UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN TOTAL BUSUR AJAIB *b*-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF LOBSTER $L_n(2; r)$ DAN $L_n(2; r, s)$

SKRIPSI

SYARIFANI RACHMAWATI
0806452311

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN TOTAL BUSUR AJAIB *b*-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF LOBSTER $L_n(2; r)$ DAN $L_n(2; r, s)$

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

SYARIFANI RACHMAWATI
0806452311

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Syarifani Rachmawati
NPM	: 0806452311
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 13 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	:	Syarifani Rachmawati
NPM	:	0806452311
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Pelabelan Total Busur Ajaib *b*-Busur Berurutan Pada Graf Lobster $L_n(2; r)$ Dan $L_n(2; r, s)$

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra. Denny Riama Silaban, M. Kom	( )
Penguji I	: Dra. Nora Hariadi, M.Si	( )
Penguji II	: Arie Wibowo, M.Si	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 13 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil ‘aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan bagi Allah SWT atas segala nikmat dan ridha-Nya yang telah diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini. Skripsi ini dibuat untuk memenuhi syarat menjadi Sarjana Sains jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidaklah sempurna, banyak terdapat kekurangan dalam penulisan. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran guna menyempurnakan skripsi ini. Penulis telah banyak dibantu dan dibimbing oleh pihak-pihak yang sangat berjasa mulai dari awal perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu dan Bapak penulis, Endang Retnowati dan Djoni Sunardjono, selaku orangtua penulis yang telah mencurahkan cinta dan kasih sayang, nasihat, serta untaian do’a yang selalu mengiringi langkah penulis. Eyang uti serta keluarga besar penulis, terimakasih telah memberikan dukungan serta do’a kepada penulis.
2. Ibu Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom selaku pembimbing skripsi yang telah banyak membantu, memberikan ilmu, masukan, serta motivasi kepada penulis dimulai dari masa perkuliahan hingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si selaku pembimbing akademis yang telah membimbing dan mengarahkan penulis pada tiap semester mulai dari awal perkuliahan hingga penulis menyelesaikan skripsi.
4. Bapak Ibu dosen pengajar di Departemen Matematika, Bapak Dr. Yudhi Satria, M.T. selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu Rahmi Rusin, S.Si., M.ScTech. selaku Sekretaris Departemen Matematika, Ibu Mila Novita selaku Koordinator Kemahasiswaan, dan Ibu Dr. Dian Lestari selaku

Koordinator Pendidikan, Ibu Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, Dra. Suarsih Utama, Prof. Dr. Belawati HW, Dra. Nora Hariadi, M.Si., Dra. Ida Fithriani, M.Si., Dhian Widya, S.Si, M.Kom., Fevi Novkaniza, S.Si, M.Si., Helen Burhan, S.Si., M.Si., Dra. Rustina, Dra. Siti Aminah, M.Kom., Dra. Siti Nurrohmah, Dra. Sri Harini, M.Kom., dan kepada Bapak Alhaji Akbar, S.Si., M.Sc., Arie Wibowo, S.Si., M.Si., Prof. Dr. Djati Kerami, Hengki Tasman, S.Si., M.Si., Drs. Suryadi Slamet, M.Sc., Drs. Suryadi MT, M.T., Drs. Zuherman Rustam, DEA., dan semua dosen yang tanpa mengurangi rasa hormat tidak dapat disebutkan namanya satu per satu, terima kasih telah memberikan ilmu serta saran dan kritik selama masa perkuliahan.

5. Seluruh karyawan di Departemen Matematika, Mbak Santi, Pak Saliman, Pak Ansori, Mas Salman, Mbak Rusmi, tanpa mengurangi rasa hormat tidak dapat disebutkan namanya satu per satu, terima kasih telah membantu penulis dalam urusan administrasi dan peminjaman buku serta bantuan yang telah diberikan kepada penulis.
6. Rekan seperjuangan penulis dalam menulis skripsi, Wulan dan Arief, yang telah berjuang bersama, saling mendukung, memberikan ide, teman berbagi saat bingung gimana cara menuangkan ide yang ada dikepala kedalam tulisan, mendengar curhatan mulai dari awal menyusun skripsi hingga skripsi ini dicetak, makasih banyak ya. *We can do it guys*.
7. Rekan-rekan satu almamater *graph labeling*, Kak Arif yang sudah banyak membantu serta berbagi ilmu dan pengalaman menulis skripsi, Kak Hikma, Kak Siti, Kak Andi, Kak Cimz, (yang segera menyusul) Agnes, Ifah, Uchi dan Kak Nora yang udah bikin kelas bimbingan jadi rame dan seru, tetap semangat ya buat kita semua.
8. Raden Ahadian Ramadhan, yang selalu memberikan kasih sayang, perhatian, dukungan, serta berbagi suka duka. Terimakasih telah membuat hari-hari penulis lebih indah, bermakna dan berwarna.
9. ‘Keluarga kecil’ penulis: Agnes, Oline, Gren Resti, yang udah berbagi cerita, ‘istilah’ baru, bahkan memperdebatkan hal yang tidak penting, Uyut : May, Umbu, Maul, Oma Citra, Nita, Mei, Risya yang telah menemani penulis

mengejar, menunggu kereta, dan mengobrol sepanjang perjalanan, Maimun yang telah menjadi tutor buat penulis saat pekan ujian, Adhi, Bang Andy selaku Ketua Angkatan, Awe, Arman, Bowo, Kiki, Numa, Ibu Gondrong Tuti, Ines, Bu Lurah Ega, Agen Ade, Agen Dila, yang telah menjadi partner download, distributor Running Man, dan film korea, Uchi yang sudah bersedia memberi tumpangan kamar setiap mau ujian, Ifah, Mbak Yul, Anitchah, Yulian, Dheni, Arief, Sita, Mba Luthfa, Dhea, Aci, Cindy, Ijut, Danis, Purwo, Arkies, Agy, Ko Hen, Mas Puput, Dede, Masykur, Juni, Wulan, Dewe, Siwi, Vika, Nora Tante Rambut Palsu, Janu, Eka, Emy, Icha, Dian, Uchi L, Ze, terima kasih telah memberikan pengalaman serta kenangan mulai dari PDM, kepanitiaan, serta momen-momen indah dan menarik yang terjadi setiap kebersamaan kita. Matematika 2008: *One Math, One Family*!

10. Kakak - kakak angkatan 2005, 2006, 2007, serta teman-teman 2009, 2010, dan 2011 yang telah banyak membantu dan membagi pengalaman.
11. Sahabat-sahabat penulis di PMR 21, Artha, Ria, Inong, Onta, Indra, Tama, Budi, Yunia, Rahmat, terimakasih telah menjaga silaturahmi sampai detik ini.
12. Sahabat-sahabat HC, Tono, Uwi, Yapic, Oneng, Amel, Toge, Aji, Bang Ai, Awal, Mba Rina, yang selalu membawa keceriaan dan cerita baru setiap kali bertemu.

Terimakasih juga kepada pihak yang telah banyak membantu yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Akhir kata, mohon maaf jika terdapat kesalahan dan kekurangan pada skripsi ini, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Syarifani Rachmawati
NPM	:	0806452311
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Pelabelan Total Busur Ajaib b-Busur Berurutan pada Graf Lobster $L_n(2; r)$ dan $L_n(2; r, s)$

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 13 Juni 2012

Yang menyatakan

(Syarifani Rachmawati)

ABSTRAK

Nama : Syarifani Rachmawati

Program Studi : Matematika

Judul : Pelabelan Total Busur Ajaib b-Busur Berurutan pada Graf Lobster $L_n(2; r)$ dan $L_n(2; r, s)$

Misalkan suatu graf $G = (V, E)$ dengan $v = |V|$ simpul dan $e = |E|$ busur adalah graf berhingga, sederhana, dan tidak berarah. Pelabelan total busur ajaib pada G adalah pemetaan bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, v + e\}$, dimana terdapat suatu konstanta k sedemikian sehingga bobot busur $w_f(xy) = f(x) + f(xy) + f(y) = k$ untuk setiap $xy \in E$. Pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada G adalah pelabelan total busur ajaib dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. Pada skripsi ini diberikan konstruksi pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada graf lobster (semi) teratur $L_n(2; r)$ dan $L_n(2; r, s)$ dengan n, r, dan s bilangan-bilangan bulat positif.

Kata Kunci : Pelabelan total busur ajaib, pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan, graf lobster, graf teratur.

xv + 51 halaman ; 21 gambar ; 1 tabel

Daftar Pustaka : 9 (1986-2012)

ABSTRACT

Name : Syarifani Rachmawati

Study Program : Mathematics

Title : A b-Edge Consecutive Edge Magic Total Labeling on Lobster Graph $L_n(2; r)$ and $L_n(2; r, s)$

Let $G = (V, E)$ with $v = |V|$ vertices and $e = |E|$ edges, be a finite, simple, and undirected graph. An edge magic total labeling is a bijection f from $V \cup E$ to the set of consecutive integers $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$, and there exist a constant k such that the weights of the edges $w_f(xy) = f(x) + f(xy) + f(y) = k$ for every $xy \in E$. A b-edge consecutive edge magic total labeling of G is an edge magic total labeling and $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. This *skripsi* constructs a b-edge consecutive edge magic total labeling on some classes of tree, that are (semi) regular lobster graph $L_n(2; r)$ and $L_n(2; r, s)$, where n, r, and s are positive integers.

Keywords : b-edge consecutive edge magic total labeling, edge magic total labeling, lobster graph, regular graph.

xv + 51 pages ; 21 pictures; 1 table

Bibliography : 9 (1986; 2012)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

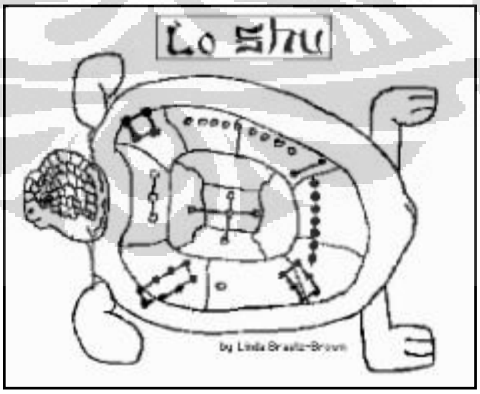
BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf merupakan salah satu cabang yang dipelajari dalam teori graf. Tokoh yang memperkenalkan pelabelan graf untuk pertama kalinya adalah Sedláček pada tahun 1963. Salah satu jenis pelabelan pada graf ialah pelabelan ajaib. Pelabelan ajaib merupakan pengembangan dari persegi ajaib.

Sejarah persegi ajaib dimulai sekitar 2800 sebelum masehi di Cina dan India. Masyarakat Cina percaya bahwa persegi ajaib 3x3 ini sebagai kekuatan pelindung dari roh jahat. Suatu hari banjir besar melanda sungai Lo. Masyarakat mencoba mencari sesuatu untuk meredakan kemarahan dari Dewa sungai. Kemudian seekor kura-kura muncul dari sungai dengan pola persegi ajaib pada tempurungnya. Angka-angka yang tersusun berpola 3x3, pola sembilan kisi tersebut menghasilkan jumlah yang sama yaitu 15 pada setiap baris, kolom, dan diagonalnya. Sungai Lo mulai tenang sejak kemunculan kura-kura tersebut. Sejak peristiwa ini, masyarakat mulai percaya bahwa persegi ajaib ini dapat digunakan untuk mengontrol sungai (Jahannathan, 2005, p. 3&4). Pola persegi ajaib yang terdapat pada tempurung kura-kura tersebut ditunjukkan oleh Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Persegi ajaib pada kura-kura

Persegi ajaib adalah suatu persegi dengan ukuran nxn petak dimana entrinya adalah susunan himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$, jika elemen pada setiap baris, kolom, maupun diagonal utamanya dijumlahkan akan menghasilkan jumlah yang sama (Wallis, 2001, p. 1). Contoh persegi ajaib ditunjukkan oleh Gambar 1.2.

1	9	5
6	2	7
8	4	3

Gambar 1.2 Persegi ajaib

Suatu graf *G* terdiri dari himpunan berhingga V obyek-obyek yang disebut simpul-simpul bersama dengan himpunan E dari pasangan tak terurut simpul yang disebut busur. Order dari V dan E adalah *v* dan *e*, masing-masing disebut order dan ukuran dari *G*. Derajat atau valensi dari suatu simpul adalah banyaknya busur dimana *x* merupakan salah satu titik ujungnya (Wallis, 2001, p. 8).

Graf lingkaran adalah graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan *n* simpul dinotasikan dengan C_n. Suatu graf yang dibentuk dari C_n dengan menghapus satu busurnya disebut graf lintasan dengan *n* simpul, dinotasikan dengan P_n (Wilson, 1996, p. 17). Lingkaran adalah barisan berhingga simpul dan busur dimana tidak ada simpul dan busur yang berulang, dengan simpul awal sama dengan simpul akhir. Suatu graf disebut asiklik jika graf tersebut tidak memiliki lingkaran; graf asiklik yang terhubung disebut graf pohon (Wallis, 2001, p 10). Contoh dari graf pohon ialah graf *caterpillar*, graf lobster, dan graf bintang. Graf *caterpillar* ialah graf yang dibangun dari graf lintasan dengan menambahkan sejumlah daun pada setiap simpul pada graf lintasan (Sugeng & Miller, 2008). Graf *caterpillar* teratur adalah graf *caterpillar* dimana banyak simpul daun yang dimiliki simpul pada graf lintasan adalah sama.Graf lobster adalah graf pohon yang terdiri dari satu lintasan (dengan panjang maksimum) dimana setiap simpul lain pada lobster memiliki jarak paling banyak *t* terhadap lintasan, dengan *t* adalah suatu bilangan bulat (Khan, Pal dan Pal, 2009). Pada definisi tersebut, yang dimaksud dengan jarak adalah jarak antara simpul lain pada lobster dengan simpul terdekat pada lintasan. yang akan dibahas pada skripsi ini adalah graf lobster dengan $t = 2$. Graf lobster teratur adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sejumlah yang sama simpul daun pada setiap simpul daun dari graf caterpillar teratur. Graf lobster teratur dinotasikan dengan $L_n(q; r)$, dengan *n* adalah banyak simpul pada lintasan, dimana *q* adalah banyak simpul berjarak 1 dari setiap simpul lintasan dan *r* adalah banyak daun pada setiap simpul yang berjarak 1 dari lintasan. Graf lobster yang akan dibahas pada skripsi ini adalah graf lobster teratur $L_n(2; r)$ dan graf lobster semi teratur $L_n(2; r, s)$, dimana 2 menyatakan banyak simpul berjarak 1 dari setiap simpul lintasan (kedua simpul ini disebut simpul pertama dan simpul kedua), *r* menyatakan banyak daun pada simpul pertama dan *s* menyatakan banyak daun pada simpul kedua.

Pelabelan graf merupakan salah satu cabang yang dipelajari dalam teori graf. Pelabelan dari suatu graf *G* adalah pemetaan setiap elemen graf *G* ke himpunan bilangan (biasanya adalah himpunan bilangan bulat positif atau himpunan bilangan butlat nonnegatif) (Wallis, 2001, p. 10). Pelabelan yang akan dibahas dalam skripsi ini ialah pelabelan yang menggunakan bilangan bulat positif. Jika domain dari pelabelan adalah himpunan simpul, maka pelabelannya disebut pelabelan simpul, sedangkan jika domainnya adalah himpunan busur, maka pelabelannya disebut pelabelan busur. Jika domain dari pelabelan adalah gabungan himpunan simpul dan busur, maka pelabelannya disebut pelabelan total Jumlah dari semua label yang terkait dengan suatu elemen graf disebut bobot. Bobot busur *xy* didefinisikan sebagai $w_f(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$ (Wallis, 2001, p. 10 & 11).

Pelabelan total busur ajaib pada graf *G* adalah pemetaan bijektif *f* dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ dengan sifat bahwa jika diberikan sembarang busur *xy*, maka bobot busur $w_f(xy) = k$ untuk suatu konstanta $\boldsymbol{k}$ (Wallis, 2001, p. 17). Konstanta *k* ini disebut dengan konstanta ajaib. Pelabelan *f* disebut pelabelan total simpul ajaib jika setiap busurnya memiliki bobot yang sama.

Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$ disebut pelabelan total a-simpul berurutan busur ajaib (PTBA a-simpul berurutan) dari suatu graf G jika *f* adalah pelabelan total busur ajaib dan $f(V) = \{a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + n\}, 0 \leq a \leq e$. Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$ disebut pelabelan total *b*-busur berurutan busur ajaib (PTBA *b*-busur berurutan) dari suatu graf G jika *f* adalah pelabelan total busur ajaib dan $f(V) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + v\}, 0 \leq b \leq v$. Suatu graf yang memiliki PTBA a-simpul berurutan (atau *b*-busur berurutan) disebut graf a-simpul berurutan (atau *b*-busur berurutan) busur ajaib. Jika suatu graf terhubung G memiliki PTBA b-busur berurutan busur ajaib, dimana $b \in \{1, 2, \ldots, v-1\}$, maka G adalah graf pohon (Sugeng & Miller, 2008).

Setiap graf b-busur berurutan busur ajaib memiliki pelabelan simpul busur anti ajaib. Dual dari PTBA b-busur berurutan pada suatu graf G adalah PTBA (n-b)-busur berurutan. Setiap graf *caterpillar* memiliki pelabelan b-busur berurutan busur ajaib untuk setiap b (Sugeng dan Miller, 2008).

Banyak penelitian telah dilakukan mengenai PTBA b-busur berurutan pada suatu graf G. Jenis graf yang telah diteliti ialah graf lingkaran, graf matahari, graf korona, graf *hairycyle*, graf *dumbbell*, dan graf kecebong. Skripsi ini akan membahas tentang PTBA b-busur berurutan pada graf lobster khusus, yaitu graf lobster dengan t = 2, hal ini dikarenakan belum ada penelitian mengenai PTBA b-busur berurutan pada graf lobster.

1.2 Permasalahan dan Ruang Lingkup

Skripsi ini membahas tentang bagaimana mengkonstruksi pelabelan total busur ajaib busur berurutan (PTBA b-busur berurutan) pada graf lobster. Penelitian dibatasi pada graf lobster $L_n(2; r)$ dan graf lobster $L_n(2; r, s)$.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Jenis penelitian yang digunakan pada skripsi ini adalah penelitian dasar, yaitu penelitian yang melakukan percobaan atau pekerjaan teoritis untuk memperoleh pengetahuan baru bagi pengembangan ilmu. Metode yang digunakan adalah mengkonstruksi pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada graf-graf lobster berukuran kecil untuk mendapatkan pola pelabelan graf lobster, merumuskan fungsi pelabelan, kemudian membuktikan bahwa fungsi pelabelan yang dirumuskan berlaku secara umum.

1.4 Tujuan Penulisan

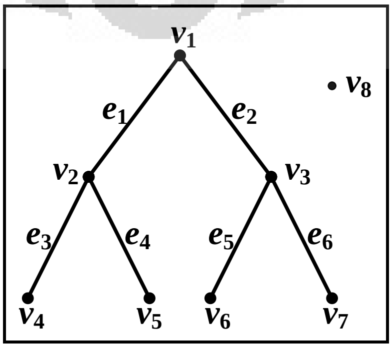
Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengkonstruksi pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan (PTBA *b*-busur berurutan) pada graf pohon, yaitu graf lobster $L_n(2; r)$ dan graf lobster $L_n(2; r, s)$.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Definisi dan istilah dalam teori graf

Suatu **graf** G adalah himpunan tak kosong berhingga dari objek-objek yang disebut **simpul** (*vertex*) bersama dengan himpunan (mungkin kosong) tak terurut dari simpul-simpul yang berbeda pada G yang disebut **busur** (*edge*). **Himpunan simpul** (*vertex set*) pada graf G dinotasikan sebagai V dan **himpunan busur** (*edge set*) pada G dinotasikan dengan E. **Banyaknya anggota** (*cardinality*) dari himpunan simpul pada G disebut **order** dari G dan dinotasikan dengan v, sedangkan banyaknya anggota dari himpunan busur merupakan **ukuran** (*size*) dari G dan dinotasikan dengan e. Busur xy menghubungkan simpul x dan y. Jika $e = xy$ adalah busur pada graf G, maka x dan y merupakan simpul **bertetangga** (*adjacent*), sedangkan e **hadir** (*incident*) pada x dan y. Jika e_1 dan e_2 adalah dua busur yang berbeda pada graf G dan hadir pada simpul yang sama, maka e_1 dan e_2 adalah busur bertetangga. **Derajat** (*degree*) dari simpul v pada graf G adalah banyaknya busur yang hadir pada v dinotasikan sebagai deg(v). Suatu simpul berderajat 0 pada graf G disebut **simpul terisolasi** (*isolated vertex*) dan simpul yang berderajat 1 disebut **simpul ujung** (*end-vertex*) dari G. Suatu graf G dikatakan **teratur** (*regular*) dengan derajat r jika setiap simpul v pada G memiliki derajat yang sama, yaitu r, deg(v) = r (Chartrand & Lesniak, 1986. p. 4-9). **Titik ujung** (*endpoint*) dari busur xy adalah x dan y (Wallis, 2001, p.8).



Gambar 2.l Graf G

Berikut ini merupakan penjelasan dari Gambar 2.l. Contoh graf *G* ditunjukkan oleh Gambar 2.l. Graf *G* memiliki himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan himpunan busur $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Banyaknya anggota himpunan simpul pada graf *G* adalah $v = 8$ dan banyaknya anggota himpunan busurnya adalah $e = 6$. Busur e_3 menghubungkan v_2 dan v_4, maka v_2 dan v_4 adalah simpul bertetangga. Pada graf *G*, busur yang hadir pada simpul v_3 adalah busur e_2, e_5 dan e_6, maka busur busur e_2, e_5 dan e_6 adalah busur bertetangga. Derajat tiap simpul graf *G* adalah $\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = 3$, $\deg(v_4) = 1$, $\deg(v_5) = 1$, $\deg(v_6) = 1$, $\deg(v_7) = 1$, $\deg(v_8) = 0$. Simpul v_4, v_5, v_6 dan v_7 merupakan simpul-simpul ujung karena berderajat 1, dan karena v_8 berderajat 0, maka v_8 merupakan simpul terisolasi. Titik ujung dari busur e_1 adalah v_1 dan v_2. Graf *G* bukanlah graf teratur karena setiap simpulnya tidak memiliki derajat yang sama.

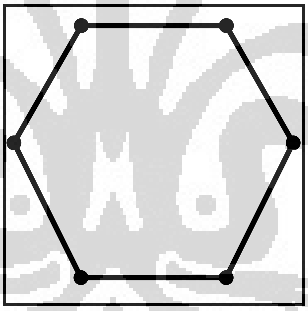
Jalan (*walk*) pada suatu graf *G* adalah barisan berhingga dari simpul $v_0, v_2, \ldots, v_n$ dan busur $e_1, e_2, \ldots, e_n$ dari *G* dimana titik ujung dari e_i adalah v_{i-1} dan v_i untuk setiap *i*. **Jalan sederhana** (*simple walk*) adalah jalan dimana tidak ada busur yang berulang. **Lintasan** (*path*) merupakan jalan dimana tidak ada simpul yang berulang; **panjang** (*length*) dari suatu lintasan adalah banyak busur pada lintasan tersebut. Suatu jalan disebut **tertutup** (*closed*) jika simpul awal dari jalan sama dengan simpul akhirnya. **Lingkaran** (*cycle*) dengan panjang *n* adalah jalan tertutup sederhana dengan panjang *n*, $n \geq 3$, dimana simpul $v_0, v_2, \ldots, v_{n-1}$ merupakan simpul yang berbeda. Suatu graf disebut **asiklik** (*acyclic*) jika graf tersebut tidak memiliki lingkaran; graf asiklik yang terhubung disebut **pohon** (*tree*) (Wallis, 2001, p. 10). Contoh dari pohon ialah graf bintang, graf *caterpillar*, dan graf lobster. Suatu graf disebut **terhubung** (*connected*) jika terdapat lintasan diantara sembarang 2 simpul pada graf tersebut (Baca&Miller, 2008, p. 27).

Suatu graf disebut **graf lengkap** (*complete graph*) jika setiap dua simpulnya bertetangga. Suatu graf *G* adalah ***n*-partit** (*n-partite*), $n \geq 1$, jika dimungkinkan membagi *V* menjadi *n* subhimpunan $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ (disebut himpunan partisi) sedemikian sehingga setiap elemen dari *E* menghubungkan simpul pada V_i ke simpul pada $V_j, i \neq j$. Jika n = 2, maka graf tersebut merupakan **graf bipartit** (*bipartite graph*). Suatu **graf lengkap *n*-partit** adalah graf n-partit dengan himpunan partisi $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ ditambah dengan sifat bahwa jika $x \in V_i$ dan $y \in V_j,\ i \neq j$, maka $xy \in E$. Suatu **graf lengkap bipartit** dengan himpunan partisi V_1 dan V_2 yang dinotasikan sebagai $K(m, n)$, dimana v pada V_1 adalah m dan v pada V_2 adalah n (Chartrand & Lesniak, 1986. p. 9&10).

Setelah dijelaskan mengenai definisi dan istilah dalam teori graf, selanjutnya yang akan dibahas pada Subbab 2.2 ialah mengenai jenis-jenis graf.

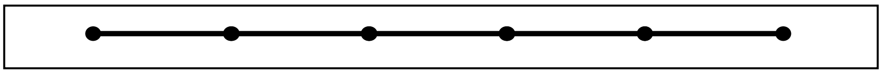
2.2 Jenis - Jenis Graf

Graf lingkaran adalah graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dinotasikan dengan C_n(Wilson, 1996, p. 17). Contoh dari graf lingkaran dengan 6 simpul ditunjukkan oleh Gambar 2.2.



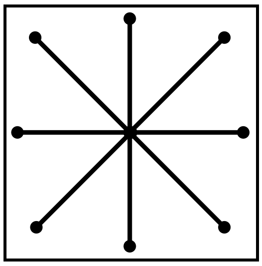
Gambar 2.2 Graf lingkaran C_6

Suatu graf yang dibentuk dari C_n dengan menghapus satu busurnya disebut **graf lintasan** dengan n simpul, dinotasikan dengan P_n (Wilson, 1996, p. 17). Contoh dari graf lintasan dengan 6 simpul ditunjukkan oleh Gambar 2.3.



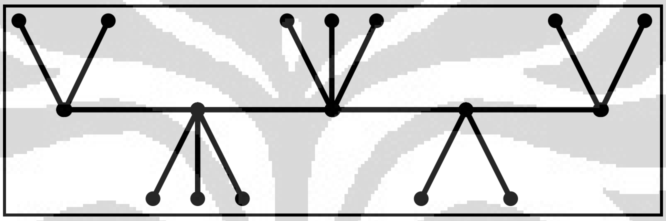
Gambar 2.3 Graf lintasan P_6

Graf bintang yang dinotasikan sebagai S_n merupakan graf $K(1, n)$, dimana simpul yang berderajat n disebut pusat (*center*) (Wallis, 2001. p. 10). Contoh dari graf bintang S_8 ditunjukkan oleh Gambar 2.4.



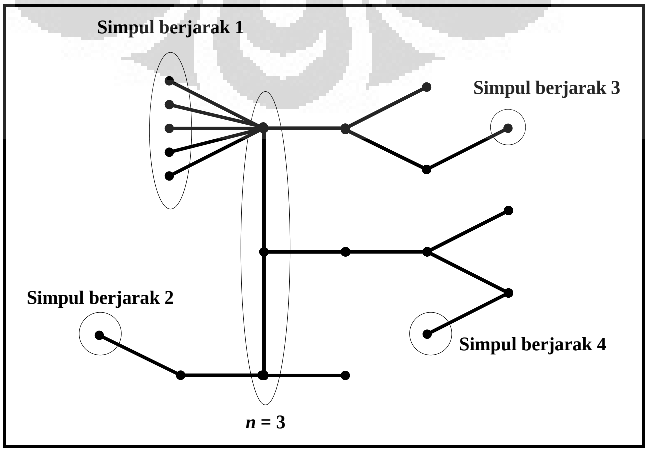
Gambar 2.4 Graf bintang S_8

Graf *caterpillar* ialah graf yang dibangun dari graf lintasan dengan menambahkan sejumlah daun pada setiap simpul pada graf lintasan (Sugeng & Miller, 2006). **Graf *caterpillar* teratur** adalah graf *caterpillar* dimana banyak simpul daun yang dimiliki simpul pada graf lintasan adalah sama. Contoh dari graf *caterpillar* ditunjukkan oleh Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf *Caterpillar*

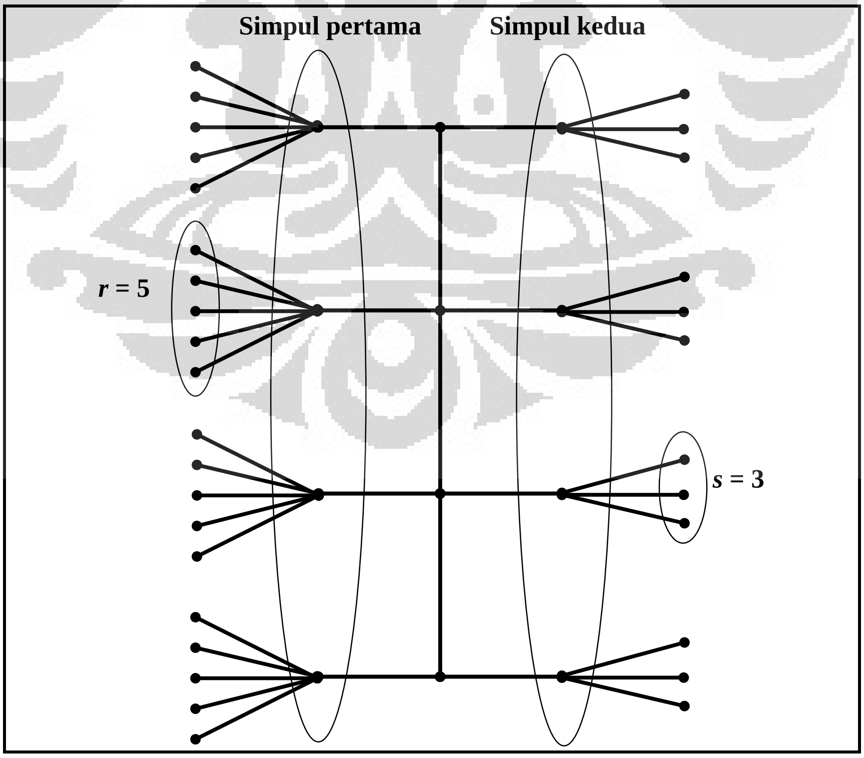
Graf lobster adalah graf pohon yang terdiri dari satu lintasan (dengan panjang maksimum) dimana setiap simpul lain pada lobster memiliki jarak paling banyak t terhadap lintasan, dengan t adalah suatu bilangan bulat (Khan, Pal dan Pal, 2009). Jarak yang dimaksud adalah jarak simpul lain pada lobster terhadap simpul terdekat pada lintasan. Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf lobster dengan t = 4.



Gambar 2.6 Graf lobster

Pada Gambar 2.6 terlihat bahwa jumlah simpul pada lintasan adalah $n = 3$ dan jarak terjauh simpul pada lintasan terhadap simpul lain pada lobster ialah 4, sehingga graf lobster tersebut merupakan graf lobster dengan $t = 4$.

Pada skripsi ini akan dibahas graf lobster dengan $t = 2$. Graf lobster dengan $t = 2$ dapat juga dipandang sebagai graf yang diperoleh dari *caterpillar* dengan menambahkan sejumlah daun pada daun dari *caterpillar.* **Graf lobster teratur** adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sejumlah yang sama simpul daun pada setiap simpul daun dari graf caterpillar teratur. Graf lobster teratur dinotasikan dengan $L_n(q; r)$, dengan n adalah banyak simpul pada lintasan, q adalah banyak simpul lain yang terhubung pada setiap simpul lintasan atau dengan kata lain q adalah banyak simpul berjarak 1 dari setiap simpul lintasan dan r adalah banyak daun pada setiap simpul yang berjarak 1 dari lintasan. Graf lobster yang akan dibahas pada skripsi ini adalah graf lobster teratur $L_n(2; r)$ dan graf lobster semi teratur $L_n(2; r, s)$, dimana 2 menyatakan banyak simpul berjarak 1 dari setiap simpul lintasan (kedua simpul ini disebut simpul pertama dan simpul kedua), r menyatakan banyak daun pada simpul pertama dan s menyatakan banyak daun pada simpul kedua.



Gambar 2.7 Graf lobster $L_4(2; 5, 3)$

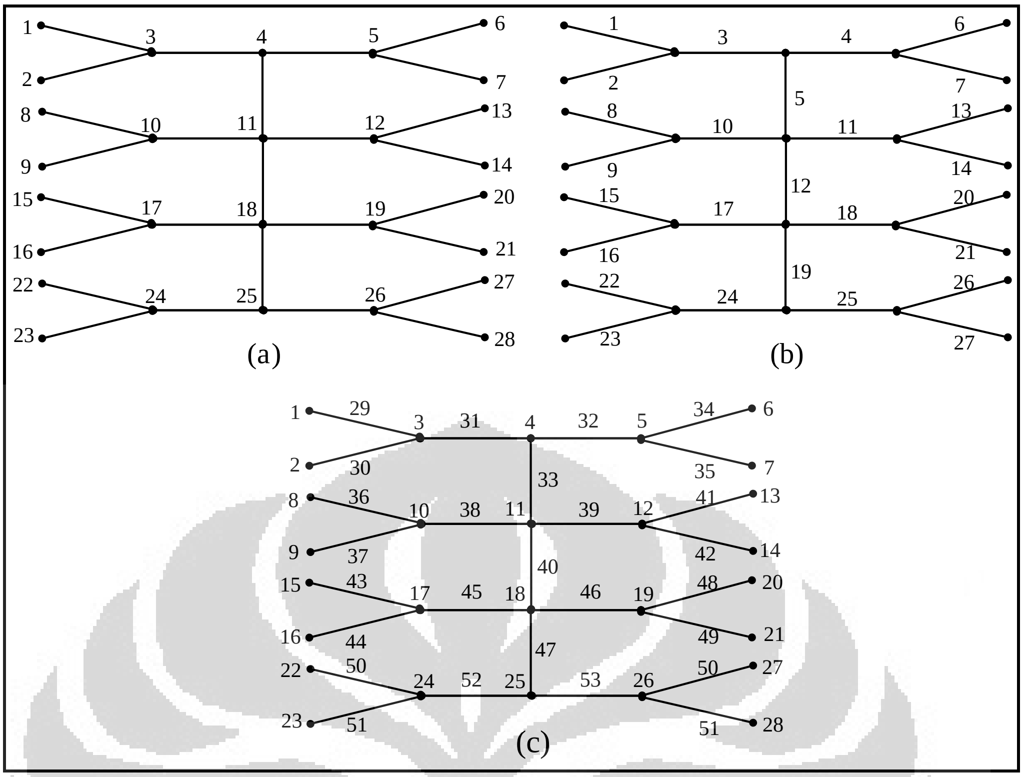
Pada Gambar 2.7 diberikan contoh graf lobster $L_4(2; 5, 3)$. Gambar 2.7 merupakan graf lobster dengan $t = 2$, banyak simpul berjarak 1 dari setiap lintasan adalah $p = 2$, banyak simpul daun pada simpul pertama adalah $r = 5$ dan banyak simpul daun pada simpul kedua adalah $s = 3$.

Setelah membahas jenis-jenis graf , pada Subbab 2.3 akan dibahas mengenai pelabelan graf.

2.3 Pelabelan Graf

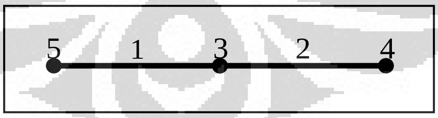
Pelabelan graf merupakan salah satu cabang yang dipelajari dalam teori graf. **Pelabelan** dari suatu graf *G* adalah pemetaan setiap elemen graf *G* ke himpunan bilangan (biasanya adalah himpunan bilangan bulat positif atau himpunan bilangan bulat nonnegatif). Jika domain dari pelabelan adalah himpunan simpul, maka pelabelannya disebut **pelabelan simpul**, sedangkan jika domainnya adalah himpunan busur, maka pelabelannya disebut **pelabelan busur**. Jika domain dari pelabelan adalah gabungan himpunan simpul dan busur, maka pelabelannya disebut **pelabelan total**. Jumlah dari semua label yang terkait dengan suatu elemen graf disebut **bobot**. **Bobot busur** *xy* didefinisikan sebagai $w(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$ (Wallis, 2001, p. 10 & 11). Contoh pelabelan simpul, pelabelan busur, dan pelabelan total pada graf lobster $L_4(2; 2)$ ditunjukkan oleh Gambar 2.8.

Gambar 2.8 merupakan pelabelan pada graf lobster $L_4(2; 2)$, perbedaannya terletak pada elemen graf yang dilabel. Pada Gambar 2.8 (a) yang dilabel adalah simpul sehingga disebut pelabelan simpul, pada Gambar 2.8 (b) yang dilabel adalah busur sehingga disebut pelabelan busur, dan Gambar 2.8 (c) disebut pelabelan total karena yang dilabel adalah simpul dan busur graf lobster.



Gambar 2.8 (a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan busur,
(c) Pelabelan total pada graf lobster $L_4(2; 2)$

Pelabelan total busur ajaib pada graf *G* adalah pemetaan bijektif *f* dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ dengan sifat bahwa jika diberikan sembarang busur *xy*, maka bobot busur $w(xy) = k$ untuk suatu konstanta ***k*** (Wallis, 2001, p. 17). Konstanta *k* disebut **konstanta ajaib**. Contoh pelabelan total busur ajaib pada graf lintasan dengan $k = 9$ ditunjukkan oleh Gambar 2.7.



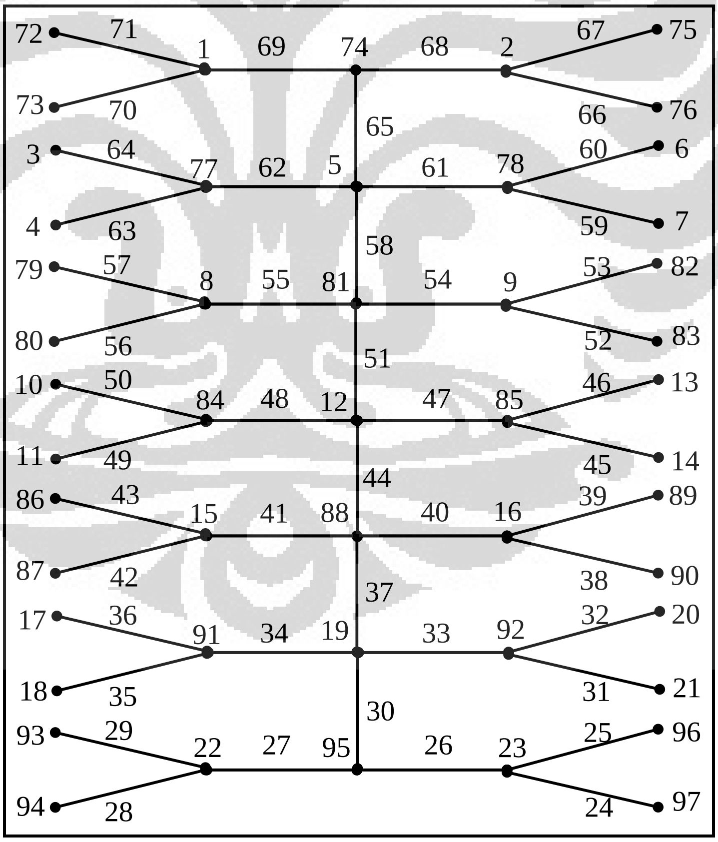
Gambar 2.9 Pelabelan total busur ajaib pada graf lintasan P_3

Pada Subbab 2.3 telah dibahas mengenai pelabelan total busur ajaib. Secara lebih khusus, yang akan dibahas pada skripsi ini ialah mengenai pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan yang akan dijelaskan pada Subbab 2.4.

2.4 Pelabelan Total Busur Ajaib b-Busur Berurutan

Pemetaan $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, v+e\}$ adalah **pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan** (PTBA b-busur berurutan**)** pada G jika f adalah pelabelan busur ajaib dan $f(E) = \{b+1, b+2, b+3, \ldots, b+e\}, 0 \leq b \leq v$. Suatu graf yang memiliki PTBA b-busur berurutan disebut graf b-busur berurutan busur ajaib (Sugeng & Miller, 2008). Gambar 2.10 merupakan contoh PTBA 23-busur berurutan pada graf lobster $L_7(2; 2)$.

Graf lobster pada Gambar 2.10 memiliki pelabelan total karena yang dilabel adalah gabungan himpunan simpul dan busur, dengan himpunan label simpul adalah $\{1, 2, \ldots, 23\} \cup \{72, 73, \ldots, 97\}$ dan himpunan label adalah $\{24, 25, \ldots, 71\}$. Bobot setiap busurnya sama, yaitu k =144 yang disebut sebagai konstanta ajaib, dan label simpul terbesar pada himpunan pertama b = 23.



Gambar 2.10 PTBA 23-busur berurutan pada graf lobster $L_7(2; 2)$

Sifat yang terkait dengan PTBA b-busur berurutan ditunjukkan oleh Teorema 2.1.

Teorema 2.1 Jika suatu graf terhubung G memiliki PTBA b-busur berurutan busur ajaib, dimana $b \in \{1, 2, \ldots, v - 1\}$, maka G adalah graf pohon (Sugeng & Miller, 2008).

Pada pelabelan total busur ajaib didefinisikan pelabelan dual. Misal f adalah pelabelan total busur ajaib, maka **pelabelan dual** f' didefinisikan sebagai $f'(x) = (v + e + 1) - f(x)$ untuk setiap simpul x, dan $f'(xy) = (v + e + 1) - f(xy)$ untuk setiap busur xy (Wallis, 2008, p. 20). Teorema yang berkaitan dengan pelabelan dual ditunjukkan oleh Teorema 2.2.

Teorema 2.2 Dual dari PTBA b-busur berurutan pada graf G adalah suatu PTBA (v-b)-busur berurutan (Sugeng & Miller, 2008).

Gambar 2.11 merupakan pelabelan dual dari PTBA 23-busur berurutan pada graf lobster $L_7(2; 2)$, dan berdasarkan Teorema 2.2, pelabelan pada Gambar 2.11 adalah PTBA 26-busur berurutan. Contoh PTBA 23-busur berurutan pada graf lobster $L_7(2; 2, 2)$ dan pelabelan dualnya ditunjukkan oleh Gambar 2.10 dan Gambar 2.11. Berdasarkan definisi pelabelan dual, simpul yang berlabel 1 pada PTBA 23-busur berurutan menjadi berlabel 97 pada pelabelan dualnya, hal ini juga berlaku pada simpul-simpul lain dan busurnya. Perubahan juga terjadi pada konstanta ajaib dan nilai b, pada PTBA 23-busur berurutan k = 144 dan b = 23, sedangkan pada pelabelan dualnya k = 150 dan b = 26.

Banyak penelitian telah dilakukan mengenai PTBA b-busur berurutan pada suatu graf G. Jenis graf yang telah diteliti ialah graf bintang ganda, graf *caterpillar*, dan graf *firecrackers*.

Suatu graf bintang ganda $S_{n1,n2}$ memiliki PTBA b-busur berurutan untuk beberapa $b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dan

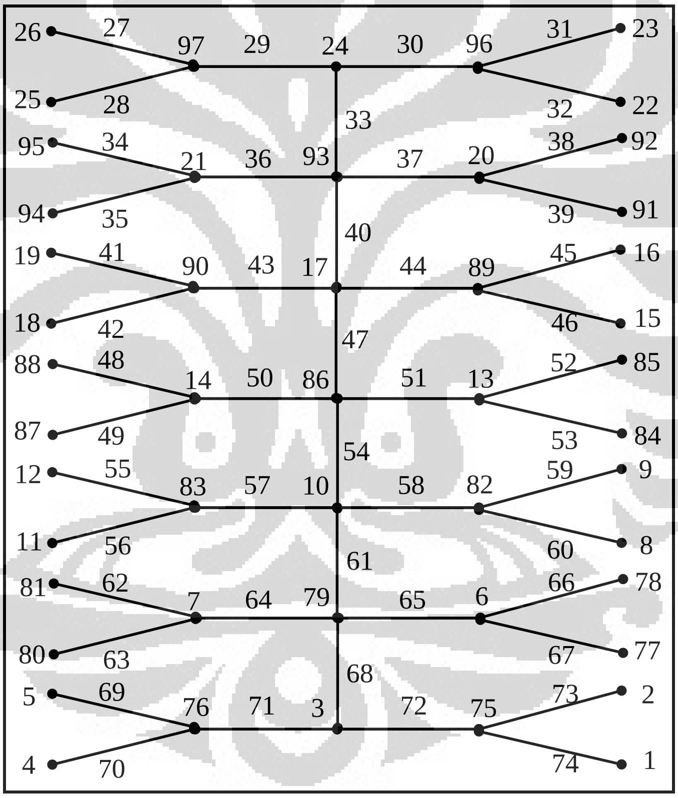
- Jika b = 1 maka $S_{n1,n2}$ adalah graf bintang
- Jika b > 1 maka $b = n_2+1$ (Sugeng& Miller, 2008).

Setiap graf *caterpillar* memiliki suatu PTBA b-busur berurutan untuk setiap b, dimana :

$$b = \begin{cases} \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil + \sum_{i \text{ genap}} n_i - 2 & \text{, untuk } i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil \sum_{i \text{ genap}, i<r} n_i - 2 + (n_r - 1) & \text{, untuk } i \text{ genap} \end{cases}.$$

(Sugeng& Miller, 2008).

Setiap graf *firecrackers* teratur memiliki suatu PTBA b-busur berurutan, dimana $b = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor s + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$, dengan s merupakan banyak daun pada setiap simpul pusat (Sugeng & Silaban, 2008).



Gambar 2.11 Pelabelan PTBA 26-busur berurutan pada graf lobster $L_7(2; 2)$

Pada bab berikutnya, akan dibahas PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r, s)$ dan graf lobster $L_n(2; r, s)$.

BAB 3

PELABELAN TOTAL BUSUR AJAIB *b*-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF LOBSTER

Pada bab ini akan dibahas mengenai konstruksi pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan (PTBA *b*-busur berurutan) pada graf lobster $L_n(2; r)$ dan graf lobster $L_n(2; r, s)$. Pemetaan $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ adalah pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan (PTBA *b*-busur berurutan**)** pada *G* jika *f* adalah pelabelan total busur ajaib dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. Suatu graf yang memiliki PTBA *b*-busur berurutan disebut graf *b*-busur berurutan busur ajaib (Sugeng & Miller, 2008). Nilai *b* yang akan dibahas pada skripsi ini ialah $0 < b < v$. Lemma 3.1 digunakan untuk membuktikan suatu pelabelan pada graf *G* adalah PTBA *b*-busur berurutan.

Lemma 3.1 Suatu graf *G* dengan *v* simpul dan *e* busur adalah suatu graf *b*-busur berurutan busur ajaib jika dan hanya jika terdapat suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ sedemikian sehingga $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$ dan himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari *e* bilangan bulat positif berurutan. Dalam kasus ini, *f* ditingkatkan menjadi PTBA *b*-busur berurutan pada *G* dengan konstanta ajaib $k = b + e + c$ dengan $w = \min\{W\}$ dan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\} = \{k - (b + 1), k - (b + 2), \dots, k - (e + b)\}$ (Silaban & Sugeng, 2010).

Pernyataan pada Lemma 3.1 adalah biimplikasi. Jika suatu graf *G* dengan *v* simpul dan *e* busur adalah suatu graf *b*-busur berurutan busur ajaib, maka terdapat suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ sedemikian sehingga $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$ dan himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari *e* bilangan bulat positif berurutan, hal ini juga berlaku sebaliknya. Pernyataan pada Lemma 3.1 yang akan digunakan pada skripsi ini adalah arah sebaliknya. Untuk menunjukkan bahwa graf *G* adalah graf *b*-busur berurutan busur ajaib, akan ditunjukkan bahwa pada graf G terdapat pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$, sedemikian sehingga $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$ dan himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan. Label simpul pada graf G adalah $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}$. Jika nilai b yang digunakan adalah $0 < b < v$, label simpul terbagi dalam 2 himpunan bilangan berurutan yang berbeda, yaitu himpunan pertama dari label simpul tersebut adalah $\{1, 2, 3, \dots, b\}$ dan himpunan kedua dari label simpul tersebut $\{b + e + 1, b + e + 2, \dots, v + e\}$, himpunan pertama dan himpunan kedua terpisah sejauh e, sehingga label simpul dapat ditulis sebagai $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, b\} \cup \{b + e + 1, b + e + 2, b + e + 3, \dots, v + e\}$.

Selain itu, jika $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan, maka himpunan bobot busur adalah konstan.

$$W_f = \{f(x) + f(y) + f(xy) | xy \in E; x, y \in V\}$$

$$= W + f(E).$$

Karena W adalah himpunan e bilangan bulat positif berurutan dan $f(E)$ juga himpunan e bilangan berurutan, dengan melakukan pengurutan pada W dan pengurutan terbalik pada $f(E)$, lalu menjumlahkan keduanya, akan didapat $W_f = \{k\}$. Artinya, bobot setiap busur adalah k (konstan). Jika $w = \min(W)$, maka $k = b + e + w$.

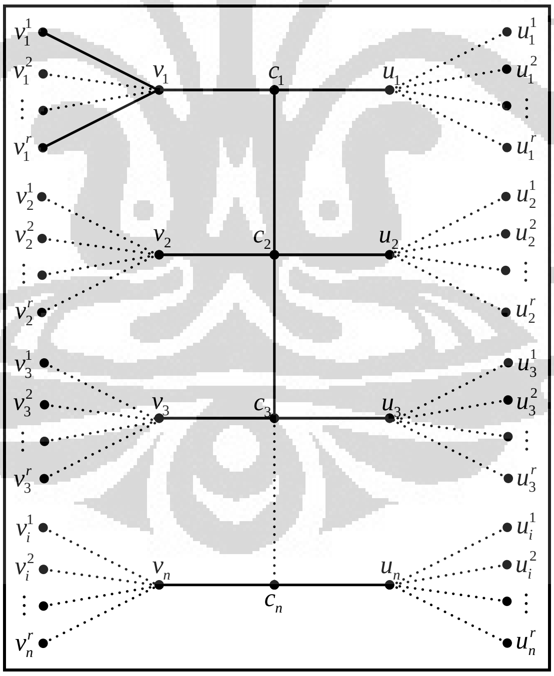
Pada skripsi ini akan ditunjukkan bahwa pada graf lobster $L_n(2; r)$ dan graf lobster $L_n(2; r, s)$ adalah graf b-busur berurutan busur ajaib. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, untuk membuktikan bahwa suatu graf adalah graf b-busur berurutan busur ajaib, maka alur pembuktiannya adalah sebagai berikut:

- Definisikan fungsi pelabelan untuk simpul.
- Tunjukkan bahwa label simpul akan terbagi menjadi dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e.
- Tunjukkan bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y)|xy \in E\}$ terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan.

Selanjutnya pada Subbab 3.1 akan dibahas hasil yang diperoleh untuk PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2;r)$.

3.1 PTBA b-Busur Berurutan pada Graf Lobster $L_n(2; r)$

Graf lobster $L_n(2;r)$, adalah graf lobster teratur dengan n menyatakan banyak simpul pada lintasan, 2 menyatakan banyak simpul berjarak 1 dari setiap simpul lintasan dan r adalah banyak daun pada simpul yang berjarak 1 dari setiap simpul lintasan.



Gambar 3.1 Penamaan simpul dan busur pada graf lobster $L_n(2; r)$

Gambar 3.1 merupakan penamaan simpul dan busur pada graf lobster $L_n(2; r)$, c_i adalah simpul ke-i pada lintasan, v_i dan u_i adalah simpul-simpul berjarak 1 dari simpul ke-i pada lintasan, v_i^j dan u_i^j adalah simpul daun ke-j pada simpul berjarak 1 dari simpul ke-i pada lintasan. Banyaknya simpul pada graf lobster $L_n(2; r)$ adalah $v = 2nr + 3n = n(2r + 3)$ dan banyaknya busur adalah $e = 2nr + 2n + n - 1 = n(2r + 2 + 1) - 1 = n(2r + 3) - 1$.

Diberikan hasil yang diperoleh untuk PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r)$ yang ditunjukkan oleh Teorema 3.1.

Teorema 3.1 Setiap graf lobster $L_n(2; r)$ memiliki PTBA b-busur berurutan dengan

$$b = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(2r+3)+2 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(2r+3) & ,n \text{ genap} \end{cases}.$$

Bukti :

Nyatakan $p = \begin{cases} \frac{3n-1}{2}(2r+3)+1 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{3n}{2}(2r+3)-1 & ,n \text{ genap} \end{cases}$; $I = \{1,2,\ldots,n\}$ dan $R = \{1,2,\ldots,r\}$.

Berikut ini adalah label simpul dari graf lobster $L_n(2; r)$.

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}(2r+3)+1 & ,i \text{ ganjil}, i \in I \\ p+\frac{i}{2}(2r+3)-1 & ,i \text{ genap}, i \in I \end{cases} \qquad (3.1).$$

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}(2r+3)+2 & ,i \text{ ganjil}, i \in I \\ p+\frac{i}{2}(2r+3) & ,i \text{ genap}, i \in I \end{cases} \qquad (3.2).$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} p+\frac{i-1}{2}(2r+3)+j & ,i \text{ ganjil}, i \in I;\ j \in R \\ \frac{i}{2}(2r+3)-(2r+1)+j & ,i \text{ genap}, i \in I;\ j \in R \end{cases} \qquad (3.3).$$

$$f(u_i^j) = \begin{cases} p+\frac{i-1}{2}(2r+3)+1+r+j & ,i \text{ ganjil}, i \in I;\ j \in R \\ \frac{i}{2}(2r+3)-r+j & ,i \text{ genap}, i \in I;\ j \in R \end{cases} \qquad (3.4).$$

$$f(c_i) = \begin{cases} p + \frac{i-1}{2}(2r+3) + r + 1 & , i \text{ ganjil}, i \in I \\ \frac{i}{2}(2r+3) - r & , i \text{ genap}, i \in I \end{cases} \quad (3.5).$$

Akan ditunjukkan bahwa himpunan label graf lobster $L_n(2; r)$, terbagi menjadi 2 himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e. Berikut ini adalah himpunan label v_i, u_i, v_i^j, u_i^j, dan c_i dari graf lobter $L_n(2; r)$, dengan $i \in I$.

$L_1 = \{f(v_i) | i \text{ ganjil}, i \in I\}$

$= \left\{\frac{1-1}{2}(2r+3)+1,\ \frac{3-1}{2}(2r+3)+1,\ \frac{5-1}{2}(2r+3)+1, \dots,\ \frac{n-1}{2}(2r+3)+1\right\}$

$= \left\{1,\ (2r+3)+1,\ 2(2r+3)+1, \dots,\ \frac{n-1}{2}(2r+3)+1\right\}$

$L_2 = \{f(v_i) | i \text{ genap}, i \in I\}$

$= \left\{p+\frac{2}{2}(2r+3)-1,\ p+\frac{4}{2}(2r+3)-1, p+\frac{6}{2}(2r+3)-1, \dots, p+\frac{n}{2}(2r+3)-1\right\}$

$= \left\{p+(2r+3)-1,\ p+2(2r+3)-1, p+3(2r+3)-1, \dots,\ p+\frac{n}{2}(2r+3)-1\right\}.$

$L_3 = \{f(u_i) | i \text{ ganjil}, i \in I\}$

$= \left\{\frac{1-1}{2}(2r+3)+2,\ \frac{3-1}{2}(2r+3)+2,\ \frac{5-1}{2}(2r+3)+2, \dots,\ \frac{n-1}{2}(2r+3)+2\right\}$

$= \left\{2,\ (2r+3)+2,\ 2(2r+3)+2, \dots,\ \frac{n-1}{2}(2r+3)+2\right\}.$

$L_4 = \{f(u_i) | i \text{ genap}, i \in I\}$

$= \left\{p+\frac{2}{2}(2r+3),\ p+\frac{4}{2}(2r+3),\ p+\frac{6}{2}(2r+3), \dots,\ p+\frac{n}{2}(2r+3)\right\}$

$= \left\{p+(2r+3),\ p+2(2r+3),\ p+3(2r+3), \dots,\ p+\frac{n}{2}(2r+3)\right\}.$

$L_5 = \{f(v_i^j) | i \text{ ganjil}, i \in I;\ j \in R\}$

$= \Big\{p + \frac{1-1}{2}(2r+3) + 1,\ p + \frac{1-1}{2}(2r+3) + 2, \dots,\ p + \frac{1-1}{2}(2r+3) + r,$
$p + \frac{3-1}{2}(2r+3) + 1,\ p + \frac{3-1}{2}(2r+3) + 2, \dots,\ p + \frac{3-1}{2}(2r+3) +$
$r, \dots,\ p + \frac{n-1}{2}(2r+3) + 1,\ p + \frac{n-1}{2}(2r+3) + 2, \dots,\ p +$
$\frac{n-1}{2}(2r+3) + r\Big\}$

$= \Big\{p + 1,\ p + 2, \dots,\ p + r,\ p + (2r+3) + 1,\ p + (2r+3) + 2, \dots,\ p +$
$(2r+3) +\ r,\ p + \frac{n-1}{2}(2r+3) + 1,\ p + \frac{n-1}{2}(2r+3) + 2, \dots,\ p +$
$\frac{n-1}{2}(2r+3) + r\Big\}.$

$L_6 = \{f(v_i^j) | i \text{ genap}, i \in I;\ j \in R\}$

$= \Big\{\frac{2}{2}(2r+3) - (2r+1) + 1,\ \frac{2}{2}(2r+3) - (2r+1) + 2, \dots,\ \frac{2}{2}(2r+3) -$
$(2r+1) + r,\ \frac{4}{2}(2r+3) - (2r+1) + 1,\ \frac{4}{2}(2r+3) - (2r+1) +$
$2, \dots, \frac{4}{2}(2r+3) - (2r+1) + r, \dots,\ \frac{n}{2}(2r+3) - (2r+1) + 1,$
$\frac{n}{2}(2r+3) - (2r+1) + 2, \dots, \frac{n}{2}(2r+3) - (2r+1) + r\Big\}$

$= \Big\{3, 4, 5, \dots,\ 2 + r,\ 2r + 3,\ 2r + 4, \dots, 3r + 5, \dots,\ \frac{n}{2}(2r+3) - 2r,$
$\frac{n}{2}(2r+3) - 2r + 1, \dots,\ \frac{n}{2}(2r+3) - (r+1)\Big\}.$

$L_7 = \{f(u_i^j) | i \text{ ganjil}, i \in I;\ j \in R\}$

$= \Big\{p + \frac{1-1}{2}(2r+3) + 1 + r + 1,\ p + \frac{1-1}{2}(2r+3) + 1 + r + 2, \dots,\ p +$
$\frac{1-1}{2}(2r+3) + 1 + r + r,\ \ p + \frac{3-1}{2}(2r+3) + 1 + r + 1,\ \ p +$
$\frac{3-1}{2}(2r+3) + 1 + r + 2, \dots,\ p + \frac{3-1}{2}(2r+3) + 1 + r + r, \dots,\ p +$
$\frac{n-1}{2}(2r+3) + 1 + r + 1,\ \ p + \frac{n-1}{2}(2r+3) + 1 + r + 2, \dots,\ \ p +$
$\frac{n-1}{2}(2r+3) + 1 + r + r\Big\}$

$$= \Big\{p + r + 2,\ p + r + 3, \dots,\ p + 2r + 1,\ p + (2r + 3) + r + 2,\ p + (2r + 3) + r + 3, \dots,\ p + (2r + 3) + 2r + 1, \dots,\ p + \tfrac{n-1}{2}(2r + 3) + r + 2,\ p + \tfrac{n-1}{2}(2r + 3) + r + 3, \dots,\ p + \tfrac{n-1}{2}(2r + 3) + 2r + 1\Big\}.$$

$L_8 = \{f(u_i^j) | i \text{ genap}, i \in I;\ j \in R\}$

$$= \Big\{\tfrac{2}{2}(2r + 3) - r + 1,\ \tfrac{2}{2}(2r + 3) - r + 2, \dots,\ \tfrac{2}{2}(2r + 3) - r + r,\ \tfrac{4}{2}(2r + 3) - r + 1,\ \tfrac{4}{2}(2r + 3) - r + 2, \dots,\ \tfrac{4}{2}(2r + 3) - r + r, \dots,\ \tfrac{n}{2}(2r + 3) - r + 1,\ \tfrac{n}{2}(2r + 3) - r + 2, \dots,\ \tfrac{n}{2}(2r + 3) - r + r\Big\}$$

$$= \Big\{r + 4,\ r + 5,\ r + 6, \dots,\ (2r + 3),\ 2(2r + 3) - r + 1,\ (2r + 3) - r + 2, \dots, 2(2r + 3), \dots,\ \tfrac{n}{2}(2r + 3) - r + 1,\ \tfrac{n}{2}(2r + 3) - r + 2, \dots,\ \tfrac{n}{2}(2r + 3)\Big\}.$$

$L_9 = \{f(c_i) | i \text{ ganjil}, i \in I\}$

$$= \Big\{p + \tfrac{1-1}{2}(2r + 3) + r + 1,\ p + \tfrac{3-1}{2}(2r + 3) + r + 1, \dots,\ p + \tfrac{n-1}{2}(2r + 3) + r + 1\Big\}$$

$$= \Big\{p + r + 1,\ p + (2r + 3) + r + 1, \dots,\ p + \tfrac{n-1}{2}(2r + 3) + r + 1\Big\}.$$

$L_{10} = \{f(c_i) | i \text{ genap}, i \in I\}$

$$= \Big\{\tfrac{2}{2}(2r + 3) - r,\ \tfrac{4}{2}(2r + 3) - r,\ \tfrac{6}{2}(2r + 3) - r, \dots,\ \tfrac{n}{2}(2r + 3) - r\Big\}$$

$$= \Big\{r + 3,\ 2(2r + 3) - r,\ 3(2r + 3) - r, \dots,\ \tfrac{n}{2}(2r + 3) - r\Big\}.$$

Maka himpunan label simpul graf lobster $L_n(2; r)$ adalah

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8 \cup L_9 \cup L_{10}$

$= \left\{1,\ (2r+3)+1,\ 2(2r+3)+1, \dots,\ \frac{n-1}{2}(2r+3)+1\right\} \cup$
$\left\{p+(2r+3)-1,\ p+2(2r+3)-1, p+3(2r+3)-1, \dots,\ p+\frac{n}{2}(2r+3)-1\right\} \cup \left\{2,\ (2r+3)+2,\ 2(2r+3)+2, \dots,\ \frac{n-1}{2}(2r+3)+2\right\} \cup \left\{p+(2r+3),\ p+2(2r+3), p+3(2r+3), \dots, p+\frac{n}{2}(2r+3)\right\} \cup$
$\left\{p+1,\ p+2, \dots,\ p+r,\ p+(2r+3)+1,\ p+(2r+3)+2, \dots,\ p+(2r+3)+r,\ p+\frac{n-1}{2}(2r+3)+1,\ p+\frac{n-1}{2}(2r+3)+2, \dots,\ p+\frac{n-1}{2}(2r+3)+r\right\} \cup \left\{3, 4, 5, \dots,\ 2+r,\ 2r+3,\ 2r+4, \dots, 3r+5, \dots,\ \frac{n}{2}(2r+3)-2r,\ \frac{n}{2}(2r+3)-2r+1, \dots,\ \frac{n}{2}(2r+3)-(r+1)\right\} \cup$
$\left\{p+r+2,\ p+r+3, \dots,\ p+2r+1,\ p+(2r+3)+r+2,\ p+(2r+3)+r+3, \dots,\ p+(2r+3)+2r+1, \dots,\ p+\frac{n-1}{2}(2r+3)+r+2,\ p+\frac{n-1}{2}(2r+3)+r+3, \dots,\ p+\frac{n-1}{2}(2r+3)+2r+1\right\} \cup$
$\left\{r+4,\ r+5,\ r+6, \dots,\ (2r+3),\ 2(2r+3)-r+1,\ (2r+3)-r+2, \dots, 2(2r+3), \dots,\ \frac{n}{2}(2r+3)-r+1,\ \frac{n}{2}(2r+3)-r+2, \dots,\ \frac{n}{2}(2r+3)\right\} \cup \left\{p+r+1,\ p+(2r+3)+r+1, \dots,\ p+\frac{n-1}{2}(2r+3)+r+1\right\} \cup \left\{r+3,\ 2(2r+3)-r,\ 3(2r+3)-r, \dots,\ \frac{n}{2}(2r+3)-r\right\}$

$$= \begin{cases} \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}(2r+3)+2\right\} \cup \left\{p+1, p+2, \dots, p+\frac{n-1}{2}(2r+3)+2r+1\right\} & , n \text{ ganjil} \\ \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}(2r+3)\right\} \cup \left\{p+1, p+2, \dots, p+\frac{n}{2}(2r+3)\right\} & , n \text{ genap} \end{cases} \quad (3.6).$$

Dari persamaan (3.6) didapat nilai b, yaitu $b = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(2r+3)+2 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(2r+3) & , n \text{ genap} \end{cases}$.

Jika pada persamaan (3.6) disubstitusikan nilai

$p = \begin{cases} \frac{3n-1}{2}(2r+3)+1 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{3n}{2}(2r+3)-1 & , n \text{ genap} \end{cases}$, didapat jarak antara himpunan pertama dan himpunan kedua label simpul, yaitu

- Untuk *n* ganjil

  $p - b = \frac{3n-1}{2}(2r+3) + 1 - \left(\frac{n-1}{2}(2r+3) + 2\right) = n(2r+3) - 1 = e.$

- Untuk *n* genap

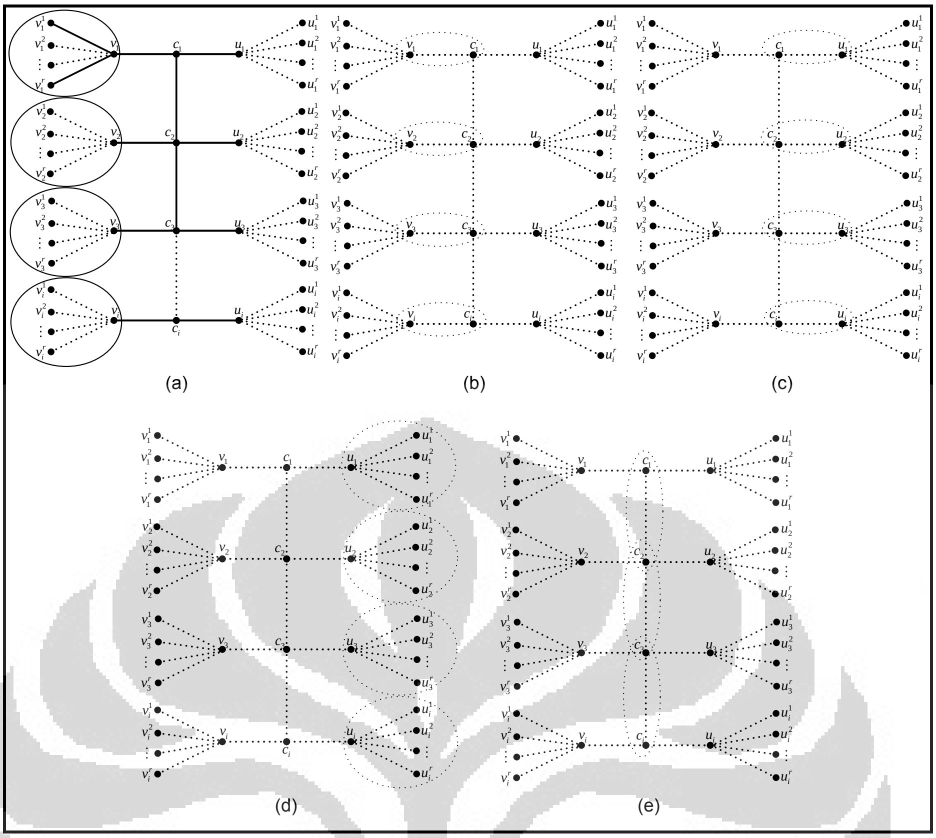
  $$p - b = \frac{3n}{2}(2r+3) - 1 - \frac{n}{2}(2r+3) = n(2r+3) - 1 = e.$$

Terlihat bahwa himpunan label simpul graf lobster $L_n(2; r)$ terbagi menjadi 2 himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \epsilon E\}$ membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan. Pembuktian ini akan dibagi menjadi 5 kasus, yaitu :

1. $v_i v_i^j$ untuk $i \in I; j \in R$.
2. $c_i v_i$ untuk $i \in I$.
3. $c_i u_i$ untuk $i \in I$.
4. $u_i u_i^j$ untuk $i \in I; j \in R$.
5. $c_i c_{i+1}$ untuk $i \in I$.

Ilustrasi untuk setiap kasus ditunjukkan oleh Gambar 3. 2.



Gambar 3.2 (a) Kasus 1, (b) Kasus 2, (c) Kasus 3, (d) Kasus 4, (e) Kasus 5

1. Kasus 1: Busur $v_i v_i^j$ dengan $i \in I$ dan $j \in R$.

   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk *i* ganjil dan *i* genap.

   - Untuk *i* ganjil

     $$\begin{aligned} w_1 &= f(v_i) + f\left(v_i^j\right) \\ &= \frac{i-1}{2}(2r+3) + 1 + p + \frac{i-1}{2}(2r+3) + j \\ &= p + i(2r+3) - 2(r+1) + j. \end{aligned}$$

   - Untuk *i* genap

     $$\begin{aligned} w_1 &= f(v_i) + f\left(v_i^j\right) \\ &= p + \frac{i}{2}(2r+3) - 1 + \frac{i}{2}(2r+3) - (2r+1) + j \\ &= p + i(2r+3) - 2(r+1) + j. \end{aligned}$$

   Untuk *i* ganjil dan *i* genap didapat persamaan yang sama, yaitu $w_1 = p + i(2r+3) - 2(r+1) + j$.

Dengan mensubstitusi $i \in I$ dan$j \in R$, didapat himpunan

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f(v_i) + f(v_i^j) | i \in I; j \in R\} \\ &= \{p + (2r+3) - 2(r+1) + 1,\ p + (2r+3) - 2(r+1) + 2, \dots, \\ &\quad p + (2r+3) - 2(r+1) + r,\ p + 2(2r+3) - 2(r+1) + 1, \\ &\quad p + 2(2r+3) - 2(r+1) + 2, \dots, \ p + 2(2r+3) - 2(r+1) + \\ &\quad r, \dots, \ p + n(2r+3) - 2(r+1) + 1,\ p + n(2r+3) - \\ &\quad 2(r+1) + 2, \dots, \ p + n(2r+3) - 2(r+1) + r\}. \end{aligned}$$

2. Kasus 2: Busur $c_i v_i$ dengan $i \in I$.

   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk *i* ganjil dan *i* genap.

   - Untuk *i* ganjil

     $$\begin{aligned} w_2 &= f(c_i) + f(v_i) \\ &= p + \frac{i-1}{2}(2r+3) + r + 1 + \frac{i-1}{2}(2r+3) + 1 \\ &= p + i(2r+3) - (r+1). \end{aligned}$$

   - Untuk *i* genap

     $$\begin{aligned} w_2 &= f(c_i) + f(v_i) \\ &= \frac{i}{2}(2r+3) - r + p + \frac{i}{2}(2r+3) - 1 \\ &= p + i(2r+3) - (r+1). \end{aligned}$$

   Untuk *i* ganjil dan *i* genap didapat persamaan yang sama, yaitu $w_2 = p + i(2r+3) - (r+1)$.

   Dengan mensubstitusi $i \in I$, didapat himpunan

$$\begin{aligned} W_2 &= \{f(c_i) + f(v_i) | i \in I\} \\ &= \{p + (2r+3) - (r+1),\ p + 2(2r+3) - (r+1),\ p + \\ &\quad 3(2r+3) - (r+1), \dots, \ p + n(2r+3) - (r+1)\}. \end{aligned}$$

3. Kasus 3: Busur $c_i u_i$ dengan $i \in I$.

   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk *i* ganjil dan *i* genap.

   - Untuk *i* ganjil

     $$\begin{aligned} w_3 &= f(c_i) + f(u_i) \\ &= p + \frac{i-1}{2}(2r+3) + r + 1 + \frac{i-1}{2}(2r+3) + 2 \\ &= p + i(2r+3) - r. \end{aligned}$$

   - Untuk *i* genap

     $$\begin{aligned} w_3 &= f(c_i) + f(u_i) \\ &= \frac{i}{2}(2r+3) - r + p + \frac{i}{2}(2r+3) \\ &= p + i(2r+3) - r. \end{aligned}$$

     Untuk *i* ganjil dan *i* genap didapat persamaan yang sama, yaitu $w_3 = p + i(2r+3) - r$.

   Dengan mensubstitusi $i \in I$, didapat himpunan

   $$\begin{aligned} W_3 &= \{f(c_i) + f(u_i) | i \in I\} \\ &= \{p + (2r+3) - r,\ p + 2(2r+3) - r,\ p + 3(2r+3) - r, \dots, \\ &\quad\ p + n(2r+3) - r\}. \end{aligned}$$

4. Kasus 4: Busur $u_i u_i^j$ dengan $i \in I$dan $j \in R$.

   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk *i* ganjil dan *i* genap.

   - Untuk *i* ganjil

     $$\begin{aligned} w_4 &= f(u_i) + f\left(u_i^j\right) \\ &= \frac{i-1}{2}(2r+3) + 2 + p + \frac{i-1}{2}(2r+3) + 1 + r + j \\ &= p + i(2r+3) - r + j \end{aligned}$$

   - Untuk *i* genap

     $$\begin{aligned} w_4 &= f(u_i) + f\left(u_i^j\right) \\ &= p + \frac{i}{2}(2r+3) + \frac{i}{2}(2r+3) - r + j \\ &= p + i(2r+3) - r + j. \end{aligned}$$

Untuk *i* ganjil dan *i* genap didapat persamaan yang sama, yaitu $w_4 = p + i(2r+3) - r + j$.

Dengan mensubstitusi $i \in I$ dan $j \in R$, didapat himpunan

$$\begin{aligned} W_4 &= \{f(u_i) + f(u_i^j) | i \in I; j \in R\} \\ &= \{p + (2r+3) - r + 1,\ p + (2r+3) - r + 2, \dots, p + (2r+3) - r + r,\ p + 2(2r+3) - r + 1,\ p + 2(2r+3) - r + 2, \dots,\ p + 2(2r+3) - r + r, \dots,\ p + n(2r+3) - r + 1,\ p + n(2r+3) - r + 2, \dots,\ p + n(2r+3) - r + r\} \\ &= \{p + (2r+3) - r + 1,\ p + (2r+3) - r + 2, \dots,\ p + (2r+3),\ p + 2(2r+3) - r + 1,\ p + 2(2r+3) - r + 2, \dots,\ p + 2(2r+3), \dots,\ p + n(2r+3) - r + 1,\ p + n(2r+3) - r + 2, \dots,\ p + n(2r+3)\}. \end{aligned}$$

5. Kasus 5: Busur $c_i c_{i+1}$ dengan $i \in I$.

   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk *i* ganjil dan *i* genap.

   - Untuk *i* ganjil. Tanpa kehilangan keumuman, asumsikan *i* ganjil dan *i*+1 genap.

     $$\begin{aligned} w_5 &= f(c_i) + f(c_{i+1}) \\ &= p + \frac{i-1}{2}(2r+3) + r + 1 + \frac{i+1}{2}(2r+3) - r \\ &= p + i(2r+3) + 1. \end{aligned}$$

   - Untuk *i* genap. Tanpa kehilangan keumuman, asumsikan *i* genap dan *i*+1 ganjil.

     $$\begin{aligned} w_5 &= f(c_i) + f(c_{i+1}) \\ &= \frac{i}{2}(2r+3) - r + p + \frac{(i+1)-1}{2}(2r+3) + r + 1 \\ &= p + i(2r+3) + 1. \end{aligned}$$

   Untuk *i* ganjil dan *i* genap didapat persamaan yang sama, yaitu $w_5 = p + i(2r+3) + 1$.

Dengan mensubstitusi $i \in I$, didapat himpunan

$$W_5 = \{f(c_i) + f(c_{i+1}) | i \in I\}$$
$$= \{p + (2r+3) + 1,\ p + 2(2r+3) + 1,\ p + 3(2r+3) + 1, \dots,\ p + n(2r+3) + 1\}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ membentuk himpunan bilangan berurutan.

$$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5$$
$$= \{p + (2r+3) - 2(r+1) + 1,\ p + (2r+3) - 2(r+1) + 2, \dots, p + (2r+3) - 2(r+1) + r,\ p + 2(2r+3) - 2(r+1) + 1,\ p + 2(2r+3) - 2(r+1) + 2, \dots, p + 2(2r+3) - 2(r+1) + r, \dots,\ p + n(2r+3) - 2(r+1) + 1,\ p + n(2r+3) - 2(r+1) + 2, \dots,\ p + n(2r+3) - 2(r+1) + r\} \cup \{p + (2r+3) - (r+1),\ p + 2(2r+3) - (r+1),\ p + 3(2r+3) - (r+1), \dots,\ p + n(2r+3) - (r+1)\} \cup \{p + (2r+3) - r +,\ p + 2(2r+3) - r,\ p + 3(2r+3) - r, \dots,\ p + n(2r+3) - r\} \cup \{p + (2r+3) - r + 1,\ p + (2r+3) - r + 2, \dots,\ p + (2r+3),\ p + 2(2r+3) - r + 1,\ p + 2(2r+3) - r + 2, \dots,\ p + 2(2r+3), \dots,\ p + n(2r+3) - r + 1,\ p + n(2r+3) - r + 2, \dots,\ p + n(2r+3)\} \cup \{p + (2r+3) + 1,\ p + 2(2r+3) + 1,\ p + 3(2r+3) + 1, \dots,\ p + n(2r+3) + 1\}$$
$$= \{p + 2,\ p + 3,\ p + 4, \dots,\ p + n(2r+3) + 1\} \qquad (3.7).$$

Dari persamaan (3.7) terlihat bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan, sehingga menurut Lemma 3.1 terbukti bahwa graf lobster $L_n(2; r)$ memiliki PTBA b- busur berurutan dengan

$$b = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(2r+3) + 2 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(2r+3) & , n \text{ genap} \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

Seperti yang diberikan oleh Lemma 3.1, pelabelan f dapat ditingkatkan menjadi PTBA b- busur berurutan dengan konstanta ajaib $k = b + e + w$. Konstanta ajaib pada PTBA b- busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r)$ adalah

$k = b + e + w$, dimana $w = \min(W) = p + 2$ dan

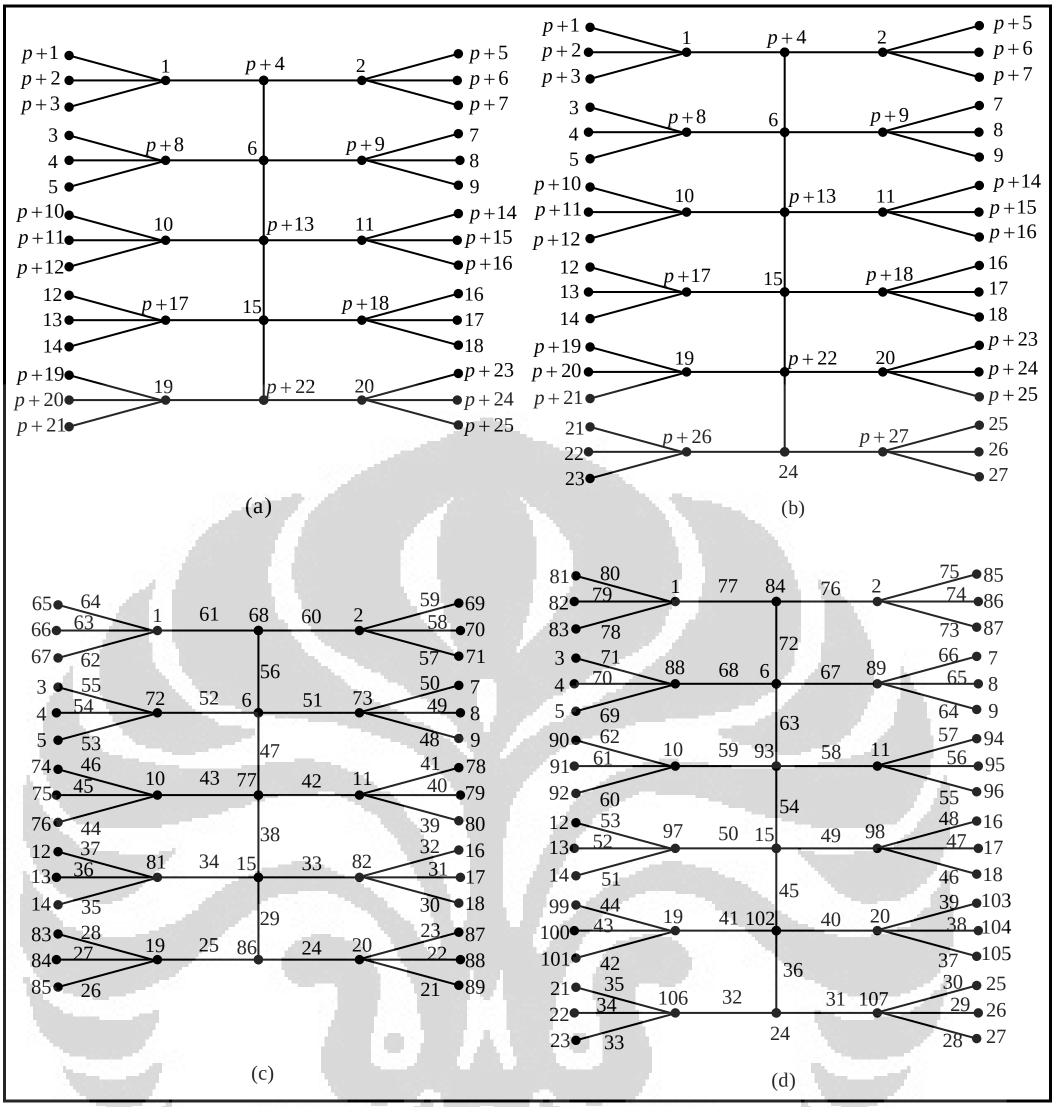
$$p = \begin{cases} \frac{3n-1}{2}(2r+3)+1 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{3n}{2}(2r+3)-1 & ,n \text{ genap} \end{cases}.$$

$$k = b + e + p + 2$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}(2r+3)+2+n(2r+3)-1+\dfrac{3n-1}{2}(2r+3)+1+2 & ,n \text{ ganjil} \\ \dfrac{n}{2}(2r+3)+n(2r+3)-1+\dfrac{3n}{2}(2r+3)-1+2 & ,n \text{ genap} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (3n-1)(2r+3)+4 & ,n \text{ ganjil} \\ 3n(2r+3) & ,n \text{ genap} \end{cases}.$$

Contoh pemberian label pada graf lobster $L_n(2; r)$ dengan menggunakan persamaan (3.1) sampai (3.5) ditunjukkan oleh Gambar 3.3 (a) untuk n ganjil yaitu $L_5(2; 3)$ dan Gambar 3.3 (b) untuk n genap yaitu $L_6(2; 3)$. Pada graf lobster $L_5(2; 3)$ disubstitusikan niai $p = \frac{3n-1}{2}(2r+3)+1 = \frac{3.5-1}{2}(2.3+3)+1 = 64$ sehingga diperoleh PTBA 20-busur berurutan busur ajaib graf lobster $L_5(2; 3)$ seperti pada Gambar 3.3 (c) dan pada $L_6(2; 3)$ disubstitusikan nilai $p = \frac{3n}{2}(2r+3)-1 = \frac{3.6}{2}(2.3+3)-1 = 80$ sehingga diperoleh PTBA b-busur berurutan busur ajaib graf lobster $L_5(2; 3)$ seperti pada Gambar 3.3 (d). Graf lobster $L_5(2; 3)$ memiliki himpunan label simpul $\{1, 2, \dots, 20\} \cup \{65, 66, \dots, 89\}$, himpunan label busur $\{21, 22, \dots, 64\}$, dan konstanta ajaib k =130. Sedangkan graf lobster $L_6(2; 3)$ memiliki himpunan label simpul $\{1, 2, \dots, 27\} \cup \{81, 82, \dots, 107\}$, himpunan label busur $\{28, 29, \dots, 80\}$, dan konstanta ajaib k =162.



Gambar 3.3 (a) Pemberian label simpul pada graf lobster $L_5(2;3)$,

(b) Pemberian label simpul pada graf lobster $L_6(2;3)$,

(c) PTBA 20-busur berurutan pada graf lobster $L_5(2;3)$,

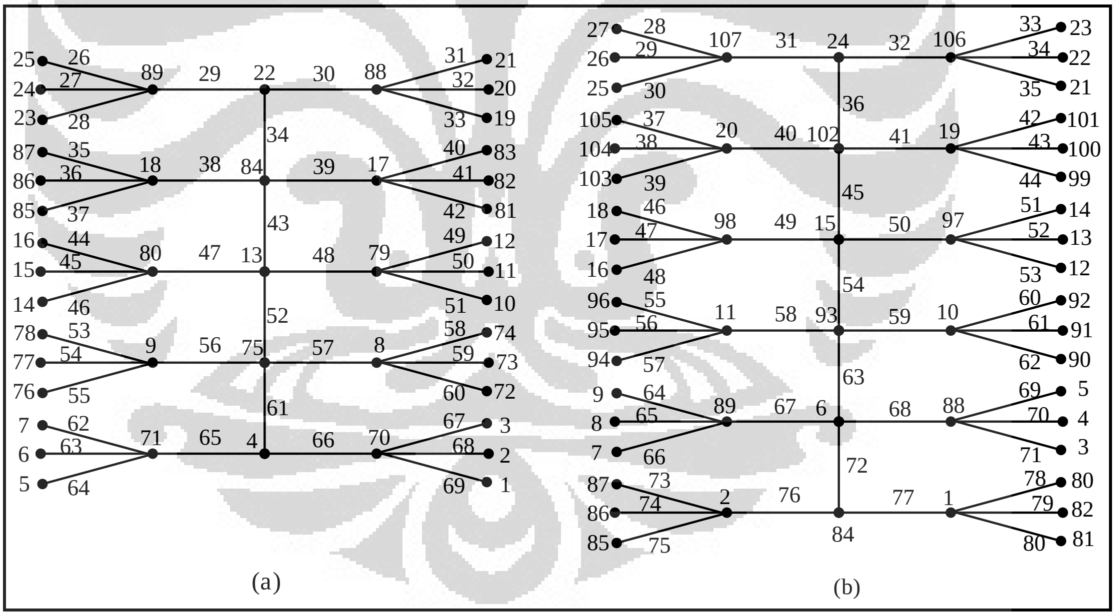
(d) PTBA 27-busur berurutan pada graf lobster $L_6(2;3)$.

Seperti yang telah dijelaskan pada Teorema 2.2, bahwa dual dari PTBA b-busur berurutan pada graf G adalah suatu PTBA $(v\text{-}b)$-busur berurutan.

Pada Teorema 3.1 diberikan PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2;r)$. Banyaknya simpul pada graf lobster $L_n(2;r)$ adalah $v = n(2r+1)$ dan nilai b pada Teorema 3.1 adalah $b = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(2r+3)+2 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(2r+3) & , n \text{ genap} \end{cases}$, sehingga didapat $v - b = \begin{cases} \frac{n+1}{2}(2r+3)-2 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(2r+3) & , n \text{ genap} \end{cases}$ yang merupakan nilai b untuk pelabelan dual dari pelabelan yang diberikan Teorema 3.1. Dual dari PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r)$ ditunjukkan oleh Akibat 3.1.

Akibat 3.1 Setiap graf lobster $L_n(2; r)$ memiliki PTBA b-busur berurutan dengan $b = \begin{cases} \frac{n+1}{2}(2r+3)-2 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(2r+3) & , n \text{ genap} \end{cases}$.

Nilai konstanta ajaib pada pelabelan yang diberikan Akibat 3.1 adalah $k = \begin{cases} (3n+1)(2r+3)-4 & , n \text{ ganjil} \\ 3n(2r+3) & , n \text{ genap} \end{cases}$.



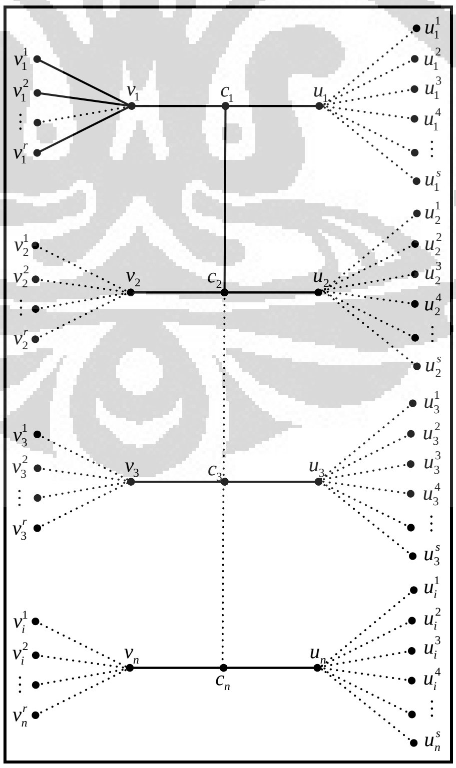
Gambar 3.4 (a) PTBA 25-busur berurutan pada graf lobster $L_5(2; 3)$,
(b) PTBA 27-busur berurutan pada graf lobster $L_6(2; 3)$

Contoh pelabelan dual dari PTBA 20-busur berurutan graf lobster $L_5(2; 3)$ yaitu PTBA 25-busur berurutan ditunjukkan oleh Gambar 3.4 (a) dan pelabelan dual dari PTBA 27-busur berurutan pada graf lobster$L_6(2; 3)$ yaitu PTBA 27-busur berurutan ditunjukkan oleh Gambar 3.4 (b). Pada PTBA 20-busur berurutan graf lobster $L_5(2; 3)$, nilai $b = 20$ dan $k = 130$, sedangkan pada pelabelan dualnya, nilai $b = 25$ dan $k = 140$. Pada PTBA 27-busur berurutan graf lobster $L_5(2; 3)$, nilai $b = 27$ dan $k = 162$, sedangkan pada pelabelan dualnya, nilai $b = 27$ dan $k = 162$.

Selanjutnya pada Subbab 3.2 akan dibahas PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r, s)$.

3.2 PTBA b-Busur Berurutan pada Graf Lobster $L_n(2; r, s)$

Pada subbab ini akan dibahas mengenai PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r, s)$. Graf lobster $L_n(2; r, s)$, adalah graf lobster semi teratur dengan n menyatakan banyak simpul pada lintasan, 2 menyatakan banyak simpul berjarak 1 dari setiap simpul lintasan (kedua simpul ini disebut simpul pertama dan simpul kedua), r adalah banyak daun pada simpul pertama dan s adalah banyak simpul daun pada simpul kedua.



Gambar 3.5 Penamaan simpul dan busur pada graf lobster $L_n(2;r, s)$

Gambar 3.5 merupakan penamaan simpul dan busur pada graf lobster $L_n(2; r, s)$, c_i adalah simpul ke-i pada lintasan, v_i dan u_i adalah simpul-simpul berjarak 1 dari simpul ke-i pada lintasan, v_i^j dan u_i^j adalah simpul daun ke-j pada simpul berjarak 1 dari simpul ke-i pada lintasan. Banyaknya simpul pada graf lobster $L_n(2; r, s)$ adalah $v = nr + n + ns = n(r + s + 1)$ dan bayaknya busur adalah $e = rn + 2n + n - 1 + sn = n(r + s + 3) - 1$.

Diberikan hasil yang diperoleh untuk PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r, s)$ yang ditunjukkan oleh Teorema 3.2.

Teorema 3.2 Setiap graf lobster $L_n(2; r, s)$ memiliki PTBA b-busur berurutan dengan $b = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(r+s+3)+2 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(r+s+3) & , n \text{ genap} \end{cases}$.

Bukti :

Nyatakan $p = \begin{cases} \frac{3n-1}{2}(r+s+3)+1 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{3n}{2}(r+s+3)-1 & , n \text{ genap} \end{cases}$, $I = \{1,2, \dots, n\}$,

$R = \{1,2, \dots, r\}$, dan $S = \{1,2, \dots, s\}$.

Label simpul dari graf lobster $L_n(2; r, s)$ adalah sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}(r+s+3)+1 & , i \text{ ganjil}, i \in I \\ p + \frac{i}{2}(r+s+3) & , i \text{ genap}, i \in I \end{cases} \quad (3.8).$$

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}(r+s+3)+2 & , i \text{ ganjil}, i \in I \\ p + \frac{i}{2}(r+s+3)-1 & , i \text{ genap}, i \in I \end{cases} \quad (3.9).$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} p + \frac{i-1}{2}(r+s+3)+j & , i \text{ ganjil}, i \in I;\ j \in R \\ \frac{i}{2}(r+s+3)-r+j & , i \text{ genap}, i \in I; j \in R \end{cases} \quad (3.10).$$

$$f(u_i^j) = \begin{cases} p + \frac{i+1}{2}(r+1) + \frac{i-1}{2}(s+2)+j & , i \text{ ganjil}, i \in I; j \in S \\ \frac{i-2}{2}(r+s+1)+i+j & , i \text{ genap}, i \in I;\ j \in S \end{cases} \quad (3.11).$$

$$f(c_i) = \begin{cases} p + \frac{i+1}{2}(r+1) + \frac{i-1}{2}(s+2) & , i \text{ ganjil}, i \in I \\ \frac{i}{2}(r+s+3) - r & , i \text{ genap}, i \in I \end{cases} \quad (3.12).$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan label simpul graf lobster $L_n(2; r, s)$ terbagi menjadi 2 himpunan bilangan berurutan yang terpisan sejauh e. Pertama akan diberikan himpunan label v_i, u_i, v_i^j, u_i^j, dan c_i dari graf lobter $L_n(2; r, s)$.

$$L_1 = \{f(v_i) | i \text{ ganjil}, i \in I\}$$

$$= \left\{\frac{1-1}{2}(r+s+3)+1,\ \frac{3-1}{2}(r+s+3)+1,\ \frac{5-1}{2}(r+s+3)+1, \dots,\ \frac{n-1}{2}(r+s+3)+1\right\}$$

$$= \left\{1,\ (r+s+3)+1, 2(r+s+3)+1, \dots,\ \frac{n-1}{2}(r+s+3)+1\right\}.$$

$$L_2 = \{f(v_i) | i \text{ genap}, i \in I\}$$

$$= \left\{p + \frac{2}{2}(r+s+3),\ p + \frac{4}{2}(r+s+3), \dots,\ p + \frac{n}{2}(r+s+3)\right\}$$

$$= \left\{p + (r+s+3),\ p + 2(r+s+3), \dots,\ p + \frac{n}{2}(r+s+3)\right\}.$$

$$L_3 = \{f(u_i) | i \text{ ganjil}, i \in I\}$$

$$= \left\{\frac{1-1}{2}(r+s+3)+2,\ \frac{3-1}{2}(r+s+3)+2,\ \frac{5-1}{2}(r+s+3)+2, \dots,\ \frac{n-1}{2}(r+s+3)+2\right\}$$

$$= \left\{2, (r+s+3)+2, 2(r+s+3)+2, \dots,\ \frac{n-1}{2}(r+s+3)+2\right\}.$$

$$L_4 = \{f(u_i) | i \text{ genap}, i \in I\}$$

$$= \left\{p + \frac{2}{2}(r+s+3)-1,\ p + \frac{4}{2}(r+s+3)-1, \dots,\ p + \frac{n}{2}(r+s+3)-1\right\}$$

$$= \left\{p + (r+s+3)-1,\ p + 2(r+s+3)-1, \dots,\ p + \frac{n}{2}(r+s+3)-1\right\}.$$

$L_5 = \left\{ f\left(v_i^j\right) | i \text{ ganjil}, i \in I; j \in R \right\}$

$= \left\{ p + \frac{1-1}{2}(r+s+3) + 1,\ p + \frac{1-1}{2}(r+s+3) + 2, \dots, p + \frac{1-1}{2}(r+s+3) + r,\ p + \frac{3-1}{2}(r+s+3) + 1,\ p + \frac{3-1}{2}(r+s+3) + 2, \dots ,\ p + \frac{3-1}{2}(r+s+3) + r, \dots, p + \frac{n-1}{2}(r+s+3) + 1,\ p + \frac{n-1}{2}(r+s+3) + 2, \dots ,\ p + \frac{n-1}{2}(r+s+3) + r \right\}$

$= \left\{ p+1,\ p+2, \dots, p+r,\ p+(r+s+3)+1,\ p+(r+s+3)+2, \dots, p+(r+s+3)+r, \dots ,\ p + \frac{n-1}{2}(r+s+3)+1,\ p + \frac{n-1}{2}(r+s+3)+2, \dots ,\ p + \frac{n-1}{2}(r+s+3)+r \right\}.$

$L_6 = \left\{ f\left(v_i^j\right) | i \text{ genap}, i \in I; j \in R \right\}$

$= \left\{ \frac{2}{2}(r+s+3) - r + 1,\ \frac{2}{2}(r+s+3) - r + 2, \dots ,\ \frac{2}{2}(r+s+3) - r + r,\ \frac{4}{2}(r+s+3) - r + 1,\ \frac{4}{2}(r+s+3) - r + 2, \dots ,\ \frac{4}{2}(r+s+3) - r + r, \dots ,\ \frac{n}{2}(r+s+3) - r + 1,\ \frac{n}{2}(r+s+3) - r + 2, \dots ,\ \frac{n}{2}(r+s+3) - r + r \right\}$

$= \left\{ (r+s+3) - r + 1,\ (r+s+3) - r + 2, \dots, (r+s+3),\ 2(r+s+3) - r + 1,\ 2(r+s+3) - r + 2, \dots ,\ 2(r+s+3), \dots ,\ \frac{n}{2}(r+s+3) - r + 1,\ \frac{n}{2}(r+s+3) - r + 2, \dots ,\ \frac{n}{2}(r+s+3) \right\}.$

$L_7 = \left\{ f\left(u_i^j\right) | i \text{ ganjil}, i \in I; j \in S \right\}$

$= \left\{ p + \frac{1+1}{2}(r+1) + \frac{1-1}{2}(s+2) + 1,\ p + \frac{1+1}{2}(r+1) + \frac{1-1}{2}(s+2) + 2, \dots ,\ p + \frac{1+1}{2}(r+1) + \frac{1-1}{2}(s+2) + s,\ p + \frac{3+1}{2}(r+1) + \frac{3-1}{2}(s+2) + 1,\ p + \frac{3+1}{2}(r+1) + \frac{3-1}{2}(s+2) + 2, \dots ,\ p + \frac{3+1}{2}(r+1) + \frac{3-1}{2}(s+2) + s, \dots ,\ p + \frac{n+1}{2}(r+1) + \frac{n-1}{2}(s+2) + 1,\ p + \frac{n+1}{2}(r+1) + \frac{n-1}{2}(2r+3) + 2, \dots ,\ p + \frac{n+1}{2}(r+1) + \frac{n-1}{2}(s+2) + s \right\}$

$= \Big\{p + r + 2,\ p + r + 3, \dots ,\ p + r + 1 + s, p + 2(r + 1) + (s + 2) + 1, p + 2(r + 1) + (s + 2) + 2, \dots ,\ p + (r + 1) + (s + 2) + s, \dots ,\ p + \frac{n+1}{2}(r + 1) + \frac{n-1}{2}(s + 2) + 1,\ p + \frac{n+1}{2}(r + 1) + \frac{n-1}{2}(s + 2) + 2, \dots ,\ p + \frac{n+1}{2}(r + 1) + \frac{n-1}{2}(s + 2) + s\Big\}.$

$L_8 = \{f(u_i^j)|i \text{ genap}, i \in I; j \in \mathrm{S}\}$

$= \Big\{\frac{2-2}{2}(r + s + 1) + 2 + 1,\ \frac{2-2}{2}(r + s + 1) + 2 + 2, \dots ,\ \frac{2-2}{2}(r + s + 1) + 2 + s,\ \frac{4-2}{2}(r + s + 1) + 4 + 1,\ \frac{4-2}{2}(r + s + 1) + 4 + 2,\ \dots ,\ \frac{4-2}{2}(r + s + 1) + 4 + s, \dots ,\ \frac{n-2}{2}(r + s + 1) + n + 1, \frac{n-2}{2}(r + s + 1) + n + 2, \dots ,\ \frac{n-2}{2}(r + s + 1) + n + s\}\Big\}$

$= \Big\{3, 4, \dots , 2 + s, (r + s + 1) + 5,\ (r + s + 1) + 6 \dots , (r + s + 1) + 4 + s, \dots , \frac{n-2}{2}(r + s + 1) - n + 1, \frac{n-2}{2}(r + s + 1) - n + 2, \dots , \frac{n-2}{2}(r + s + 1) - n + s\Big\}.$

$L_9 = \{f(c_i)|i \text{ ganjil}, i \in I\}$

$= \Big\{p + \frac{1+1}{2}(r + 1) + \frac{1-1}{2}(s + 2),\ p + \frac{3+1}{2}(r + 1) + \frac{3-1}{2}(s + 2), \dots ,\ p + \frac{n+1}{2}(r + 1) + \frac{n-1}{2}(s + 2)\Big\}$

$= \Big\{p + r + 1,\ p + 2(r + 1) + (s + 2), \dots ,\ p + \frac{n+1}{2}(r + 1) + \frac{n-1}{2}(s + 2)\Big\}.$

$L_{10} = \{f(c_i)|i \text{ genap}, i \in I\}$

$= \Big\{\frac{2}{2}(r + s + 3) - r,\ \frac{4}{2}(r + s + 3) - r, \dots ,\ \frac{n}{2}(r + s + 3) - r\Big\}$

$= \Big\{(r + s + 3) - r,\ 2(r + s + 3) - r, 3(r + s + 3) - r, \dots ,\ \frac{n}{2}(r + s + 3) - r\Big\}.$

Maka himpunan label simpul graf lobster $L_n(2; r, s)$ adalah

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8 \cup L_9 \cup L_{10}$

$= \left\{1,\ (r+s+3)+1,\ 2(r+s+3)+1, \dots,\ \frac{n-1}{2}(r+s+3)+1\right\} \cup$
$\left\{p+(r+s+3),\ p+2(r+s+3), \dots,\ p+\frac{n}{2}(r+s+3)\right\} \cup$
$\left\{p+(r+s+3),\ p+2(r+s+3), \dots,\ p+\frac{n}{2}(r+s+3)\right\} \cup$
$\left\{p+(r+s+3)-1,\ p+2(r+s+3)-1, \dots,\ p+\frac{n}{2}(r+s+3)-1\right\} \cup \left\{p+1,\ p+2, \dots, p+r,\ p+(r+s+3)+1,\ p+(r+s+3)+2, \dots, p+(r+s+3)+r, \dots,\ p+\frac{n-1}{2}(r+s+3)+1,\ p+\frac{n-1}{2}(r+s+3)+2, \dots,\ p+\frac{n-1}{2}(r+s+3)+r\right\} \cup \left\{(r+s+3)-r+1,\ (r+s+3)-r+2, \dots, (r+s+3),\ 2(r+s+3)-r+1,\ 2(r+s+3)-r+2, \dots,\ 2(r+s+3), \dots,\ \frac{n}{2}(r+s+3)-r+1,\ \frac{n}{2}(r+s+3)-r+2, \dots,\ \frac{n}{2}(r+s+3)\right\} \cup \left\{p+r+2,\ p+r+3, \dots,\ p+r+1+s, p+2(r+1)+(s+2)+1, p+2(r+1)+(s+2)+2, \dots,\ p+(r+1)+(s+2)+s, \dots,\ p+\frac{n+1}{2}(r+1)+\frac{n-1}{2}(s+2)+1,\ p+\frac{n+1}{2}(r+1)+\frac{n-1}{2}(s+2)+2, \dots,\ p+\frac{n+1}{2}(r+1)+\frac{n-1}{2}(s+2)+s\right\} \cup \left\{3, 4, \dots, 2+s, (r+s+1)+5,\ (r+s+1)+6 \dots, (r+s+1)+4+s, \dots, \frac{n-2}{2}(r+s+1)-n+1, \frac{n-2}{2}(r+s+1)-n+2, \dots, \frac{n-2}{2}(r+s+1)-n+s\right\} \cup \left\{p+r+1,\ p+2(r+1)+(s+2), \dots,\ p+\frac{n+1}{2}(r+1)+\frac{n-1}{2}(s+2)\right\} \cup \left\{(r+s+3)-r,\ 2(r+s+3)-r, 3(r+s+3)-r, \dots,\ \frac{n}{2}(r+s+3)-r\right\}$

$$= \begin{cases} \left\{1,2,3,\dots,\dfrac{n-1}{2}(r+s+3)+2\right\} \cup \left\{p+1, p+2, \dots, p+\dfrac{n+1}{2}(r+1)+\dfrac{n-1}{2}(s+2)\right\} & , n \text{ ganjil} \\ \left\{1,2,3,\dots,\dfrac{n}{2}(r+s+3)\right\} \cup \left\{p+1, p+2, \dots, p+\dfrac{n}{2}(r+s+3)\right\} & , n \text{ genap} \end{cases}$$

(3.13).

Pada persamaan (3.13) didapat nilai $b = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(r+s+3)+2 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(r+s+3) & ,n \text{ genap} \end{cases}$.

Jika pada persamaan (3.13) disubstitusikan nilai

$p = \begin{cases} \frac{3n-1}{2}(r+s+3)+1 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{3n}{2}(r+s+3)-1 & ,n \text{ genap} \end{cases}$ akan didapat jarak antara himpunan

pertama dan himpunan kedua pada label simpul, yaitu

- Untuk *n* ganjil

  $p - b = \frac{3n-1}{2}(r+s+3)+1-\left(\frac{n-1}{2}(r+s+3)+2\right) = n(r+s+3)-1 = e$
- Untuk *n* genap

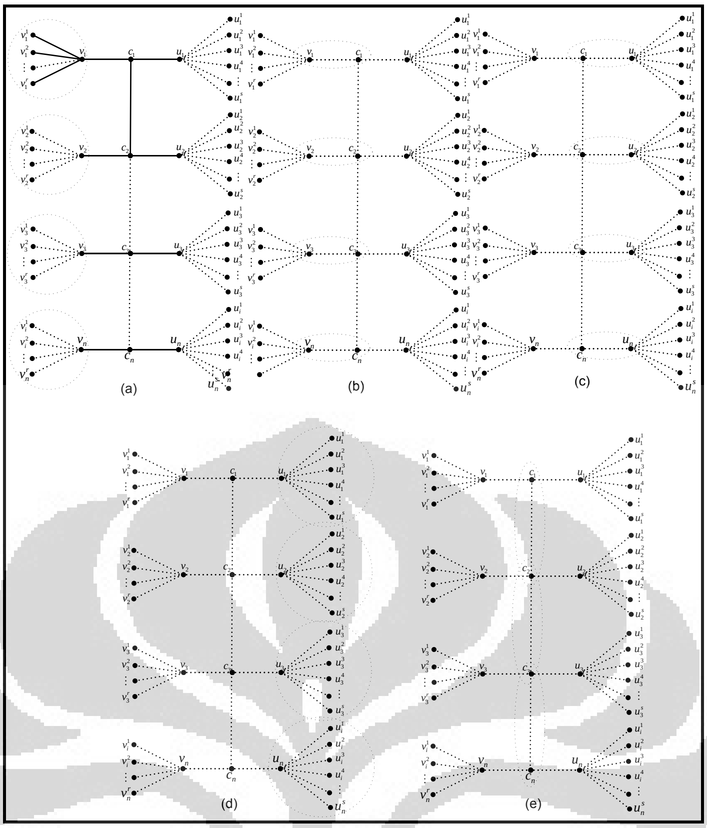
  $p - b = \frac{3n}{2}(r+s+3)-1-\left(\frac{n}{2}(r+s+3)\right) = n(r+s+3)-1 = e.$

Dapat dilihat bahwa himpunan label simpul graf lobster $L_n(2; r, s)$ terbagi menjadi 2 himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh *e*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ membentuk himpunan *e* bilangan bulat positif berurutan. Pembuktian ini akan dibagi menjadi 5 kasus, yaitu :

1. $v_i v_i^j$ untuk $i \in I; j \in R$.
2. $c_i v_i$ untuk $i \in I$.
3. $c_i u_i$ untuk $i \in I$.
4. $u_i u_i^j$ untuk $i \in I; j \in S$.
5. $c_i c_{i+1}$ untuk $i \in I$.

Ilustrasi untuk setiap kasus ditunjukkan oleh Gambar 3.6.



Gambar 3.6 (a) Kasus 1, **(b)** Kasus 2, **(c)** Kasus 3, **(d)** Kasus 4, **(e)** Kasus 5

1. Kasus 1:Busur $v_i v_i^j$ dengan $i \in I$ dan $j \in R$.
   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk *i* ganjil dan *i* genap.
   - Untuk *i* ganjil

$$\begin{aligned} w_1 &= f(v_i) + f(v_i^j) \\ &= \frac{i-1}{2}(r+s+3) + 1 + p + \frac{i-1}{2}(r+s+3) + j \\ &= p + (i-1)(r+s+3) + 1 + j \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi i ganjil, $i \in I$ dan $j \in R$, didapat himpunan

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f(v_i) + f(v_i^j) | i \text{ ganjil}, i \in I\,; j \in R\} \\ &= \{p + (1-1)(r+s+3) + 1 + 1,\ p + (1-1)(r+s+3) + 1 + \\ &\quad 2, \dots,\ p + (1-1)(r+s+3) + 1 + r,\ p + (3-1)(r+s+ \\ &\quad 3) + 1 + 1,\ p + (3-1)(r+s+3) + 1 + 2,\ p + (3-1)(r+ \\ &\quad s+3) + 1 + r, \dots,\ p + (n-1)(r+s+3) + 1 + 1,\ p + \end{aligned}$$

$(n-1)(r+s+3)+1+2, \dots ,\ p+(n-1)(r+s+3)+1+r\}.$

$$= \{p+2,\ p+3, \dots, p+1+r,\ p+2(r+s+3)+1+1,\ p+2(r+s+3)+1+2,\ p+2(r+s+3)+1+r, \dots ,\ p+(n-1)(r+s+3)+1+1,\ p+(n-1)(r+s+3)+1+2, \dots ,\ p+(n-1)(r+s+3)+1+r\}.$$

- Untuk i genap

$$w_2 = f(v_i) + f(v_i^j)$$
$$= p + \frac{i}{2}(r+s+3) + \frac{i}{2}(r+s+3) - r + j$$
$$= p + i(r+s+3) - r + j.$$

Dengan mensubstitusi i genap, $i \in I$ dan $j \in R$, didapat himpunan

$$W_2 = \{f(v_i) + f(v_i^j) | i \text{ genap}, i \in I; j \in R\}$$
$$= \{p+2(r+s+3)-r+1,\ p+2(r+s+3)-r+2, \dots, p+2(r+s+3)-r+r,\ p+4(r+s+3)-r+1,\ p+4(r+s+3)-r+2,\ p+4(r+s+3)-r+r, \dots ,\ p+n(r+s+3)-r+1,\ p+n(r+s+3)-r+2, \dots ,\ p+n(r+s+3)-r+r\}.$$

2. Kasus 2: Busur $c_i v_i$ dengan $i \in I$.
   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk i ganjil dan i genap.

- Untuk i ganjil

$$w_3 = f(c_i) + f(v_i)$$
$$= p + \frac{i+1}{2}(r+1) + \frac{i-1}{2}(s+2) + \frac{i-1}{2}(r+s+3) + 1$$
$$= p + i(r+s+3) - s - 1.$$

Dengan mensubstitusi i ganjil, $i \in I$, didapat himpunan

$$W_3 = \{f(c_i) + f(v_i) | i \in I\}$$
$$= \{p+(r+s+3)-s-1,\ p+3(r+s+3)-s-1, \dots ,\ p+n(r+s+3)-s-1\}.$$

- Untuk i genap

  $w_4 = f(c_i) + f(v_i)$

  $= \frac{i}{2}(r+s+3) - r + p + \frac{i}{2}(r+s+3)$

  $= p + i(r+s+3) - r.$

Dengan mensubstitusi i genap, $i \in I$, didapat himpunan

$$W_4 = \{f(c_i) + f(v_i) | i \text{ genap}, i \in I\}$$
$$= \{p + 2(r+s+3) - r,\ p + 4(r+s+3) - r, \dots ,\ p + n(r+s+3) - r\}.$$

3. Kasus 3: Busur $c_i u_i$ dengan $i \in I$.
   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk i ganjil dan i genap.

- Untuk i ganjil

  $w_5 = f(c_i) + f(u_i)$

  $= p + \frac{i+1}{2}(r+1) + \frac{i-1}{2}(s+2) + \frac{i-1}{2}(r+s+3) + 2$

  $= p + i(r+s+3) - s.$

Dengan mensubstitusi i ganjil, $i \in I$ dan didapat himpunan

$$W_5 = \{f(c_i) + f(u_i) | i \text{ ganjil}, i \in I\}$$
$$= \{p + (r+s+3) - s,\ p + 3(r+s+3) - s, \dots ,\ p + n(r+s+3) - s\}.$$

- Untuk i genap

  $w_6 = f(c_i) + f(u_i)$

  $= \frac{i}{2}(r+s+3) - r + p + \frac{i}{2}(r+s+3) - 1$

  $= p + i(r+s+3) - r - 1.$

Dengan mensubstitusi i genap, $i \in I$ dan didapat himpunan

$$W_6 = \{f(c_i) + f(u_i) | i \text{ genap}, i \in I\}$$
$$= \{p + 2(r+s+3) - r - 1,\ p + 4(r+s+3) - r - 1, \dots ,\ p + n(r+s+3) - r - 1\}.$$

4. Kasus 4: Busur $u_i u_i^j$ dengan $i \in I$ dan $j \in S$.
   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk i ganjil dan i genap.

   - Untuk i ganjil

$$\begin{aligned} w_7 &= f(u_i) + f\left(u_i^j\right) \\ &= \frac{i-1}{2}(r+s+3) + 2 + p + \frac{i+1}{2}(r+1) + \frac{i-1}{2}(s+2) + j \\ &= p + i(r+s+3) - s + j. \end{aligned}$$

   Dengan mensubstitusi i ganjil, $i \in I$ dan $j \in S$, didapat himpunan

$$\begin{aligned} W_7 &= \left\{f(u_i) + f\left(u_i^j\right) \middle| i \text{ ganjil}, i \in I\,; j \in S\right\} \\ &= \{p + (r+s+3) - s + 1,\ p + (r+s+3) - s + 2, \dots ,\ p + \\ &\quad (r+s+3) - s + s,\ p + 3(r+s+3) - s + 1,\ p + \\ &\quad 3(r+s+3) - s + 2, p + 3(r+s+3) - s + s, \dots ,\ p + \\ &\quad n(r+s+3) - s + 1,\ p + n(r+s+3) - s + s,\ p + \\ &\quad n(r+s+3) - s + s\} \\ &= \{p + (r+s+3) - s + 1,\ p + (r+s+3) - s + 2, \dots ,\ p + \\ &\quad (r+s+3),\ p + 3(r+s+3) - s + 1,\ p + 3(r+s+3) - s + \\ &\quad 2,\ p + 3(r+s+3), \dots , p + n(r+s+3) - s + 1,\ p + \\ &\quad n(r+s+3) - s + s,\ p + n(r+s+3)\}. \end{aligned}$$

   - Untuk i genap

$$\begin{aligned} w_8 &= f(u_i) + f\left(u_i^j\right) \\ &= p + \frac{i-1}{2}(r+s+3) - 1 + \frac{i+1}{2}(r+s+1) + i + j \\ &= p + i(r+s+3) - (r+s+2) + j. \end{aligned}$$

   Dengan mensubstitusi i genap , $i \in I$ dan $j \in S$, didapat himpunan

$$\begin{aligned} W_8 &= \left\{f(u_i) + f\left(u_i^j\right) \middle| i \text{ genap}, i \in I\,; j \in S\right\} \\ &= \{p + 2(r+s+3) - (r+s+2) + 1,\ p + 2(r+s+3) - \\ &\quad (r+s+2) + 2, \dots ,\ p + 2(r+s+3) - (r+s+2) + s,\ p + \\ &\quad 4(r+s+3) - (r+s+2) + 1,\ p + 4(r+s+3) - \\ &\quad (r+s+2) + 2,\ p + 4(r+s+3) - (r+s+2) + s, \dots , p + \end{aligned}$$

$n(r+s+3)-(r+s+2)+1,\ p+n(r+s+3)-$
$(r+s+2)+2, \dots ,\ p+n(r+s+3)-(r+s+2)+s\}.$

5. Kasus 5: Busur $c_i c_{i+1}$ dengan $i \in I$.
   Kasus ini akan dibagi menjadi 2 bagian, yaitu untuk *i* genap dan *i* ganjil.
   - Untuk *i* ganjil. Tanpa kehilangan keumuman, asumsikan *i* ganjil dan *i*+1 genap.
     $$w_9 = f(c_i) + f(c_{i+1})$$
     $$= p + \frac{i+1}{2}(r+1) + \frac{i-1}{2}(s+2) + \frac{i+1}{2}(r+s+3) - r$$
     $$= p + i(r+s+3) + 1.$$
   - Untuk *i* genap. Tanpa kehilangan keumuman, asumsikan *i* genap dan *i*+1 ganjil.
     $$w_9 = f(c_i) + f(c_{i+1})$$
     $$= \frac{i}{2}(r+s+3) - r + p + \frac{(i+1)+2}{2}(r+1) + \frac{(i+1)-1}{2}(s+2)$$
     $$= p + i(r+s+3) + 1.$$

     Untuk *i* ganjil dan *i* genap didapat persamaan yang sama, yaitu $w_9 = p + i(r+s+3)+1$.

   Dengan mensubstitusi $i \in I$ dan didapat himpunan

   $$W_9 = \{f(c_i) + f(c_{i+1}) | i \in I\}$$
   $$= \{p+(r+s+3)+1,\ p+2(r+s+3)+1, , \dots ,\ p+ n(r+s+3)+1\}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot busur $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ membentuk himpunan *e* bilangan bulat positif berurutan.

$$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7 \cup W_8 \cup W_9$$

$$= \{p+2,\ p+3, \dots, p+1+r,\ p+2(r+s+3)+1+1,\ p+ 2(r+s+3)+1+2,\ p+2(r+s+3)+1+r, \dots ,\ p+ (n-1)(r+s+3)+1+1,\ p+(n-1)(r+s+3)+1+2, \dots ,\ p+ (n-1)(r+s+3)+1+r\} \cup \{p+2(r+s+3)-r+1,\ p+ 2(r+s+3)-r+2, \dots, p+2(r+s+3)-r+r,\ p+4(r+s+$$

$3) - r + 1,\ p + 4(r + s + 3) - r + 2,\ p + 4(r + s + 3) - r + r, \dots,$
$p + n(r + s + 3) - r + 1, p + n(r + s + 3) - r + 2, \dots,\ p +$
$n(r + s + 3) - r + r\} \cup \{p + (r + s + 3) - s - 1,\ p + 3(r + s + 3) -$
$s - 1, \dots,\ p + n(r + s + 3) - s - 1\} \cup \{p + 2(r + s + 3) - r,\ p +$
$4(r + s + 3) - r, \dots,\ p + n(r + s + 3) - r\} \cup \{p + (r + s + 3) -$
$s, p + 3(r + s + 3) - s, \dots,\ p + n(r + s + 3) - s\} \cup \{p +$
$2(r + s + 3) - r - 1, p + 4(r + s + 3) - r - 1, \dots,\ p + n(r + s +$
$3) - r - 1\} \cup \{p + (r + s + 3) - s + 1, p + (r + s + 3) - s + 2, \dots,$
$p + (r + s + 3),\ p + 3(r + s + 3) - s + 1,\ p + 3(r + s + 3) - s + 2,$
$p + 3(r + s + 3), \dots, p + n(r + s + 3) - s + 1,\ p + n(r + s + 3) -$
$s + s,\ p + n(r + s + 3)\} \cup \{p + 2(r + s + 3) - (r + s + 2) + 1,\ p +$
$2(r + s + 3) - (r + s + 2) + 2, \dots,\ p + 2(r + s + 3) - (r + s + 2) +$
$s,\ p + 4(r + s + 3) - (r + s + 2) + 1,\ p + 4(r + s + 3) -$
$(r + s + 2) + 2,\ p + 4(r + s + 3) - (r + s + 2) + s, \dots, p +$
$n(r + s + 3) - (r + s + 2) + 1, p + n(r + s + 3) - (r + s + 2) +$
$2, \dots,\ p + n(r + s + 3) - (r + s + 2) + s\} \cup \{p + (r + s + 3) + 1, p +$
$2(r + s + 3) + 1, , \dots,\ p + n(r + s + 3) + 1\}$

$$= \{p + 2,\ p + 3,\ p + 4, \dots,\ p + n(r + s + 3) + 1\} \qquad (3.14).$$

Dari persamaan (3.14) dapat dilihat bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ membentuk himpunan *e* bilangan bulat positif berurutan, sehingga menurut Lemma 3.1 terbukti bahwa graf lobster $L_n(2; r, s)$ memiliki PTBA *b*-busur berurutan dengan

$$b = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(r + s + 3) + 2 & , n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(r + s + 3) & , n \text{ genap} \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

Seperti yang diberikan oleh Lemma 3.1, pelabelan *f* dapat ditingkatkan menjadi PTBA *b*- busur berurutan dengan konstanta ajaib $k = b + e + w$. Konstanta ajaib pada PTBA *b*- busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r, s)$ adalah

$k = b + e + w$, dimana $w = \min(W) = p + 2$ dan

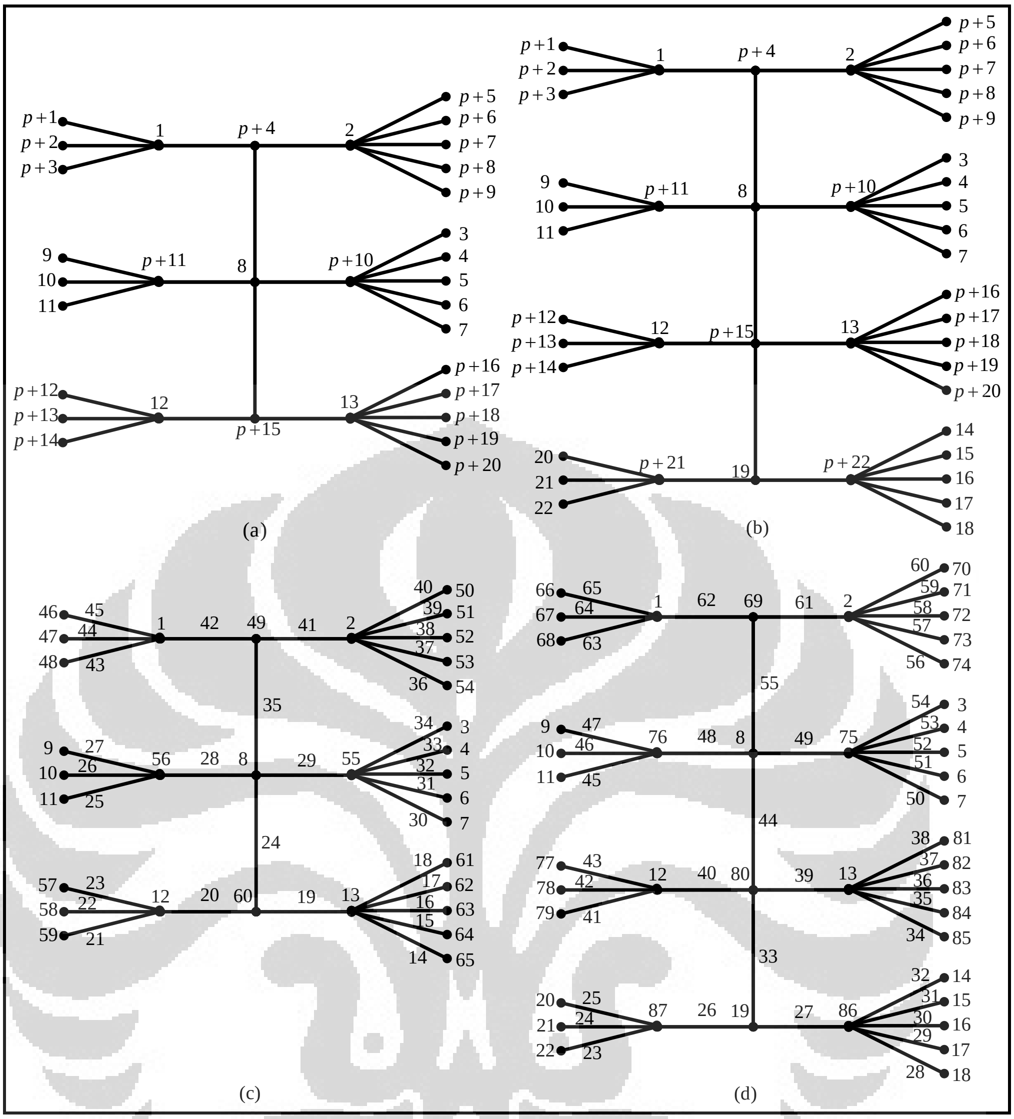
$$p = \begin{cases} \frac{3n-1}{2}(r+s+3)+1 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{3n}{2}(r+s+3)-1 & ,n \text{ genap} \end{cases}.$$

$$k = b + e + p + 2$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}(r+s+3)+2+n(r+s+3)-1+\dfrac{3n-1}{2}(r+s+3)+1+2 & ,n \text{ ganjil} \\ \dfrac{n}{2}(r+s+3)+n(r+s+3)-1+\dfrac{3n}{2}(r+s+3)-1+2 & ,n \text{ genap} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (3n-1)(r+s+3)+4 & ,n \text{ ganjil} \\ 3n(r+s+3) & ,n \text{ genap} \end{cases}.$$

Contoh pemberian label pada graf lobster $L_n(2; r, s)$ dengan menggunakan persamaan (3.8) sampai (3.12) ditunjukkan oleh Gambar 3.7 (a) untuk n ganjil yaitu $L_3(2; 3, 5)$ dan Gambar 3.7 (b) untuk n genap yaitu $L_4(2; 3, 5)$. Pada graf lobster $L_3(2; 3, 5)$ disubstitusikan nilai $p = \frac{3n-1}{2}(r+s+3)+1 = \frac{3.3-1}{2}(3+5+3)+1 = 45$ sehingga diperoleh PTBA 13-busur berurutan busur ajaib graf lobster $L_3(2; 3, 5)$ seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 3.7 (c) dan pada graf lobster $L_4(2; 3, 5)$ disubstitusikan nilai $p = \frac{3n}{2}(r+s+3)-1 = \frac{3.4}{2}(3+5+3)-1 = 65$ sehingga diperoleh PTBA 22-busur berurutan busur ajaib graf lobster $L_4(2; 3, 5)$ seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 3.7 (d). Graf lobster pada $L_3(2; 3, 5)$ memiliki himpunan label simpul $\{1, 2, \dots, 13\} \cup \{46, 47, \dots, 65\}$, himpunan label busur $\{14, 15, \dots, 45\}$, dan konstanta ajaib $k = 92$. Sedangkan graf lobster $L_4(2; 3, 5)$ memiliki himpunan label simpul $\{1, 2, \dots, 22\} \cup \{66, 67, \dots, 87\}$, himpunan label busur $\{23, 24, \dots, 65\}$, dan konstanta ajaib $k = 132$.



Gambar 3.7 (a) Pemberian label simpul pada graf lobster $L_3(2; 3, 5)$,

(b) Pemberian label simpul pada graf lobster $L_4(2; 3, 5)$,

(c) PTBA 13-busur berurutan pada graf lobster $L_3(2; 3, 5)$,

(d) PTBA 22-busur berurutan pada graf lobster $L_4(2; 3, 5)$.

Seperti yang telah dijelaskan pada Teorema 2.2, bahwa dual dari PTBA b-busur berurutan pada graf G adalah suatu PTBA (v-b)-busur berurutan.

Pada Teorema 3.2 diberikan PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r)$. Banyaknya simpul pada graf lobster $L_n(2; r, s)$ adalah $v = n(r + s + 3)$

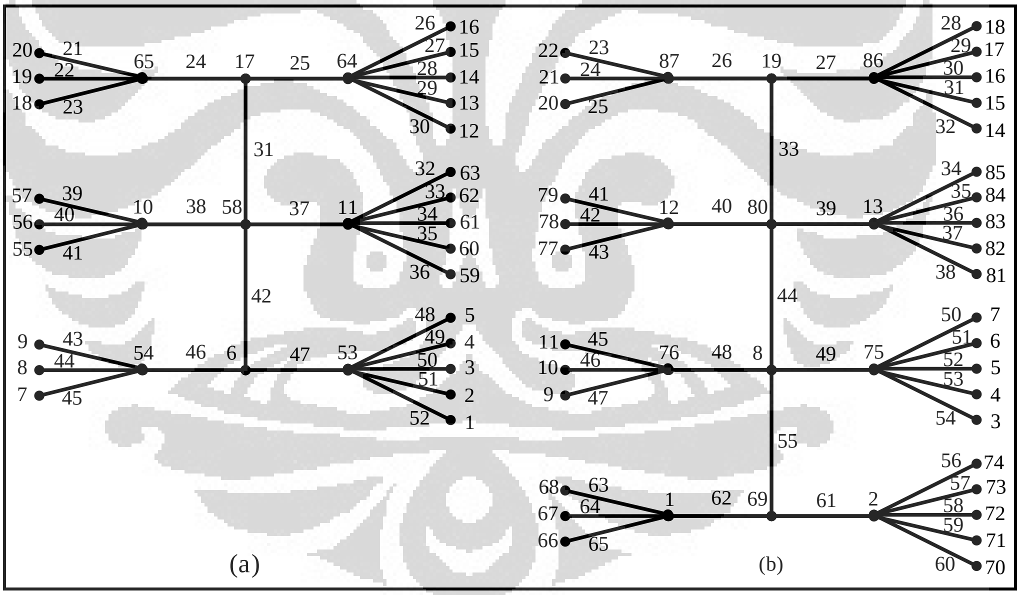
dan nilai b pada Teorema 3.2 adalah $b = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(r+s+3)+2 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(r+s+3) & ,n \text{ genap} \end{cases}$,

sehingga didapat $v - b = \begin{cases} \frac{n+1}{2}(r+s+3)-2 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(r+s+3) & ,n \text{ genap} \end{cases}$ yang merupakan nilai b untuk pelabelan dual dari pelabelan yang diberikan Teorema 3.2. Dual dari PTBA b-busur berurutan pada graf lobster $L_n(2; r)$ ditunjukkan oleh Akibat 3.2.

Akibat 3.2 Setiap graf lobster $L_n(2; r, s)$ memiliki PTBA b-busur berurutan dengan $b = \begin{cases} \frac{n+1}{2}(r+s+3)-2 & ,n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}(r+s+3) & ,n \text{ genap} \end{cases}$.

Nilai konstanta ajaib pada pelabelan yang diberikan Akibat 3.2 adalah

$k = \begin{cases} (3n+1)(r+s+3)-4 & ,n \text{ ganjil} \\ 3n(r+s+3) & ,n \text{ genap} \end{cases}$.



Gambar 3.8 (a) PTBA 20-busur berurutan pada graf lobster $L_3(2; 3,5)$,
(b) PTBA 22-busur berurutan pada graf lobster $L_4(2; 3, 5)$

Contoh pelabelan dual dari PTBA 13-busur berurutan pada graf lobster $L_3(2; 3, 5)$ yaitu PTBA 20-busur berurutan ditunjukkan oleh Gambar 3.8 (a) dan contoh pelabelan dual dari PTBA 22-busur berurutan pada graf lobster $L_4(2; 3, 5)$ yaitu PTBA 22-busur berurutan ditunjukkan oleh Gambar 3.8 (b). Pada PTBA 13-busur berurutan pada graf lobster $L_3(2; 3, 5)$, nilai $b = 13$ dan $k = 92$, sedangkan pada pelabelan dualnya, nilai $b = 20$ dan $k = 106$. Pada PTBA 22-busur berurutan pada graf lobster $L_4(2; 3, 5)$, nilai $b = 22$ dan $k = 132$, sedangkan pada pelabelan dualnya, nilai $b = 22$ dan $k = 132$.

Telah dibuktikan pada Bab 3 bahwa graf lobster $L_n(2; r)$ dan $L_n(2; r, s)$ memiliki PTBA b-busur berurutan. Pada bab selanjutnya akan dibahas mengenai kesimpulan dari hasil-hasil yang telah diperoleh.

BAB 4

KESIMPULAN

Dalam skripsi ini telah dibuktikan bahwa graf lobster $L_n(2; r)$ dan $L_n(2; r, s)$ memiliki PTBA *b*-busur berurutan. Pada tabel 4.1 diberikan kesimpulan dari hasil-hasil yang telah diperoleh.

Tabel 4.1 Pelabelan Total Busur Ajaib *b*-Busur Berurutan

Graf	*b*	*p*	*k*	Keterangan
Lobster $L_n(2; r)$	$\frac{n-1}{2}(2r+3)+2$	$\frac{3n-1}{2}(2r+3)+1$	$(3n-1)(2r+3)+4$	*n* ganjil
	$\frac{n+1}{2}(2r+3)-2$	$\frac{3n-1}{2}(2r+3)+1$	$(3n+1)(2r+3)-4$	
	$\frac{n}{2}(2r+3)$	$\frac{3n}{2}(2r+3)-1$	$3n(2r+3)$	*n* genap
Lobster $L_n(2; r, s)$	$\frac{n-1}{2}(r+s+3)+2$	$\frac{3n-1}{2}(r+s+3)+1$	$(3n-1)(r+s+3)+4$	*n* ganjil
	$\frac{n+1}{2}(r+s+3)-2$	$\frac{3n-1}{2}(r+s+3)+1$	$(3n+1)(r+s+3)-4$	
	$\frac{n}{2}(r+s+3)$	$\frac{3n}{2}(r+s+3)-1$	$3n(r+s+3)$	*n* genap

Penelitian lebih lanjut mengenai konstruksi PTBA *b*-busur berurutan pada graf lobster $L_n(q; r)$ dan $L_n(q; r, s)$ untuk nilai *b* yang belum ditemukan diberikan pada masalah terbuka berikut.

Masalah Terbuka 1. Apakah graf lobster $L_n(q; r)$ memiliki PTBA *b*-busur berurutan untuk setiap nilai *q*.

Masalah Terbuka 2. Apakah graf lobster $L_n(q; r, s)$ memiliki PTBA *b*-busur berurutan untuk setiap nilai *q*.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, L., & Lesniak, L. (1986). *Graphs & Digraphs. California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced book & Software.*

Jahannathan, Dr. B. S. (2005). *Magic Squares of All Success.* http://www.spiritualmindpower.com/files/MAGIC_SQUARES.pdf diakses pada tanggal 29 Februari 2012 pada pukul 08.00 WIB.

Khan, N., Pal, A., Pal, M. (2009). *Edge Colouring of Cactus Graphs*. http://camo.ici.ro/journal/vol11/v11d5.pdf diakses pada tanggal 17 Februari 2012 pada pukul 11.00 WIB.

Silaban, D. R., & Sugeng, K. A. (2010). Pelabelan total busur berurutan busur ajaib pada graf terhubung bukan graf pohon. *Prosiding KNM XV*, 55-60.

Sugeng, K. A., & Miller, M. (2008). On consecutive edge magic total labeling of graph. *Journal of Discrete Algorithms (6)* , 59-65.

Sugeng, K. A., & Silaban, D. R. (2009). An edge consecutive edge magic total labeling on some classes of tree. *Proccedings of the 5th International Conference on Mathematics, Statistics and Their Applications (ICMSA)* , 966-969.

Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser.

Wilson, R. J. (1996). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall.

http://mathforum.org/alejandre/magic.square/loshu.html diakses pada tanggal 7 Maret 2012 pada pukul 09.00 WIB.