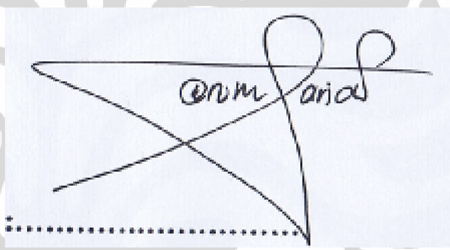
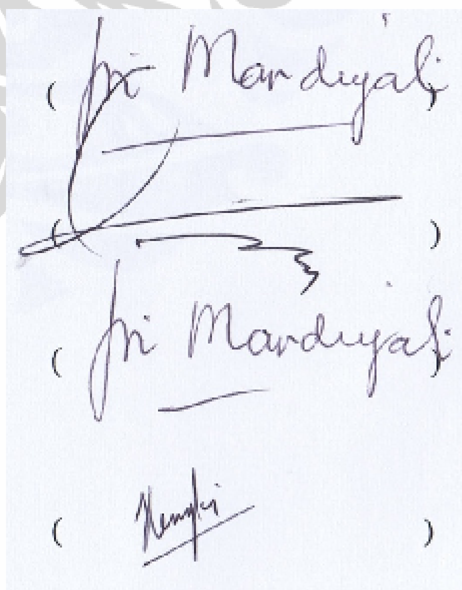




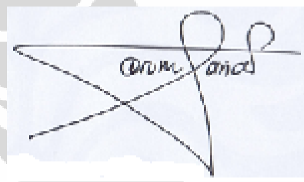
KATA PENGANTAR

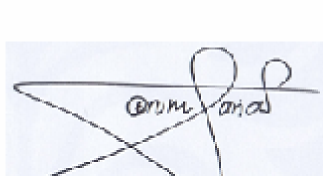
Alhamdulillah, segala Puji dan syukur atas segala ridho dan izin-Nya sehingga tesis yang berjudul **Pola Elemen-Elemen Pada Matriks Invers Dari Matriks Segitiga Bawah Pascal Modulo 2,** dapat diselesaikan, walaupun masih banyak kekurangan. Penulisan tesis ini dilakukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains Program Studi Magister Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Dalam Matematika banyak sekali pola-pola bilangan yang menarik, tesis ini membahas pola yang berlaku pada elemen-elemen matriks invers dari matriks segitiga bawah Pascal modulo *2*.

Pada proses penulisan ini banyak sekali kekurangan penulis yang tentu menghambat penyelesaiannya, namun berkat dukungan dari berbagai pihak tesis ini dapat diselesaikan. Untuk itu perlu penulis haturkan terima kasih kepada:

1. Dr. Sri Mardiyati, M.Kom. selaku dosen pembimbing yang telah banyak menyediakan waktu, tenaga dan pikiran untuk membimbing, mengarahkan serta memberi motivasi sehingga tesis ini dapat selesai;
2. Prof. Dr. Djati Kerami selaku ketua Program Studi Magister Matematika sekaligus sebagai penasehat akademik yang selalu memberi dorongan untuk menyelesaikan tesis ini;
3. Segenap bapak dan ibu dosen di Departemen Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia atas segala bimbingan dan ilmu yang diberikan selama penulis menempuh pendidikan;
4. Hj Siti Aisah Setiawati ibundaku yang tiada henti mendampingi lewat doa-doanya;
5. Soemarno (almarhum) ayahandaku yang semasa hidupnya selalu memberi motivasi untuk menjadi lebih baik:
6. Panji, Hafsah, Wulan dan Anjar adik-adikku yang senantiasa memotivasi dan membantu selama penulis menempuh pendidikan;





ABSTRAK

Nama : Sri Endang Arumarianti
NPM : 0906577406
Program Studi : Magister Matematika
Judul :
Pola Elemen-Elemen Pada Matriks Invers Dari Matriks Segitiga Bawah Pascal Modulo *2*

$A_{m,p}$ adalah matriks segitiga bawah Pascal modulo p yang elemen-elemennya didefinisikan sebagai $\binom{i}{j} \pmod{p}$, $0 \leq i, j \leq m-1$ untuk $i > j$. Dalam tesis ini ditunjukkan bahwa pola yang dibentuk oleh elemen-elemen pada matriks invers dari $A_{m,p}$ dengan $p = 2$ akan bersesuaian dengan barisan Thue-Morse.

Kata kunci:
Matriks segitiga bawah, invers matriks, barisan Thue-Morse, mod p.

ABSTRACT

Name : Sri Endang Arumarianti
Program : Master Program on Mathematics
Title :
Patern Of Element Of Inverse Pascal Lower Triangular Matrix modulo 2

$A_{m,p}$ is the Pascal lower triangular matrixs modulo p that every elements is satisfy $\binom{i}{j}(\text{mod } p)$, $0 \leq i, j \leq m-1$ for $i > j$. In this thesis we showed that the invers of $A_{m,p}$ with $p = 2$, has elements that satisfy Thue-Morse sequence.

Keyword:
Triangular matrix, Matriks inverse, Thue-Morse sequence, mod p.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Matriks adalah bagian dari aljabar linear yang memiliki banyak hal menarik untuk dibahas, misalnya jenis matriks, matiks invers atau aplikasi matriks dalam disiplin ilmu lain. Salah satu jenis matriks adalah matriks segitiga bawah, yaitu matriks persegi yang elemen-elemen ke (i,j) = 0 untuk $i < j$. Jika elemen-elemen ke (i,j) untuk $i \geq j$ pada matriks segitiga bawah tersebut mempunyai pola seperti bilangan Pascal maka matriks tersebut dinamakan matriks segitiga bawah Pascal.

Selanjutnya jika elemen-elemen ke (i,j) untuk $i \geq j$ pada matriks segitiga bawah Pascal tersebut, dinyatakan dalam modulo$p$ dengan p adalah bilangan prima , maka akan ada pola yang terbentuk. Setelah melihat pola yang ada, maka penulis tertarik untuk mengetahui apakah matriks segitiga bawah tersebut mempunyai matriks invers. Jika memiliki matriks invers, adakah pola yang terbentuk pada matriks invers tersebut?

1.2 PERUMUSAN MASALAH

Adakah pola yang terbentuk pada elemen-elemen matriks invers segitiga bawah Pascal modulo 2 ?

1.3 TUJUAN PENULISAN

- Bagaimana bentuk pola elemen-elemen pada matriks invers dari suatu matriks segitiga bawah Pascal modulo 2 ?
- Merumuskan pola yang terjadi pada elemen-elemen matriks invers segitiga bawah Pascal modulo 2

1.4 BATASAN MASALAH

Batasan masalah pada penulisan ini adalah

- Adakah pola pada elemen-elemen matriks invers segitiga bawah Pascal modulo p dengan $p = 2$

BAB 2
LANDASAN TEORI

Penulisan tesis ini meliputi matriks, teori bilangan dan kombinasi bilangan, karena itu pada Bab 2 perlu dibahas beberapa definisi dan sifat-sifat dari matriks, teori bilangan dan kombinasi agar mempermudah pembaca dalam memahami pembahasan selanjutnya.

2.1 MATRIKS

Banyak buku yang membahas tentang matriks. Pembahasan dalam buku-buku tersebut secara umum tentu tidak berbeda tetapi mungkin penulisan notasinya berbeda. Karena itu pada bagian ini dijelaskan notasi yang digunakan dalam pembahasan selanjutnya. Selain notasi juga dibahas beberapa definisi dan sifat-sifat yang digunakan dalam penulisan tesis ini.

Definisi 2.1.

Suatu matriks A adalah susunan bilangan yang diatur dalam *m* baris dan *n* kolom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ (Ortega,1987).}$$

Elemen - elemen ke (i, j) dari matriks A, dinotasikan dengan (a_{ij}), dapat berupa bilangan real atau kompleks. Oleh sebab itu matriks A dapat dinotasikan dengan $A = (a_{ij})$ dengan $1 \leq i \leq m$,$1 \leq j \leq n$.

Jika sebuah matriks A terdiri atas *m* baris dan *n* kolom maka matriks A dikatakan berorder *m* x *n*. Matriks A disebut matriks persegi jika *m* = *n*. (Ortega,1987).

Pada pembahasan selanjutnya penomoran baris dan kolom matriks dimulai dari 0 sampai $m-1$jika mempunyai m baris dan dari 0 sampai $n-1$ jika matriks mempunyai *n* kolom, seperti yang ditunjukkan berikut ini :

$$
\begin{array}{ccccl}
 & & & & \\
A = \left(\begin{array}{cccc} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)0} & a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(n-1)} \end{array} \right) & \begin{array}{l} \rightarrow \textit{baris ke } 0 \\ \rightarrow \textit{baris ke } 1 \\ \quad \cdots \\ \rightarrow \textit{baris ke} (m-1) \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \vdots & \uparrow \\ \textit{kolom ke } 0 & \textit{kolom ke } 1 & \ldots & \textit{kolom ke } (n-1) \end{array} &
\end{array}
$$

Definisi 2.1.

Sub matriks dari matriks A adalah sebuah matriks yang diperoleh dengan menghapus atau menghilangkan beberapa baris atau kolom dari matriks A. (Ortega,1987).

Jika pada matriks A yang berorder $n \times n$ dilakukan penghapusan sebanyak $(n-m)$ baris dan$(n-m)$ kolom, dengan $n > m$, maka akan diperoleh matriks B berorder $m \times m$ yang merupakan merupakan *principal submatriks* dari matriks A. Jika yang dihapus adalah $(n-m)$ baris dan kolom terakhir dari matriks A maka diperoleh *Leading principal submatriks* dari matriks A (Ortega,1987).

Contoh 2.1 :

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}
$$

Pada contoh 2.1, untuk matriks A yang berorder 4×4, maka B adalah *Leading principal submatriks* dari A yang berorder 3×3 dan diperoleh dengan menghapus sebanyak $(4-3)$ baris dan kolom terakhir dari matriks A.

Beberapa matriks mempunyai elemen- elemen dengan kriteria tertentu di antaranya matriks identitas. Matriks identitas adalah matriks persegi yang diagonal utamanya selalu 1 sedangkan elemen yang lain adalah 0. Selain itu kita juga mengenal matriks segitiga bawah.

Definisi 2.3

Matriks persegi A disebut matriks segitiga bawah jika memenuhi

$a_{ij} = 0$ untuk $i < j$ (Ortega,1987).

Pada pembahasan matriks juga didefinisikan pengertian transpose sebuah matriks, operasi penjumlahan 2 matriks, perkalian matriks dengan bilangan scalar dan juga perkalian dua buah matriks. Berikut ini didefinisikan perkalian dua buah matriks

Definisi 2.4

Perkalian 2 matriks A dan B didefinisikan jika banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B. Jika matriks A berorder $n \times p$ dan matriks B berorder $p \times m$, maka dari perkalian matriks A dan B didapat matriks C yang berorder $n \times m$ dengan elemen-elemen ke (i, j) memenuhi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$ (Ortega,1987) .

Dalam mempelajari matriks, kita juga mengenal determinan matriks A yaitu suatu nilai skalar yang dinotasikan dengan $\det(A)$. Jika det(A) ≠ 0 maka matriks A disebut nonsingular atau mempunyai matriks invers yang dinotasikan dengan A^{-1} (Ortega,1987).

Jika suatu matriks persegi A mempunyai matriks invers A^{-1} maka perkalian $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ dengan I adalah matriks identitas.

Setelah membahas beberapa hal tentang matriks selanjutnya kita akan membahas beberapa hal tentang teori bilangan yang akan digunakan dalam pembahasan tesis ini.

2.1 TEORI BILANGAN

Bagian ini dimulai dengan merepresentasikan penjumlahan dari bilangan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dengan notasi $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (Rossen,2007).

Sifat-sifat pada penjumlahan tersebut adalah:

(i). $\sum_{j=m}^{n} ka_j = k\sum_{j=m}^{n} a_j$ dengan k konstan

(ii). $\sum_{j=m}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$

(iii). $\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_i b_j = [\sum_{i=m}^{n} a_i]\left[\sum_{j=p}^{q} b_j\right] = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_i b_j$

Sedangkan untuk merepresentasikan perkalian dari bilangan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dinotasikan dengan $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 . a_2 \dots a_n$

Berikut ini akan diberikan definisi dari n faktorial

Definisi 2.5

Untuk n bilangan bulat positif, $n!$ dibaca n faktorial, didefinisikan sebagai $n! = \prod_{j=1}^{n} j = n.(n-1) \dots 2.1.$ Dengan $0! = 1$ (Rossen, 2007).

Selanjutnya dijelaskan pengertian tentang pembagian untuk bilangan bulat.

Definisi 2.6:

Untuk a dan b bilangan bulat dengan $a \neq 0$, maka a dikatakan membagi b, dinotasikan sebagai $a|b$ jika ada bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$. (Rossen, 2007).

Selanjutnya jika a tidak membagi b, maka dinotasikan dengan $a \nmid b$.

Dalam operasi pembagian kita mengenal algoritma yang dituangkan dalam suatu teorema yang dijelaskan berikut ini.

Teorema 2.1

Jika a, b adalah bilangan bulat dengan $b > 0$, maka ada bilangan bulat q , r yang unik sedemikian sehingga $a = bq + r$ dan $0 \leq r < b$ (Rossen, 2007).

Dengan a disebut yang dibagi, b disebut pembagi, q disebut hasil bagi dan r disebut sisa pembagian.

.

Dalam keseharian, representasi untuk suatu bilangan bulat biasanya dinyatakan dalam basis 10,

Contoh 2.2:

$3107 = 3.10^3 + 1.10^2 + 0.10^1 + 7.10^0$

Selain dalam basis 10, suatu bilangan bulat posistif dapat direpresentasikan dalam basis lain. Misalnya dalam bidang komputasi, penyajian bilangan bulat biasanya dalam basis 2.

Teorema 2.2

Untuk bilangan bulat positif p, dengan $p > 1$, maka setiap bilangan bulat positif n dapat ditulis secara unik dalam bentuk

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0,$$

dengan k adalah bilangan bulat non negatif, n_i adalah bilangan bulat dengan $0 \leq n_i \leq p - 1$ untuk, $i = 0,1, \ldots, k$ dan $n_k \neq 0$ (Rosen, 2007).

Penulisan bilangan bulat n dengan basis p dinotasikan dengan $[n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_0]_p$ dan n_i disebut *digit*

Contoh 2.3 :

untuk $n = 12$

- Dalam basis $p = 2$

  $12 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$

  dan ditulis $[1100]_2$
- Dalam basis 3

  $12 = 1.3^2 + 1.3^1 + 0.3^0$

  dan ditulis $[110]_3$

Operasi penjumlahan dua bilangan, dapat dilakukan dengan cara menjumlahkan satu-persatu disetiap *digit* yang bersesuaian dari kedua bilangan tersebut, sehingga pada penjumlahan ini muncul pengertian tentang *carries* yaitu bilangan yang dipindahkan dari suatu kolom digit ke kolom digit disebelah kirinya. *Carries* muncul jika penjumlahan dua digit memperoleh nilai lebih dari basis yang digunakan, sehingga *Carries* akan bernilai 0 atau 1 (Rossen, 2007).

Sedangkan pada operasi pengurangan dua bilangan muncul pengertian *borro*w atau *meminjam* yaitu bilangan yang diambil dari kolom digit disebelah kirinya. Teknik meminjam ini dilakukan apabila angka digit pada pengurang lebih besar dari angka digit yang dikurang. *Borrow* bernilai sama dengan basis yang digunakan dalam operasi pengurangan tesebut.

Contoh 2.4 :

2.4.1 Penjumlahan dalam basis 10

```
 11    carries
195
 18    +
---
213
```

2.4.2 Penjumlahan dalam basis 2

```
 11      carries
 1011
  110    +
-----
10001
```

2.4.3 Pengurangan dalam basis 10

```
   1 0  borrow
 1 9 5
   1 8  −
 -----
 1 7 7
```

2.4.4 Pengurangan dalam basis 2

```
  2 2    borrow
11010
  101    −
-----
10101
```

Relasi Kongruensi

Karl Friedrich Gauss, seorang tokoh yang terkenal dalam bidang matematika, telah mengembangkan relasi kongruensi dua bilangan bulat. Relasi ini banyak digunakan dalam teori bilangan. Definisi kongruen dua bilangan bulat dan beberapa teorema yang berlaku dijelaskan berikut ini.

Definisi 2.7 :

Untuk bilangan bulat positif m, jika a, b bilangan bulat , *a* dikatakan kongruen ke *b* modulo *m* jika $m|(a - b)$. Ditulis dengan $a \equiv b(mod\, m)$ (Rossen,2007). Sedangkan jika *a* tidak kongruen ke *b* modulo *m* dinotasikan dengan $a \not\equiv b(mod\, m)$

Contoh 2.5:

$13 \equiv 3(mod\, 5)$ karena $5|(13 - 3)$

$18 \equiv 3(mod\, 5)$ karena $5|(18 - 3)$

$32 \equiv 4(mod\, 7)$ karena $7|(32 - 4)$

Selanjutnya kita membahas beberapa teorema dalam kongruensi

Teorema 2.3

Untuk bilangan bulat positif m, kongruensi dalam modulo m bersifat :

(i). Refleksif , yaitu jika a bilangan bulat maka $a \equiv a\ (modulo\ m)$.

(ii). Simetri, yaitu jika a dan b adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $a \equiv b\ (mod\, m)$ maka $b \equiv a\ (mod\, m)$.

(iii). Transitif, yaitu jika a, b dan c bilangan bulat dengan $a \equiv b\ (mod\, m)$ dan $b \equiv c\ (mod\, m)$, maka $a \equiv c\ (mod\, m)$

(Rossen, 2007).

Teorema 2.4

Untuk a dan b bilangan bulat, $a \equiv b\ (mod\, m)$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $a = b + km$ (Rossen, 2007).

Teorema2.5

Jika a, b, c dan m adalah bilangan bulat dengan $m > 0$ dengan $a \equiv b\ (mod\, m)$ maka :

(i). $a + c \equiv b + c\ (mod\, m)$

(ii). $a - c \equiv b - c\ (mod\, m)$

(iii). $ac \equiv bc\ (mod\, m)$

(Rossen,2007).

Teorema 2.6

Jika a, b, c, d dan m adalah bilangan bulat dengan $m > 0$ dengan $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $c \equiv m\ (mod\ m)$ maka :

(i). $a + c \equiv b + d\ (\ mod\ m)$

(ii). $a - c \equiv b - d\ (mod\ m)$

(iii). $ac \equiv bd\ \ (mod\ m)$

(Rossen, 2007).

Teorema2.7

Jika a, b, k dan m bilangan bulat dengan $k > 0, m > 0$ dan $a \equiv b\ (mod\ m)$ maka $a^k \equiv b^k\ \ (mod\ \ m)$ (Rossen,2007).

Teorema 2.8

Jika diketahui $a \equiv b\ (mod\ m_1)$,$a \equiv b\ (mod\ m_2)$, $a \equiv b\ (mod\ m_3)$,…, $a \equiv b\ (mod\ m_k)$ untuk $a, b, m_1, m_2, \dots, m_k$ bilangan bulat dan $m_1, m_2, \dots m_k > 0$, maka $a \equiv b\ (mod[m_1, m_2, \dots, m_k])$ dengan $[m_1, m_2, \dots, m_k]$ merupakan kelipatan persekutuan terkecil dari $m_1, m_2, \dots, m_k$ (Rossen, 2007).

2.2 Kombinasi

Jika A adalah himpunan yang mempunyai n obyek berbeda, maka dapat dibuat kombinasi r obyek anggota A dengan $r \leq n$. $C(n, r)$ adalah notasi yang menyatakan banyaknya kombinasi yang diperoleh dengan memilih r obyek dari sejumlah n obyek, atau ditulis dengan $\binom{n}{r}$.

Untuk selanjutnya kombinasi r obyek dari sejumlah n obyek akan menggunakan notasi $\binom{n}{r}$.

Teorema 2.9 (Teorema Binomial)

Untuk variabel x dan y dan bilangan bulat positif n, maka

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \quad \text{(Rossen,2007).}$$

Pada Teorema 2.9, $\binom{n}{r}$ merupakan koefisien dari suku-suku pada penjumlahan dan selanjutnya disebut sebagai koefisien binomial.

Definisi 2.8

Untuk bilangan bulat non negatif r, n dengan $r \leq n$, koefisien binomial $\binom{n}{r}$ didefinisikan sebagai :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Sedangkan untuk bilangan bulat positif r, n dengan $r > n$, didefinisikan $\binom{n}{r} = 0$ (Rossen,2007).

BAB 3
POLA ELEMEN –ELEMEN PADA
MATRIKS INVERS DARI MATRIKS SEGITIGA BAWAH PASCAL
MODULO *2*

Pada bab ini akan dicari pola dari elemen-elemen pada matriks invers dari matriks segitiga bawah Pascal. Tetapi sebelum mencari pola tersebut kita, akan membahas terlebih dahulu tentang barisan Thue - Morse dan matriks segitiga bawah Pascal.

3.1 BARISAN THUE - MORSE

Barisan Thue-Morse diungkapkan pertama kali oleh Axel Thue pada tahun 1906 dan dibahas kembali oleh Morse tahun 1921. Seperti halnya barisan yang lain maka barisan Thue - Morse juga mempunyai pola tertentu yaitu seperti yang didefinisikan berikut ini.

Definisi 3.1:

Barisan Thue - Morse atas $\{0,1\}$ dinotasikan dengan $\mathbb{t} = (t_n)_{n\geq 0}$ adalah barisan yang didefinisikan secara rekursif oleh

(i). $t_0 = 0$

(ii). $t_{2n} = t_n$

(iii). $t_{2n+1} = \overline{t_n}$ dengan $\overline{t_n} = 1 - t_n$ untuk semua $n \geq 0$

(Allouche & Shallit, 1999)

Pembentukan Barisan Thue - Morse Atas $\{0, 1\}$

Dalam proses pembentukkan barisan Thue-Morse diperlukan pengertian tentang representasi suatu bilangan pada basis tertentu yang sudah dijelaskan pada Teorema 2.2 bahwa suatu bilangan bulat positif n dapat dinyatakan dalam bentuk

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0$$

dengan bilangan bulat non negatif k, bilangan bulat n_i dengan $0 \leq n_i \leq p - 1$ untuk, $i = 0,1, \dots, k$ dan $n_k \neq 0$ (Rosen, 2007).

Selanjutnya untuk representasi bilangan bulat n dengan basis p menggunakan notasi $[n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0]_p$

Jika $p = 2$ maka representasi untuk bilangan bulat positif $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dalam basis 2 adalah sebagai berikut:

$0 = 0.2^0$ $\quad [0]_2 = 0$

$1 = 1.2^0$ $\quad [1]_2 = 1$

$2 = 1.2^1 + 0.2^0$ $\quad [2]_2 = 10$

$3 = 1.2^1 + 1.2^0$ $\quad [3]_2 = 11$

$4 = 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$ $\quad [4]_2 = 100$

$5 = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$ $\quad [5]_2 = 101$

$6 = 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$ $\quad [6]_2 = 110$

Selanjutnya untuk $[n]_p = [n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0]_p$ didefinisikan $s_p(n)$ sebagai penjumlahan dari n_i dengan $0 \leq i \leq k$ yaitu $s_p(n) = n_k + n_{k-1} + \cdots + n_2 + n_1 + n_0$. Jika $s_p(n)$ dinyatakan dalam modulo p maka untuk $p = 2$ dan $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ akan didapat

$s_2(0) = 0$ $\quad s_2(0) \pmod 2 = 0$

$s_2(1) = 1$ $\quad s_2(1) \pmod 2 = 1$

$s_2(2) = 1 + 0 = 1$ $\quad s_2(2) \pmod 2 = 1$

$s_2(3) = 1 + 1 = 2$ $\quad s_2(3) \pmod 2 = 0$

$s_2(4) = 1 + 0 + 0 = 1$ $\quad s_2(4) \pmod 2 = 1$

$s_2(5) = 1 + 0 + 1 = 2$ $\quad s_2(5) \pmod 2 = 0$

$s_2(6) = 1 + 1 + 0 = 2$ $\quad s_2(6) \pmod 2 = 0$

Dari hasil perhitungan di atas diperoleh barisan $s_2(0) \pmod{2}, s_2(1) \pmod{2}$, $s_2(2) \pmod{2}, s_2(3) \pmod{2}, s_2(4) \pmod{2}, s_2(5) \pmod{2}, s_2(6) \pmod{2}$
$= 0110100$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa ada pola yang sama antara barisan di atas dengan pola yang didefinisikan dalam barisan Thue Morse

(i). $s_2(0) \pmod 2 = 0$

(ii). $s_2(2) \pmod 2 = s_2(1) \pmod 2$

$s_2(4) \pmod 2 = s_2(2) \pmod 2$

$s_2(6) \pmod 2 = s_2(3) \pmod 2$

$s_2(2\mathrm{n}) \pmod 2 = s_2(\mathrm{n}) \pmod 2$

(iii). $s_2(1) \pmod 2 = 1 - s_2(0) \pmod 2$

$s_2(3) \pmod 2 = 1 - s_2(1) \pmod 2$

$s_2(5) \pmod 2 = 1 - s_2(2) \pmod 2$

$s_2(2\mathrm{n}+1) \pmod 2 = 1 - s_2(\mathrm{n}) \pmod 2$

Ternyata pola yang kita dapat dari pembahasan di atas sama dengan pola dari definisi barisan Thue-Morse.

Selanjutnya jika $(s_2(n) \text{ (mod2)})_{n\geq 0}$ dinyatakan sebagai $t(n)$ maka didapat $\mathbb{t} = \big(t(n) = s_2(n) \text{ (mod2)}\big)_{n=0}^{6} = 0110100$

Seperti barisan pada umumnya maka barisan Thue - Morse ini dapat dilanjutkan untuk n yang lebih besar misalnya :

- Untuk $n = 7$ di dapat $\mathbb{t} = \{t(n) = s_2(n) \text{ (mod2)}\}_{n=0}^{7} = 01101001$.
- Untuk $n = 8$ didapat $\mathbb{t} = \{t(n) = s_2(n) \text{ (mod2)}\}_{n=0}^{8} = 011010011$
- Untuk n besar adalah $\mathbb{t} = \{t(n) = s_2(n) \text{ (mod2)}\}_{n=0}^{\infty} = 0110100110010$ ...

Definisi 3.2:

Jika pada barisan Thue – Morse yang didefinisikan sebagai berikut,angka 0 diganti dengan huruf *a* dan angka 1 dengan huruf *b* maka didapat barisan dalam alphabet {a, b}yang dinamakan barisan Thue –Morse dalam huruf. (Callan ,2006).

Contoh 3.1:

3.1.1. Untuk $n = 6$, $\mathbb{t} = abbabaa$.

3.1.2. Untuk $n = 8$, $\mathbb{t} = abbabaabb$

3.1.3. Untuk n yang besar , $\mathbb{t} = abbabaabbaaba$ ...

Jika barisan Thue- Morse sebelumnya terdiri atas 0 dan 1 maka berikut ini akan didefinisikan barisan Thue- Morse yang terdiri atas angka -1 dan 1 yang selanjutnya akan didefinisikan sebagai barisan Thue – Morse ± 1

Definisi 3.3

Jika huruf a dan huruf b pada barisan Thue-Morse dalam kata diganti dengan 1 dan – 1 berturut-turut maka diperoleh barisan Thue – Morse ± 1 (Imani & Mochddamfar, 2010).

Contoh 3.2:

Untuk $n = 6$, $n = 8$ dan n yang besar dari contoh 3.1 didapat :

3.2.1. Untuk $n = 6$, $\mathbb{t} = 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1$.

3.2.2. Untuk $n = 8$, $\mathbb{t} = 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1$

3.2.3. Untuk n □ $\mathbb{t} = 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, \ldots$

3.2 MATRIKS SEGITIGA BAWAH PASCAL MODULO *P*

Pada Definisi 2.3 telah dijelaskan bahwa suatu matriks persegi A disebut matriks segitiga bawah jika memenuhi $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$ dan a_{ij} sembarang untuk $i \geq j$. Berikut ini akan didefinisikan suatu matriks segitiga bawah yang elemen a_{ij} untuk $i \geq j$ mempunyai aturan tertentu.

Suatu matriks persegi A beorder m dinotasikan dengan $\mathrm{A_m}$, contoh untuk m = 7 dinotasikan dengan $\mathrm{A_7}$,untuk m = 9 dinotasikan dengan $\mathrm{A_9}$.

Definisi 3.4:

Suatu matriks A_m disebut matriks segitiga bawah Pascal berorder m jika untuk $i = 0, 1, 2 \ldots, \mathrm{m} - 1$ dan $j = 0, 1, 2 \ldots, \mathrm{m} - 1$ elemen–elemennya memenuhi :

$$\begin{cases} (a_{ij}) = 0 & \text{untuk } i < j \\ (a_{ij}) = \binom{i}{j} = \frac{i!}{(i-j)!j!} & \text{untuk } i \geq j \end{cases}$$

(Imani & Mochddamfar, 2010).

Contoh 3.3 :

3.3.1. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.3.2. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3.3.3. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3.3.4. $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

3.3.5. $A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Dari Contoh 3 terlihat bahwa matriks segitiga bawah Pascal A_3 adalah submatriks dari A_4, matriks A_4 submatriks dari A_5, matriks A_5 submatriks dari A_7, matriks A_7 submatriks dari A_9 dan A_9 adalah submatriks dari matriks segitiga bawah Pascal A_m seperti yang sudah dijelaskan pada Definisi 2.2. .

Sesuai dengan definisi matriks segitiga bawah Pascal yaitu untuk $i = j$ berlaku $(a_{ii}) = \binom{i}{i} = 1$, maka determinan dari matriks segitiga bawah Pascal adalah 1 karena nilai determinan dari suatu matriks segitiga adalah perkalian dari elemen–elemen pada diagonal utama (Ortega,1987).

Selanjutnya jika elemen–elemen pada suatu matriks segitiga bawah Pascal A_m dinyatakan dalam modulo p, dengan p adalah bilangan prima, maka matriks tersebut dinamakan matriks segitiga bawah Pascal modulo p dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{A_{m,p}}$ dan elemen-elemennya adalah $\left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)_{\boldsymbol{p}}$ dengan $0 \le i \le m-1$, $0 \le j \le m-1$

Definisi 3.5:

Suatu matriks $\boldsymbol{A_{m,p}}$ disebut matriks segitiga bawah Pascal modulo p jika untuk $i = 0, 1, 2 \ldots, m-1$ dan $j = 0, 1, 2 \ldots, m-1$ elemen–elemennya memenuhi :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a_{ij}})_p = 0 \quad , & \text{untuk } i < j \\ (\boldsymbol{a_{ij}})_p = \binom{i}{j} = \dfrac{i!}{(i-j)!\,j!} \quad (mod\, p) & \text{untuk } i \geq j \end{cases}$$

(Imani & Mochddamfar, 2010).

Contoh 3.4 :

Untuk $p = 2$ maka untuk A_3 , A_4 , A_5 , A_7 dan A_9 pada Contoh 3.3 menjadi

3.4.1. $A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.4.2. $A_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.4.3. $A_{5,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.4.4. $A_{7,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.4.5. $A_{9,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sesuai dengan uraian sebelumnya bahwa determinan dari matriks segitiga bawah Pascal adalah 1, maka determinan dari matriks segitiga bawah Pascal modulo p juga 1 sehingga setiap matriks segitiga bawah Pascal modulo p mempunyai matriks invers yang dinotasikan dengan ${A_{m,p}}^{-1}$.

3.3 MATRIKS INVERS SEGITIGA BAWAH PASCAL MODULO *2*

Berikut ini akan dibahas hubungan antara elemen-elemen pada matriks invers dari matriks segitiga bawah Pascal modulo $p = 2$ dengan barisan Thue - Morse ± 1

Contoh 3.5 :

3.5.1. $A_{7,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka berdasarkan perhitungan

dengan menggunakan software Matlab diperoleh:

$$ {A_{7,2}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Pada kolom ke- 0 di ${A_{7,2}}^{-1}$ membentuk barisan Thue - Morse ± 1 yaitu $1, -1, -1, 1, -1, 1, 1$. seperti yang terlihat pada **Contoh 3.2.1.** untuk $n = 6$.

3.5.2. $A_{9,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

maka berdasarkan perhitungan dengan menggunakan software Matlab diperoleh:

$$A_{9,2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pada kolom ke-0 di $A_{9,2}{}^{-1}$ membentuk barisan Thue - Morse ± 1 yaitu $1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1$ seperti yang terlihat pada **Contoh 3.2.2.** untuk $n = 8$.

Dari pembahasan diatas terlihat ada hubungan antara elemen-elemen pada matriks invers dari matriks segitiga bawah pascal modulo $p = 2$ untuk orde 7 dan 9 dengan barisan Thue-morse ± 1 pada $n = 6$ dan $n = 8$.
David Callan menyatakan hubungan tersebut dalam suatu teorema yang dijelaskan berikut ini.

Teorema David Callan

Misalkan $A_{m,2}$ adalah matriks segitiga bawah Pascal modulo $p = 2$ maka matriks invers $A_{m,2}$ adalah matriks dengan elemen $(0, \pm 1)$, yang bersifat bahwa:

(i). Posisi elemen-elemen 0 akan sama dengan posisi elemen-elemen 0 pada` $A_{m,2}$ itu sendiri.

(ii). Elemen- elemen yang $\neq 0$ di setiap kolom akan membentuk barisan Thue - Morse ± 1.

(Callan D, 2006).

Untuk membuktikan teorema David Callan diperlukan beberapa definisi dan teorema yang akan dijelaskan berikut ini .

Definisi 3.6

Andaikan p adalah bilangan prima , i dan j adalah bilangan bulat positif. Jika i dan j dinyatakan dalam basis p yaitu $i = \sum_{k\geq 0} i_k p^k$ dan $= \sum_{k\geq 0} j_k p^k$, maka ***i* dikatakan *p-free* dari *j*** jika $0 \leq i_k + j_k \leq p - 1$ untuk setiap k (Imani & Mochddamfar,2010).

Contoh 3.6 :

3.6.1. Untuk $p = 2$, $i = 38$ dan $j = 25$

$$38 = 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$
$$25 = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$$

$$\begin{array}{lcr} 38 & \longrightarrow & 100110 \\ 25 & \longrightarrow & 11001 \quad + \\ \hline & & 111111 \end{array}$$

maka 38 dikatakan *2-free* dari 25.

3.6.2. Untuk $p = 3$, $i = 38$ dan $j = 25$

$$38 = 1.3^3 + 1.3^2 + 0.3^1 + 2.3^0$$
$$25 = 2.3^2 + 2.3^1 + 1.3^0$$

$$\begin{array}{lcrl} 38 & \longrightarrow & 1102 & \\ 25 & \longrightarrow & 221 & + \\ \hline & & 1323 & \longrightarrow 2100 \end{array}$$

maka 38 tidak *3-free* dari 25

Selain Definisi 3.6 diperlukan juga pendefinisian suatu matriks segitiga bawah yang elemen-elemen ke (i,j) diperoleh dengan cara mengalikan kombinasi $\binom{i}{j} \ (mod\, p)$ dengan fungsi x, dimana x sembarang.

Definisi 3.7

Untuk x sembarang , $A_m(x)$ adalah matriks segitiga bawah dengan elemen-elemen $\left(a_{ij}\right)_p(x)$ memenuhi

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{a_{ij}}\right)_{\boldsymbol{p}}(x) = \binom{i}{j}(x)^{s_p(i-j)}\ (mod\,p), & \text{untuk } i \geq j \geq 0 \\ & \text{dan } (i-j)\ p-free \text{ dari } j \\ \left(a_{ij}\right)_p(x) = 0 & \text{, untuk } i < j \\ & atau (i-j) \text{ tidak } p-free \text{ dari } j \end{cases}$$

(Imani & Mochddamfar,2010).

Sesuai dengan Definisi 3.7, untuk $m = 5$ dan $p = 2$ akan didapat matriks $A_5(x)$ dengan elemen-elemen $\left(a_{ij}\right)_2(x)$ sebagai berikut :

- Untuk $i < j$, $\left(a_{ij}\right)_2(x) = 0$
- Untuk $i \geq j \geq 0$, $\left(a_{ij}\right)_2(x)$ dapat dilihat pada Tabel 3.1

Tabel 3.1(elemen-elemen $\left(a_{ij}\right)_2(x)$)

i	j	$\binom{i}{j}$ $(mod 2)$	$(i-j)$	$[i-j]_2$	$[j]_2$	$s_2(i-j)$	$\left(a_{ij}\right)_2(x)$	$(i-j)$ Terhadap j
0	0	1	0	0	0	0	1	*2-free*
1	0	1	1	1	0	1	x	*2-free*
1	1	1	0	0	1	0	1	*2-free*
2	0	1	2	10	0	1	x	*2-free*
2	1	0	1	1	1	1	0	Tidak 2 - free
2	2	1	0	0	10	0	1	*2-free*
3	0	1	3	11	0	2	x^2	*2-free*
3	1	1	2	10	1	1	x	*2-free*
3	2	1	1	1	10	1	x	*2-free*

3	3	1	0	0	11	0	1	*2-free*
4	0	1	4	100	0	1	x	*2-free*
4	1	0	3	11	1	2	0	Tidak 2-free
4	2	0	2	10	10	1	0	*2-free*
4	3	0	1	1	11	1	0	Tidak 2-free
4	4	1	0	0	100	0	1	*2-free*

Sehingga diperoleh matriks $A_5(x)$ yaitu :

$$A_5(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sedangkan untuk matriks yang mempunyai order lebih besar, maka elemen $(a_{ij})_2(x)$ dapat diperoleh dengan melanjutkan perhitungan yang ada di Tabel 3.1. Untuk $m = 7$ atau $m = 9$ elemen-elemen $(a_{ij})_2(x)$ dapat dilihat pada Tabel 3.2

Tabel 3.2 (elemen-elemen $(a_{ij})_2(x)$)

i	j	$\binom{i}{j}$ $(mod 2)$	$(i-j)$	$[i-j]_2$	$[j]_2$	$s_2(i-j)$	$(a_{ij})_2(x)$	$(i-j)$ Terhadap j
5	0	1	5	101	0	2	x^2	*2-free*
5	1	1	4	100	1	1	x	*2-free*
5	2	0	3	11	10	2	0	Tidak 2 - free
5	3	0	2	10	11	1	0	Tidak 2 - free

5	4	1	1	1	100	1	x	*2-free*
5	5	1	0	0	101	0	1	*2-free*
6	0	1	6	110	0	2	x^2	*2-free*
6	1	0	5	101	1	2	0	Tidak 2 - free
6	2	1	4	100	10	1	x	*2-free*
6	3	0	3	11	11	2	0	Tidak 2 - free
6	4	1	2	10	100	1	x	*2-free*
6	5	0	1	1	101	1	0	Tidak 2-free
6	6	1	0	0	110	0	1	*2-free*
7	0	1	7	111	0	3	x^3	*2-free*
7	1	1	6	110	1	2	x^2	*2-free*
7	2	1	5	101	10	2	x^2	*2-free*
7	3	1	4	100	11	1	x	*2-free*
7	4	1	3	11	100	2	x^2	*2-free*
7	5	1	2	10	101	1	x	*2-free*
7	6	1	1	1	110	1	x	*2-free*
7	7	1	0	0	111	0	1	*2-free*
8	0	1	8	1000	0	1	x	*2-free*
8	1	0	7	1001	1	2	0	Tidak 2-free
8	2	0	6	110	10	2	0	Tidak 2-free
8	3	0	5	101	11	2	0	Tidak 2-free

8	4	0	4	100	100	1	0	Tidak 2-free
8	5	0	3	11	101	2	0	Tidak 2-free
8	6	0	2	10	110	1	0	Tidak 2-free
8	7	0	1	1	111	1	0	Tidak 2-free
8	8	1	0	0	1000	0	1	*2-free*

Sehingga untuk $A_7(x)$ dan $A_9(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$A_7(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & x & 0 & x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_9(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & x & 0 & x & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & x^2 & x^2 & x & x^2 & x & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari penjelasan di atas terlihat bahwa $A_5(x)$ merupakan submatriks dari $A_7(x)$, dan $A_7(x)$ merupakan submatriks dari $A_9(x)$

Untuk $x = 1$ maka $A_5(1)$, $A_7(1)$ dan $A_9(1)$ diperoleh matriks segitiga bawah Pascal modulo 2, dengan kata lain $A_5(1) = A_{5,2}$, $A_7(1) = A_{7,2}$ dan $A_9(1) = A_{9,2}$. Sedangkan untuk $x = 0$, maka $A_5(0)$, $A_7(0)$ dan $A_9(0)$, merupakan matriks identitas untuk order yang bersesuaian.

Dari pembahasan di atas, untuk membuktikan teorema David Callan akan ditunjukkan berikut ini.

Sifat :

Untuk p prima, x dan y sembarang berlaku $A_m(x).A_m(y) = A_m(x+y)$

Sesuai dengan Definisi 2.3, jika matriks A adalah matriks $A_m(x)$ dan matriks B adalah $A_m(y)$ maka perkalian kedua matriks tersebut dinotasikan dengan $A_m(x.y)$, yang merupakan matriks dengan elemen-elemen $(a_{ij})_p(x.y)$ memenuhi :

$$(a_{ij})_p(x.y) = (a_{i0})_p(x).(a_{0j})_p(y) + (a_{i1})_p(x).(a_{1j})_p(y) + \ldots + (a_{i\,(m-1)})_p(x).(a_{(m-1)j})_p(y)$$

dengan $i = 0,1,2,\ldots,m-1$, $j = 0,1,2,\ldots,m-1$

$$(a_{ij})_p(x.y) = \sum_{k=0}^{m-1}(a_{ik})_p(x)\cdot(a_{kj})_p(y),$$

Sesuai dengan Definisi 3.7, maka untuk memperoleh elemen-elemen $(a_{ij})_p(x.y)$, akan dibagi dalam 3 kelompok berdasarkan i dan j

I. Untuk $i < j$

Jika matriks $A_m(x)$ dan matriks $A_m(y)$ keduanya merupakan matriks segitiga bawah, maka hasil perkalian kedua matriks tersebut adalah matriks segitiga bawah (Bill Jacob, 1990).

Dengan demikian untuk $i < j$ elemen-elemen $(a_{ij})_p(x.y) = 0$.

II. Untuk $i = j$

Elemen-elemen $(a_{ij})_p(x.y)$ untuk $i = j$ diperoleh dari perkalian elemen-elemen baris ke i dari $A_m(x)$ dengan kolom ke i dari $A_m(y)$, yang nilainya selalu 1 karena setiap pasangan dalam perkalian tersebut akan bernilai 0 kecuali pada pasangan $(a_{ii})_p(x)$ dan $(a_{ii})_p(y)$. Hal ini menyebabkan $(a_{ij})_p(x.y) = 1$

III. Untuk $i > j$

Pada kasus ke III, sesuai dengan definisi (3.7) akan dibagi lagi dalam 2 kasus yaitu

(a) Elemen $\left(a_{ij}\right)_p(x.y)$ dengan $(i-j)$ bukan merupakan $p - free$ dari j

(b) Elemen $\left(a_{ij}\right)_p(x.y)$ dengan $(i-j)$ merupakan $p - free$ dari j

Untuk membuktikan $i > j$ dengan kasus III (a) dan III (b) ini diperlukan lemma berikut :

Lemma 3.1

Untuk bilangan prima p, bilangan bulat positif i dan j dengan $i \geq j$, jika i dan j dinyatakan dalam basis p yaitu $i = \sum_{k\geq 0} i_k p^k$ dan $j = \sum_{k\geq 0} j_k p^k$, maka pernyataan berikut ini ekivalen:

(a) $(i-j)$ adalah *p-free* dari j

(b) $\square k \geq 0$, $i_k \geq j_k$

(c) Ada l antara i dan j sedemikian sehingga $(i-l)$ *p-free* dari l dan $(l-j)$ *p-free* dari j

(d) $0 \not\equiv \binom{i}{j} \ (mod\, p)$

(Imani & Mochddamfar,2010).

Sebelum membuktikan Lemma 3.1 ini perlu diperhatikan pengertian dan sifat-sifat berikut:

(1). Untuk bilangan bulat i dan j yang dinyatakan dalam basis p :

$$i = \sum_{k\geq 0} i_k p^k = i_k p^k + i_{k-1}p^{k-1} + \cdots + i_1 p^1 + i_0 p^0 = [i_k i_{k-1} \ldots i_1 i_0]_p$$

$$j = \sum_{k\geq 0} j_k p^k = j_k p^k + j_{k-1}p^{k-1} + \cdots + j_1 p^1 + j_0 p^0 = [j_k j_{k-1} \cdots j_1 j_0]_p$$

Untuk $i > j$, maka proses pengurangan $i - j$ akan dilakukan pada digit yang bersesuaian dan dimulai dari digit paling akhir.

Jka $i_k \geq j_k$ maka dapat langsung menggunakan operasi pengurangan, tetapi jika $i_k < j_k$ maka tehniknya dengan *meminjam* dari digit sebelumnya yang bernilai sama dengan basis p sehingga menjadi $p + i_k - j_k$. Dengan kata lain dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$(i - j)_k = \begin{cases} i_k - j_k & , \text{jika } i_k \geq j_k \\ p + i_k - j_k & , \text{jika } i_k < j_k \end{cases} \quad (3.2)$$

(2). Sifat Legendre

Untuk $i = \sum_{t=0}^{k} i_t p^t$, dan $S_p(i) = \sum_{t=0}^{k} i_t$, jika p^m, dengan p adalah bilangan prima, membagi $i!$ dan p^{m+1} tidak membagi $i!$ maka

$$m = \left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{p^3} \right\rfloor + \cdots. = \sum_{n=1}^{k} \left\lfloor \frac{i}{p^n} \right\rfloor = \frac{i - S_p(i)}{p - 1}$$

(Paulo Ribenboim,2004).

Bukti :

Diketahui p^m, dengan p adalah bilangan prima, membagi $i!$ dan p^{m+1} tidak membagi $i!$ artinya $i! = p^m c$ dengan $p \nmid c$ (3.3)

Andaikan $i = q_1 p + r$ dengan $q_1 \geq 0$ dan $0 \leq r < p$ maka $q_1 = \left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor$

Di antara bilangan 1, 2, …, i, ada sebanyak $\left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor$ bilangan yang habis dibagi p atau merupakan kelipatan dari p, yaitu $p, 2p, 3p, \ldots, \left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor p$

(Imani & Mochddamfar,2010).

Maka $i! = \left(p.2p.3p \ldots \left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor p\right) c_1$,dengan c_1 adalah perkalian bilangan antara 1, 2, .. i yang bukan merupakan kelipatan p, atau $p \nmid c_1$

Dengan kata lain $i! = \left(\left\{p.2p.3p \ldots \left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor p\right\} c_1\right)$, karena $q_1 = \left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor$ maka

$$i! = (p.2p.3p \ldots q_1 p) c_1$$

$$i! = [p^{q_1}(1.2 \ldots q_1)] c_1$$

$$i! = [p^{q_1}(q_1!)] c_1 \quad (3.4)$$

Di antara $1, 2, \ldots, q_1$, ada sebanyak $\left\lfloor \frac{q_1}{p} \right\rfloor$ bilangan yang merupakan kelipatan dari p, yaitu $p, 2p, 3p, \ldots, \left\lfloor \frac{q_1}{p} \right\rfloor p$

Maka $q_1! = \left| p.2p.3p \ldots \left\lfloor \frac{q_1}{p} \right\rfloor p \right| c_2$ dengan c_2 adalah perkalian bilangan antara $1, 2, \ldots, q_1$ yang bukan merupakan kelipatan p, atau $p \nmid c_2$

Maka dari persamaan (3.4) diperoleh

$$i! = \left| p^{q_1} \left(\left(p^{\left\lfloor \frac{q_1}{p} \right\rfloor} \left(\frac{q_1}{p} \right)! \right) c_2 \right) \right| c_1$$

$$i! = \left| p^{q_1 + \left\lfloor \frac{q_1}{p} \right\rfloor} \left(\left(\left(\frac{q_1}{p} \right)! \right) c_2 \right) \right| c_1$$

$$i! = \left[p^{\left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{p^2} \right\rfloor} \left(\left(\left\lfloor \frac{i}{p^2} \right\rfloor \right)! \right) c \right] \text{ dengan } p \nmid c \text{ dan } c = c_2 c_1$$

Jika proses tersebut dilakukan sampai $p^n \leq i$ sedemikian sehingga diperoleh

$$i! = \left(p^{\sum_{n=1}^{k} \left\lfloor \frac{i}{p^n} \right\rfloor} c \right) \text{ dengan } p \nmid c$$

Atau $\quad i! = p^{\sum_{n=1}^{k} \left\lfloor \frac{i}{p^n} \right\rfloor} .c$ dengan $p \nmid c$

Sedangkan persamaan (3.3) $\; i! = p^m c$ dengan $p \nmid c$, dari dua kesamaan tersebut diperoleh : $\; p^m c = p^{\sum_{n=1}^{k} \left\lfloor \frac{i}{p^n} \right\rfloor} .c$

maka $$m = \sum_{n=1}^{k} \left\lfloor \frac{i}{p^n} \right\rfloor \tag{3.5}$$

karena $i = \sum_{t=0}^{k} i_t p^t = i_k p^k + i_{k-1} p^{k-1} + \cdots + i_1 p^1 + i_0$, maka diperoleh

$$\left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor = i_k p^{k-1} + i_{k-1} p^{k-2} + \cdots + i_3 p^2 + i_2 p + i_1$$

$$\left\lfloor \frac{i}{p^2} \right\rfloor = i_k p^{k-2} + i_{k-1} p^{k-3} + \cdots + i_3 p^1 + i_2$$

$$\vdots$$

$$\left\lfloor \frac{i}{p^k} \right\rfloor = i_k$$

Jika dilakukan penjumlahan $\left\lfloor\frac{i}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{i}{p^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{i}{p^3}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{i}{p^k}\right\rfloor = \sum_{n=1}^{k}\left\lfloor\frac{i}{p^n}\right\rfloor$ akan didapat :

$$= i_1 + i_2(p+1) + i_3(p^2+p+1) + \cdots + i_k(p^{k-1} + p^{k-2} + \cdots + p + 1)$$

$$= \frac{1}{p-1}[i_1(p-1) + i_2(p^2-1) + \cdots + i_k(p^k - 1)]$$

$$= \frac{1}{p-1}[i_1p - i_1 + i_2p^2 - i_2 + \cdots + i_kp^k - i_k + i_0 - i_0]$$

$$= \frac{1}{p-1}[i_0 + i_1p + i_2p^2 + \cdots + i_kp^k - (i_0 + i_1 + i_2 + \cdots + i_{k-1} + i_k)]$$

$$= \frac{1}{p-1}[i - (i_0 + i_1 + i_2 + \cdots + i_{k-1} + i_k)]$$

$\sum_{n=1}^{k}\left\lfloor\frac{i}{p^n}\right\rfloor = \frac{i-(\sum_{t=0}^{k} i_t)}{p-1}$ atau

$$\sum_{n=1}^{k}\left\lfloor\frac{i}{p^n}\right\rfloor = \frac{i-S_p(i)}{p-1} \qquad (3.6)$$

Sesuai dengan persamaan (3.5) $m = \sum_{n=1}^{k}\left\lfloor\frac{i}{p^n}\right\rfloor$, sehingga jika persamaan (3.6) disubstitusi ke persamaan (3.5) didapat:

$$m = \sum_{n=1}^{k}\left\lfloor\frac{i}{p^n}\right\rfloor = \frac{i-S_p(i)}{p-1}$$

Maka sifat Legendre terbukti.

(3). Sifat Kummer

Misalkan $i = \sum_{t=0}^{k} i_tp^t$, $j = \sum_{s=0}^{r} j_sp^s$ dan $> j$,

Jika p^M dengan p prima membagi $\binom{i+j}{i}$, dan p^{M+1} tidak membagi $\binom{i+j}{i}$ maka $M = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ dengan $\varepsilon_0, \epsilon_1, \ldots \epsilon_k$ merupakan *carries* yang muncul pada penjumlahan i dan j yang dinyatakan dalam basis p (Paulo Ribenboim,2004).

Bukti :

Karena $= \sum_{t=0}^{k} i_tp^t$, $j = \sum_{s=0}^{r} j_sp^s$ dan $i > j$ maka $k \geq r$

$i \quad = [i_k\ i_{k-1}\ i_{k-2}\ \ i_{k-3}i_{k-4}i_{k-5}i_{k-6} \ldots\ldots i_3\ \ i_2\ \ i_1\ \ i_0]_p$

$j \quad = \quad [j_r \; j_{r-1} j_{r-2} j_{r-3} j_{r-4} \cdots \cdots j_3 \; j_2 \; j_1 \; j_0]_p$

Jika dilakukan penjumlahan $i + j$ maka proses penjumlahan $i + j$ ini dimulai dari digit paling akhir sampai digit terdepan sehingga diperoleh:

- $i_0 + j_0 = \varepsilon_0 p + c_0$ dengan $0 \leq c_0 \leq p$ dan ϵ_0 adalah caries yang muncul pada penjumlahan i_0 dan j_0
- $\varepsilon_0 + i_1 + j_1 = \varepsilon_1 p + c_1$ dengan $0 \leq c_1 \leq p$ dan ϵ_1 adalah caries yang muncul pada penjumlahan i_1 dan j_1
- $\vdots$
- $\varepsilon_{k-3} + i_{k-2} + j_r = \varepsilon_{k-2} p + c_{k-2}$, dengan $0 \leq c_{k-2} \leq p$ dan ϵ_{k-2} adalah caries yang muncul pada penjumlahan i_{k-2} dan j_r
- $\vdots$
- $\varepsilon_{k-1} + i_k = \varepsilon_k p + c_k$, dengan $0 \leq c_k \leq p$ dan ϵ_k adalah caries yang muncul pada penjumlahan i_k dan ϵ_{k-1}
- $\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} p = c_{k+1}$, dengan $0 \leq c_{k+1} \leq p$,

Sehingga penjumlahan ini dapat dinyatakan dalam basis p yaitu $(i + j) = \sum_{r=0}^{k+1} c_r p^r = [c_{k+1} c_k \, c_{k-1} \, c_{k-2} \, c_{k-3} \ldots \, c_2 \, c_1 \, c_0]_p$.

Untuk mendapatkan caries-caries, maka dilakukan penjumlahan pada semua ruas kiri dan ruas kanan pada persamaan-persamaan tersebut sehingga diperoleh :

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k) + (i_0 + i_1 + \cdots + i_{k-1} + i_k) + (j_0 + j_1 + \cdots + j_{r-1} + j_r) = p(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k) + (c_0 + c_1 + \cdots + c_{k-1} + c_k + c_{k+1}) \qquad (3.7)$$

Karena $i = \sum_{t=0}^{k} i_t p^t$, $j = \sum_{s=0}^{r} j_s p^s$ dan $(i + j) = \sum_{r=0}^{k+1} c_r p^r$ maka diperoleh $S_p(i) = \sum_{t=0}^{k} i_t$, $S_p(j) = \sum_{s=0}^{r} j_s$ dan $S_p(i + j) = \sum_{r=0}^{k+1} c_r$ sehingga berdasarkan persamaan (3.7) didapat :

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k) + s_p(i) + s_p(j) = $$
$$= p(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k) + s_p(i + j)$$

atau

$$s_p(i) + s_p(j) - s_p(i + j) = p(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k) - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k)$$

atau

$$s_p(i) + s_p(j) - s_p(i + j) = (p - 1)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k)$$

atau

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k) = \frac{1}{p-1}\left[s_p(i) + s_p(j) - s_p(i+j)\right]$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[s_p(i) + s_p(j) - s_p(i+j) + i + j - i - j\right]$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[(i+j) - s_p(i+j) - \left(i - s_p(i)\right) - \left(j - s_p(j)\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{p-1}\left((i+j) - s_p(i+j)\right)\right] - \left[\frac{1}{p-1}\left(i - s_p(i)\right)\right] - \left[\frac{1}{p-1}\left(j - s_p(j)\right)\right] \tag{3.8}$$

Berdasarkan sifat Legendre diperoleh:

- jika $p^m | i!$ dan $p^{m+1} \nmid i!$ maka $m = \left[\frac{1}{p-1}\left(i - s_p(i)\right)\right]$ sehingga dapat dinyatakan $i! = c_1 p^m$ dengan $p \nmid c_1$
- jika $p^n | j!$ dan $p^{n+1} \nmid j!$ maka $n = \left[\frac{1}{p-1}\left(j - s_p(j)\right)\right]$ sehingga dapat dinyatakan $j! = c_2 p^n$ dengan $p \nmid c_2$
- jika $p^k | (i+j)!$ dan $p^{k+1} \nmid (i+j)!$ maka $k = \left[\frac{1}{p-1}\left((i+j) - s_p(i+j)\right)\right]$ sehingga dapat dinyatakan $(i+j)! = c_3 p^k$ dengan $p \nmid c_3$

Karena $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$

$$= \frac{c_3 p^k}{c_1 p^m c_2 p^n} = p^{k-m-n} \frac{c_3}{c_1 c_2}$$

Jika $\frac{c_3}{c_1 c_2}$ disubstitusi dengan c maka :

$$\binom{i+j}{i} = p^{k-m-n} c$$

Karena $p \nmid c_1, p \nmid c_2$ dan $p \nmid c_3$ maka $p \nmid c$

sehingga $\binom{i+j}{i} = p^{k-m-n} c$ dan $p^{k-m-n+1} \nmid \binom{i+j}{i}$

atau

$$\binom{i+j}{i} = p^{\left\{\frac{1}{p-1}\left[(i+j) - s_p(i+j)\right]\right\} - \left\{\frac{1}{p-1}\left(i - s_p(i)\right)\right\} - \left\{\frac{1}{p-1}\left(j - s_p(j)\right)\right\}} c$$

Persamaan (3.8) menyatakan

$(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k)$

$$= \left\lfloor \frac{1}{p-1}\left[(i+j) - s_p(i+j)\right] \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{p-1}\left(i - s_p(i)\right) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{p-1}\left(j - s_p(j)\right) \right\rfloor$$

Maka dapat dinyatakan :

$p^{(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k)} \left| \binom{i+j}{i} \right.$

$(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k) = M$ merupakan banyaknya caries yang muncul pada penjumlahan i dan j yang dinyatakan dalam basis p

Maka sifat Kummer terbukti.

Berdasarkan pengertian (1) , sifat Legendre dan Kummer berikut ini akan dibuktikan lemma 3.1

Lemma 3.1 terdiri atas 4 pernyataan yang ekivalen, maka untuk membuktikan lemma 3.1 akan dilakukan dengan cara membuktikan $(a) \leftrightarrow (b)$, $(a) \leftrightarrow (c)$ dan $(a) \leftrightarrow (d)$.

(1). (a) ⟷ (b)

(⟶)

Akan dibuktikan jika $(i-j)$ adalah *p-free* dari j maka $\forall k \geq 0$, $i_k \geq j_k$

Bukti:

Pembuktian dilakukan dengan kontradiksi, yaitu diandaikan ada k sehingga $i_k < j_k$ maka berdasar (3.2)

$$(i-j)_k = p + i_k - j_k$$

$$(i-j)_k + j_k = p + i_k - j_k + j_k$$

$$(i-j)_k + j_k = p + i_k$$

Sedangkan pada $i = \sum_{k\geq 0} i_k p^k$ maka $0 \leq i_k \leq p-1$

berarti $i_k + p > p - 1$

dan menyebabkan $(i-j)_k + j_k > p - 1$

Hal ini menyatakan $(i-j)$ tidak *p-free* dari j maka kontradiksi dengan yang diketahui yaitu $(i-j)$ *p-free* dari j, sehingga pengandaian bahwa ada k sehingga $i_k < j_k$ salah atau $\forall k \geq 0$, $i_k \geq j_k$. Berarti terbukti bahwa jika $(i-j)$ adalah *p-free* dari j maka $\forall k \geq 0$, $i_k \geq j_k$

$(\leftarrow)$

Akan dibuktikan bahwa jika $\forall k \geq 0$, $i_k \geq j_k$ maka $(i - j)$ adalah *p-free* dari j

Bukti :

Karena $i = \sum_{k \geq 0} i_k p^k$ maka $0 \leq i_k \leq p - 1$

$\rightarrow \quad 0 \leq i_k + j_k - j_k \leq p - 1$ (3.9)

Menurut (3.2) jika $i_k \geq j_k$ maka $(i - j)_k = i_k - j_k$

Sehingga persamaan (3.9)

$$0 \leq i_k + j_k - j_k \leq p - 1$$

$$\rightarrow \quad 0 \leq (i - j)_k + j_k \leq p - 1$$

Sesuai dengan definisi 3.6, maka $(i - j)$ *p-free* dari j

Sehingga terbukti jika $\forall k \geq 0$, $i_k \geq j_k$ maka $(i - j)$ adalah *p-free* dari j.

$(a) \leftrightarrow (b)$ terbukti

(2). $(a) \leftrightarrow (c)$

$(\rightarrow)$

Akan dibuktikan jika $(i - j)$ adalah *p-free* dari j maka ada l antara i dan j sedemikian sehingga $(i - l)$ *p-free* dari l dan $(l - j)$ *p-free* dari j

Bukti :

Jika $(i - j)$ adalah *p-free* dari j menurut lemma 3.1 b) $\forall k \geq 0$, $i_k \geq j_k$

Ambil l untuk suatu k sedemikian sehingga , $i_k \geq l_k \geq j_k$ dengan $l = \sum_{k \geq 0} l_k p^k$

(i). Untuk $i_k \geq l_k$

Karena $0 \leq i_k \leq p - 1$

Maka $0 \leq i_k + l_k - l_k \leq p - 1$ (3.10)

berdasar (3.2) jika $i_k \geq l_k$ maka $(i - l)_k = i_k - l_k$

sehingga dari persamaan (3.10) diperoleh

$$0 \leq (i - l)_k + l_k \leq p - 1$$

Sesuai dengan definisi 3.6, maka $(i - l)$ *p-free* dari l

Dengan demikian terbukti jika $i_k \geq l_k$ maka $(i - l)$ adalah *p-free* dari l

(ii). Untuk $l_k \geq j_k$

Karena $0 \leq l_k \leq p - 1$

Maka $0 \le l_k + j_k - j_k \le p - 1$ (3.11)

berdasar (3.2) jika $l_k \ge j_k$ maka $(l - j)_k = l_k - j_k$

sehingga dari persamaan (3.11) diperoleh:

$$0 \le (l - j)_k + j_k \le p - 1$$

Sesuai dengan definisi 3.6, maka $(l - j)$ *p-free* dari j

Dengan demikian terbukti jika $l_k \ge j_k$ maka $(l - j)$ adalah *p-free* dari j

Dari (i) dan (ii)

terbukti jika $i_k \ge l_k \ge j_k$ maka $(i - l)$ adalah *p-free* dari l dan $(l - j)$ adalah *p-free* dari j

(⟵)

Akan dibuktikan jika ada l antara i dan j sedemikian sehingga $(i - l)$ *p-free* dari l dan $(l - j)$ *p-free* dari j maka $(i - j)$ adalah *p-free* dari j

Bukti :

Menurut lemma 3 .1 b

Jika $(i - l)$ *p-free* dari l maka $\forall k \ge 0$, $i_k \ge l_k$ dan

Jika $(l - j)$ *p-free* dari j maka $\forall k \ge 0$, $l_k \ge j_k$

Artinya berlaku $i_k \ge l_k \ge j_k$ atau $i_k \ge j_k$

Karena $0 \le i_k \le p - 1$

$\rightarrow 0 \le i_k - j_k + j_k \le p - 1$ (3.12)

berdasar (3.2) jika $i_k \ge j_k$ maka $(i - j)_k = i_k - j_k$

sehingga dari persamaan (3.12) diperoleh:

$$0 \le (i - j)_k + j_k \le p - 1$$

Sesuai dengan definisi 3.6, maka $(i - j)$ *p-free* dari j

Terbukti jika ada l antara i dan j sedemikian sehingga $(i - l)$ *p-free* dari l dan $(l - j)$ *p-free* dari j maka $(i - j)$ adalah *p-free* dari j

Dengan demikian $(a) \leftrightarrow (c)$ terbukti

(3). $(a) \leftrightarrow (d)$

(⟶)

Akan dibuktikan jika $(i - j)$ adalah *p-free* dari j maka $0 \not\equiv \binom{i}{j} \pmod{p}$.

Pembuktian hal tersebut dengan menggunakan sifat Kummer, yaitu

Untuk p prima, jika $p^M \left| \binom{j + (i-j)}{j} \right. = p^M \left| \binom{i}{j} \right.$ dan $p^{M+1} \nmid \binom{j + (i-j)}{j} = p^{M+1} \nmid \binom{i}{j}$ maka M merupakan *carries* yang muncul pada penjumlahan $(i - j)$ dan j yang dinyatakan dalam basis p yaitu 0. Dengan kata lain $p^0 \left| \binom{i}{j} \right.$ dan $p^1 \nmid \binom{i}{j}$. Dengan demikian $\binom{i}{j} \not\equiv 0 \ (mod\, p)$ atau berdasarkan sifat symmetry $0 \not\equiv \binom{i}{j} \ (mod\, p)$

(⟵)

Akan dibuktikan jika $0 \not\equiv \binom{i}{j} \ (mod\, p)$ maka $(i - j)$ adalah *p-free* dari j

Jika $0 \not\equiv \binom{i}{j} \ (mod\, p)$,maka $\binom{i}{j} \not\equiv 0 \ (mod\, p)$ artinya $\binom{i}{j} - 0 \neq kp, \square k$, sehingga $\binom{i}{j}$ dan p relatif prima atau $\binom{i}{j}$ dapat dibagi dengan p^k hanya apabila $k = 0$. Menurut sifat (i) dan (ii) karena $k = 0$ merupakan pangkat tertinggi p yang dapat membagi $\binom{i}{j}$ berarti *carries* pada penjumlahan $(i - j)$ dan j adalah 0, artinya $(i - j)$ *p-free* dari j terbukti

$(\boldsymbol{d}) \leftrightarrow (\boldsymbol{a})$ terbukti.

Dengan demikian lemma 3.1 terbukti

Setelah membuktikan lemma 3.1, maka kita kembali pada tujuan awal yaitu akan menunjukkan sifat $A_m(x).A_m(y) = A_m(x + y)$, untuk kasus III (a) pada elemen-elemen $(a_{ij})_p(x.y)$ dengan $(i - j)$ tidak $p - free$ dari j

Lemma 3.1 c menjelaskan, jika $(i - j)$ *p-free* dari j maka ada l antara i dan j sedemikian sehingga $(i - l)$ *p-free* dari l dan $(l - j)$ *p-free* dari j, maka pada elemen $(a_{ij})_p(x.y)$ dengan $(i - j)$ tidak $p - free$ dari j, tidak ada l antara i dan j yang menyebabkan $(i - l)$ akan *p-free* dari l ataupun menyebabkan $(l - j)$

p-free dari j. Akibatnya menurut definisi (3.7) $(a_{il})_p(x) = 0$ dan juga $(a_{kl})_p(y) = 0$. Dengan demikian berlaku:

$$(a_{ij})_p(x.y) = \sum_{l=0}^{m-1} (a_{il})_p(x) \cdot (a_{kl})_p(y) = 0$$

Selanjutnya kita akan menyelidiki kasus III (b) yaitu untuk elemen $(a_{ij})_p(x.y)$ dengan $(i-j)$ merupakan $-free$ dari j. Dan untuk kasus ini diperlukan sifat berikut:

(i). $\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j}$, $i \geq k \geq j$ (Imani & Mochddamfar,2010).

Bukti :

$$\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \frac{i!}{(i-k)!\,k!}\,\frac{k!}{(k-j)!\,j!}$$

$$= \frac{i!}{(i-k-j+j)!\,k!}\,\frac{k!}{(k-j)!\,j!}$$

$$= \frac{i!}{\{(i-j)-(k-j)\}!\,k!}\,\frac{k!}{(k-j)!\,j!}$$

$$= \frac{i!}{\{(i-j)-(k-j)\}!\,(i-j)!}\,\frac{(i-j)!}{(k-j)!\,j!}$$

$$= \frac{i!}{(i-j)!\,j!}\,\frac{(i-j)!}{\{(i-j)-(k-j)\}!\,(k-j)!}$$

$$= \binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j} \text{ terbukti}$$

(ii). untuk p prima berlaku $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod p$ untuk $1 \leq r \leq p-1$ (Chong and Meng,1999).

Bukti:

Sesuai dengan definisi 2.7 untuk $0 \leq r \leq p$, berlaku

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{r!(p-r)!} = \frac{p.(p-1)!}{r!(p-r)!} = p.\left[\frac{(p-1)!}{r!(p-r)!}\right]$$

Maka $\binom{p}{r}$ adalah kelipatan dari p, sehingga di dapat $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod p$ untuk $1 \leq r \leq p-1$ terbukti

(iii).Untuk x bilangan bulat dan p prima , berlaku $(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p$

Bukti:

Berdasarkan teorema 2.9

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} . y^r \tag{3.13}$$

Jika untuk $x = 1$, $y = x$ dengan x merupakan bilangan bulat dan $n = p$ dengan p prima disubstitusi pada persamaan (3.13) diperoleh :

$$(1+x)^p = \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} (1)^{p-r} . (x)^r = \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} (x)^r$$

$$= \binom{p}{0}(x)^0 + \binom{p}{1}(x)^1 + \binom{p}{2}(x)^2 + \binom{p}{3}(x)^3 + \cdots + \binom{p}{p-1}(x)^{p-1} + \binom{p}{p}(x)^p$$

Karena $\binom{p}{0} = 1$ dan $\binom{p}{p} = 1$ maka

$$= 1(x)^0 + \binom{p}{1}(x)^1 + \binom{p}{2}(x)^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}(x)^{p-1} + 1.(x)^p \tag{3.14}$$

Sesuai dengan sifat (ii) yang menyatakan $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod p$ untuk $1 \leq r \leq p-1$

maka dari persamaan (3.14) diperoleh :

$$(1+x)^p \equiv 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + x^p \pmod p$$

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p$$ terbukti

(iv). Untuk p prima dan x, k bilangan bulat berlaku

$$(1+x)^{p^k} \equiv 1 + x^{p^k} \pmod p$$

Bukti :

Pembuktian dengan induksi

Untuk $k = 1$ maka $(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p$ hal ini berlaku sesuai dengan sifat (iii).

Diasumsikan untuk $k = n$ berlaku $(1+x)^{p^n} \equiv 1 + x^{p^n} \pmod p$

Untuk $k = n + 1$

$$(1+x)^{p^{n+1}} = (1+x)^{p^n . p^1} = [(1+x)^{p^n}]^p \tag{3.15}$$

Telah diasunsikan bahwa $(1+x)^{p^n} \equiv 1 + x^{p^n} \pmod p$ dan berdasarkan teorema 2.7 ,maka sesuai dengan persamaan (3.15) diperoleh :

$$(1+x)^{p^{n+1}} = [(1+x)^{p^n}]^p \equiv [1 + x^{p^n}]^p \pmod p$$

Berdasarkan teorema 2.9 bahwa :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Untuk $x = 1, y = p^n$ dan $n = p$ diperoleh

$$\equiv \binom{p}{0}\left[x^{0.p^n}\right] + \binom{p}{1}\left[x^{1.p^n}\right] + \binom{p}{2}\left[x^{2.p^n}\right] + \cdots + \binom{p}{p-1}\left[x^{(p-1).p^n}\right]$$

$$+ \binom{p}{p}\left[x^{p.p^n}\right] (modp)$$

$$\equiv \binom{p}{0} + \binom{p}{1}\left[x^{1.p^n}\right] + \binom{p}{2}\left[x^{2.p^n}\right] + \cdots + \binom{p}{p-1}\left[x^{(p-1).p^n}\right]$$

$$+ \binom{p}{p}\left[x^{p^{n+1}}\right] (modp)$$

Karena $\binom{p}{0} = 1$ dan $\binom{p}{p} = 1$ maka

$$\equiv 1 + \binom{p}{1}\left[x^{1.p^n}\right] + \binom{p}{2}\left[x^{2.p^n}\right] + \cdots + \binom{p}{p-1}\left[x^{(p-1).p^n}\right]$$

$$+ 1\left[x^{p^{n+1}}\right] (modp)$$

Sesuai dengan sifat (ii) yang menyatakan $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod p$ untuk $1 \le r \le p - 1$

Maka:

$$\equiv 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \left[x^{p^{n+1}}\right] (modp)$$

$$\equiv 1 + \left[x^{p^{n+1}}\right] (modp)$$

Dengan demikian terbukti $(1+x)^{p^k} \equiv 1 + x^{p^k} \pmod p$

(v). Sifat Lucas

Untuk $= \sum_{t=0}^{k} i_t p^t$, $j = \sum_{s=0}^{d} j_s p^s$ dan $i \geq j$ berlaku :

$$\binom{i}{j} \equiv \binom{i_0}{j_0}\binom{i_1}{j_1}\dots\binom{i_d}{j_d} \ (mod\ p)$$

(Imani & Mochddamfar,2010).

Bukti :

Karena $i = \sum_{t=0}^{k} i_t p^t$ maka

$$(1+x)^i = (1+x)^{i_k p^k + i_{k-1} p^{k-1} + \dots + i_1 p^1 + i_0 p^0}$$

$$= (1+x)^{i_k p^k} . (1+x)^{i_{k-1} p^{k-1}} \dots (1+x)^{i_1 p^1} . (1+x)^{i_0 p^0}$$

$$= \left[(1+x)^{p^k}\right]^{i_k} . \left[(1+x)^{p^{k-1}}\right]^{i_{k-1}} \dots \left[(1+x)^{p^1}\right]^{i_1} \left[(1+x)^{p^0}\right]^{i_0} \quad (3.16)$$

Berdasarkan teorema 2.9 : $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} . y^r$ maka dari persamaan (3.16) diperoleh :

$$(1+x)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j = \left[(1+x)^{p^k}\right]^{i_k} . \left[(1+x)^{p^{k-1}}\right]^{i_{k-1}} \dots \left[(1+x)^{p^1}\right]^{i_1} \left[(1+x)^{p^0}\right]^{i_0}$$

Sesuai dengan sifat (iv) $(1+x)^{p^k} \equiv 1 + x^{p^k} \ (mod\ p)$, maka :

$$(1+x)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j$$

$$\equiv \left[\left(1+x^{p^k}\right)^{i_k} . \left(1+x^{p^{k-1}}\right)^{i_{k-1}} \dots \left(1+x^{p^1}\right)^{i_1} \left(1+x^{p^0}\right)^{i_0}\right] \quad (mod\ p)$$

$$\equiv \prod_{t=0}^{k} \left(1+x^{p^t}\right)^{i_t} \quad (mod\ p)$$

Dengan teorema 2.9 : $x = 1, y = x^{p^t}$ dan $n = i_t$ diperoleh :

$$\equiv \prod_{t=0}^{k} \left[\sum_{j_t=0}^{i_t} \binom{i_t}{j_t} \left(x^{p^t}\right)^{j_t}\right] \equiv \prod_{t=0}^{k} \left[\sum_{j_t=0}^{i_t} \binom{i_t}{j_t} x^{j_t p^t}\right] \quad (mod\ p)$$

$$\equiv \left[\left(\sum_{j_0=0}^{i_0}\binom{i_0}{j_0}x^{j_0p^0}\right)\left(\sum_{j_1=0}^{i_1}\binom{i_1}{j_1}x^{j_1p^1}\right)\dots\left(\sum_{j_{k-1}=0}^{i_{k-1}}\binom{i_{k-1}}{j_{k-1}}x^{j_{k-1}p^{k-1}}\right)\left(\sum_{j_k=0}^{i_k}\binom{i_k}{j_k}x^{j_kp^k}\right)\right]$$

$$(mod\, p)$$

$\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^j \equiv$

$$\sum_{j_0=0}^{i_0}\sum_{j_1=0}^{i_1}\cdots\sum_{j_{k-1}}^{i_{k-1}}\sum_{j_k}^{i_k}\binom{i_0}{j_0}\binom{i_1}{j_1}\dots\binom{i_{k-1}}{j_{k-1}}\binom{i_k}{j_k}x^{j_0p^0+j_1p^1+\dots+j_{k-1}p^{k-1}+j_kp^k}$$

$$(mod\, p) \quad (3.17)$$

Penjumlahan pada ruas kiri akan ada sebanyak $(i+1)$suku dengan koefisien dari x^j pada setiap suku adalah $\binom{i}{j}$ dan nilai j bergerak dari 0 sampai i. Sementara koefisien dari $x^{j_0p^0+j_1p^1+\dots+j_{k-1}p^{k-1}+j_kp^k}$ pada ruas kanan ditentukan oleh $\binom{i_0}{j_0}\binom{i_1}{j_1}\dots\binom{i_{k-1}}{j_{k-1}}\binom{i_k}{j_k}$.

Karena penyajian j dalam basis p bersifat unik, maka

$$\binom{i}{j} \equiv \binom{i_0}{j_0}\binom{i_1}{j_1}\dots\binom{i_{k-1}}{j_{k-1}}\binom{i_k}{j_k}\ (mod\, p) \quad (3.18)$$

Diketahui bahwa $i = \sum_{t=0}^{k} i_t p^t$, $j = \sum_{s=0}^{d} j_s p^s$ dan $i \geq j$ artinya $k \geq d$ .Jika $k > d$ akan diperoleh $\binom{i_k}{0} = 1$,maka perkalian (3.18) ditentukan sampai $k = d$

Sehingga dari persamaan (3.18) didapat:

$$\binom{i}{j} \equiv \binom{i_0}{j_0}\binom{i_1}{j_1}\dots\binom{i_{d-1}}{j_{d-1}}\binom{i_d}{j_d}\ (mod\, p)$$

Dengan demikian sifat Lucas terbukti

(vi). Untuk p prima,i dan a bilangan bulat positif dengan

$i = \sum_{t=0}^{k} i_t p^t$, $s_p(i) = \sum_{t=0}^{k} i_t$ dan $a = \sum_{q=0}^{r} a_q p^q$, $s_p(a) = \sum_{q=0}^{r} a_q = d$

berlaku :

$\sum_{\substack{a=0\\ s_p(a)=d}}^{i}\binom{i}{a} \equiv \binom{s_p(i)}{d}\ (mod\, p)$ (Imani & Mochddamfar,2010).

Bukti:

$(1+x)^{s_p(i)} = (1+x)^{i_0+i_1+\dots+i_k}$

$(1+x)^{s_p(i)} = (1+x)^{i_0}(1+x)^{i_1} \dots (1+x)^{i_k}$

Berdasarkan teorema 2.9 : $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r}.y^r$ diperoleh :

$$\sum_{d=0}^{s_p(i)} \binom{s_p(i)}{d} x^d = \sum_{a_0=0}^{i_0} \binom{i_0}{a_0} x^{a_0}. \sum_{a=0}^{i_1} \binom{i_1}{a_1} x^{a_1} \dots \sum_{a_r=0}^{i_k} \binom{i_k}{a_r} x^{a_r}$$

$$\sum_{d=0}^{s_p(i)} \binom{s_p(i)}{d} x^d = \sum_{a_0=0}^{i_0} \sum_{a_1=0}^{i_1} \dots \sum_{a_r=0}^{i_k} \binom{i_0}{a_0}\binom{i_1}{a_1} \dots \binom{i_k}{a_r} x^{a_0+a_1+\dots+a_r}.$$

Untuk $d = a_0 + a_1 + \dots + a_r$

$$\sum_{d=0}^{s_p(i)} \binom{s_p(i)}{d} x^d = \sum_{a_0=0}^{i_0} \sum_{a_1=0}^{i_1} \dots \sum_{a_r=0}^{i_k} \binom{i_0}{a_0}\binom{i_1}{a_1} \dots \binom{i_k}{a_r} x^d$$

Dengan membandingkan pangkat dari x pada ruas kiri dan kanan persamaan tersebut, terlihat disebelah kiri ditentukan oleh $\binom{s_p(i)}{d}$ sedangkan ruas kanan oleh $\binom{i_0}{a_0}\binom{i_1}{a_1} \dots \binom{i_k}{a_r}$maka

$$\binom{s_p(i)}{d} = \binom{i_0}{a_0}\binom{i_1}{a_1} \dots \binom{i_k}{a_r} \qquad (3.19)$$

Dengan sifat Lucas maka dari persamaan (3.19) diperoleh

$$\binom{s_p(i)}{d} = \binom{i_0}{a_0}\binom{i_1}{a_1} \dots \binom{i_k}{a_r} \equiv \binom{i}{a} \ (mod\ p)$$

Maka :

$$\binom{s_p(i)}{d} \equiv \binom{i}{a} \ (mod\ p)$$

Dengan sifat simetri

$$\binom{i}{a} \equiv \binom{s_p(i)}{d} \ (mod\ p)$$

terbukti

Selanjutnya dengan menggunakan lemma 3.1 dan sifat (i) sampai (vi) tersebut akan dibahas kasus III (b) yaitu untuk elemen $(a_{ij})_p(x.y)$ dengan $(i-j)$ bersifat $p - free$ terhadap j dengan $i > j$

Lemma 3.1 menyatakan jika $i - j$ bersifat *p-free* dari j maka ada l antara i dan j sedemikian sehingga $(i-l)$ *p-free* dari l dan $(l-j)$ *p-free* dari j,

$(a_{il})_p(x) = \binom{i}{l} x^{s_p(i-l)} \pmod p$ dan $(a_{lj})_p(y) = \binom{l}{j} y^{s_p(l-j)} \pmod p$ sesuai Definisi 3.7

Pembahasan kasus ini dimulai dengan

$$(a_{ij})_p(x.y) = \sum_{l=j}^{i} (a_{il})_p(x) \cdot (a_{lj})_p(y)$$

$$= \sum_{l=j}^{i} \binom{i}{l} x^{s_p(i-l)} \binom{l}{j} y^{s_p(l-j)} \pmod p$$

$$= \sum_{l=j}^{i} \binom{i}{l}\binom{l}{j} x^{s_p(i-l)} y^{s_p(l-j)} \pmod p \qquad (3.20)$$

Berdasarkan sifat $\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j}$, $i \geq k \geq j$ maka dari persamaan (3.20) diperoleh

$$= \sum_{l=j}^{i} \binom{i}{j}\binom{i-j}{l-j} x^{s_p(i-l)} y^{s_p(l-j)} \pmod p$$

$$= \sum_{l=0}^{i-j} \binom{i}{j}\binom{i-j}{(l+j)-j} x^{s_p(i-(l+j))} y^{s_p((l+j)-j)} \pmod p$$

$$= \sum_{l=0}^{i-j} \binom{i}{j}\binom{i-j}{l} x^{s_p((i-j)-l)} y^{s_p(l)} \pmod p \qquad (3.21)$$

Lemma 3.1 juga menyatakan $(i-j)$ $p-free$ terhadap j jika dan hanya jika $0 \not\equiv \binom{i}{j} \pmod p$, sehingga $\{(i-j)-l\}$ $p-free$ terhadap l jika dan hanya jika $0 \not\equiv \binom{(i-j)}{l} \pmod p$.

Untuk $i \geq j$ dan $(i-j)$ $p-free$ terhadap j maka $s_p(i-j) = s_p(i) - s_p(j)$ sehingga untuk $(i-j) \geq l$ dan $\{(i-j)-l\}$ $p-free$ terhadap l berlaku $s_p((i-j)-l) = s_p(i-j) - s_p(l)$

Maka dari persamaan (3.21) diperoleh:

$$= \binom{i}{j} \sum_{l=0}^{i-j} \binom{i-j}{l} x^{s_p(i-j)-s_p(l)} y^{s_p(l)} \pmod p$$

Dengan sifat (vi):

$$\equiv \binom{i}{j}\left[\sum_{s_p(l)=0}^{s_p(i-j)} \binom{s_p(i-j)}{s_p(l)} x^{s_p(i-j)-s_p(l)} y^{s_p(l)}\right] \pmod p$$

Untuk $s_p(l) = c$ maka

$$\equiv \binom{i}{j}\left[\sum_{c=0}^{s_p(i-j)} \binom{s_p(i-j)}{c} x^{s_p(i-j)-c} y^{c}\right] \pmod p$$

Dengan teorema binomial

$$\equiv \binom{i}{j} (x+y)^{s_p(i-j)} \pmod p$$

$$= (a_{ij})_p(x+y) \ (\text{modp})$$

Sehingga diperoleh bahwa untuk $i > j$ dan $(i-j)$ merupakan $p - free$ dari j diperoleh :

$$(a_{ij})_p(x.y) = \binom{i}{j} (x+y)^{s_p(i-j)} \pmod p$$

Pada halaman 24 telah dijelaskan bahwa $(a_{ij})_p(x.y)$ merupakan elemn-elemen dari matriks $A_m(x.y)$, yang merupakan hasil perkalian antara $A_m(x)$ dan $A_m(y)$. Berdasarkan pembahasan sebelumnya diperoleh :

i. $i < j$ diperoleh $(a_{ij})_p(x.y) = 0$
ii. $i = j$ diperoleh $(a_{ij})_p(x.y) = 1$
iii. $i > j$ dan $(i-j)$ tidak $p - free$ dari j diperoleh $(a_{ij})_p(x.y) = 0$
iv. $i > j$ dan $(i-j)$ merupakan $p - free$ dari j diperoleh

$$(a_{ij})_p(x.y) = \binom{i}{j} (x+y)^{s_p(i-j)} \pmod p$$

Dengan menggunakan definisi 3.7 untuk $A_m(x+y)$ adalah matriks dengan elemen-elemen $(a_{ij})_p(x+y)$ memenuhi:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{p}}(x+y) = \binom{i}{j} (x+y)^{s_p(i-j)} \pmod p, & \text{untuk } i \geq j \geq 0 \\ & \text{dan } (i-j) \text{ p} - free \text{ dari } j \\ (a_{ij})_p(x+y) = 0 & \text{, untuk } i < j \\ & atau (i-j) \text{ tidak } p - free \text{ dari } j \end{cases}$$

Dapat disimpulkan:

(1). untuk $i < j$ $atau (i-j)$ tidak $p - free$ dari j diperoleh $(a_{ij})_p(x+y) = 0 = (a_{ij})_p(x.y)$

(2). untuk $i = j$ diperoleh $(a_{ij})_p(x+y) = \binom{i}{i}(x+y)^{s_p(0)}$

$$= 1(x+y)^0$$

$$= 1$$

$$(a_{ij})_p(x+y) = (a_{ij})_p(x.y)$$

(3). Untuk $(i-j)$ $p - free$ dari j $(\boldsymbol{a_{ij}})_{\boldsymbol{p}}(x+y) = \binom{i}{j}(x+y)^{s_p(i-j)} \ (modp)$

$$= (a_{ij})_p(x.y)(\ mod\ p)$$

Dengan demikian sifat $A_m(x).A_m(y) = A_m(x+y)$. terbukti

Akibat 3.1

Untuk n bilangan bulat positif maka $A_m(x)^n = A_m(nx)$

Bukti dengan induksi

Jika $n = 1$ maka $A_m(x)^1 = A_m(x)$

$A_m(x) = A_m(x)$ benar

Andaikan untuk $n = k$, $A_m(x)^k = A_m(kx)$ diasumsikan benar

Selanjutnya untuk $n = k+1$ akan ditunjukkan berlaku

$$A_m(x)^{k+1} = A_m((k+1)x)$$

$$A_m(x)^{k+1} = A_m(x)^k.A_m(x)^1$$

Karena diasumsikan bahwa $A_m(x)^k = A_m(kx)$

Maka $A_m(x)^{k+1} = \{A_m(kx) \,.\, A_m(x)^1\}$

Dengan sifat $A_m(x).A_m(y) = A_m(x+y)$

$$A_m(x)^{k+1} = \{A_m(kx+x)\}$$

$$A_m(x)^{k+1} = A_m((k+1)x)$$

Sehingga diperoleh :

$$A_m(x)^{k+1} = A_m((k+1)x)$$

maka $A_m(x)^n = A_m(nx)$ terbukti

Akibat 3.2

Jika r bilangan rasional , maka $A_m(r) = A_m(1)^r$

Bukti :

Misalkan r bilangan rasional, maka r dapat dinyatakan sebagai $r = \frac{m}{n}$ dengan m, n bilangan bulat positif

Akibat 3.1 menyatakan untuk n bilangan bulat positif maka $A_m(x)^n = A_m(nx)$

Jika x diganti dengan $\frac{m}{n}$ maka akan diperoleh :

$$A_m(\frac{m}{n})^n = A_m\left(n\frac{m}{n}\right)$$

$$= A_m(m.1)$$

$$= A_m(1.m)$$

$$A_m(r)^n = A_m(1)^m \tag{3.22}$$

Untuk $n = 1$ maka $r = \frac{m}{n} = m$

Maka dari persamaan (3.22) diperoleh :

$$A_m(r)^1 = A_m(1)^r \quad \text{terbukti}$$

Selanjutnya untuk r negative , ambil $r = -1$

Maka $\quad A_m(-1) = A_m(1)^{-1}$

Sesuai sifat $A_m(x).A_m(y) = A_m(x + y)$

$$A_m(1).A_m(-1) = A_m(0) \tag{3.23}$$

Sebelumnya telah dijelaskan dengan definisi 3.7 serta tabel 3.1 dan 3.2 diperoleh :

$$A_5(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & x & 0 & x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_9(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & x & 0 & x & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & x^2 & x^2 & x & x^2 & x & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk $x = 1$ akan diperoleh :

$$A_5(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_9(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks $A_5(1), A_7(1)$ dan $A_5(1)$ sama dengan matriks segitiga bawah Pascal modulo 2 yang dinotasikan $A_{5,2}$, $A_{7,2}$ dan $A_{9,2}$ (perhatikan contoh 3.4.3. , 3.4.4 dan 3.4.5). Matriks $A_{5,2}$ adalah submatriks dari $A_{7,2}$, matriks $A_{7,2}$ adalah submatriks dari matriks $A_{9,2}$ dan seterusnya hingga $A_{m,2}$. Demikian juga matriks $A_5(1)$ adalah submatriks dari matriks $A_7(1)$, matriks $A_7(1)$ merupakan submatriks dari $A_9(1)$ dan seterusnya hingga $A_m(1)$ maka diperoleh sifat $A_m(1) = A_{m,2}$

Dari uraian diatas untuk $x = 1$ diperoleh $A_5(1) = A_{5,2}$, $A_7(1) = A_{7,2}$ dan $A_9(1) = A_{9,2}$, sedangkan untuk $x = 0$ diperoleh :

$$A_5(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_9(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_5(0)$, $A_7(0)$ dan $A_9(0)$ berturut – turut merupakan matriks identitas untuk orde 5,7 dan 9. Matriks $A_5(0)$ submatriks dari $A_7(0)$, mtriks $A_7(0)$ submatriks dari $A_9(0)$ dan seterusnya sehingga diperoleh $A_m(0)$ meupakan matriks identitas dengan order m yang dinotasikan dengan I

Dari persamaan (3.23) diperoleh :

$$A_{m,2}.A_m(-1) = I$$

Sehingga :
$$A_m(-1) = {A_{m,2}}^{-1} \tag{3.24}$$

Matriks $A_m(-1)$ untuk $m = 5$, $m = 7$ dan $m = 9$ adalah sebagai berikut

$$A_5(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_9(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elemen- elemen yang tidak 0 pada $A_5(-1)$, $A_7(-1)$ dan $A_9(-1)$ ternyata membentuk barisan Thue Morse disetiap kolomnya. Dan elemen-elemen 0 pada $A_5(-1)$, $A_7(-1)$ dan $A_9(-1)$ mempunyai posisi yang sama dengan elemen-elemen dari $A_5(1)$, $A_7(1)$ dan $A_9(1)$. Sedangkan matriks $A_5(-1)$ merupakan submatriks dari $A_7(-1)$, matriks $A_7(-1)$ merupakan submatriks dari $A_9(-1)$ dan seterusnya hingga $A_m(-1)$

Persamaan (3.24) menyatakan $A_m(-1) = {A_{m,2}}^{-1}$ maka terbukti bahwa elemen-elemen yang tidak 0 pada matriks ${A_{m,2}}^{-1}$ membentuk barisan Thue Morse disetiap kolomnya.

BAB 4

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 KESIMPULAN

Matriks segitiga bawah Pascal modulo *2* merupakan matriks segitiga bawah yang elemen-elemennya mempunyai pola tertentu. Pola yang dimiliki elemen-elemen tersebut merupakan koefisien binomial berdasarkan nomor baris dan nomor kolom yang bersesuaian dengan elemen-elemen itu sendiri.

Elemen diagonal utama matriks segitiga bawah Pascal modulo 2 selalu 1, maka matriks segitiga bawah Pascal modulo *2* mempunyai invers. Berdasarkan pembahasan pada bab 3 didapat kesimpulan sebagai berikut:

1. Elemen-elemen pada Matriks Invers segitiga bawah Pasacl modulo p untuk $p = 2$ mempunyai pola tersendiri yaitu memenuhi teorema dari David Callan

2. Pola yang terbentuk pada matriks invers segitiga bawah Pascal adalah pada setiap kolomnya membentuk suatu barisan yang dinamakan barisan Thue-Mose.± 1

4.2 SARAN

Pembahasan pada tesis ini hanya sampai melihat pola elemen-elemen matriks invers segitiga bawah Pascal modulo p dengan $p = 2$ yang membentuk barisan Thue -Morse± 1.

Perlu pembahasan lebih lanjut untuk melihat pola yang terbentuk pada matriks invers dari matriks segitiga bawah Pascal dengan modulo selain 2 Dengan melanjutkan pembahasan tentunya akan jauh melengkapi bahkan menyempurnakan penulisan tesis yang sangat sederhana ini.

DAFTAR REFERENSI

.

Allouche., & Shallit. (1999). *The Ubiquitous Prouhut Thue- Morse Sequence* in C, Ding., T, Helleseth., & H, Niederreiter. eds Sequence and Their Applications: Proceedings of SETA'98: Springer; Verlag halaman 1-13

Callan, D. (2006). *Sierpinski's Triangle and the Prouhet Thue-Morse Word* . arXiv : math/0610932v3

Chen Chuan-Chong., & Koh Khee-Meng. (1999). *Principles and Techniques in Combinatorics*. Singapore World Scientific.

Imani., & Mochdammfar. (2010). *The Inverse Of The Pascal Lower Triangular Matrix Modulo p*: Acta Math Univ.Comenianae.vol: LXXIX ,1 halaman 135-142.

Jacob, B. (1990). *Linear Algebra*. New York : W.H Freeman and Company.

Ortega, J. (1987). *Matrix Theory A second Cours.* New York : Plenum Press.

Ribenboim, P . (2004). *The Little Book of Bigger Primes*. Springer.

Rossen, K.H. (2007). *Discrete mathematics and its Applications*. International edition the Mc Graw-Hill Companie.