68	0,4598		
24	0,4606	69	0,4012		
25	0,578	70	0,8559		
26	0,7356	71	0,8501		
27	0,311	72	0,5438		
28	0,6119	73	0,3722		
29	0,6854	74	0,6464		
30	0,7332	75	0,9185		
31	0,6928	76	0,6669		
32	0,6584	77	0,5889		
33	0,6903	78	0,612		
34	0,7483	79	0,6127		
35	0,799	80	0,6487		
36	0,6427	81	0,6917		
37	0,6404	82	0,6682		
38	0,8895	83	0,7002		
39	0,7932	84	0,5669		
40	0,9883	85	0,7711		
41	0,9309	86	0,865		
42	0,8437	87	0,7058		
43	0,8619	88	0,5214		
44	0,8329	89	0,8213		
45	0,889	90	0,8266		

Lampiran 25 Perbandingan nilai $\boldsymbol{x_{n,1}}$ dengan $\boldsymbol{\tilde{\tilde{x}}_{n,1}}$

n	$x_{n,1}$	$\tilde{\tilde{x}}_{n,1}$	n	$x_{n,1}$	$\tilde{\tilde{x}}_{n,1}$	n	$x_{n,1}$	$\tilde{\tilde{x}}_{n,1}$	n	$x_{n,1}$	$\tilde{\tilde{x}}_{n,1}$
1	23,6297	-0,06402	46	27,7178	-0,0573	91	36,6768	-0,04259	136	40,3988	-0,03647
2	23,9486	-0,0635	47	27,8918	-0,05702	92	36,5608	-0,04278	137	40,411	-0,03645
3	24,0936	-0,06326	48	27,9207	-0,05697	93	36,8217	-0,04235	138	40,3163	-0,03661
4	24,4415	-0,06269	49	28,2107	-0,05649	94	37,1696	-0,04178	139	40,3514	-0,03655
5	24,6445	-0,06235	50	28,4426	-0,05611	95	37,1117	-0,04187	140	39,9199	-0,03726
6	24,8184	-0,06207	51	28,4426	-0,05611	96	37,2276	-0,04168	141	39,6474	-0,03771
7	24,8474	-0,06202	52	28,7616	-0,05559	97	37,6159	-0,04104	142	39,0246	-0,03873
8	24,6735	-0,0623	53	28,8775	-0,0554	98	37,3808	-0,04143	143	38,7889	-0,03912
9	24,5575	-0,0625	54	28,9355	-0,0553	99	37,4816	-0,04126	144	39,6907	-0,03764
10	24,4995	-0,06259	55	28,9355	-0,0553	100	37,8364	-0,04068	145	39,8376	-0,03739
11	24,2386	-0,06302	56	29,1964	-0,05487	101	37,5624	-0,04113	146	39,8726	-0,03734
12	24,9634	-0,06183	57	29,2834	-0,05473	102	37,6053	-0,04106	147	39,7555	-0,03753
13	25,5722	-0,06083	58	29,5444	-0,0543	103	37,4752	-0,04128	148	39,9567	-0,0372
14	25,4273	-0,06107	59	29,6604	-0,05411	104	37,9435	-0,04051	149	39,9862	-0,03715
15	25,3403	-0,06121	60	29,6893	-0,05407	105	37,9965	-0,04042	150	40,1486	-0,03688
16	25,3983	-0,06111	61	29,9793	-0,05359	106	38,1951	-0,04009	151	40,603	-0,03614
17	25,5433	-0,06088	62	29,9793	-0,05359	107	38,8143	-0,03908	152	40,368	-0,03652
18	25,2533	-0,06135	63	29,9793	-0,05359	108	39,1692	-0,03849	153	40,9464	-0,03557
19	25,1084	-0,06159	64	30,5882	-0,05259	109	38,9873	-0,03879	154	41,3691	-0,03488
20	25,0504	-0,06169	65	30,6751	-0,05245	110	39,2126	-0,03842	155	41,6091	-0,03448
21	24,8474	-0,06202	66	30,6751	-0,05245	111	39,3154	-0,03825	156	41,8453	-0,0341
22	24,9924	-0,06178	67	30,994	-0,05192	112	39,2154	-0,03842	157	42,6424	-0,03279
23	24,7315	-0,06221	68	30,965	-0,05197	113	39,5523	-0,03786	158	43,0016	-0,0322
24	24,3835	-0,06278	69	30,8201	-0,05221	114	39,686	-0,03764	159	43,2274	-0,03183
25	24,3545	-0,06283	70	30,5012	-0,05273	115	39,5579	-0,03785	160	43,6853	-0,03107
26	24,3835	-0,06278	71	31,4	-0,05125	116	39,9305	-0,03724	161	43,6261	-0,03117
27	24,4995	-0,06259	72	31,8059	-0,05059	117	40,0716	-0,03701	162	43,8194	-0,03085
28	24,8764	-0,06197	73	32,1538	-0,05002	118	40,1698	-0,03685	163	44,0721	-0,03044
29	25,0504	-0,06169	74	32,4147	-0,04959	119	40,6091	-0,03613	164	44,5856	-0,02959
30	25,3113	-0,06126	75	32,7917	-0,04897	120	40,6812	-0,03601	165	44,8264	-0,0292
31	25,5143	-0,06092	76	32,7916	-0,04897	121	40,9524	-0,03556	166	45,5456	-0,02802
32	25,6882	-0,06064	77	33,1395	-0,0484	122	41,0941	-0,03533	167	45,9754	-0,02731
33	25,6302	-0,06073	78	33,3135	-0,04811	123	41,4954	-0,03467	168	46,3006	-0,02678
34	26,0651	-0,06002	79	33,5744	-0,04768	124	41,1625	-0,03522	169	46,5104	-0,02643
35	26,5001	-0,0593	80	33,6034	-0,04764	125	40,9652	-0,03554	170	47,2181	-0,02527
36	26,674	-0,05902	81	33,9224	-0,04711	126	41,2659	-0,03505	171	47,3524	-0,02505
37	26,4421	-0,0594	82	34,2703	-0,04654	127	41,6146	-0,03448	172	47,1387	-0,0254
38	26,79	-0,05883	83	34,5892	-0,04602	128	41,4981	-0,03467	173	47,4863	-0,02483
39	26,9929	-0,05849	84	35,0241	-0,0453	129	41,4155	-0,0348	174	47,4985	-0,02481
40	27,1959	-0,05816	85	35,3141	-0,04483	130	41,4461	-0,03475	175	47,7001	-0,02448
41	27,3409	-0,05792	86	35,43	-0,04463	131	40,9464	-0,03557	176	47,5318	-0,02476
42	27,3699	-0,05788	87	35,807	-0,04402	132	40,9296	-0,0356	177	48,1075	-0,02381
43	27,6308	-0,05745	88	35,9809	-0,04373	133	40,2984	-0,03664	178	48,4226	-0,02329
44	27,6308	-0,05745	89	36,2419	-0,0433	134	40,4068	-0,03646	179	48,5709	-0,02305
45	27,8048	-0,05716	90	36,4448	-0,04297	135	40,3852	-0,03649	180	48,147	-0,02374

(lanjutan)

n	$x_{n,1}$	$\bar{\bar{x}}_{n,1}$	n	$x_{n,1}$	$\bar{\bar{x}}_{n,1}$	n	$x_{n,1}$	$\bar{\bar{x}}_{n,1}$	n	$x_{n,1}$	$\bar{\bar{x}}_{n,1}$
181	47,8317	-0,02426	226	52,0782	-0,01729	271	57,0972	-0,00904	316	63,0438	0,000727
182	47,6459	-0,02457	227	52,0857	-0,01727	272	57,1229	-0,009	317	63,139	0,000883
183	47,8031	-0,02431	228	52,7593	-0,01617	273	56,8864	-0,00939	318	63,3389	0,001211
184	47,6262	-0,0246	229	51,8405	-0,01768	274	56,8219	-0,00949	319	62,967	0,0006
185	48,0234	-0,02395	230	52,4141	-0,01673	275	56,6044	-0,00985	320	63,3761	0,001272
186	48,1131	-0,0238	231	53,522	-0,01491	276	56,1308	-0,01063	321	63,6116	0,001659
187	47,8935	-0,02416	232	54,1428	-0,0139	277	54,912	-0,01263	322	63,5093	0,001491
188	47,8262	-0,02427	233	54,0057	-0,01412	278	56,4327	-0,01013	323	63,8274	0,002014
189	47,7573	-0,02438	234	54,56	-0,01321	279	55,979	-0,01088	324	64,3268	0,002834
190	47,6653	-0,02454	235	54,4938	-0,01332	280	55,7588	-0,01124	325	64,8385	0,003675
191	46,5341	-0,02639	236	54,7222	-0,01294	281	55,6738	-0,01138	326	64,1527	0,002548
192	45,0532	-0,02883	237	54,9071	-0,01264	282	55,444	-0,01176	327	63,9967	0,002292
193	44,2343	-0,03017	238	55,26	-0,01206	283	55,4726	-0,01171	328	64,1734	0,002582
194	43,2252	-0,03183	239	55,6463	-0,01143	284	55,0861	-0,01235	329	64,3827	0,002926
195	42,9015	-0,03236	240	56,0615	-0,01074	285	54,9748	-0,01253	330	64,2978	0,002787
196	43,2097	-0,03186	241	56,0347	-0,01079	286	54,659	-0,01305	331	64,6265	0,003326
197	43,272	-0,03175	242	56,2672	-0,01041	287	54,4297	-0,01342	332	64,6773	0,00341
198	43,5533	-0,03129	243	56,5335	-0,00997	288	54,0491	-0,01405	333	64,7351	0,003505
199	44,2712	-0,03011	244	55,6694	-0,01139	289	54,8432	-0,01274	334	64,925	0,003817
200	44,4233	-0,02986	245	56,239	-0,01045	290	54,3661	-0,01353	335	65,2252	0,00431
201	45,0037	-0,02891	246	56,2224	-0,01048	291	54,8345	-0,01276	336	65,8509	0,005338
202	45,1048	-0,02874	247	56,1954	-0,01052	292	55,5188	-0,01163	337	65,5618	0,004863
203	45,1433	-0,02868	248	55,754	-0,01125	293	55,8848	-0,01103	338	66,4304	0,00629
204	45,5835	-0,02796	249	56,1777	-0,01055	294	56,1516	-0,0106	339	66,5168	0,006432
205	46,2	-0,02694	250	56,2643	-0,01041	295	56,9971	-0,00921	340	66,7433	0,006804
206	46,3886	-0,02663	251	56,2804	-0,01038	296	57,5013	-0,00838	341	67,3037	0,007724
207	46,3214	-0,02674	252	56,4677	-0,01008	297	58,474	-0,00678	342	67,5767	0,008173
208	46,5516	-0,02637	253	56,5386	-0,00996	298	58,6572	-0,00648	343	67,9257	0,008746
209	46,8967	-0,0258	254	56,7243	-0,00965	299	58,7303	-0,00636	344	68,4344	0,009582
210	46,7874	-0,02598	255	56,4182	-0,01016	300	59,0887	-0,00577	345	68,5606	0,009789
211	47,2067	-0,02529	256	55,5187	-0,01163	301	60,2584	-0,00385	346	69,5915	0,011483
212	47,404	-0,02497	257	54,3699	-0,01352	302	60,4672	-0,00351	347	69,7724	0,01178
213	47,5847	-0,02467	258	53,9556	-0,0142	303	60,8089	-0,00294	348	70,0661	0,012262
214	47,9222	-0,02411	259	54,046	-0,01405	304	61,1543	-0,00238	349	70,2955	0,012639
215	48,7142	-0,02281	260	54,2616	-0,0137	305	61,3495	-0,00206	350	70,5561	0,013067
216	49,1875	-0,02204	261	54,9299	-0,0126	306	61,6377	-0,00158	351	70,6375	0,013201
217	49,0406	-0,02228	262	55,5091	-0,01165	307	61,8173	-0,00129	352	70,9635	0,013736
218	49,7935	-0,02104	263	56,1704	-0,01056	308	61,9951	-0,001	353	70,7959	0,013461
219	50,0812	-0,02057	264	56,2813	-0,01038	309	62,0957	-0,00083	354	70,8953	0,013624
220	50,6054	-0,01971	265	56,358	-0,01026	310	62,4879	-0,00019	355	70,9274	0,013677
221	50,9614	-0,01912	266	55,9471	-0,01093	311	62,7358	0,000221	356	71,3099	0,014305
222	51,4809	-0,01827	267	56,2068	-0,0105	312	62,9994	0,000654	357	71,1628	0,014064
223	51,69	-0,01792	268	56,5003	-0,01002	313	62,6793	0,000128	358	71,6961	0,01494
224	51,8988	-0,01758	269	56,9561	-0,00927	314	62,9845	0,000629	359	71,7755	0,01507
225	52,0322	-0,01736	270	56,7102	-0,00968	315	63,2624	0,001086	360	72,0536	0,015527

(lanjutan)

n	$x_{n,1}$	$\tilde{x}_{n,1}$
361	72,2382	0,01583
362	72,0871	0,015582
363	72,19	0,015751
364	72,239	0,015832
365	71,5539	0,014706
366	71,8149	0,015135
367	70,8916	0,013618
368	71,8033	0,015116
369	71,6297	0,014831
370	71,3626	0,014392
371	71,6136	0,014804
372	72,6623	0,016527
373	72,0239	0,015478
374	72,587	0,016403
375	73,0297	0,01713
376	72,8047	0,016761
377	72,9039	0,016924
378	73,2009	0,017412
379	73,0283	0,017128
380	73,0467	0,017158
381	73,3739	0,017696
382	72,6882	0,016569
383	71,85	0,015193
384	71,4273	0,014498
385	71,1626	0,014063
386	70,5887	0,013121
387	70,3999	0,01281
388	70,4365	0,012871
389	71,2224	0,014162
390	72,0985	0,015601
391	71,6956	0,014939
392	71,8723	0,015229
393	72,6715	0,016542
394	72,3308	0,015982
395	72,3786	0,016061
396	71,9462	0,015351
397	71,2767	0,014251
398	71,9269	0,015319
399	72,4535	0,016184
400	73,0101	0,017098
401	73,4321	0,017791
402	73,2321	0,017463
403	73,9146	0,018584
404	73,8836	0,018533
405	73,7907	0,018381
406	74,4212	0,019416
407	74,6418	0,019779
408	74,7981	0,020035
409	75,192	0,020682
410	75,2885	0,020841
411	75,3935	0,021014
412	75,5997	0,021352
413	75,2962	0,020854
414	75,317	0,020888
415	75,7928	0,021669
416	75,7295	0,021565
417	76,1469	0,022251
418	76,6233	0,023034
419	76,7839	0,023298
420	77,1081	0,02383
421	77,6279	0,024684
422	77,434	0,024365
423	78,2116	0,025643
424	78,5158	0,026143
425	78,8634	0,026714
426	79,4195	0,027627
427	79,4045	0,027602
428	79,7719	0,028206
429	79,7979	0,028249
430	80,5725	0,029521
431	80,8366	0,029955
432	81,5051	0,031053
433	81,744	0,031446
434	81,8131	0,031559
435	81,9133	0,031724
436	81,717	0,031401
437	81,9227	0,031739
438	82,3371	0,03242
439	82,0915	0,032016
440	83,3665	0,034111
441	83,6937	0,034648
442	83,3005	0,034002
443	83,514	0,034353
444	83,8597	0,034921
445	82,9743	0,033467
446	84,4634	0,035913
447	84,1717	0,035434
448	84,9178	0,036659
449	85,3681	0,037399
450	86,127	0,038645
451	85,9203	0,038306
452	86,319	0,038961
453	86,9301	0,039965
454	86,7685	0,039699
455	87,7817	0,041364
456	88,4112	0,042398
457	88,4183	0,042409
458	89,2759	0,043818
459	90,0717	0,045125
460	89,6521	0,044436
461	90,2534	0,045424
462	90,5553	0,04592
463	90,7898	0,046305
464	92,1166	0,048485
465	92,8922	0,049759
466	94,0147	0,051603
467	94,7524	0,052814
468	94,9724	0,053176
469	95,4918	0,054029
470	95,5238	0,054082
471	95,6369	0,054267
472	96,1089	0,055043
473	96,7384	0,056077
474	96,356	0,055449
475	95,9837	0,054837
476	98,2471	0,058555

Lampiran 26 Taksiran Parameter-Parameter saat $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}$ dan $\boldsymbol{w} = \mathbf{0,5}$

Berikut ini adalah taksiran dari matriks bobot $\boldsymbol{A}$, yaitu $\widehat{\boldsymbol{A}}$ berukuran 107×1.

kolom / baris	1
1	-0,17339
2	-0,11058
3	-0,11929
4	-0,09629
5	-0,1286
6	-0,09869
7	-0,14848
8	-0,06753
9	-0,13534
10	-0,12302
11	-0,1273
12	-0,1194
13	0,035515
14	0,053492
15	-0,12287
16	-0,12461
17	-0,11317
18	-0,11585
19	-0,06431
20	-0,12248
21	-3,1E+10
22	2,21E+09
23	-0,02252
24	-0,10457
25	-7,5E+09
26	5,04E+09
27	2,82E+09
28	3,49E+10
29	-0,12887
30	-0,13696
31	-0,12974
32	-0,1266
33	-5,7E+09
34	-0,08195
35	0,049899
36	-0,12685
37	-0,12513
38	-0,05135
39	-0,07738
40	-0,12619
41	-0,12629
42	-0,1058
43	-0,10634
44	-0,09528
45	-0,04049

kolom / baris	1
46	-0,08709
47	-0,0186
48	0,008745
49	0,090394
50	0,049693
51	-0,02482
52	-0,01505
53	-0,04253
54	-4,2E+10
55	3,49E+10
56	2,02E+10
57	-0,06285
58	-1,8E+10
59	-2,7E+10
60	3,72E+10
61	-2,6E+09
62	-3E+09
63	5,86E+09
64	5,45E+09
65	-9,1E+09
66	-0,11345
67	-0,0804
68	-0,10427
69	-0,09208
70	-0,13072
71	-0,12881
72	-0,11055
73	-0,08925
74	-0,16131
75	-0,14523
76	-0,11822
77	-0,08969
78	-0,12573
79	-0,11934
80	-0,1303
81	-0,12801
82	-0,12945
83	-0,13377
84	-0,11841
85	0,02313
86	-0,13857
87	0,073055
88	-0,09071
89	-0,04353
90	0,044258

kolom / baris	1
91	0,076401
92	0,141998
93	0,136114
94	0,136787
95	-0,10509
96	-0,06866
97	-0,06854
98	0,012132
99	-0,01193
100	-0,06611
101	0,049203
102	0,043312
103	0,030962
104	0,024935
105	0,060593
106	-0,12036
107	-0,11042

(lanjutan)

Berikut ini adalah taksiran dari matriks $\boldsymbol{B}$, yaitu $\widehat{\boldsymbol{B}}$ berukuran 1×107. Dituliskan dalam bentuk $\boldsymbol{B}^T$ berukuran 107×1

kolom baris	1	kolom baris	1	kolom baris	1
1	-1,22135	46	-0,92975	91	0,817772
2	-1,22713	47	-0,199	92	1,51421
3	-1,26264	48	0,113818	93	1,448322
4	-1,03197	49	0,961484	94	1,460257
5	-1,37592	50	0,525953	95	-1,1224
6	-1,05545	51	-0,27613	96	-0,73996
7	-1,08079	52	-0,16677	97	-0,74192
8	-0,81015	53	-0,45289	98	0,128969
9	-1,4587	54	-0,47396	99	-0,12583
10	-1,12481	55	-0,45571	100	-0,69502
11	-1,35761	56	-0,48802	101	0,525417
12	-1,27484	57	-0,67751	102	0,462014
13	0,37947	58	-0,7757	103	0,330805
14	0,567619	59	-0,94483	104	0,266421
15	-1,29715	60	-0,90737	105	0,646824
16	-1,32768	61	0,342392	106	-1,28435
17	-1,30131	62	-0,26177	107	-1,17888
18	-1,23451	63	-0,55013		
19	-0,68794	64	-0,7714		
20	-1,30464	65	-0,84964		
21	-1,31589	66	-1,23317		
22	-1,1492	67	-0,8497		
23	-0,23391	68	-1,08834		
24	-1,06604	69	-0,94856		
25	-0,30892	70	-1,39744		
26	-0,42627	71	-1,37484		
27	-0,05448	72	-1,19626		
28	-1,30968	73	-0,94765		
29	-1,39709	74	-1,335		
30	-1,45362	75	-1,58423		
31	-1,40464	76	-1,37478		
32	-1,36754	77	-1,25161		
33	-1,39424	78	-1,2923		
34	-0,87438	79	-1,28193		
35	0,531412	80	-1,32871		
36	-1,35102	81	-1,40045		
37	-1,34976	82	-1,37685		
38	-0,54981	83	-1,41263		
39	-0,82544	84	-1,25654		
40	-1,34841	85	0,245655		
41	-1,34977	86	-1,47371		
42	-1,10146	87	0,776331		
43	-1,14771	88	-0,97652		
44	-1,03614	89	-0,4605		
45	-0,43262	90	0,472521		

Berikut ini adalah taksiran dari parameter regresi $\boldsymbol{\beta}$, yaitu $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{b}$ berukuran 1×1.

$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{b} = -0{,}10998$

Lampiran 27 Taksiran Parameter-Parameter saat $\boldsymbol{p = 2}$ dan $\boldsymbol{w = 0,5}$

Berikut ini adalah taksiran dari matriks bobot $\boldsymbol{A}$, yaitu $\widehat{\boldsymbol{A}}$ berukuran 107×2.

Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2
1	-0,17339	-0,07012	46	-0,08709	-0,14775	91	0,076401	0,049235
2	-0,11058	-0,04283	47	-0,0186	-0,03848	92	0,141998	-0,02564
3	-0,11929	-0,04143	48	0,008745	-0,03395	93	0,136114	0,037715
4	-0,09629	-0,0667	49	0,090394	-0,04638	94	0,136787	-0,02378
5	-0,1286	-0,02251	50	0,049693	-0,0996	95	-0,10509	-0,03974
6	-0,09869	-0,05712	51	-0,02482	0,014362	96	-0,06866	-0,08777
7	-0,14848	-0,06344	52	-0,01505	-0,02475	97	-0,06854	-0,08751
8	-0,06753	-0,05986	53	-0,04253	0,204825	98	0,012132	0,202563
9	-0,13534	-0,00951	54	-4,2E+10	-1,7E+10	99	-0,01193	-0,17002
10	-0,12302	-0,05884	55	3,49E+10	1,44E+10	100	-0,06611	-0,09083
11	-0,1273	-0,01754	56	2,02E+10	8,33E+09	101	0,049203	-0,15839
12	-0,1194	0,024041	57	-0,06285	0,212956	102	0,043312	-0,09534
13	0,035515	-0,0982	58	-1,8E+10	-7,4E+09	103	0,030962	-0,10209
14	0,053492	-0,09855	59	-2,7E+10	-1,1E+10	104	0,024935	-0,05406
15	-0,12287	-0,03566	60	3,72E+10	1,54E+10	105	0,060593	-0,04918
16	-0,12461	-0,02521	61	-2,6E+09	-1,1E+09	106	-0,12036	-0,05079
17	-0,11317	-0,03405	62	-3E+09	-1,2E+09	107	-0,11042	-0,03206
18	-0,11585	0,085681	63	5,86E+09	2,42E+09			
19	-0,06431	0,141849	64	5,45E+09	2,25E+09			
20	-0,12248	0,071563	65	-9,1E+09	-3,7E+09			
21	-3,1E+10	-1,3E+10	66	-0,11345	-0,078			
22	2,21E+09	9,14E+08	67	-0,0804	-0,07125			
23	-0,02252	0,225253	68	-0,10427	-0,05753			
24	-0,10457	-0,04157	69	-0,09208	-0,07506			
25	-7,5E+09	-3,1E+09	70	-0,13072	-0,08955			
26	5,04E+09	2,08E+09	71	-0,12881	-0,09556			
27	2,82E+09	1,16E+09	72	-0,11055	-0,05258			
28	3,49E+10	1,44E+10	73	-0,08925	-0,05442			
29	-0,12887	-0,02722	74	-0,16131	-0,06033			
30	-0,13696	-0,00783	75	-0,14523	-0,00179			
31	-0,12974	-0,02754	76	-0,11822	-0,02383			
32	-0,1266	-0,0299	77	-0,08969	-0,04666			
33	-5,7E+09	-2,3E+09	78	-0,12573	-0,05021			
34	-0,08195	0,04366	79	-0,11934	-0,05543			
35	0,049899	-0,0234	80	-0,1303	-0,05429			
36	-0,12685	-0,0327	81	-0,12801	-0,01913			
37	-0,12513	-0,02999	82	-0,12945	-0,01908			
38	-0,05135	0,150688	83	-0,13377	-0,00841			
39	-0,07738	-0,03466	84	-0,11841	0,018079			
40	-0,12619	0,132916	85	0,02313	0,195674			
41	-0,12629	0,094362	86	-0,13857	0,056318			
42	-0,1058	0,04883	87	0,073055	0,134393			
43	-0,10634	0,071718	88	-0,09071	0,081135			
44	-0,09528	0,034845	89	-0,04353	0,203113			
45	-0,04049	-0,1653	90	0,044258	0,041304			

(lanjutan)

Berikut ini adalah taksiran dari matriks $\boldsymbol{B}$, yaitu $\widehat{\boldsymbol{B}}$ berukuran 2×107. Dituliskan dalam bentuk $\boldsymbol{B^T}$ berukuran 107×2.

Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2
1	-1,22135	-0,48882	46	-0,92975	-1,57775	91	0,817772	0,526572
2	-1,22713	-0,47649	47	-0,199	-0,41115	92	1,51421	-0,27474
3	-1,26264	-0,43776	48	0,113818	-0,35413	93	1,448322	0,400582
4	-1,03197	-0,71382	49	0,961484	-0,49694	94	1,460257	-0,25416
5	-1,37592	-0,24142	50	0,525953	-1,0657	95	-1,1224	-0,42445
6	-1,05545	-0,61069	51	-0,27613	0,148801	96	-0,73996	-0,94018
7	-1,08079	-0,46917	52	-0,16677	-0,2668	97	-0,74192	-0,93871
8	-0,81015	-0,676	53	-0,45289	2,187989	98	0,128969	2,163055
9	-1,4587	-0,10706	54	-0,47396	2,192115	99	-0,12583	-1,81512
10	-1,12481	-0,55039	55	-0,45571	2,216135	100	-0,69502	-0,96552
11	-1,35761	-0,18656	56	-0,48802	2,248538	101	0,525417	-1,69161
12	-1,27484	0,256881	57	-0,67751	2,271683	102	0,462014	-1,01842
13	0,37947	-1,0487	58	-0,7757	2,256145	103	0,330805	-1,09021
14	0,567619	-1,05397	59	-0,94483	2,192725	104	0,266421	-0,57733
15	-1,29715	-0,37462	60	-0,90737	2,274763	105	0,646824	-0,52537
16	-1,32768	-0,26792	61	0,342392	-0,1411	106	-1,28435	-0,54202
17	-1,30131	-0,40188	62	-0,26177	1,151992	107	-1,17888	-0,34221
18	-1,23451	0,916182	63	-0,55013	-0,2075			
19	-0,68794	1,514444	64	-0,7714	-0,54172			
20	-1,30464	0,765678	65	-0,84964	0,975211			
21	-1,31589	-0,41644	66	-1,23317	-0,8419			
22	-1,1492	0,862838	67	-0,8497	-0,75721			
23	-0,23391	2,408329	68	-1,08834	-0,60398			
24	-1,06604	-0,42301	69	-0,94856	-0,78719			
25	-0,30892	1,188621	70	-1,39744	-0,95691			
26	-0,42627	1,345224	71	-1,37484	-1,02019			
27	-0,05448	0,736523	72	-1,19626	-0,56802			
28	-1,30968	-0,4311	73	-0,94765	-0,57892			
29	-1,39709	-0,29932	74	-1,335	-0,48434			
30	-1,45362	-0,07985	75	-1,58423	-0,03275			
31	-1,40464	-0,30199	76	-1,37478	-0,30084			
32	-1,36754	-0,32568	77	-1,25161	-0,61952			
33	-1,39424	-0,06335	78	-1,2923	-0,51536			
34	-0,87438	0,466628	79	-1,28193	-0,59508			
35	0,531412	-0,25056	80	-1,32871	-0,55386			
36	-1,35102	-0,34766	81	-1,40045	-0,21802			
37	-1,34976	-0,3258	82	-1,37685	-0,20148			
38	-0,54981	1,608703	83	-1,41263	-0,08326			
39	-0,82544	-0,36975	84	-1,25654	0,196371			
40	-1,34841	1,419208	85	0,245655	2,089172			
41	-1,34977	1,007322	86	-1,47371	0,604021			
42	-1,10146	0,533239	87	0,776331	1,433673			
43	-1,14771	0,76094	88	-0,97652	0,863279			
44	-1,03614	0,364475	89	-0,4605	2,170975			
45	-0,43262	-1,76548	90	0,472521	0,441052			

Berikut ini adalah taksiran dari parameter regresi $\boldsymbol{\beta}$, yaitu $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{b}$ berukuran 2×1

-0,10998
-0,04538

Lampiran 28 Taksiran Parameter-Parameter saat $\boldsymbol{p} = \mathbf{3}$ dan $\boldsymbol{w} = \mathbf{0,5}$

Berikut ini adalah taksiran dari matriks bobot $\mathbf{A}$, yaitu $\widehat{\mathbf{A}}$ berukuran 107×3

Kolom Baris	1	2	3	Kolom Baris	1	2	3	Kolom Baris	1	2	3
1	0,173385	0,070124	-0,05124	46	0,087087	0,147747	-0,11788	91	-0,0764	-0,04924	0,039851
2	0,110579	0,042832	-0,02691	47	0,018599	0,038484	-0,16449	92	-0,142	0,025637	0,010897
3	0,11929	0,041428	-0,04427	48	-0,00875	0,033948	-0,18707	93	-0,13611	-0,03771	0,015171
4	0,096288	0,066698	-0,0452	49	-0,09039	0,046381	-0,09466	94	-0,13679	0,023776	0,008566
5	0,128596	0,022507	-0,03819	50	-0,04969	0,099604	-0,17631	95	0,105093	0,039742	0,000473
6	0,098687	0,057124	-0,01312	51	0,024817	-0,01436	-0,1586	96	0,068656	0,087775	0,00154
7	0,148483	0,06344	-0,06354	52	0,015052	0,024749	-0,13489	97	0,068541	0,087513	0,001876
8	0,067535	0,059863	-0,02528	53	0,042526	-0,20483	-0,10684	98	-0,01213	-0,20256	0,000234
9	0,135337	0,009509	-0,06426	54	4,16E+10	1,72E+10	-1,5E+10	99	0,01193	0,170021	0,039582
10	0,123016	0,058836	-0,041	55	-3,5E+10	-1,4E+10	1,24E+10	100	0,066109	0,090833	0,000364
11	0,127297	0,017542	-0,03297	56	-2E+10	-8,3E+09	7,17E+09	101	-0,0492	0,158394	0,031854
12	0,1194	-0,02404	-0,06678	57	0,062845	-0,21296	-0,04132	102	-0,04331	0,095339	-0,17459
13	-0,03552	0,098203	-0,10419	58	1,78E+10	7,36E+09	-6,3E+09	103	-0,03096	0,102088	-0,09475
14	-0,05349	0,098548	-0,21925	59	2,73E+10	1,13E+10	-9,7E+09	104	-0,02494	0,054063	-0,2384
15	0,122866	0,035658	0,010933	60	-3,7E+10	-1,5E+10	1,32E+10	105	-0,06059	0,049182	-0,21337
16	0,124612	0,025208	0,005983	61	2,62E+09	1,08E+09	-9,3E+08	106	0,120363	0,050795	-0,07205
17	0,113169	0,034048	0,015714	62	2,97E+09	1,22E+09	-1,1E+09	107	0,110425	0,032059	-0,0887
18	0,115852	-0,08568	-0,09907	63	-5,9E+09	-2,4E+09	2,08E+09				
19	0,064312	-0,14185	-0,15913	64	-5,5E+09	-2,2E+09	1,93E+09				
20	0,122482	-0,07156	-0,08808	65	9,07E+09	3,74E+09	-3,2E+09				
21	3,06E+10	1,26E+10	-1,1E+10	66	0,113452	0,078	0,017819				
22	-2,2E+09	-9,1E+08	7,86E+08	67	0,080397	0,071246	0,009907				
23	0,022515	-0,22525	0,027638	68	0,104267	0,057527	0,010242				
24	0,104567	0,041568	-0,05273	69	0,092085	0,075057	0,009935				
25	7,45E+09	3,08E+09	-2,6E+09	70	0,130724	0,089549	0,023637				
26	-5E+09	-2,1E+09	1,79E+09	71	0,128814	0,095559	0,029591				
27	-2,8E+09	-1,2E+09	1E+09	72	0,110551	0,052583	0,008653				
28	-3,5E+10	-1,4E+10	1,24E+10	73	0,089245	0,054419	-0,00067				
29	0,128868	0,027223	-0,0199	74	0,161306	0,06033	0,00741				
30	0,136961	0,007827	-0,0253	75	0,145235	0,001785	0,028694				
31	0,129742	0,027542	-0,01866	76	0,118219	0,023834	0,023639				
32	0,126602	0,029897	-0,0085	77	0,089686	0,046659	0,02904				
33	5,65E+09	2,33E+09	-2E+09	78	0,125732	0,050206	0,019457				
34	0,081953	-0,04366	-0,2019	79	0,119336	0,055433	0,02114				
35	-0,0499	0,023404	-0,23766	80	0,1303	0,054289	0,017729				
36	0,126852	0,032697	-0,0172	81	0,128011	0,019126	0,025924				
37	0,125134	0,02999	-0,01911	82	0,129447	0,019082	0,024351				
38	0,051347	-0,15069	0,180215	83	0,133768	0,008412	0,021813				
39	0,077382	0,034659	0,152901	84	0,118406	-0,01808	0,00654				
40	0,126193	-0,13292	0,052469	85	-0,02313	-0,19567	-0,05476				
41	0,126288	-0,09436	0,117874	86	0,138575	-0,05632	-0,03596				
42	0,105803	-0,04883	0,14994	87	-0,07306	-0,13439	-0,08351				
43	0,106335	-0,07172	0,156173	88	0,090709	-0,08113	0,040377				
44	0,095283	-0,03484	0,143534	89	0,043526	-0,20311	0,046106				
45	0,040489	0,165305	-0,12349	90	-0,04426	-0,0413	-0,23616				

(lanjutan)

Berikut ini adalah taksiran dari matriks $\boldsymbol{B}$, yaitu $\widehat{\mathbf{B}}$ berukuran 3×107. Dituliskan dalam bentuk $\boldsymbol{B^T}$.

Kolom Baris	1	2	3	Kolom Baris	1	2	3	Kolom Baris	1	2	3
1	1,221351	0,488816	-0,32351	46	0,929746	1,577754	-1,25878	91	-0,81777	-0,52657	0,426248
2	1,227135	0,47649	-0,30382	47	0,199002	0,411153	-1,75678	92	-1,51421	0,274738	0,115562
3	1,262643	0,437756	-0,46873	48	-0,11382	0,354128	-1,99056	93	-1,44832	-0,40058	0,160133
4	1,03197	0,713819	-0,48399	49	-0,96148	0,496942	-1,01227	94	-1,46026	0,254156	0,091282
5	1,375915	0,241419	-0,40873	50	-0,52595	1,0657	-1,88459	95	1,122405	0,424446	0,005037
6	1,055451	0,610689	-0,14067	51	0,276128	-0,1488	-1,6977	96	0,739955	0,940183	0,014062
7	1,080793	0,469165	-0,49943	52	0,166765	0,266797	-1,44275	97	0,74192	0,938708	0,016512
8	0,810154	0,675998	-0,30154	53	0,452894	-2,18799	-1,1406	98	-0,12897	-2,16306	0,00229
9	1,458696	0,107061	-0,69103	54	0,473956	-2,19211	-1,02493	99	0,125831	1,815118	0,423279
10	1,124809	0,550386	-0,37082	55	0,455708	-2,21613	-1,00751	100	0,695019	0,965522	0,007796
11	1,357608	0,186561	-0,35139	56	0,48802	-2,24854	-0,89866	101	-0,52542	1,691612	0,340166
12	1,274839	-0,25688	-0,71309	57	0,677511	-2,27168	-0,44355	102	-0,46201	1,018415	-1,86475
13	-0,37947	1,048702	-1,11262	58	0,775701	-2,25614	-0,31505	103	-0,33081	1,090205	-1,0118
14	-0,56762	1,053966	-2,3428	59	0,94483	-2,19273	-0,22328	104	-0,26642	0,577327	-2,546
15	1,297145	0,374616	0,122094	60	0,907372	-2,27476	-0,04267	105	-0,64682	0,52537	-2,27879
16	1,327679	0,267919	0,065006	61	-0,34239	0,141098	0,44723	106	1,284353	0,542024	-0,76911
17	1,301313	0,401877	0,134928	62	0,261773	-1,15199	0,50099	107	1,178883	0,342206	-0,94711
18	1,234506	-0,91618	-1,05708	63	0,550128	0,207495	1,625956				
19	0,687936	-1,51444	-1,69983	64	0,771402	0,541718	0,491546				
20	1,304639	-0,76568	-0,93944	65	0,849636	-0,97521	0,992857				
21	1,315894	0,416438	-0,23624	66	1,233172	0,841901	0,18266				
22	1,149196	-0,86284	-2,13711	67	0,849699	0,757209	0,108962				
23	0,233911	-2,40833	0,29749	68	1,088345	0,603977	0,118319				
24	1,066042	0,423014	-0,54517	69	0,948562	0,787191	0,118481				
25	0,308921	-1,18862	-2,07678	70	1,397439	0,956908	0,251951				
26	0,426267	-1,34522	-2,35931	71	1,374843	1,020194	0,316322				
27	0,054481	-0,73652	-1,27096	72	1,196262	0,568016	0,086875				
28	1,30968	0,431098	-0,13467	73	0,947649	0,578918	-0,00525				
29	1,397088	0,299324	-0,21996	74	1,334996	0,484336	0,216714				
30	1,453623	0,079846	-0,26699	75	1,58423	0,032752	0,294675				
31	1,404642	0,301991	-0,20606	76	1,374776	0,300843	0,212631				
32	1,367543	0,325677	-0,09628	77	1,251612	0,61952	0,205883				
33	1,394243	0,063353	-0,3873	78	1,292302	0,515357	0,225698				
34	0,874383	-0,46663	-2,15597	79	1,28193	0,595083	0,223119				
35	-0,53141	0,250565	-2,53861	80	1,328707	0,553858	0,21164				
36	1,351019	0,347657	-0,18233	81	1,400448	0,218015	0,265028				
37	1,349755	0,325796	-0,20878	82	1,376849	0,201482	0,262052				
38	0,549811	-1,6087	1,92412	83	1,412635	0,083257	0,238621				
39	0,825439	0,369745	1,633275	84	1,256539	-0,19637	0,072677				
40	1,348408	-1,41921	0,560094	85	-0,24565	-2,08917	-0,58526				
41	1,349769	-1,00732	1,258475	86	1,473712	-0,60402	-0,38187				
42	1,101457	-0,53324	1,611418	87	-0,77633	-1,43367	-0,89326				
43	1,147714	-0,76094	1,663585	88	0,976523	-0,86328	0,428449				
44	1,036144	-0,36447	1,526305	89	0,460496	-2,17098	0,493941				
45	0,432619	1,765484	-1,31892	90	-0,47252	-0,44105	-2,52216				

Berikut ini adalah taksiran dari parameter regresi $\boldsymbol{\beta}$, yaitu $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{b}$ berukuran 3×1

0,109985
0,045381
-0,03903

Lampiran 29 Matriks Komponen Utama $(\boldsymbol{F})$ saat $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}$ dan $\boldsymbol{w} = \mathbf{0,5}$

Kolom Baris	1	Kolom Baris	1	Kolom Baris	1	Kolom Baris	1	Kolom Baris	1	Kolom Baris	1
1	0,52188	46	0,466246	91	0,419129	136	0,307121	181	0,226854	226	0,097385
2	0,528056	47	0,470237	92	0,418515	137	0,305348	182	0,218835	227	0,094263
3	0,524564	48	0,477229	93	0,411858	138	0,305588	183	0,216548	228	0,0975
4	0,52362	49	0,45618	94	0,403444	139	0,301566	184	0,217214	229	0,097156
5	0,522157	50	0,461438	95	0,40559	140	0,297166	185	0,201634	230	0,089517
6	0,5165	51	0,460673	96	0,401838	141	0,296685	186	0,19717	231	0,078574
7	0,515754	52	0,472658	97	0,40013	142	0,300099	187	0,186801	232	0,083147
8	0,505397	53	0,468892	98	0,402767	143	0,292133	188	0,183928	233	0,082894
9	0,497898	54	0,466311	99	0,392114	144	0,284717	189	0,174857	234	0,076649
10	0,497375	55	0,462886	100	0,391231	145	0,287663	190	0,161096	235	0,075948
11	0,498871	56	0,463689	101	0,396252	146	0,298096	191	0,157574	236	0,069992
12	0,50569	57	0,46205	102	0,391854	147	0,291336	192	0,147004	237	0,066338
13	0,508057	58	0,465572	103	0,39812	148	0,294741	193	0,138167	238	0,059963
14	0,506156	59	0,460142	104	0,393622	149	0,289955	194	0,144527	239	0,058043
15	0,483577	60	0,454266	105	0,401859	150	0,287293	195	0,136411	240	0,048805
16	0,489275	61	0,458027	106	0,398238	151	0,289754	196	0,13279	241	0,044088
17	0,485619	62	0,464192	107	0,390406	152	0,282988	197	0,134221	242	0,038232
18	0,487043	63	0,462216	108	0,383028	153	0,273103	198	0,13071	243	0,031882
19	0,482135	64	0,457484	109	0,38405	154	0,269914	199	0,13387	244	0,046339
20	0,485564	65	0,457488	110	0,378942	155	0,270336	200	0,136311	245	0,035719
21	0,485601	66	0,455847	111	0,374294	156	0,278491	201	0,135403	246	0,032896
22	0,482213	67	0,460243	112	0,383162	157	0,281632	202	0,141161	247	0,032844
23	0,484953	68	0,460442	113	0,37412	158	0,273682	203	0,137753	248	0,026156
24	0,475523	69	0,458557	114	0,368364	159	0,269029	204	0,133163	249	0,020087
25	0,471807	70	0,464317	115	0,368538	160	0,265234	205	0,13625	250	0,009191
26	0,471517	71	0,458857	116	0,371385	161	0,268377	206	0,146615	251	0,010238
27	0,477452	72	0,458763	117	0,366379	162	0,26211	207	0,145125	252	-0,00228
28	0,480544	73	0,449685	118	0,363234	163	0,264226	208	0,148153	253	-0,00924
29	0,478617	74	0,449048	119	0,361301	164	0,265215	209	0,142581	254	-0,01786
30	0,475456	75	0,454425	120	0,360694	165	0,26738	210	0,134982	255	-0,03352
31	0,470168	76	0,455444	121	0,361699	166	0,267249	211	0,127783	256	-0,03929
32	0,475216	77	0,452866	122	0,362834	167	0,267011	212	0,127688	257	-0,03962
33	0,486853	78	0,448256	123	0,356638	168	0,267503	213	0,125858	258	-0,03265
34	0,47969	79	0,446419	124	0,345888	169	0,269019	214	0,123378	259	-0,03928
35	0,472875	80	0,443887	125	0,350819	170	0,258783	215	0,114204	260	-0,03344
36	0,482866	81	0,447042	126	0,346026	171	0,253005	216	0,119116	261	-0,03321
37	0,485153	82	0,437699	127	0,332904	172	0,248172	217	0,115789	262	-0,04242
38	0,480515	83	0,441695	128	0,338456	173	0,248477	218	0,112594	263	-0,04566
39	0,481881	84	0,445449	129	0,329438	174	0,2466	219	0,122596	264	-0,06063
40	0,47636	85	0,439949	130	0,330637	175	0,229978	220	0,119469	265	-0,06618
41	0,471415	86	0,436293	131	0,329499	176	0,23636	221	0,119883	266	-0,07345
42	0,470043	87	0,436238	132	0,32509	177	0,234283	222	0,109368	267	-0,07271
43	0,467853	88	0,43036	133	0,315682	178	0,232408	223	0,11102	268	-0,07208
44	0,465101	89	0,420926	134	0,311161	179	0,230619	224	0,105225	269	-0,0804
45	0,459159	90	0,42005	135	0,311634	180	0,226337	225	0,097798	270	-0,08079

(lanjutan)

Kolom Baris	1	Kolom Baris	1	Kolom Baris	1	Kolom Baris	1	Kolom Baris	1
271	-0,08548	316	-0,11243	361	-0,14637	406	-0,22832	451	-0,29902
272	-0,08906	317	-0,11279	362	-0,14662	407	-0,22898	452	-0,29409
273	-0,09771	318	-0,107	363	-0,1525	408	-0,22514	453	-0,29901
274	-0,1028	319	-0,11245	364	-0,15624	409	-0,22163	454	-0,30047
275	-0,10771	320	-0,112	365	-0,15709	410	-0,22475	455	-0,2982
276	-0,10351	321	-0,11098	366	-0,15929	411	-0,2239	456	-0,29699
277	-0,10968	322	-0,11051	367	-0,15832	412	-0,23258	457	-0,30217
278	-0,1246	323	-0,11191	368	-0,1618	413	-0,23029	458	-0,30206
279	-0,12528	324	-0,11527	369	-0,15926	414	-0,23246	459	-0,30433
280	-0,12125	325	-0,10792	370	-0,16095	415	-0,23106	460	-0,30456
281	-0,12592	326	-0,10715	371	-0,16422	416	-0,22974	461	-0,30245
282	-0,12514	327	-0,10278	372	-0,17137	417	-0,23015	462	-0,30608
283	-0,1264	328	-0,10048	373	-0,1705	418	-0,23243	463	-0,30009
284	-0,11497	329	-0,10599	374	-0,16717	419	-0,23585	464	-0,30911
285	-0,11034	330	-0,10788	375	-0,17338	420	-0,23444	465	-0,31113
286	-0,11316	331	-0,11053	376	-0,17007	421	-0,24212	466	-0,31504
287	-0,11318	332	-0,10466	377	-0,17463	422	-0,23932	467	-0,31587
288	-0,11859	333	-0,11062	378	-0,17503	423	-0,24413	468	-0,31528
289	-0,11615	334	-0,11235	379	-0,18058	424	-0,2441	469	-0,31079
290	-0,09496	335	-0,11556	380	-0,18647	425	-0,2458	470	-0,31033
291	-0,09586	336	-0,11535	381	-0,19855	426	-0,24953	471	-0,31711
292	-0,09512	337	-0,10682	382	-0,20152	427	-0,25606	472	-0,31227
293	-0,09745	338	-0,11594	383	-0,19554	428	-0,25687	473	-0,31801
294	-0,10079	339	-0,11297	384	-0,19921	429	-0,2544	474	-0,32045
295	-0,09315	340	-0,11436	385	-0,2044	430	-0,2595	475	-0,31856
296	-0,09583	341	-0,12051	386	-0,19528	431	-0,25459	476	-0,32581
297	-0,10303	342	-0,12235	387	-0,18899	432	-0,25862		
298	-0,09702	343	-0,12664	388	-0,18927	433	-0,26293		
299	-0,09221	344	-0,12431	389	-0,19219	434	-0,26408		
300	-0,08674	345	-0,12446	390	-0,19262	435	-0,26807		
301	-0,09849	346	-0,13316	391	-0,19503	436	-0,2763		
302	-0,08999	347	-0,1309	392	-0,18931	437	-0,27823		
303	-0,10098	348	-0,13239	393	-0,18853	438	-0,27514		
304	-0,10328	349	-0,13454	394	-0,19443	439	-0,27477		
305	-0,10658	350	-0,13342	395	-0,20221	440	-0,28276		
306	-0,10117	351	-0,13345	396	-0,20164	441	-0,28561		
307	-0,10871	352	-0,12932	397	-0,20062	442	-0,28078		
308	-0,11012	353	-0,13706	398	-0,20137	443	-0,28757		
309	-0,10819	354	-0,13345	399	-0,20123	444	-0,28819		
310	-0,10727	355	-0,13494	400	-0,21142	445	-0,28421		
311	-0,10437	356	-0,14502	401	-0,21079	446	-0,29076		
312	-0,1051	357	-0,14047	402	-0,22151	447	-0,2933		
313	-0,10505	358	-0,14095	403	-0,21724	448	-0,29708		
314	-0,11071	359	-0,13909	404	-0,2158	449	-0,30202		
315	-0,11288	360	-0,14246	405	-0,22458	450	-0,29639		

Lampiran 30 Matriks Komponen Utama ($\boldsymbol{F}$) saat $\boldsymbol{p} = \mathbf{2}$ dan $\boldsymbol{w} = \mathbf{0,5}$

Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2
1	0,521879	-0,07992	46	0,466245	-0,04931	91	0,419128	-0,03248	136	0,30712	0,115175
2	0,528056	-0,08528	47	0,470236	-0,06543	92	0,418515	-0,02059	137	0,305348	0,130539
3	0,524563	-0,09016	48	0,477229	-0,06797	93	0,411858	-0,00979	138	0,305588	0,115495
4	0,523619	-0,09042	49	0,456179	-0,05454	94	0,403443	-0,00953	139	0,301565	0,105047
5	0,522155	-0,08851	50	0,461438	-0,06331	95	0,405589	-0,00183	140	0,297166	0,114498
6	0,516498	-0,07208	51	0,460672	-0,06608	96	0,401838	-0,00531	141	0,296684	0,122197
7	0,515753	-0,05512	52	0,472658	-0,07962	97	0,40013	-0,01329	142	0,300098	0,113982
8	0,505396	-0,0444	53	0,468892	-0,07975	98	0,402766	-0,00375	143	0,292131	0,1071
9	0,497897	-0,01392	54	0,466311	-0,07977	99	0,392113	-0,00679	144	0,284716	0,075476
10	0,497374	-0,00867	55	0,462885	-0,06704	100	0,391231	-0,0053	145	0,287662	0,050712
11	0,49887	-0,00439	56	0,463688	-0,0697	101	0,396252	-0,0127	146	0,298096	0,02615
12	0,505689	-0,04014	57	0,462049	-0,07496	102	0,391853	-0,00763	147	0,291335	0,019585
13	0,508056	-0,04925	58	0,465571	-0,07779	103	0,398119	-0,01315	148	0,294741	0,017574
14	0,506154	-0,03164	59	0,460141	-0,06826	104	0,393621	-0,01902	149	0,289955	0,034433
15	0,483577	-0,00271	60	0,454264	-0,05735	105	0,401859	-0,02445	150	0,287292	0,043624
16	0,489274	-0,00716	61	0,458027	-0,06289	106	0,398237	-0,01862	151	0,289753	0,044494
17	0,485617	0,003024	62	0,464191	-0,08836	107	0,390406	-0,01459	152	0,282987	0,048961
18	0,487042	-0,01086	63	0,462216	-0,07779	108	0,383027	-0,0105	153	0,273102	0,03816
19	0,482134	-0,01127	64	0,457483	-0,07385	109	0,384049	-0,01644	154	0,269913	0,018586
20	0,485563	-0,02162	65	0,457487	-0,08176	110	0,378941	-0,01815	155	0,270335	0,019608
21	0,4856	-0,01208	66	0,455847	-0,08522	111	0,374294	-0,00835	156	0,27849	0,003009
22	0,482212	-0,01327	67	0,460242	-0,09814	112	0,383161	-0,01461	157	0,281632	-0,01311
23	0,484952	-0,00388	68	0,460442	-0,09601	113	0,37412	-0,00812	158	0,273682	-0,02143
24	0,475522	0,014305	69	0,458556	-0,08912	114	0,368363	-0,00427	159	0,269029	-0,00771
25	0,471806	-0,00948	70	0,464316	-0,08455	115	0,368537	-0,0143	160	0,265233	-0,0001
26	0,471516	-0,00656	71	0,458856	-0,09233	116	0,371384	-0,00951	161	0,268377	-0,0067
27	0,477451	-0,02604	72	0,458762	-0,08949	117	0,366378	-0,01754	162	0,262109	0,001069
28	0,480543	-0,04242	73	0,449684	-0,08864	118	0,363233	-0,02764	163	0,264225	-0,00293
29	0,478616	-0,04816	74	0,449048	-0,08705	119	0,3613	-0,01938	164	0,265215	-0,00974
30	0,475455	-0,05407	75	0,454424	-0,10124	120	0,360693	-0,00887	165	0,267379	-0,01451
31	0,470168	-0,05751	76	0,455444	-0,0886	121	0,361698	-0,01073	166	0,267248	-0,0173
32	0,475215	-0,06298	77	0,452864	-0,09419	122	0,362834	-0,01009	167	0,267011	-0,02716
33	0,486852	-0,06355	78	0,448255	-0,08229	123	0,356638	-0,0021	168	0,267502	-0,01507
34	0,479689	-0,07335	79	0,446419	-0,08536	124	0,345887	0,004553	169	0,269019	-0,01779
35	0,472874	-0,07603	80	0,443886	-0,07504	125	0,350818	0,011068	170	0,258782	-0,0005
36	0,482865	-0,07878	81	0,447041	-0,08608	126	0,346025	0,034993	171	0,253004	0,018872
37	0,485151	-0,06155	82	0,437698	-0,08054	127	0,332903	0,056971	172	0,248171	0,03001
38	0,480514	-0,07763	83	0,441695	-0,08429	128	0,338455	0,051321	173	0,248477	0,040594
39	0,48188	-0,08154	84	0,445448	-0,0895	129	0,329437	0,061634	174	0,246599	0,055903
40	0,476359	-0,07253	85	0,439948	-0,0859	130	0,330636	0,069348	175	0,229978	0,092492
41	0,471414	-0,06188	86	0,436292	-0,07943	131	0,329498	0,074634	176	0,23636	0,109307
42	0,470042	-0,04639	87	0,436237	-0,07534	132	0,32509	0,088133	177	0,234283	0,098361
43	0,467852	-0,04639	88	0,430359	-0,07609	133	0,315682	0,112492	178	0,232407	0,078412
44	0,4651	-0,04369	89	0,420925	-0,04316	134	0,31116	0,109328	179	0,230619	0,082028
45	0,459158	-0,04173	90	0,420049	-0,04005	135	0,311633	0,097618	180	0,226336	0,108653

(lanjutan)

Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2	Kolom / Baris	1	2
181	0,226854	0,127707	226	0,097385	0,122666	271	-0,08548	0,464116
182	0,218835	0,133111	227	0,094263	0,123537	272	-0,08906	0,476813
183	0,216547	0,133816	228	0,0975	0,11172	273	-0,09771	0,505303
184	0,217214	0,168321	229	0,097156	0,149995	274	-0,1028	0,496072
185	0,201634	0,170834	230	0,089517	0,14469	275	-0,10771	0,463928
186	0,197169	0,174817	231	0,078573	0,143076	276	-0,10351	0,469172
187	0,1868	0,202311	232	0,083147	0,138776	277	-0,10968	0,525849
188	0,183928	0,222545	233	0,082894	0,145326	278	-0,1246	0,501936
189	0,174856	0,243608	234	0,076649	0,145798	279	-0,12528	0,496834
190	0,161095	0,246014	235	0,075948	0,148647	280	-0,12125	0,487321
191	0,157574	0,261047	236	0,069991	0,151303	281	-0,12592	0,47942
192	0,147003	0,271663	237	0,066338	0,156703	282	-0,12514	0,48361
193	0,138167	0,269184	238	0,059963	0,166274	283	-0,1264	0,470169
194	0,144526	0,248022	239	0,058042	0,181862	284	-0,11497	0,440287
195	0,13641	0,258681	240	0,048805	0,204308	285	-0,11034	0,414628
196	0,132789	0,25151	241	0,044089	0,225091	286	-0,11316	0,371826
197	0,134221	0,229414	242	0,038232	0,22586	287	-0,11318	0,35528
198	0,130709	0,213772	243	0,031881	0,221354	288	-0,11859	0,341469
199	0,13387	0,208143	244	0,046339	0,248114	289	-0,11615	0,307071
200	0,13631	0,209354	245	0,035719	0,231892	290	-0,09496	0,28454
201	0,135403	0,20733	246	0,032895	0,233999	291	-0,09586	0,267831
202	0,14116	0,184094	247	0,032844	0,24724	292	-0,09512	0,257573
203	0,137753	0,172961	248	0,026155	0,255788	293	-0,09745	0,234966
204	0,133163	0,16678	249	0,020086	0,267912	294	-0,10079	0,244058
205	0,136249	0,133006	250	0,009191	0,317385	295	-0,09315	0,227026
206	0,146615	0,11125	251	0,010239	0,325706	296	-0,09583	0,242978
207	0,145124	0,12823	252	-0,00228	0,325583	297	-0,10303	0,235016
208	0,148153	0,129469	253	-0,00924	0,339553	298	-0,09702	0,219679
209	0,142581	0,128056	254	-0,01786	0,370836	299	-0,09221	0,215131
210	0,134981	0,138807	255	-0,03352	0,436494	300	-0,08674	0,210364
211	0,127783	0,142084	256	-0,0393	0,425615	301	-0,09848	0,211505
212	0,127688	0,132843	257	-0,03962	0,388042	302	-0,08999	0,200432
213	0,125858	0,123713	258	-0,03265	0,347986	303	-0,10098	0,232548
214	0,123378	0,118437	259	-0,03928	0,340065	304	-0,10328	0,235151
215	0,114204	0,123426	260	-0,03344	0,338557	305	-0,10658	0,258707
216	0,119115	0,100744	261	-0,03321	0,336465	306	-0,10117	0,26482
217	0,115789	0,131243	262	-0,04242	0,342224	307	-0,10871	0,278421
218	0,112594	0,113992	263	-0,04566	0,359348	308	-0,11012	0,274147
219	0,122595	0,102496	264	-0,06063	0,394155	309	-0,10819	0,269079
220	0,119468	0,105884	265	-0,06618	0,393019	310	-0,10727	0,25357
221	0,119882	0,096379	266	-0,07345	0,427849	311	-0,10437	0,225995
222	0,109368	0,104437	267	-0,07271	0,406325	312	-0,1051	0,218182
223	0,11102	0,098952	268	-0,07208	0,404299	313	-0,10505	0,21074
224	0,105224	0,11393	269	-0,0804	0,429768	314	-0,11071	0,214249
225	0,097797	0,123826	270	-0,08079	0,438768	315	-0,11288	0,220029

(lanjutan)

Kolom Baris	1	2	Kolom Baris	1	2	Kolom Baris	1	2	Kolom Baris	1	2
316	-0,11243	0,206672	361	-0,14637	0,039783	406	-0,22832	-0,08894	451	-0,29902	-0,12548
317	-0,11279	0,194698	362	-0,14662	0,045323	407	-0,22898	-0,0921	452	-0,29409	-0,14229
318	-0,107	0,169206	363	-0,15249	0,058295	408	-0,22514	-0,10533	453	-0,29901	-0,1369
319	-0,11245	0,172584	364	-0,15624	0,05944	409	-0,22163	-0,1185	454	-0,30047	-0,14038
320	-0,112	0,163418	365	-0,15709	0,064918	410	-0,22475	-0,1221	455	-0,2982	-0,15722
321	-0,11098	0,15804	366	-0,15929	0,054354	411	-0,2239	-0,11071	456	-0,29699	-0,15663
322	-0,11051	0,151679	367	-0,15832	0,036869	412	-0,23258	-0,12129	457	-0,30217	-0,13999
323	-0,11191	0,138936	368	-0,1618	0,045193	413	-0,23029	-0,11369	458	-0,30206	-0,16255
324	-0,11527	0,118515	369	-0,15926	0,043926	414	-0,23245	-0,11175	459	-0,30433	-0,16293
325	-0,10792	0,109192	370	-0,16095	0,032924	415	-0,23106	-0,11928	460	-0,30456	-0,15325
326	-0,10715	0,099978	371	-0,16422	0,030251	416	-0,22974	-0,13055	461	-0,30245	-0,16953
327	-0,10278	0,06741	372	-0,17137	0,033081	417	-0,23015	-0,14519	462	-0,30608	-0,17309
328	-0,10048	0,045436	373	-0,1705	0,031359	418	-0,23243	-0,15034	463	-0,30009	-0,19534
329	-0,10599	0,045531	374	-0,16717	0,038308	419	-0,23585	-0,1508	464	-0,30911	-0,18885
330	-0,10788	0,047123	375	-0,17338	0,035567	420	-0,23444	-0,16074	465	-0,31113	-0,18928
331	-0,11053	0,038135	376	-0,17007	0,038363	421	-0,24212	-0,15714	466	-0,31504	-0,19802
332	-0,10466	0,013815	377	-0,17463	0,041261	422	-0,23932	-0,14763	467	-0,31586	-0,19796
333	-0,11062	0,02373	378	-0,17502	0,03106	423	-0,24413	-0,15834	468	-0,31528	-0,20407
334	-0,11235	0,025794	379	-0,18058	0,037337	424	-0,2441	-0,14293	469	-0,31079	-0,21776
335	-0,11556	0,02543	380	-0,18647	0,062831	425	-0,2458	-0,13958	470	-0,31033	-0,21956
336	-0,11535	0,012637	381	-0,19855	0,08425	426	-0,24953	-0,13867	471	-0,31711	-0,21177
337	-0,10682	-0,00782	382	-0,20152	0,109181	427	-0,25606	-0,1302	472	-0,31227	-0,21876
338	-0,11594	-0,00727	383	-0,19554	0,093202	428	-0,25687	-0,12883	473	-0,31801	-0,21206
339	-0,11297	-0,0092	384	-0,19921	0,076577	429	-0,2544	-0,12809	474	-0,32045	-0,20705
340	-0,11436	0,011746	385	-0,2044	0,092418	430	-0,2595	-0,1258	475	-0,31856	-0,21622
341	-0,12051	0,018683	386	-0,19528	0,052013	431	-0,25459	-0,12182	476	-0,32581	-0,21886
342	-0,12235	0,016819	387	-0,18899	0,039978	432	-0,25862	-0,11164			
343	-0,12664	0,013068	388	-0,18927	0,030698	433	-0,26293	-0,11128			
344	-0,12431	0,011023	389	-0,19219	0,029637	434	-0,26408	-0,11014			
345	-0,12446	0,027378	390	-0,19262	0,009269	435	-0,26807	-0,1058			
346	-0,13316	0,034279	391	-0,19503	0,001915	436	-0,2763	-0,09935			
347	-0,1309	0,027723	392	-0,18931	-0,01738	437	-0,27823	-0,09685			
348	-0,13239	0,027589	393	-0,18853	-0,02916	438	-0,27514	-0,11062			
349	-0,13454	0,028025	394	-0,19443	-0,02347	439	-0,27477	-0,12473			
350	-0,13342	0,014969	395	-0,20221	-0,02337	440	-0,28276	-0,11756			
351	-0,13345	0,014038	396	-0,20164	-0,03227	441	-0,2856	-0,12071			
352	-0,12932	0,0141	397	-0,20062	-0,04724	442	-0,28078	-0,12344			
353	-0,13706	0,031553	398	-0,20137	-0,06155	443	-0,28757	-0,12537			
354	-0,13345	0,017424	399	-0,20123	-0,06961	444	-0,28819	-0,12807			
355	-0,13494	0,025672	400	-0,21142	-0,07141	445	-0,28421	-0,1097			
356	-0,14502	0,041696	401	-0,21079	-0,07451	446	-0,29076	-0,13581			
357	-0,14047	0,034191	402	-0,22151	-0,06182	447	-0,2933	-0,12861			
358	-0,14095	0,020728	403	-0,21724	-0,08078	448	-0,29708	-0,12862			
359	-0,13909	0,024427	404	-0,2158	-0,08951	449	-0,30202	-0,12255			
360	-0,14246	0,034986	405	-0,22458	-0,0802	450	-0,29639	-0,13962			

Lampiran 31Matriks Komponen Utama $(\boldsymbol{F})$ saat $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{3}$ dan $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0,5}$

Kolom / Baris	1	2	3	Kolom / Baris	1	2	3	Kolom / Baris	1	2	3
1	-0,52188	0,079915	0,119743	46	-0,46624	0,049314	0,146921	91	-0,41913	0,032475	-0,09725
2	-0,52806	0,085277	0,081845	47	-0,47024	0,065433	0,115954	92	-0,41851	0,020587	-0,09721
3	-0,52456	0,090159	0,061149	48	-0,47723	0,06797	0,118748	93	-0,41186	0,009792	-0,07939
4	-0,52362	0,090415	0,045194	49	-0,45618	0,054537	0,155296	94	-0,40344	0,009533	-0,05964
5	-0,52216	0,088514	0,044524	50	-0,46144	0,063309	0,131023	95	-0,40559	0,00183	-0,05168
6	-0,5165	0,072076	0,041999	51	-0,46067	0,066081	0,123071	96	-0,40184	0,005312	-0,03215
7	-0,51575	0,055119	0,06481	52	-0,47266	0,079624	0,08562	97	-0,40013	0,013292	-0,02752
8	-0,5054	0,044403	0,122558	53	-0,46889	0,079745	0,069279	98	-0,40276	0,003753	-0,00284
9	-0,4979	0,01392	0,137643	54	-0,46631	0,079769	0,075804	99	-0,39211	0,006794	0,027819
10	-0,49737	0,008672	0,160294	55	-0,46288	0,067035	0,090531	100	-0,39123	0,005297	0,043071
11	-0,49887	0,004386	0,151015	56	-0,46369	0,069703	0,088126	101	-0,39625	0,012697	0,026907
12	-0,50569	0,04014	0,073201	57	-0,46205	0,07496	0,071012	102	-0,39185	0,007634	0,026881
13	-0,50806	0,049252	0,078669	58	-0,46557	0,077786	0,049307	103	-0,39812	0,013152	-0,00072
14	-0,50615	0,031644	0,103791	59	-0,46014	0,068263	0,077632	104	-0,39362	0,019023	-0,02857
15	-0,48358	0,002711	0,189682	60	-0,45426	0,057348	0,09429	105	-0,40186	0,024448	-0,0477
16	-0,48927	0,007162	0,180032	61	-0,45803	0,062889	0,08297	106	-0,39824	0,018617	-0,05782
17	-0,48562	-0,00302	0,190001	62	-0,46419	0,088363	0,039584	107	-0,3904	0,014591	-0,0734
18	-0,48704	0,010861	0,208823	63	-0,46222	0,077791	0,05668	108	-0,38303	0,010502	-0,07189
19	-0,48213	0,011269	0,227941	64	-0,45748	0,073854	0,056035	109	-0,38405	0,01644	-0,08106
20	-0,48556	0,021616	0,214643	65	-0,45749	0,081763	0,055263	110	-0,37894	0,018149	-0,09458
21	-0,4856	0,012082	0,24379	66	-0,45585	0,085217	0,045634	111	-0,37429	0,008353	-0,09333
22	-0,48221	0,013267	0,250772	67	-0,46024	0,098135	0,023948	112	-0,38316	0,014608	-0,11192
23	-0,48495	0,003884	0,265141	68	-0,46044	0,096005	0,013395	113	-0,37412	0,00812	-0,10479
24	-0,47552	-0,01431	0,302883	69	-0,45856	0,089118	0,0069	114	-0,36836	0,004275	-0,09457
25	-0,47181	0,009484	0,286864	70	-0,46432	0,084548	0,015825	115	-0,36854	0,014303	-0,11007
26	-0,47152	0,006564	0,287134	71	-0,45886	0,092328	-0,00232	116	-0,37138	0,009505	-0,1027
27	-0,47745	0,026035	0,262617	72	-0,45876	0,089488	-0,00944	117	-0,36638	0,017537	-0,10416
28	-0,48054	0,042418	0,251345	73	-0,44968	0,088636	-0,00698	118	-0,36323	0,027635	-0,12739
29	-0,47862	0,048157	0,231344	74	-0,44905	0,087049	-0,01211	119	-0,3613	0,019381	-0,14013
30	-0,47546	0,054066	0,21674	75	-0,45442	0,101243	-0,02834	120	-0,36069	0,008868	-0,14246
31	-0,47017	0,057506	0,218834	76	-0,45544	0,088601	-0,02865	121	-0,3617	0,010734	-0,16908
32	-0,47521	0,062975	0,185958	77	-0,45286	0,094192	-0,04447	122	-0,36283	0,010095	-0,17518
33	-0,48685	0,063553	0,172607	78	-0,44826	0,082289	-0,03487	123	-0,35664	0,002104	-0,16666
34	-0,47969	0,073352	0,153564	79	-0,44642	0,08536	-0,03912	124	-0,34589	-0,00455	-0,16349
35	-0,47287	0,076031	0,152607	80	-0,44389	0,075039	-0,03224	125	-0,35082	-0,01107	-0,17407
36	-0,48286	0,078782	0,127961	81	-0,44704	0,08608	-0,04475	126	-0,34603	-0,03499	-0,16156
37	-0,48515	0,061552	0,133269	82	-0,4377	0,08054	-0,03638	127	-0,3329	-0,05697	-0,14256
38	-0,48051	0,077626	0,129142	83	-0,44169	0,084292	-0,06129	128	-0,33845	-0,05132	-0,16415
39	-0,48188	0,081537	0,107842	84	-0,44545	0,089498	-0,09971	129	-0,32944	-0,06163	-0,16613
40	-0,47636	0,072535	0,122109	85	-0,43995	0,0859	-0,10267	130	-0,33064	-0,06935	-0,15276
41	-0,47141	0,061877	0,142806	86	-0,43629	0,079428	-0,11862	131	-0,3295	-0,07463	-0,1317
42	-0,47004	0,046385	0,160248	87	-0,43624	0,075335	-0,13966	132	-0,32509	-0,08813	-0,13716
43	-0,46785	0,046393	0,149125	88	-0,43036	0,076092	-0,12873	133	-0,31568	-0,11249	-0,07871
44	-0,4651	0,043687	0,154932	89	-0,42092	0,043158	-0,09562	134	-0,31116	-0,10933	-0,0675
45	-0,45916	0,041726	0,170685	90	-0,42005	0,040049	-0,09385	135	-0,31163	-0,09762	-0,04572

(lanjutan)

Kolom Baris	1	2	3	Kolom Baris	1	2	3	Kolom Baris	1	2	3
136	-0,30712	-0,11518	-0,02015	181	-0,22685	-0,12771	-0,23339	226	-0,09738	-0,12267	-0,10956
137	-0,30535	-0,13054	-0,02797	182	-0,21883	-0,13311	-0,23207	227	-0,09426	-0,12354	-0,11541
138	-0,30559	-0,1155	-0,03737	183	-0,21655	-0,13382	-0,23367	228	-0,0975	-0,11172	-0,14596
139	-0,30157	-0,10505	-0,02651	184	-0,21721	-0,16832	-0,21692	229	-0,09716	-0,14999	-0,1066
140	-0,29717	-0,1145	0,006137	185	-0,20163	-0,17083	-0,18311	230	-0,08952	-0,14469	-0,12687
141	-0,29668	-0,1222	0,018695	186	-0,19717	-0,17482	-0,16717	231	-0,07857	-0,14308	-0,14438
142	-0,3001	-0,11398	0,044905	187	-0,1868	-0,20231	-0,13823	232	-0,08315	-0,13878	-0,19527
143	-0,29213	-0,1071	0,069455	188	-0,18393	-0,22254	-0,12698	233	-0,08289	-0,14533	-0,19478
144	-0,28472	-0,07548	0,033756	189	-0,17486	-0,24361	-0,0585	234	-0,07665	-0,1458	-0,21662
145	-0,28766	-0,05071	0,026722	190	-0,1611	-0,24601	-0,00404	235	-0,07595	-0,14865	-0,22195
146	-0,2981	-0,02615	0,019331	191	-0,15757	-0,26105	0,052511	236	-0,06999	-0,1513	-0,21967
147	-0,29133	-0,01959	0,012768	192	-0,147	-0,27166	0,135374	237	-0,06634	-0,1567	-0,23072
148	-0,29474	-0,01757	-0,01889	193	-0,13817	-0,26918	0,19355	238	-0,05996	-0,16627	-0,24311
149	-0,28995	-0,03443	-0,03015	194	-0,14453	-0,24802	0,246227	239	-0,05804	-0,18186	-0,26801
150	-0,28729	-0,04362	-0,04031	195	-0,13641	-0,25868	0,269786	240	-0,04881	-0,20431	-0,26041
151	-0,28975	-0,04449	-0,05072	196	-0,13279	-0,25151	0,261921	241	-0,04409	-0,22509	-0,21223
152	-0,28299	-0,04896	-0,03732	197	-0,13422	-0,22941	0,246426	242	-0,03823	-0,22586	-0,20511
153	-0,2731	-0,03816	-0,00495	198	-0,13071	-0,21377	0,240777	243	-0,03188	-0,22135	-0,24933
154	-0,26991	-0,01859	-0,01675	199	-0,13387	-0,20814	0,19816	244	-0,04634	-0,24811	-0,22145
155	-0,27033	-0,01961	-0,02113	200	-0,13631	-0,20935	0,15246	245	-0,03572	-0,23189	-0,24352
156	-0,27849	-0,00301	-0,06294	201	-0,1354	-0,20733	0,124939	246	-0,03289	-0,234	-0,23335
157	-0,28163	0,013105	-0,09966	202	-0,14116	-0,18409	0,098411	247	-0,03284	-0,24724	-0,21647
158	-0,27368	0,021435	-0,09594	203	-0,13775	-0,17296	0,112345	248	-0,02615	-0,25579	-0,19403
159	-0,26903	0,007714	-0,10207	204	-0,13316	-0,16678	0,116408	249	-0,02009	-0,26791	-0,20935
160	-0,26523	0,000101	-0,09842	205	-0,13625	-0,13301	0,071583	250	-0,00919	-0,31738	-0,19021
161	-0,26838	0,0067	-0,11073	206	-0,14662	-0,11125	0,025405	251	-0,01024	-0,32571	-0,16076
162	-0,26211	-0,00107	-0,10683	207	-0,14512	-0,12823	0,041327	252	0,002275	-0,32558	-0,14705
163	-0,26422	0,00293	-0,11245	208	-0,14815	-0,12947	0,027315	253	0,009242	-0,33955	-0,12033
164	-0,26521	0,009742	-0,14855	209	-0,14258	-0,12806	0,003832	254	0,017861	-0,37084	-0,13266
165	-0,26738	0,014512	-0,18563	210	-0,13498	-0,13881	0,012181	255	0,033517	-0,43649	-0,09381
166	-0,26725	0,017299	-0,21663	211	-0,12778	-0,14208	0,024336	256	0,039295	-0,42561	-0,01461
167	-0,26701	0,027156	-0,23199	212	-0,12769	-0,13284	0,020084	257	0,039622	-0,38804	0,126656
168	-0,2675	0,015071	-0,25265	213	-0,12586	-0,12371	0,00494	258	0,032649	-0,34799	0,12365
169	-0,26902	0,017791	-0,29408	214	-0,12338	-0,11844	0,022288	259	0,039284	-0,34006	0,110498
170	-0,25878	0,000502	-0,29357	215	-0,1142	-0,12343	0,032584	260	0,033441	-0,33856	0,036913
171	-0,253	-0,01887	-0,29903	216	-0,11912	-0,10074	-0,01607	261	0,033206	-0,33646	-0,0093
172	-0,24817	-0,03001	-0,27112	217	-0,11579	-0,13124	0,00859	262	0,042418	-0,34222	-0,053
173	-0,24848	-0,04059	-0,28864	218	-0,11259	-0,11399	-0,05197	263	0,045661	-0,35935	-0,09436
174	-0,2466	-0,0559	-0,29227	219	-0,1226	-0,1025	-0,08002	264	0,060632	-0,39415	-0,11364
175	-0,22998	-0,09249	-0,27206	220	-0,11947	-0,10588	-0,07616	265	0,066178	-0,39302	-0,09356
176	-0,23636	-0,10931	-0,30136	221	-0,11988	-0,09638	-0,09885	266	0,073454	-0,42785	-0,03567
177	-0,23428	-0,09836	-0,28705	222	-0,10937	-0,10444	-0,08471	267	0,072706	-0,40633	-0,03654
178	-0,23241	-0,07841	-0,26783	223	-0,11102	-0,09895	-0,10317	268	0,072077	-0,4043	-0,04852
179	-0,23062	-0,08203	-0,28725	224	-0,10522	-0,11393	-0,09189	269	0,080401	-0,42977	-0,07163
180	-0,22634	-0,10865	-0,24278	225	-0,0978	-0,12383	-0,08276	270	0,080785	-0,43877	-0,0333

(lanjutan)

Kolom / Baris	1	2	3	Kolom / Baris	1	2	3	Kolom / Baris	1	2	3
271	0,085481	-0,46412	-0,01522	316	0,112433	-0,20667	0,021879	361	0,146369	-0,03978	-0,12316
272	0,089063	-0,47681	-0,00893	317	0,11279	-0,1947	0,031464	362	0,146617	-0,04532	-0,1129
273	0,09771	-0,5053	0,046399	318	0,107	-0,16921	0,04208	363	0,152495	-0,05829	-0,10451
274	0,1028	-0,49607	0,085016	319	0,112452	-0,17258	0,041365	364	0,156241	-0,05944	-0,09426
275	0,107711	-0,46393	0,146907	320	0,111997	-0,16342	0,024604	365	0,157093	-0,06492	-0,06561
276	0,103509	-0,46917	0,165058	321	0,110978	-0,15804	0,016896	366	0,159286	-0,05435	-0,05649
277	0,109678	-0,52585	0,190881	322	0,11051	-0,15168	0,003981	367	0,158324	-0,03687	-0,04879
278	0,124601	-0,50194	0,165789	323	0,111906	-0,13894	0,009528	368	0,161801	-0,04519	-0,02974
279	0,125282	-0,49683	0,195009	324	0,115272	-0,11851	-0,01643	369	0,159259	-0,04393	-0,02081
280	0,121246	-0,48732	0,202264	325	0,107921	-0,10919	-0,02697	370	0,160953	-0,03292	-0,03047
281	0,12592	-0,47942	0,20949	326	0,107147	-0,09998	-0,0037	371	0,164223	-0,03025	-0,02285
282	0,125139	-0,48361	0,222662	327	0,102776	-0,06741	-0,00323	372	0,171372	-0,03308	-0,01988
283	0,126401	-0,47017	0,225305	328	0,100483	-0,04544	0,000387	373	0,170504	-0,03136	-0,05582
284	0,114973	-0,44029	0,284043	329	0,105993	-0,04553	-0,00621	374	0,167167	-0,03831	-0,03708
285	0,110334	-0,41463	0,288738	330	0,107881	-0,04712	0,006466	375	0,17338	-0,03557	-0,03572
286	0,113155	-0,37183	0,294365	331	0,110534	-0,03813	0,019435	376	0,170066	-0,03836	-0,02121
287	0,113178	-0,35528	0,283893	332	0,104656	-0,01382	0,000583	377	0,174633	-0,04126	-0,00793
288	0,118588	-0,34147	0,278681	333	0,110625	-0,02373	0,013753	378	0,175025	-0,03106	-0,01411
289	0,11615	-0,30707	0,230293	334	0,112353	-0,02579	0,01497	379	0,18058	-0,03734	0,010996
290	0,094963	-0,28454	0,183943	335	0,11556	-0,02543	0,017027	380	0,186471	-0,06283	0,020419
291	0,095857	-0,26783	0,17535	336	0,115352	-0,01264	-0,01252	381	0,198545	-0,08425	0,027269
292	0,095122	-0,25757	0,163192	337	0,106818	0,007821	-0,02729	382	0,201519	-0,10918	0,052005
293	0,097454	-0,23497	0,124324	338	0,115937	0,007266	-0,03214	383	0,195539	-0,0932	0,070767
294	0,100789	-0,24406	0,105499	339	0,11297	0,009195	-0,03484	384	0,199208	-0,07658	0,097229
295	0,093152	-0,22703	0,056971	340	0,114362	-0,01175	-0,02149	385	0,204404	-0,09242	0,147574
296	0,095833	-0,24298	0,035599	341	0,120514	-0,01868	-0,0392	386	0,195282	-0,05201	0,144341
297	0,10303	-0,23502	0,040621	342	0,122354	-0,01682	-0,04712	387	0,188994	-0,03998	0,15764
298	0,097022	-0,21968	0,014512	343	0,126638	-0,01307	-0,04957	388	0,189267	-0,0307	0,153843
299	0,092209	-0,21513	-0,00956	344	0,124313	-0,01102	-0,07111	389	0,192188	-0,02964	0,156806
300	0,086743	-0,21036	-0,02848	345	0,124457	-0,02738	-0,08306	390	0,192615	-0,00927	0,136741
301	0,098485	-0,2115	-0,02771	346	0,133161	-0,03428	-0,07407	391	0,195032	-0,00191	0,123977
302	0,089993	-0,20043	-0,08677	347	0,130898	-0,02772	-0,09049	392	0,189309	0,017377	0,123326
303	0,100974	-0,23255	-0,0383	348	0,132387	-0,02759	-0,07209	393	0,188526	0,02916	0,109847
304	0,10328	-0,23515	-0,06531	349	0,134541	-0,02802	-0,05187	394	0,194433	0,023465	0,122514
305	0,106579	-0,25871	-0,04605	350	0,133415	-0,01497	-0,06709	395	0,202205	0,023365	0,136091
306	0,101169	-0,26482	-0,06239	351	0,133454	-0,01404	-0,06026	396	0,201643	0,032267	0,161271
307	0,108707	-0,27842	-0,04311	352	0,129321	-0,0141	-0,09625	397	0,200617	0,047244	0,158226
308	0,110119	-0,27415	-0,01631	353	0,137064	-0,03155	-0,07985	398	0,201368	0,061551	0,137178
309	0,108189	-0,26908	-0,01089	354	0,133447	-0,01742	-0,10888	399	0,201233	0,06961	0,122333
310	0,10727	-0,25357	0,006051	355	0,134943	-0,02567	-0,1077	400	0,211415	0,071407	0,14481
311	0,104366	-0,22599	0,000588	356	0,145021	-0,0417	-0,09049	401	0,210788	0,074509	0,12918
312	0,105097	-0,21818	0,013452	357	0,140471	-0,03419	-0,08811	402	0,221508	0,061824	0,154501
313	0,105048	-0,21074	0,01299	358	0,140951	-0,02073	-0,10646	403	0,217241	0,080785	0,14747
314	0,110708	-0,21425	0,022093	359	0,139086	-0,02443	-0,11925	404	0,215803	0,089514	0,14666
315	0,112877	-0,22003	0,011886	360	0,14246	-0,03499	-0,12305	405	0,224583	0,080204	0,169272

Kolom Baris	1	2	3	Kolom Baris	1	2	3
406	0,228318	0,088943	0,164248	451	0,29902	0,125477	0,006952
407	0,228975	0,0921	0,15595	452	0,294092	0,142285	-0,01455
408	0,225142	0,105332	0,149586	453	0,299008	0,136895	-0,01157
409	0,221632	0,118498	0,132344	454	0,300472	0,14038	0,00897
410	0,224751	0,122096	0,125298	455	0,298196	0,157219	-0,01963
411	0,223902	0,110713	0,141897	456	0,296991	0,15663	-0,02141
412	0,232579	0,121292	0,125762	457	0,302169	0,13999	-0,01081
413	0,230292	0,113686	0,128567	458	0,302061	0,162552	-0,03658
414	0,232454	0,111753	0,131975	459	0,304333	0,162929	-0,03775
415	0,231061	0,119282	0,123743	460	0,304559	0,15325	-0,03222
416	0,229736	0,130552	0,111575	461	0,302448	0,169529	-0,04519
417	0,230149	0,145192	0,10249	462	0,306084	0,173092	-0,04324
418	0,232434	0,150342	0,084892	463	0,30009	0,195341	-0,05418
419	0,235849	0,150797	0,081255	464	0,309112	0,188847	-0,05304
420	0,234444	0,160739	0,060708	465	0,31113	0,189277	-0,06614
421	0,242124	0,157144	0,076116	466	0,315035	0,198023	-0,07638
422	0,239324	0,147635	0,072565	467	0,315865	0,197963	-0,08516
423	0,244125	0,158337	0,034064	468	0,315283	0,204073	-0,08348
424	0,244099	0,14293	0,029362	469	0,310788	0,21776	-0,08062
425	0,245798	0,139584	0,004923	470	0,310328	0,219561	-0,08465
426	0,249525	0,138673	0,005903	471	0,317106	0,211767	-0,07373
427	0,256055	0,130198	0,00562	472	0,312271	0,218758	-0,07431
428	0,256868	0,128831	-5,2E-05	473	0,318008	0,212064	-0,06921
429	0,254398	0,12809	-0,01666	474	0,320446	0,207052	-0,0576
430	0,259496	0,125805	-0,02753	475	0,318556	0,216223	-0,06043
431	0,254589	0,121822	-0,0509	476	0,325806	0,218856	-0,06519
432	0,258617	0,111642	-0,0507				
433	0,262928	0,111279	-0,04667				
434	0,264078	0,110135	-0,03546				
435	0,268069	0,105799	-0,01767				
436	0,2763	0,099346	0,002679				
437	0,278226	0,09685	0,020369				
438	0,275137	0,110621	0,018734				
439	0,274765	0,124732	0,000763				
440	0,282755	0,117563	0,019227				
441	0,285605	0,120713	0,01848				
442	0,28078	0,123442	0,022889				
443	0,287572	0,125371	0,021658				
444	0,28819	0,128071	0,02656				
445	0,284212	0,109704	0,039055				
446	0,290756	0,135814	0,024898				
447	0,293301	0,128608	0,038332				
448	0,297077	0,128623	0,017687				
449	0,302016	0,122547	0,013629				
450	0,296388	0,139621	-0,01093				

Lampiran 32 Nilai $\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{476}$ saat $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}$ dan $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}, \mathbf{5}$

i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$
1	-0,0574	46	-0,05128	91	-0,0461	136	-0,03378	181	-0,02495
2	-0,05808	47	-0,05172	92	-0,04603	137	-0,03358	182	-0,02407
3	-0,05769	48	-0,05249	93	-0,0453	138	-0,03361	183	-0,02382
4	-0,05759	49	-0,05017	94	-0,04437	139	-0,03317	184	-0,02389
5	-0,05743	50	-0,05075	95	-0,04461	140	-0,03268	185	-0,02218
6	-0,05681	51	-0,05067	96	-0,0442	141	-0,03263	186	-0,02169
7	-0,05673	52	-0,05199	97	-0,04401	142	-0,03301	187	-0,02055
8	-0,05559	53	-0,05157	98	-0,0443	143	-0,03213	188	-0,02023
9	-0,05476	54	-0,05129	99	-0,04313	144	-0,03131	189	-0,01923
10	-0,0547	55	-0,05091	100	-0,04303	145	-0,03164	190	-0,01772
11	-0,05487	56	-0,051	101	-0,04358	146	-0,03279	191	-0,01733
12	-0,05562	57	-0,05082	102	-0,0431	147	-0,03204	192	-0,01617
13	-0,05588	58	-0,05121	103	-0,04379	148	-0,03242	193	-0,0152
14	-0,05567	59	-0,05061	104	-0,04329	149	-0,03189	194	-0,0159
15	-0,05319	60	-0,04996	105	-0,0442	150	-0,0316	195	-0,015
16	-0,05381	61	-0,05038	106	-0,0438	151	-0,03187	196	-0,0146
17	-0,05341	62	-0,05105	107	-0,04294	152	-0,03112	197	-0,01476
18	-0,05357	63	-0,05084	108	-0,04213	153	-0,03004	198	-0,01438
19	-0,05303	64	-0,05032	109	-0,04224	154	-0,02969	199	-0,01472
20	-0,0534	65	-0,05032	110	-0,04168	155	-0,02973	200	-0,01499
21	-0,05341	66	-0,05014	111	-0,04117	156	-0,03063	201	-0,01489
22	-0,05304	67	-0,05062	112	-0,04214	157	-0,03098	202	-0,01553
23	-0,05334	68	-0,05064	113	-0,04115	158	-0,0301	203	-0,01515
24	-0,0523	69	-0,05043	114	-0,04051	159	-0,02959	204	-0,01465
25	-0,05189	70	-0,05107	115	-0,04053	160	-0,02917	205	-0,01499
26	-0,05186	71	-0,05047	116	-0,04085	161	-0,02952	206	-0,01613
27	-0,05251	72	-0,05046	117	-0,0403	162	-0,02883	207	-0,01596
28	-0,05285	73	-0,04946	118	-0,03995	163	-0,02906	208	-0,01629
29	-0,05264	74	-0,04939	119	-0,03974	164	-0,02917	209	-0,01568
30	-0,05229	75	-0,04998	120	-0,03967	165	-0,02941	210	-0,01485
31	-0,05171	76	-0,05009	121	-0,03978	166	-0,02939	211	-0,01405
32	-0,05227	77	-0,04981	122	-0,03991	167	-0,02937	212	-0,01404
33	-0,05355	78	-0,0493	123	-0,03922	168	-0,02942	213	-0,01384
34	-0,05276	79	-0,0491	124	-0,03804	169	-0,02959	214	-0,01357
35	-0,05201	80	-0,04882	125	-0,03858	170	-0,02846	215	-0,01256
36	-0,05311	81	-0,04917	126	-0,03806	171	-0,02783	216	-0,0131
37	-0,05336	82	-0,04814	127	-0,03661	172	-0,0273	217	-0,01274
38	-0,05285	83	-0,04858	128	-0,03722	173	-0,02733	218	-0,01238
39	-0,053	84	-0,04899	129	-0,03623	174	-0,02712	219	-0,01348
40	-0,05239	85	-0,04839	130	-0,03637	175	-0,02529	220	-0,01314
41	-0,05185	86	-0,04799	131	-0,03624	176	-0,026	221	-0,01319
42	-0,0517	87	-0,04798	132	-0,03575	177	-0,02577	222	-0,01203
43	-0,05146	88	-0,04733	133	-0,03472	178	-0,02556	223	-0,01221
44	-0,05115	89	-0,0463	134	-0,03422	179	-0,02536	224	-0,01157
45	-0,0505	90	-0,0462	135	-0,03427	180	-0,02489	225	-0,01076

(lanjutan)

i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$
226	-0,01071	271	0,009402	316	0,012366	361	0,016098	406	0,025112	451	0,032888
227	-0,01037	272	0,009796	317	0,012405	362	0,016126	407	0,025184	452	0,032346
228	-0,01072	273	0,010747	318	0,011768	363	0,016772	408	0,024762	453	0,032886
229	-0,01069	274	0,011306	319	0,012368	364	0,017184	409	0,024376	454	0,033047
230	-0,00985	275	0,011847	320	0,012318	365	0,017278	410	0,024719	455	0,032797
231	-0,00864	276	0,011385	321	0,012206	366	0,017519	411	0,024626	456	0,032665
232	-0,00914	277	0,012063	322	0,012154	367	0,017413	412	0,02558	457	0,033234
233	-0,00912	278	0,013704	323	0,012308	368	0,017796	413	0,025329	458	0,033222
234	-0,00843	279	0,013779	324	0,012678	369	0,017516	414	0,025567	459	0,033472
235	-0,00835	280	0,013335	325	0,01187	370	0,017702	415	0,025413	460	0,033497
236	-0,0077	281	0,013849	326	0,011785	371	0,018062	416	0,025267	461	0,033265
237	-0,0073	282	0,013763	327	0,011304	372	0,018848	417	0,025313	462	0,033665
238	-0,00659	283	0,013902	328	0,011052	373	0,018753	418	0,025564	463	0,033005
239	-0,00638	284	0,012645	329	0,011658	374	0,018386	419	0,02594	464	0,033998
240	-0,00537	285	0,012135	330	0,011865	375	0,019069	420	0,025785	465	0,03422
241	-0,00485	286	0,012445	331	0,012157	376	0,018705	421	0,02663	466	0,034649
242	-0,0042	287	0,012448	332	0,011511	377	0,019207	422	0,026322	467	0,03474
243	-0,00351	288	0,013043	333	0,012167	378	0,01925	423	0,02685	468	0,034676
244	-0,0051	289	0,012775	334	0,012357	379	0,019861	424	0,026847	469	0,034182
245	-0,00393	290	0,010444	335	0,01271	380	0,020509	425	0,027034	470	0,034131
246	-0,00362	291	0,010543	336	0,012687	381	0,021837	426	0,027444	471	0,034877
247	-0,00361	292	0,010462	337	0,011748	382	0,022164	427	0,028162	472	0,034345
248	-0,00288	293	0,010718	338	0,012751	383	0,021506	428	0,028252	473	0,034976
249	-0,00221	294	0,011085	339	0,012425	384	0,02191	429	0,02798	474	0,035244
250	-0,00101	295	0,010245	340	0,012578	385	0,022481	430	0,028541	475	0,035036
251	-0,00113	296	0,01054	341	0,013255	386	0,021478	431	0,028001	476	0,035834
252	0,00025	297	0,011332	342	0,013457	387	0,020786	432	0,028444		
253	0,001016	298	0,010671	343	0,013928	388	0,020817	433	0,028918		
254	0,001964	299	0,010142	344	0,013673	389	0,021138	434	0,029045		
255	0,003686	300	0,009541	345	0,013688	390	0,021185	435	0,029484		
256	0,004322	301	0,010832	346	0,014646	391	0,021451	436	0,030389		
257	0,004358	302	0,009898	347	0,014397	392	0,020821	437	0,030601		
258	0,003591	303	0,011106	348	0,014561	393	0,020735	438	0,030261		
259	0,004321	304	0,011359	349	0,014797	394	0,021385	439	0,03022		
260	0,003678	305	0,011722	350	0,014674	395	0,02224	440	0,031099		
261	0,003652	306	0,011127	351	0,014678	396	0,022178	441	0,031412		
262	0,004665	307	0,011956	352	0,014223	397	0,022065	442	0,030882		
263	0,005022	308	0,012112	353	0,015075	398	0,022148	443	0,031629		
264	0,006668	309	0,011899	354	0,014677	399	0,022133	444	0,031697		
265	0,007279	310	0,011798	355	0,014842	400	0,023253	445	0,031259		
266	0,008079	311	0,011479	356	0,01595	401	0,023183	446	0,031979		
267	0,007997	312	0,011559	357	0,01545	402	0,024362	447	0,032259		
268	0,007927	313	0,011554	358	0,015503	403	0,023893	448	0,032674		
269	0,008843	314	0,012176	359	0,015297	404	0,023735	449	0,033217		
270	0,008885	315	0,012415	360	0,015668	405	0,024701	450	0,032598		

Lampiran 33 Nilai $\hat{y}_i, i = 1, 2, \ldots, 476$ saat $p = 2$ dan $w = 0,5$

i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$
1	-0,05377	46	-0,04904	91	-0,04462	136	-0,03901	181	-0,03075	226	-0,01628
2	-0,05421	47	-0,04875	92	-0,0451	137	-0,03951	182	-0,03011	227	-0,01597
3	-0,0536	48	-0,0494	93	-0,04485	138	-0,03885	183	-0,02989	228	-0,01579
4	-0,05349	49	-0,0477	94	-0,04394	139	-0,03793	184	-0,03153	229	-0,01749
5	-0,05341	50	-0,04788	95	-0,04453	140	-0,03788	185	-0,02993	230	-0,01641
6	-0,05354	51	-0,04767	96	-0,04395	141	-0,03818	186	-0,02962	231	-0,01513
7	-0,05422	52	-0,04837	97	-0,0434	142	-0,03818	187	-0,02973	232	-0,01544
8	-0,05357	53	-0,04795	98	-0,04413	143	-0,03699	188	-0,03033	233	-0,01571
9	-0,05413	54	-0,04767	99	-0,04282	144	-0,03474	189	-0,03029	234	-0,01505
10	-0,05431	55	-0,04787	100	-0,04279	145	-0,03394	190	-0,02888	235	-0,0151
11	-0,05467	56	-0,04784	101	-0,04301	146	-0,03397	191	-0,02918	236	-0,01456
12	-0,0538	57	-0,04742	102	-0,04275	147	-0,03293	192	-0,0285	237	-0,01441
13	-0,05364	58	-0,04768	103	-0,04319	148	-0,03321	193	-0,02741	238	-0,01414
14	-0,05423	59	-0,04751	104	-0,04243	149	-0,03345	194	-0,02715	239	-0,01464
15	-0,05306	60	-0,04736	105	-0,04309	150	-0,03358	195	-0,02674	240	-0,01464
16	-0,05349	61	-0,04752	106	-0,04296	151	-0,03389	196	-0,02602	241	-0,01506
17	-0,05355	62	-0,04704	107	-0,04228	152	-0,03335	197	-0,02517	242	-0,01445
18	-0,05307	63	-0,04731	108	-0,04165	153	-0,03177	198	-0,02408	243	-0,01355
19	-0,05252	64	-0,04696	109	-0,04149	154	-0,03053	199	-0,02417	244	-0,01636
20	-0,05242	65	-0,04661	110	-0,04085	155	-0,03062	200	-0,02449	245	-0,01445
21	-0,05286	66	-0,04627	111	-0,04079	156	-0,03077	201	-0,0243	246	-0,01424
22	-0,05243	67	-0,04617	112	-0,04148	157	-0,03038	202	-0,02388	247	-0,01483
23	-0,05316	68	-0,04628	113	-0,04078	158	-0,02913	203	-0,023	248	-0,01448
24	-0,05295	69	-0,04639	114	-0,04032	159	-0,02924	204	-0,02221	249	-0,01437
25	-0,05146	70	-0,04723	115	-0,03988	160	-0,02917	205	-0,02102	250	-0,01541
26	-0,05156	71	-0,04628	116	-0,04042	161	-0,02921	206	-0,02117	251	-0,01591
27	-0,05133	72	-0,0464	117	-0,0395	162	-0,02888	207	-0,02178	252	-0,01452
28	-0,05093	73	-0,04544	118	-0,0387	163	-0,02893	208	-0,02217	253	-0,01439
29	-0,05046	74	-0,04544	119	-0,03886	164	-0,02873	209	-0,02149	254	-0,01486
30	-0,04984	75	-0,04539	120	-0,03927	165	-0,02875	210	-0,02115	255	-0,01612
31	-0,0491	76	-0,04607	121	-0,03929	166	-0,02861	211	-0,0205	256	-0,01499
32	-0,04941	77	-0,04553	122	-0,03945	167	-0,02813	212	-0,02007	257	-0,01325
33	-0,05066	78	-0,04557	123	-0,03913	168	-0,02874	213	-0,01946	258	-0,0122
34	-0,04943	79	-0,04523	124	-0,03825	169	-0,02878	214	-0,01894	259	-0,01111
35	-0,04856	80	-0,04542	125	-0,03909	170	-0,02844	215	-0,01816	260	-0,01169
36	-0,04953	81	-0,04526	126	-0,03965	171	-0,02868	216	-0,01767	261	-0,01162
37	-0,05057	82	-0,04449	127	-0,0392	172	-0,02866	217	-0,01869	262	-0,01086
38	-0,04933	83	-0,04475	128	-0,03955	173	-0,02917	218	-0,01756	263	-0,01129
39	-0,0493	84	-0,04493	129	-0,03903	174	-0,02966	219	-0,01813	264	-0,01122
40	-0,0491	85	-0,04449	130	-0,03951	175	-0,02949	220	-0,01794	265	-0,01056
41	-0,04904	86	-0,04438	131	-0,03963	176	-0,03096	221	-0,01756	266	-0,01134
42	-0,04959	87	-0,04456	132	-0,03975	177	-0,03023	222	-0,01677	267	-0,01044
43	-0,04935	88	-0,04388	133	-0,03983	178	-0,02912	223	-0,0167	268	-0,01042
44	-0,04917	89	-0,04434	134	-0,03918	179	-0,02909	224	-0,01674	269	-0,01066
45	-0,04861	90	-0,04438	135	-0,0387	180	-0,02982	225	-0,01638	270	-0,01103

(lanjutan)

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
361	0,014293	406	0,029148	451	0,038582
362	0,014069	407	0,029363	452	0,038803
363	0,014127	408	0,029542	453	0,039099
364	0,014487	409	0,029754	454	0,039418
365	0,014332	410	0,03026	455	0,039932
366	0,015052	411	0,02965	456	0,039772
367	0,01574	412	0,031084	457	0,039587
368	0,015745	413	0,030488	458	0,040599
369	0,015523	414	0,030638	459	0,040866
370	0,016208	415	0,030826	460	0,040451
371	0,016689	416	0,031192	461	0,040958
372	0,017347	417	0,031902	462	0,04152
373	0,01733	418	0,032387	463	0,04187
374	0,016647	419	0,032783	464	0,042568
375	0,017455	420	0,03308	465	0,042809
376	0,016964	421	0,033761	466	0,043635
377	0,017334	422	0,033022	467	0,043724
378	0,017841	423	0,034036	468	0,043937
379	0,018167	424	0,033333	469	0,044064
380	0,017658	425	0,033369	470	0,044095
381	0,018014	426	0,033737	471	0,044487
382	0,017209	427	0,034071	472	0,044272
383	0,017277	428	0,034098	473	0,0446
384	0,018435	429	0,033793	474	0,04464
385	0,018287	430	0,03425	475	0,044849
386	0,019118	431	0,033529	476	0,045766
387	0,018972	432	0,03351		
388	0,019423	433	0,033968		
389	0,019793	434	0,034043		
390	0,020764	435	0,034285		
391	0,021364	436	0,034897		
392	0,02161	437	0,034996		
393	0,022058	438	0,035281		
394	0,02245	439	0,03588		
395	0,0233	440	0,036434		
396	0,023642	441	0,03689		
397	0,024209	442	0,036483		
398	0,024941	443	0,037318		
399	0,025292	444	0,037508		
400	0,026493	445	0,036237		
401	0,026565	446	0,038142		
402	0,027168	447	0,038095		
403	0,027559	448	0,038511		
404	0,027797	449	0,038778		
405	0,02834	450	0,038934		

Lampiran 34 Nilai $\hat{y}_i, i = 1, 2, \dots, 476$ saat $p = 3$ dan $w = 0,5$

i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$	i	$\hat{y}_i$
1	-0,05845	46	-0,05478	91	-0,04083	136	-0,03822	181	-0,02164	226	-0,012
2	-0,0574	47	-0,05327	92	-0,0413	137	-0,03842	182	-0,02105	227	-0,01147
3	-0,05599	48	-0,05404	93	-0,04176	138	-0,03739	183	-0,02077	228	-0,0101
4	-0,05525	49	-0,05376	94	-0,04161	139	-0,0369	184	-0,02306	229	-0,01333
5	-0,05515	50	-0,05299	95	-0,04251	140	-0,03812	185	-0,02278	230	-0,01146
6	-0,05518	51	-0,05247	96	-0,0427	141	-0,03891	186	-0,02309	231	-0,0095
7	-0,05675	52	-0,05171	97	-0,04233	142	-0,03993	187	-0,02433	232	-0,00782
8	-0,05835	53	-0,05066	98	-0,04402	143	-0,0397	188	-0,02537	233	-0,00811
9	-0,0595	54	-0,05063	99	-0,0439	144	-0,03606	189	-0,028	234	-0,00659
10	-0,06057	55	-0,0514	100	-0,04447	145	-0,03498	190	-0,02872	235	-0,00644
11	-0,06056	56	-0,05127	101	-0,04406	146	-0,03473	191	-0,03123	236	-0,00599
12	-0,05665	57	-0,05019	102	-0,0438	147	-0,03343	192	-0,03378	237	-0,0054
13	-0,05671	58	-0,0496	103	-0,04316	148	-0,03248	193	-0,03497	238	-0,00465
14	-0,05828	59	-0,05054	104	-0,04131	149	-0,03228	194	-0,03676	239	-0,00418
15	-0,06047	60	-0,05104	105	-0,04123	150	-0,032	195	-0,03727	240	-0,00448
16	-0,06051	61	-0,05076	106	-0,0407	151	-0,03191	196	-0,03624	241	-0,00678
17	-0,06096	62	-0,04859	107	-0,03941	152	-0,03189	197	-0,03479	242	-0,00645
18	-0,06122	63	-0,04952	108	-0,03884	153	-0,03158	198	-0,03347	243	-0,00382
19	-0,06141	64	-0,04915	109	-0,03833	154	-0,02988	199	-0,0319	244	-0,00771
20	-0,0608	65	-0,04876	110	-0,03716	155	-0,0298	200	-0,03044	245	-0,00495
21	-0,06237	66	-0,04805	111	-0,03714	156	-0,02831	201	-0,02918	246	-0,00513
22	-0,06222	67	-0,0471	112	-0,03711	157	-0,02649	202	-0,02772	247	-0,00638
23	-0,06351	68	-0,04681	113	-0,03669	158	-0,02538	203	-0,02738	248	-0,00691
24	-0,06477	69	-0,04666	114	-0,03663	159	-0,02526	204	-0,02676	249	-0,0062
25	-0,06266	70	-0,04785	115	-0,03559	160	-0,02533	205	-0,02381	250	-0,00799
26	-0,06277	71	-0,04619	116	-0,03641	161	-0,02489	206	-0,02217	251	-0,00963
27	-0,06158	72	-0,04603	117	-0,03544	162	-0,02471	207	-0,02339	252	-0,00879
28	-0,06074	73	-0,04516	118	-0,03372	163	-0,02454	208	-0,02324	253	-0,0097
29	-0,05948	74	-0,04497	119	-0,03339	164	-0,02293	209	-0,02164	254	-0,00969
30	-0,0583	75	-0,04428	120	-0,03371	165	-0,0215	210	-0,02162	255	-0,01246
31	-0,05764	76	-0,04495	121	-0,0327	166	-0,02015	211	-0,02145	256	-0,01442
32	-0,05667	77	-0,0438	122	-0,03261	167	-0,01908	212	-0,02086	257	-0,01819
33	-0,0574	78	-0,04421	123	-0,03262	168	-0,01888	213	-0,01965	258	-0,01703
34	-0,05542	79	-0,0437	124	-0,03187	169	-0,0173	214	-0,01981	259	-0,01542
35	-0,05451	80	-0,04416	125	-0,03229	170	-0,01698	215	-0,01943	260	-0,01313
36	-0,05453	81	-0,04351	126	-0,03334	171	-0,01701	216	-0,01705	261	-0,01125
37	-0,05577	82	-0,04307	127	-0,03364	172	-0,01808	217	-0,01903	262	-0,0088
38	-0,05437	83	-0,04236	128	-0,03315	173	-0,01791	218	-0,01553	263	-0,0076
39	-0,05351	84	-0,04104	129	-0,03255	174	-0,01825	219	-0,01501	264	-0,00678
40	-0,05387	85	-0,04048	130	-0,03355	175	-0,01887	220	-0,01497	265	-0,00691
41	-0,05461	86	-0,03975	131	-0,03449	176	-0,01919	221	-0,0137	266	-0,00994
42	-0,05585	87	-0,03911	132	-0,0344	177	-0,01903	222	-0,01346	267	-0,00902
43	-0,05517	88	-0,03886	133	-0,03675	178	-0,01867	223	-0,01267	268	-0,00853
44	-0,05522	89	-0,0406	134	-0,03655	179	-0,01788	224	-0,01316	269	-0,00786
45	-0,05527	90	-0,04072	135	-0,03692	180	-0,02035	225	-0,01315	270	-0,00973

(lanjutan)

t	$\hat{y}_t$	t	$\hat{y}_t$	t	$\hat{y}_t$	t	$\hat{y}_t$	t	$\hat{y}_t$
271	-0,01107	316	0,002133	361	0,019099	406	0,022738	451	0,03831
272	-0,01149	317	0,002342	362	0,018475	407	0,023277	452	0,03937
273	-0,014	318	0,002448	363	0,018205	408	0,023704	453	0,03955
274	-0,01452	319	0,002922	364	0,018166	409	0,024589	454	0,039068
275	-0,01494	320	0,003942	365	0,016892	410	0,02537	455	0,040698
276	-0,01635	321	0,004374	366	0,017257	411	0,024112	456	0,040608
277	-0,01925	322	0,005116	367	0,017644	412	0,026176	457	0,040009
278	-0,01554	323	0,005631	368	0,016905	413	0,02547	458	0,042027
279	-0,01638	324	0,007941	369	0,016335	414	0,025487	459	0,042339
280	-0,01667	325	0,007967	370	0,017397	415	0,025997	460	0,041709
281	-0,01608	326	0,007392	371	0,017581	416	0,026837	461	0,042722
282	-0,01687	327	0,008371	372	0,018123	417	0,027902	462	0,043207
283	-0,01623	328	0,008974	373	0,019508	418	0,029074	463	0,043985
284	-0,01842	329	0,009834	374	0,018095	419	0,029612	464	0,044638
285	-0,01795	330	0,009474	375	0,018849	420	0,03071	465	0,04539
286	-0,01592	331	0,009668	376	0,017791	421	0,030791	466	0,046616
287	-0,01475	332	0,010861	377	0,017644	422	0,03019	467	0,047048
288	-0,01333	333	0,010553	378	0,018391	423	0,032706	468	0,047195
289	-0,01015	334	0,010602	379	0,017737	424	0,032188	469	0,04721
290	-0,00965	335	0,010891	380	0,016861	425	0,033176	470	0,047399
291	-0,00845	336	0,012602	381	0,016949	426	0,033507	471	0,047365
292	-0,0076	337	0,013168	382	0,01518	427	0,033851	472	0,047172
293	-0,0048	338	0,014335	383	0,014515	428	0,0341	473	0,047301
294	-0,00411	339	0,014202	384	0,01464	429	0,034443	474	0,046888
295	-0,00228	340	0,012884	385	0,012528	430	0,035324	475	0,047207
296	-0,00188	341	0,013937	386	0,013484	431	0,035516	476	0,04831
297	-0,00092	342	0,014533	387	0,01282	432	0,035489		
298	0,000135	343	0,01527	388	0,013419	433	0,035789		
299	0,000752	344	0,015948	389	0,013673	434	0,035427		
300	0,001106	345	0,015688	390	0,015427	435	0,034974		
301	0,002315	346	0,015981	391	0,016525	436	0,034793		
302	0,004189	347	0,01667	392	0,016797	437	0,034201		
303	0,002047	348	0,016122	393	0,017771	438	0,03455		
304	0,003237	349	0,01555	394	0,017668	439	0,035851		
305	0,001779	350	0,016613	395	0,017989	440	0,035684		
306	0,001544	351	0,016393	396	0,017348	441	0,036169		
307	0,001003	352	0,01734	397	0,018034	442	0,03559		
308	0,000307	353	0,016759	398	0,019587	443	0,036473		
309	0,000113	354	0,018136	399	0,020517	444	0,036472		
310	5,48E-05	355	0,01788	400	0,020841	445	0,034713		
311	0,0012	356	0,017589	401	0,021523	446	0,03717		
312	0,001133	357	0,017337	402	0,021138	447	0,036599		
313	0,001483	358	0,018717	403	0,021804	448	0,037821		
314	0,001591	359	0,018843	404	0,022073	449	0,038246		
315	0,001966	360	0,018883	405	0,021734	450	0,039361		

Lampiran 35 Nilai Peramalan Variabel *Industrial Production Index-Total Index* pada periode September 1998 – Desember 2006

h	$\hat{y}_{T+h}$	h	$\hat{y}_{T+h}$	h	$\hat{y}_{T+h}$
1	0,047786	46	0,052708	91	0,062557
2	0,049436	47	0,051561	92	0,062601
3	0,049714	48	0,051822	93	0,062479
4	0,050815	49	0,052146	94	0,062704
5	0,051758	50	0,051049	95	0,06276
6	0,051271	51	0,051952	96	0,062269
7	0,051452	52	0,052651	97	0,06218
8	0,051623	53	0,052814	98	0,060836
9	0,052741	54	0,051073	99	0,060653
10	0,052266	55	0,051177	100	0,062617
11	0,053317	56	0,04975		
12	0,053706	57	0,051158		
13	0,053999	58	0,052105		
14	0,054765	59	0,052238		
15	0,055475	60	0,053083		
16	0,056156	61	0,053993		
17	0,055919	62	0,054838		
18	0,055859	63	0,056206		
19	0,055498	64	0,056507		
20	0,056917	65	0,056959		
21	0,055118	66	0,057141		
22	0,055603	67	0,058269		
23	0,055497	68	0,057764		
24	0,054921	69	0,058321		
25	0,055084	70	0,056816		
26	0,054516	71	0,058064		
27	0,054515	72	0,057765		
28	0,052755	73	0,057457		
29	0,053005	74	0,058021		
30	0,052109	75	0,057373		
31	0,051423	76	0,059477		
32	0,050559	77	0,059044		
33	0,050531	78	0,059858		
34	0,050326	79	0,057987		
35	0,050194	80	0,059173		
36	0,049742	81	0,05929		
37	0,050589	82	0,059979		
38	0,047923	83	0,060002		
39	0,04862	84	0,060145		
40	0,048689	85	0,061069		
41	0,049019	86	0,06135		
42	0,050558	87	0,062758		
43	0,050461	88	0,061947		
44	0,051674	89	0,062411		
45	0,052253	90	0,06271		