UNIVERSITAS INDONESIA

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN
DALAM ALJABAR *MAX-PLUS*

TESIS

Diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan
memperoleh gelar magister sains

RIDA NOVRIDA
1006786221

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DALAM ALJABAR *MAX-PLUS*

TESIS

RIDA NOVRIDA
1006786221

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK

JULI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Rida Novrida
NPM	:	1006786221
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	16 Juli 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama	:	Rida Novrida
NPM	:	1006786221
Program Studi	:	Magister Matematika
Judul Tesis	:	Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar *Max-plus*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada program studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom	( )
Penguji I	: Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji II	: Alhadi Bustamam, PhD	( )
Penguji III	: Dra. Siti Aminah, M. Kom	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 16 Juli 2012

KATA PENGANTAR

Segala puji hanya bagi Allah SWT, Robb Semesta Alam, yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dan menyelesaikan tugas belajar ini. Salawat dan salam tercurahkan untuk nabi akhir zaman, Rasulullah Muhammad SAW, pembawa syafaat bagi seluruh alam, sang teladan bagi umat manusia.

Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar Magister Sains pada Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis sadar bahwa dalam penulisan tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Sri Mardiyati, M.Kom selaku dosen pembimbing yang telah banyak memberikan ilmu dan motivasi;
2. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami selaku Ketua Program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Indonesia;
3. Bapak Dr.rer.nat. Hendri Murfi, M.Kom selaku pembimbing akademik yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama mengikuti perkuliahan hingga selesai;
4. Ibu Dr. Dian Lestari selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI
5. Seluruh staf pengajar pada Program Magister Matematika FMIPA UI, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;
6. Staf tata usaha Departemen Matematika;
7. Bapak Rektor Universitas Indonesia dan Dekan FMIPA UI beserta jajarannya yang telah menjalin kerja sama pendidikan dengan Pemerintah Propinsi Jambi;
8. Bapak Gubernur Propinsi Jambi beserta jajarannya dalam hal ini Dinas Pendidikan yang telah memberikan beasiswa hingga penulis mendapat kesempatan untuk melanjutkan studi ke jenjang strata dua;

9. Ayahanda Bahran. S dan Ibunda Nurjani tercinta serta keluarga besar yang telah memberikan dukungan spritual dan moral tanpa henti;
10. Noviardi Ferzi, S.E, M.M yang selalu memberikan motivasi dan dukungan kepada penulis.
11. Sahabat terbaikku Yobi Repa Oktapiana yang selalu memberikan motivasi, dukungan dan doa dari awal sampai akhir penulis menempuh pendidikan strata dua.
12. Seluruh teman-teman mahasiswa Program Magister Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia khususnya angkatan 2010.
13. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu.

Semoga tesis ini memberikan manfaat untuk pengembangan ilmu pengetahuan pada masa yang akan datang.

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI

TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Rida Novrida
NPM	:	1006786221
Program Studi	:	Magister Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia hak bebas royalti *non*-eksklusif (*non-exclusive royalty free right*) atas karya ilmiah saya berjudul

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

dalam Aljabar *Max-Plus*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalihmediakan/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 16 Juli 2012
Yang menyatakan

(Rida Novrida)

ABSTRAK

Nama : Rida Novrida
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar *Max-Plus*

Sistem matematika $(\mathbb{R}, +, \times)$ merupakan lapangan real. Selanjutnya didefinisikan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon = -\infty\}$ dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ dimana $a \oplus b = maksimum(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b, \forall\, a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Sistem matematika $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dinamakan aljabar *max-plus* dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$. Dibandingkan dengan sifat lapangan $\mathbb{R}_{max}$ tidak memiliki unsur balikan pada operasi $\oplus$. Untuk $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real kita mengenal vektor dan matriks yang elemen-elemennya bilangan real beserta operasi-operasi pada vektor dan matriks real. Begitu juga pada $\mathbb{R}_{max}$ terdapat vektor dan matriks yang elemen-elemenya di $\mathbb{R}_{max}$ beserta operasi-operasinya pada $\mathbb{R}_{max}$. Nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu topik dalam aljabar yang dimiliki oleh matriks bujur sangkar. Matriks sirkulan merupakan slah satu tipe khusus dari matriks bujur sangkar, sehingga nilai eigen dan vektor eigen juga dimiliki oleh matriks sirkulan. Pada $\mathbb{R}_{max}$ matriks bujur sangkar A dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang dinamakan graf *precedence* dan dinotasikan dengan $G(A)$. $G(A)$ dapat berupa graf tidak terhubung, graf terhubung atau graf terhubung kuat. Jika graf $G(A)$ terhubung kuat maka matriks A disebut *irreducible*. Pada penelitian ini akan dibahas bagaimana cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks dan matriks sirkulan yang *irreducible* dalam aljabar *max-plus*.

Kata kunci : nilai eigen, vektor eigen, matriks, matriks sirkulan, aljabar *max-plus*
ix+41 halaman ; 1 tabel
Daftar Pustaka : 9(1990-2010)

ABSTRACT

Name : Rida Novrida
Study Program: Mathematics
Title : Eigenvalues and Eigenvectors in the Max-Plus Algebra

System $(\mathbb{R}, +, \times)$ is a field of real numbers. Defined $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon = -\infty\}$ together with two binary operations $\oplus$ and $\otimes$ where $a \oplus b = max(a, b)$ and $a \otimes b = a + b, \forall\, a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$. System $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ called max-plus algebra and denoted by $\mathbb{R}_{max}$. As compared to properties of field, there is no invers element for $\oplus$ in $\mathbb{R}_{max}$. In the set of real numbers $\mathbb{R}$ there exist vectors and matrices which entries is real number with those operations. As in $\mathbb{R}$ there exist vectors and matrices with entries is element of $\mathbb{R}_{max}$ with those operations. Eigenvalues and eigenvectors are topics square matrix in algebra. Circulant matrix is a special types of square matrix, which also have eigenvalues and eigenvectors topics. Square matrix A in $\mathbb{R}_{max}$ can be represented as a graph called precedence graph denote $G(A)$. $G(A)$ can be not connected graph, connected graph or strongly connected graph. If $G(A)$ strongly connected then A irreducible. In this thesis will be discussed how to get eigenvalues and eigenvectors for matrices and circulant matrix in the max-plus algebra.

Keywords : eigenvalues, eigenvectors, matrices, circulant matrix, max-plus algebra.
ix+41pages ; 1 table
Bibliography : 9(1990-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang mendasari semua disiplin ilmu yang ada, baik ilmu sosial, esakta, sains dan teknologi. Salah satu cabang matematika adalah aljabar yang perkembangannya sangat berkaitan erat dengan cabang ilmu matematika lain seperti : geometri, teori bilangan, statistik, ilmu komputer, ilmu analisis bahkan matematika terapan dan lainnya.

Aljabar *max-plus* yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$ merupakan salah satu topik dalam ruang lingkup aljabar yang didefinisikan sebagai himpunan $\mathcal{R} \cup \{-\infty\}$, dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dengan operasi biner yaitu $\oplus$ dan $\otimes$ (Bacelli, 2001).

Untuk $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real kita mengenal matriks yang elemen-elemennya merupakan himpunan bilangan real yang disebut matriks real beserta operasi –operasi pada matriks real. Begitu juga pada aljabar *max-plus* terdapat matriks yang entri- entrinya di $\mathbb{R}_{max}$ beserta operasi matrik di $\mathbb{R}_{max}$.

Nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu topik pada aljabar yang dimiliki matriks bujur sangkar. Matriks bujur sangkar adalah matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Selain matriks bujur sangkar secara umum terdapat juga tipe khusus dari suatu matriks bujur sangkar yang dinamakan matriks sirkulan. Sama seperti matriks bujur sangkar secara umum, nilai eigen dan vektor eigen juga dimiliki oleh matriks sirkulan.

Seperti pada matriks real terdapat juga matriks bujur sangkar pada matriks dalam aljabar *max-plus*. Pada aljabar *max-plus* suatu matriks bujur sangkar A dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang dinamakan graf *precedence* dan dinotasikan dengan $G(A)$. Graf *precedence* dari matriks A berordo $n \times n$ adalah suatu graf berarah berbobot dengan simpul sebanyak n, busur (j, i) jika $a_{ij} \neq \varepsilon$ dan bobot busur bilangan real a_{ij} untuk busur(j, i). Dengan demikian tidak terdapat busur (j, i) jika $a_{ij} = \varepsilon$, hal ini menyebabkan graf $G(A)$ yang merupakan representasi dari matriks bujur sangkar dalam aljabar *max-plus* dapat merupakan graf tidak terhubung, graf terhubung maupun graf terhubung kuat. Jika graf $G(A)$ terhubung kuat maka matriks A disebut *irreducible*. Matriks sirkulan yang merupakan tipe khusus matriks bujur sangkar dapat juga direpresentasikan dalam bentuk graf $G(A)$, sehingga terdapat juga matriks sirkulan yang *irreducible*.

Sebelumnya Bacelli dkk sudah mengemukakan sebuah teorema tentang cara menghitung nilai eigen dan vektor eigen untuk matriks A yang *irreducible* dalam aljabar *max-plus* secara umum. Nilai eigen diperoleh dengan cara menghitung maksimum dari bobot rata-rata sirkuit elementer pada graf $G(A)$ sehingga secara umum semakin besar ordo dari suatu matriks maka semakin banyak pula bobot sirkuit elementer pada graf $G(A)$ sehingga perhitungan nilai eigen relatif semakin sulit.

Hal tersebut membuat penulis tertarik untuk membahas kembali perhitungan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks yang *irreducible.* Selain membahas kembali teorema tentang perhitungan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks yang *irreducible* secara umum, penulis juga tertarik menggunakan teorema tersebut untuk membahas perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks khusus yang disebut matriks sirkulan dalam aljabar *max-plus.*

1.2 Permasalahan

Adapun masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks dan matriks sirkulan dalam aljabar *max-plus.*

1.3 Batasan Masalah

Nilai eigen dan vektor eigen pada matriks yang ditentukan pada penelitian ini adalah nilai eigen dan vektor eigen pada matriks yang *irreducible* dan matriks sirkulan yang *irreducible*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

“ Menentukan bagaimana cara menghitung nilai eigen dan vektor eigen pada matriks dan matriks sirkulan dalam aljabar *max-plus”*.

1.5 Metodologi Penelitian

Pada penelitian ini penulis menggunakan metode studi atau kajian terhadap literatur berupa buku-buku referensi dan jurnal- jurnal ilmiah yang terkait dengan topik penelitian, diantaranya : konsep-konsep dasar dalam aljabar, vektor dan matriks real serta operasinya, nilai eigen dan vektor eigen pada matriks real, aljabar *max-plus,* vektor dan matriks dalam aljabar *max-plus* beserta operasinya, teori graf dalam aljabar *max-plus,* nilai eigen dan vektor eigen pada matriks dalam aljabar *max- plus,* matrik sirkulan, nilai eigen dan vektor eigen pada matrik sirkulan dalam aljabar *max-plus.*

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab 2 ini akan dibahas konsep- konsep yang diperlukan sebagai landasan teori yang akan digunakan untuk membahas nilai dan vektor eigen pada aljabar *max-plus*. Pembahasan akan dibagi menjadi dua bagian, yaitu: konsep-konsep pada bilangan real dan konsep-konsep pada aljabar *max-plus*.

2.1 Lapangan, Vektor dan Matriks

Pembahasan dimulai dengan pengertian dasar dari hasil kali silang, operasi biner dan sistem matematika.

Definisi 2.1.1

Pandang $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah himpunan tak kosong. Himpunan semua n-tupel terurut pada himpunan $A_1, A_2, \dots, A_n$ disebut hasil kali silang dan dinotasikan dengan

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) |\ a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$$

(Hungerford, 2000).

Definisi 2.1.2

Misalkan S adalah suatu himpunan tak kosong. Operasi biner $\odot$ pada S adalah suatu pemetaan

$$\odot : S \times S \to S$$

(Arifin, 2001).

Definisi 2.1.3

Sistem matematika adalah suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi oleh satu atau lebih operasi biner (Arifin, 2000).

Sistem matematika S dengan satu operasi biner $\odot$ ditulis (S, $\odot$) dan jika terdapat dua operasi biner $\odot, *$ ditulis $(S, \odot, *)$.

Berikut ini akan didefinisikan lapangan yang merupakan sistem matematika dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu.

Definisi 2.1.4

Lapangan adalah suatu himpunan tak kosong F bersama dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan yang dinotasikan dengan $+$, dan operasi perkalian yang dinotasikan dengan $\times$, dan dua elemen yaitu $0,1 \in F$, sedemikian sehingga untuk setiap $a, b, c \in F$ maka

i) $(F, +)$ memiliki sifat:
   - $a + b \in F$;
   - komutatif: $a + b = b + a$;
   - assosiatif: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
   - $0 + a = a + 0 = a$. 0 disebut unsur identitas $+$;

ii) $(F, \times)$ memiliki sifat:
   - $a \times b \in F$;
   - komutatif: $a \times b = b \times a$;
   - assosiatif: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;
   - $1 \times a = a \times 1 = a$. a disebut unsur identitas $\times$;

iii) Distributif $\times$ terhadap +: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$;

iv) Untuk setiap $a \in F$, terdapat b tunggal elemen F dan bersifat $a + b = 0$, b dinamakan unsur balikan dari a terhadap operasi +.

v) Untuk setiap $a \in$ F dengan $a \neq 0$, terdapat c tunggal elemen F dan bersifat $a \times c = 1$, c dinamakan unsur balikan dari a terhadap operasi $\times$.

(Jacob, 1990)

Salah satu contoh lapangan adalah himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi biner $+$ dan $\times$ dan disebut lapangan real.

Jika $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) |\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ dan pada $\mathbb{R}^n$ didefinisikan operasi:

- Penjumlahan : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

  $$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

- Perkalian dengan skalar α di $\mathbb{R}$

  $$\alpha \times \vec{a} = \alpha \times (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
  $$= (\alpha \times a_1, \alpha \times a_2, \ldots, \alpha \times a_n)$$

maka $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ disebut vektor real (Anton, 2005).

Sebelumnya telah dibahas tentang vektor real di $\mathbb{R}^n$, selanjutnya akan dibahas tentang matriks real dan nilai eigen serta vektor eigen pada matriks real. Sebelum membahas tentang matriks real dan nilai eigen serta vektor eigen pada matriks real, maka terlebih dahulu dibahas definisi matriks.

Definisi 2.1.5

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut elemen-elemen dari matriks tersebut (Anton, 2005).

Definisi 2.1.6

Ordo matriks adalah banyaknya baris (horizontal) $\times$ banyaknya kolom (vertikal) dalam matriks tersebut (Kolman, 2001).

Jika A matriks berordo $m \times n$, maka elemen yang teletak pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dinotasikan dengan a_{ij} atau $(A)_{ij}$, dengan $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$.

Bentuk umum matriks A berordo $m \times n$ dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Untuk pembahasan selanjutnya matriks yang dibahas adalah matriks yang elemen-elemennya bilangan real. Himpunan matriks real berordo $m \times n$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Berikut ini akan dibahas beberapa tipe matriks yaitu:

- Jika semua elemen matriks A bernilai nol maka matriks A dinamakan matriks nol.
- Matriks dengan banyak baris dan banyak kolom yang sama dinamakan matriks bujur sangkar.

  Matriks bujur sangkar dengan baris dan kolom sebanyak n disebut matriks bujur sangkar berordo n.

Jika matriks $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujur sangkar berordo n, maka elemen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut elemen diagonal utama matriks A.

- Suatu matriks bujur sangkar berordo n dikatakan matriks identitas apabila elemen diagonal utamanya bernilai 1 dan elemen yang lainnya bernilai nol. Matriks identitas beordo n disimbolkan dengan I_n.

  (Kolman, 2001)

Berikut ini akan dijelaskan definisi operasi-operasi matriks beserta sifat-sifat operasinya.

Definisi 2.1.7

i) Untuk $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, maka

   $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ di mana $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

ii) Untuk $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ dan $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, maka

   $A \times B = C$ di mana $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dan $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$

   untuk $i = 1,2, \ldots m$ dan $j = 1,2, \ldots n$

iii) Untuk sembarang matriks $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dan sembarang skalar $s \in \mathbb{R}$ maka

   $\mathrm{s} \times A = \mathrm{s} \times [a_{ij}] = [\mathrm{s} \times a_{ij}]$ di mana $\mathrm{s} \times A \in \mathbb{R}$

(Anton, 2005)

Sifat 2.1.8

Untuk $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}, D, E \in \mathbb{R}^{n\times p}, F \in \mathbb{R}^{p\times q}$, dan skalar $s, t \in \mathbb{R}$, maka operasi-operasi pada matriks di atas memenuhi sifat-sifat berikut:

i) $A + B = B + A$;

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

iii) $(A \times D) \times F = A \times (D \times F)$;

iv) $(A + B) \times D = (A \times D) + (B \times D)$;

v) $A \times (D + E) = (A \times D) + (A \times E)$;

vi) $s \times (A + B) = s \times A + s \times B$;

vii) $(s + t) \times A = s \times A + t \times A$;

viii) $s \times (t \times A) = (s \times t) \times A$;

ix) $A + 0 = A$;

(Kolman, 2001)

Setelah didefinisikan tiga operasi pada matriks di atas. Selanjutnya didefinisikan operasi pangkat pada matriks.

Definisi 2.1.9

Misalkan A adalah matriks bujursangkar beordo n dan p bilangan bulat positif, maka operasi pangkat pada matriks didefinisikan:

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p}$$

Dari definisi di atas A^p dapat juga ditulis:

$$A^p = A \times \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p-1} = A \times A^{p-1}$$

(Anton, 2005)

Definisi 2.1.10

Untuk $p = 0$, maka:

$$A^0 = I_n$$

(Anton, 2005)

Berikut ini akan dijelaskan definisi nilai eigen dan vektor eigen pada matriks real.

Definisi 2.1.11

Misalkan A adalah suatu matriks berordo $n \times n$, suatu vektor $\vec{x} \neq 0$ di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan $\vec{x}$ disebut suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ (Anton, 2005).

Setelah membahas konsep-konsep vektor real, matriks real, nilai eigen dan vektor eigen pada matriks real, selanjutnya akan dibahas konsep-konsep tersebut pada aljabar *max-plus*.

2.2 Aljabar *Max-plus*

Konsep-konsep dasar dalam aljabar *max-plus* yang akan dibahas meliputi: definisi dan sifat-sifat operasi pada aljabar *max-plus*.

Pembahasan diawali dengan definisi aljabar *max-plus.*

Definisi 2.2.1

Misalkan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon = -\infty\}$ dan pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan dua operasi biner:

(i) $a \oplus b = maks\ (a, b)$, $\oplus$ dibaca O tambah

(ii) $a \otimes b = a + b$, $\otimes$ dibaca O kali

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$. $\mathbb{R}_\varepsilon$ dengan dua operasi biner di atas disebut aljabar *max-plus* yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$ (Bacelli dkk, 2001).

Setelah dijelaskan definisi aljabar *max-plus*, selanjutnya akan dijelaskan sifat-sifat operasi pada $\mathbb{R}_{max}$.

Sifat 2.2.2

Berdasarkan definisi dua operasi biner pada $\mathbb{R}_{max}$ di atas, maka $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon$ berlaku sifat-sifat berikut:

i) $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ memiliki sifat:
- $a \oplus b \in \mathbb{R}_\varepsilon$;
- komutatif: $a \oplus b = b \oplus a$;
- assosiatif: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- $\varepsilon \oplus a = a \oplus \varepsilon = a$. ε disebut unsur identitas $\oplus$;

ii) $(\mathbb{R}_\varepsilon, \otimes)$ memiliki sifat:
- $a \otimes b \in \mathbb{R}_\varepsilon$;
- komutatif: $a \otimes b = b \otimes a$;
- assosiatif: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
- $0 \otimes a = a \otimes 0 = a$. 0 disebut unsur identitas $\otimes$. Selanjutnya 0 dinotasikan dengan e;

iii) Distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$;

iv) Untuk setiap $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dengan $a \neq \varepsilon$, terdapat c tunggal elemen $\mathbb{R}_\varepsilon$ dan bersifat $a \otimes c = e$, c dinamakan unsur balikan dari a terhadap operasi $\otimes$.

(Farlow, 2009)

Berdasarkan sifat-sifat di atas diketahui bahwa $\mathbb{R}_{max}$ tidak memiliki unsur balikan pada operasi $\oplus$, hal ini berbeda dengan lapangan real yang memiliki unsur balikan/ invers pada operasi $+$.

Selain itu dari uraian sifat-sifat yang berlaku pada $\mathbb{R}_{max}$, diketahui bahwa setiap elemen pada $\mathbb{R}_{max}$ memiliki invers (balikan) terhadap operasi biner $\otimes$, sehingga dapat didefinisikan operasi biner ϕ (dibaca O bagi) yang merupakan operasi balikan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}$. Operasi biner pada $\mathbb{R}_{max}$ didefinisikan sebagai operasi pengurangan pada bilangan real.

Sesuai kaidah pengoperasian bilangan real yaitu operasi perkalian dan pembagian dilakukan terlebih dahulu dibandingkan operasi penjumlahan, maka pada aljabar *Max- plus* operasi $\otimes$ dan ϕ dilakukan terlebih dahulu dibandingkan operasi biner $\oplus$.

Tabel berikut ini akan menampilkan beberapa contoh pengoperasian pada $\mathbb{R}_{max}$.

Tabel 2.1: Pengoperasian dalam aljabar *Max- plus*

Operasi pada aljabar *Max- plus*	Artinya	Hasil
$4 \oplus 1$	$maks\ (4,1)$	4
$8 \oplus \varepsilon$	$maks\ (8, -\infty)$	8
$4 \oplus 1 \oplus \varepsilon \oplus 12$	$maks\ (4, 1, -\infty, 12)$	12
$3 \otimes 9$	3 + 9	12
$e \otimes 8$	0 + 8	8
$5 \otimes \varepsilon$	$5 + (-\infty)$	$-\infty$
$5\ \phi\ 2$	$5 - 2$	3
$3 \oplus 10 \otimes 2 \phi\ 8$	$maks\ (3, 10 + 2 - 8) = maks\ (3, 4)$	4

Setelah contoh pengoperasian pada aljabar *max-plus* selanjutnya akan dibahas vektor dan matriks pada aljabar *max-plus*. Seperti pada vektor dan matriks real yang elemen-elemennya himpunan bilangan real, vektor dan matriks pada aljabar *max-plus* merupakan vektor dan matriks yang elemen-elemennya di $\mathbb{R}_{max}$.

Berikut ini akan didefinisikan $\mathbb{R}_{max}^n$ berdasarkan $\mathbb{R}_{max}$ sebagai:

$\mathbb{R}_{max}^n = \mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon \times \ldots \times \mathbb{R}_\varepsilon = \{\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) |\ a_i \in \mathbb{R}_\varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$ dan pada $\mathbb{R}_{max}^n$ didefinisikan operasi:

i) $\oplus$: $\vec{a} \oplus \vec{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \oplus (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$= (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \ldots, a_n \oplus b_n)$$

ii) $\otimes$ dengan skalar α di $\mathbb{R}_\varepsilon$

$$\alpha \otimes \vec{a} = \alpha \otimes (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$= (\alpha \otimes a_1, \alpha \otimes a_2, \ldots, \alpha \otimes a_n)$$

$\vec{a} \in \mathbb{R}_{max}^n$ disebut vektor pada aljabar *max-plus* (Farlow, 2009). Vektor nol di $\mathbb{R}_{max}^n$ dinotasikan dengan $\vec{\varepsilon}$ dan didefinisikan sebagai vektor $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$

Definisi 2.2.3

Dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ di $\mathbb{R}_{max}^n$ dikatakan sama jika elemen-elemen yang bersesuaian sama

Selanjutnya vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}_{max}^n$ ditulis sebagai vektor kolom.

Pada subbab 2.1 telah dijelaskan operasi dan sifat-sifat operasi pada matriks real. Berikut ini akan dibahas operasi dan sifat-sifat operasi matriks dalam aljabar *max-plus*.

Himpunan matriks berordo $m \times n$ pada $\mathbb{R}_{max}$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$.

Sebelum membahas operasi beserta sifat-sifat operasi matriks dalam aljabar *max-plus,* terlebih dulu dijelaskan beberapa tipe matriks pada aljabar *max-plus*.

- Jika semua elemen matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ bernilai ε maka matriks A dinamakan matriks nol.
- Suatu matriks bujur sangkar berordo n dikatakan matriks identitas pada $\mathbb{R}_{max}$ apabila elemen diagonal utamanya bernilai 0 dan elemen yang lainnya bernilai ε.

Matriks identitas berordo n pada $\mathbb{R}_{max}$ dinotasikan dengan E_n .
(Bacelli dkk, 1992).

Seperti yang didefinisikan pada matriks real, matriks pada aljabar *max-plus* juga memiliki tiga operasi. Berikut ini didefinisikan operasi matriks pada aljabar *max-plus*.

Definisi 2.2.4

i) Untuk $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$, maka

$A \oplus B = [a_{ij} \oplus b_{ij}]$ di mana $A \oplus B \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$

ii) Untuk $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{p\times n}$, maka

$A \otimes B = C$ di mana $C \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ dan $c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} a_{ik} \otimes b_{kj}$

untuk $i = 1,2, \dots m$ dan $j = 1,2, \dots n$.

iii) Untuk sembarang matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ dan sembarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$ maka

$\alpha \otimes A = \alpha \otimes [a_{ij}] = [\alpha \otimes a_{ij}]$ di mana $\alpha \otimes A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$

(Bacelli dkk, 1992).

Setelah definisi operasi matriks dalam aljabar *max-plus* di atas, selanjutnya diberikan contoh pengoperasian matriks dalam aljabar *max-plus*.

Contoh 2.2.5

Diketahui matriks $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{2\times 2}$ di mana $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ maka

i) $A \oplus B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \oplus e & 3 \oplus 3 \\ \varepsilon \oplus 2 & -1 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

ii) $A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 \oplus 5 & 5 \oplus 7 \\ \varepsilon \oplus 1 & \varepsilon \oplus 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

iii) $2 \otimes A = 2 \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \otimes 2 & 2 \otimes 3 \\ 2 \otimes \varepsilon & 2 \otimes -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$

Berdasarkan definisi operasi matriks dalam aljabar *max-plus*, maka selanjutnya akan diterangkan sifat-sifat operasi matriks dalam aljabar *max-plus*

Sifat 2.2.6

Untuk $A, B, C \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}, D, E \in \mathbb{R}_{max}^{n\times p}, F \in \mathbb{R}_{max}^{p\times q}$, dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{max}$ maka operasi-operasi pada matriks di atas memenuhi sifat-sifat berikut:

i) $A \oplus B = B \oplus A$;

ii) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;

iii) $(A \otimes D) \otimes F = A \otimes (D \otimes F)$;

iv) $(A \oplus B) \otimes D = (A \otimes D) \oplus (B \otimes D)$;

v) $A \otimes (D \oplus E) = (A \otimes D) \oplus (A \otimes E)$;

vi) $\alpha \otimes (A \oplus B) = \alpha \otimes A \oplus \alpha \otimes B$;

vii) $(\alpha \oplus \beta) \otimes A = \alpha \otimes A \oplus \beta \otimes A$;

viii) $\alpha \otimes (\beta \otimes A) = (\alpha \otimes \beta) \otimes A$;

ix) $A \oplus \mathcal{E} = A$;

Setelah didefinisikan tiga operasi pada matriks, selanjutnya akan didefinisikan operasi pangkat pada matriks dalam $\mathbb{R}_{max}$.

Definisi 2.2.7

Misalkan A adalah matriks bujursangkar berordo n pada $\mathbb{R}_{max}$ dan p bilangan bulat positif, maka didefinisikan:

$$A^{\otimes p} = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{p}$$

Dari definisi di atas A^p dapat juga ditulis:

$$A^p = A \otimes \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{p-1} = A \otimes A^{\otimes p-1}$$

(Farlow, 2009)

Definisi 2.2.8

Untuk $p = 0$, maka:

$$A^{\otimes 0} = E_n$$

(Farlow, 2009)

Sesuai definisi 2.2.7 maka unsur ke – st untuk matriks berpangkat pada $\mathbb{R}_{max}$ adalah:

$$(A^{\otimes 2})_{st} = (A \otimes A)_{st} = (a_{s1} \otimes a_{1t}) \oplus (a_{s2} \otimes a_{2t}) \oplus \ldots \oplus (a_{sn} \otimes a_{nt})$$

$$= \oplus_{i_1=1}^{n} \left(a_{si_1} \otimes a_{i_1 t}\right) = maks_{\ 1 \le i_1 \le n} \left(a_{si_1} + a_{i_1 t}\right)$$

$$(A^{\otimes 3})_{st} = (A \otimes A^{\otimes 2})_{st} = \oplus_{i_2=1}^{n} \left(a_{si_2} \otimes \left(\oplus_{i_1=1}^{n} \left(a_{i_2 i_1} \otimes a_{i_1 t}\right)\right)\right)$$

$$= \oplus_{i_2=1}^{n} \oplus_{i_1=1}^{n} \left(a_{si_2} \otimes \left(a_{i_2 i_1} \otimes a_{i_1 t}\right)\right)$$

$$= maks_{\ 1 \le i_1, i_2 \le n} \left(a_{si_2} + a_{i_2 i_1} + a_{i_1 t}\right)$$

secara umum unsur ke – st untuk $A^{\otimes p}$ adalah sebagai berikut:

$$(A^{\otimes p})_{st} = maks_{\ 1 \le i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} \le n} \left(a_{si_{p-1}} + \cdots + a_{i_2 i_1} + a_{i_1 t}\right) \qquad \ldots(2.1)$$

Secara umum setiap graf dapat direpresentasikan oleh suatu matriks. Contoh sederhana adalah representasi graf yang dinyatakan dalam matriks *adjacency*. Matriks *adjacency* $A(G)$ adalah matriks $n \times n$ dengan elemen a_{ij} yang merupakan busur di G dengan simpul $\{v_i, v_j\}$.

Pada subbab selanjutnya akan dijelaskan tentang graf serta hubungannya dengan matriks dalam aljabar *max-plus*.

2.3 Graf dalam Aljabar *Max-Plus*

Penjelasan diawali dengan definisi graf secara umum.

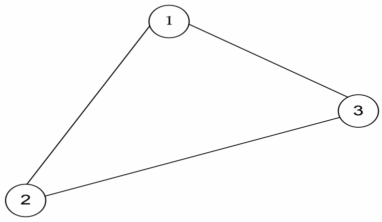
Definisi 2.3.1

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dimana V adalah himpunan tak kosong simpul dan E adalah himpunan busur yang menghubungkan sepasang simpul yang tidak harus berbeda (West, 2001).

Berikut ini akan diberikan contoh graf.

Contoh 2.3.2

Contoh Graf



Graf di atas merupakan contoh graf dengan

$V = \{1, 2, 3\}$ dan $E = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

Setelah definisi graf secara umum berikut ini akan diberikan definisi graf berarah dan graf berbobot.

Definisi 2.3.3

Graf berarah G adalah graf yang setiap busurnya memiliki arah (West, 2001).

Definisi 2.3.4

Graf berbobot G adalah graf yang memiliki bobot pada setiap busurnya (West, 2001).

Selanjutnya bobot busur (i, j) dinotasikan dengan $w(i, j)$.

Setelah didefinisikan suatu graf , graf berarah dan graf berbobot, selanjutnya akan diberikan definisi dari graf terhubung kuat. Sebelum dijelaskan tentang definisi graf terhubung kuat, terlebih dahulu akan diterangkan definisi lintasan yang berguna untuk pendefinisian graf terhubung kuat dan beberapa definisi yang berkaitan dengan lintasan dalam suatu graf.

Definisi 2.3.5

Pandang suatu graf berarah $G = (V, E)$. Suatu lintasan *(path)* ρ dari i ke j dalam graf berarah G adalah barisan berhingga dari simpul-simpul $(i_1,\ i_2, \dots ,\ i_{s+1})$ dengan $i_1 = i, i_{s+1} = j$ dan setiap $(i_k,\ i_{k+1})$ adalah busur dari graf berarah $G(V, E)$ (Farlow, 2009).

Berikut ini dijelaskan beberapa definisi tentang lintasan dalam teori graf

Definisi 2.3.6

Suatu lintasan dikatakan elementer jika tidak ada simpul yang muncul lebih dari satu kali (Bacelli dkk, 2001).

Definisi 2.3.7

Sirkuit adalah suatu lintasan yang memiliki simpul awal dan simpul akhir yang sama (Bacelli dkk, 2001).

Definisi 2.3.8

Sirkuit elementer adalah lintasan elementer yang memiliki simpul awal dan simpul akhir yang sama (Bacelli dkk, 2001).

Definisi 2.3.9

Loop adalah suatu sirkuit yang terdiri dari satu busur (Bacelli dkk, 2001).

Berikut ini akan didefinisikan panjang dan bobot dari suatu lintasan

Definisi 2.3.10

Panjang suatu lintasan dinotasikan dengan $|\rho|_\iota$ adalah banyaknya busur pada lintasan tersebut (Bacelli dkk, 2001).

Definisi 2.3.11

Misalkan $\rho = (i_0, i_1, \dots, i_p)$ adalah lintasan pada graf berarah terboboti dari simpul i_0 ke simpul i_p dengan panjang p, bobot lintasan ρ pada graf dinotasikan dengan $|\rho|_w$ adalah penjumlahan dari bobot busur-busur pada lintasan tersebut (Bacelli dkk, 2001).

$$|\rho|_w = w(i_0, i_1) + w(i_1, i_2) + \cdots + w(i_{p-1}, i_p)$$

Setelah panjang dan bobot suatu lintasan, selanjutnya akan didefinisikan rata-rata bobot suatu lintasan.

Definisi 2.3.12

Bobot rata-rata suatu lintasan didefinisikan sebagai bobot lintasan $|\rho|_w$ dibagi dengan panjang lintasan $|\rho|_\iota$ (Bacelli dkk, 2001).

Pada definisi 2.3.5 telah dijelaskan mengenai definisi lintasan, selanjutnya akan diberikan definisi dari suatu graf berdasarkan lintasan pada simpul-simpulnya.

Definisi 2.3.13

Sebuah graf $G = (V, E)$ dikatakan terhubung kuat jika untuk setiap dua simpul yang berbeda i dan j terdapat lintasan dari i ke j (Bacelli dkk, 2001).

Selanjutnya akan dibahas hubungan antara matriks dengan graf berarah terboboti dalam aljabar *max-plus*. Sebelum membahas tentang hubungan tersebut, berikut ini akan diberikan terlebih dahulu definisi dari suatu graf yang merupakan representasi dari suatu matriks dalam aljabar *max-plus*.

Definisi 2.3.14

Jika matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}_{max}$, maka graf *precedence* dari matriks A yang dinotasikan dengan $G(A)$ adalah graf berarah terboboti yang memiliki:

- simpul sebanyak n
- busur (j, i) jika $a_{ij} \neq \varepsilon$
- bobot busur bilangan real a_{ij} untuk busur (j, i) atau dapat dinotasikan $a_{ij} = w(j, i)$.

(Bacelli dkk, 2001)

Himpunan simpul dan himpunan busur pada $G(A)$ berturut-turut dinotasikan dengan $V(A)$ dan $E(A)$.

Jika pada definisi 2.3.11 diketahui bobot suatu lintasan $\rho = (i_0, i_1, \dots, i_p)$ adalah

$$|\rho|_w = w(i_0, i_1) + w(i_1, i_2) + \cdots + w(i_{p-1}, i_p)$$

maka sesuai dengan definisi operasi biner $\otimes$ pada aljabar *max-plus*, dimana $a \otimes b = a + b, \forall\, a, b \in \mathcal{R}_\varepsilon$ diperoleh bobot lintasan ρ pada aljabar *max-plus* sebagai berikut

$$|\rho|_w = w(i_0, i_1) \otimes w(i_1, i_2) \otimes \dots \otimes w(i_{p-1}, i_p)$$

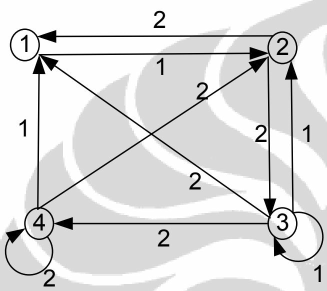
selanjutnya karena dari definisi 2.3.14 diperoleh $a_{ij} = w(j, i)$ maka maka bobot lintasan ρ pada graf *precedence* $G(A)$ adalah

$$|\rho|_w = a_{i_1 i_0} + a_{i_2 i_1} \dots + a_{i_p i_{p-1}} \qquad \dots (2.2)$$

Setelah dibahas tentang definisi graf *precedence* $G(A)$ dan bobot pada lintasan ρ pada graf *precedence* $G(A)$ dalam aljabar *max-plus*, selanjutnya akan diberikan contoh *precedence* $G(A)$ dari suatu matriks A dalam aljabar *max-plus.*

Contoh 2.3.15

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} -\infty & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -\infty & 1 & 2 \\ -\infty & 2 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 2 & 2 \end{bmatrix}$ maka graf *precedence*nya :



Selanjutnya akan dijelaskan definisi suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ berdasarkan karakteristik dari graf $G(A)$ dari matriks tersebut.

Definisi 2.3.16

Suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ disebut *irreducible* jika graf $G(A)$ dari matriks tersebut merupakan graf yang terhubung kuat (Farlow, 2009).

Berikut ini akan diterangkan hubungan antara elemen ke $-\, ij$ dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ berpangkat p dengan bobot lintasan dari simpul j ke simpul i pada graf *precedence* $G(A)$.

Misalkan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan $G(A)$ adalah graf *precendence* dari matriks A. Sesuai dengan persamaan (2.1) maka:

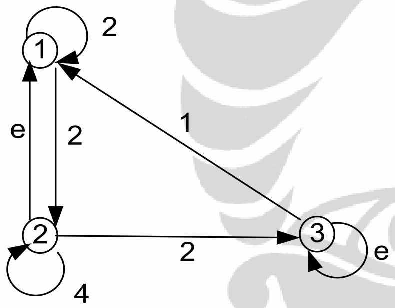
$$\begin{aligned}(A^{\otimes p})_{ij} \quad &= maks_{\,1\le i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} \le n} \left(a_{ii_{p-1}} + \cdots + a_{i_2 i_1} + a_{i_1 j} \right) \\ &= maks_{\,1\le i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} \le n} \left(a_{i_1 j} + a_{i_2 i_1} \ldots + a_{ii_{p-1}} \right) \qquad \ldots (2.3)\end{aligned}$$

Sesuai dengan persamaan 2.2 diketahui $a_{i_1 j} + a_{i_2 i_1} \ldots + a_{i i_{p-1}}$ merupakan bobot lintasan ρ dengan panjang p dari simpul j ke simpul i. Dengan demikian $(A^{\otimes p})_{ij}$ merupakan bobot maksimum semua lintasan dalam graf $G(A)$ dengan panjang p dari simpul j ke simpul i. Jika dalam graf $G(A)$ tidak ada lintasan dengan panjang p dari simpul j ke simpul i, maka bobot maksimum lintasannya didefinisikan dengan ε.

Berikut ini diberikan contoh hubungan antara elemen ke $-\,ij$ dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ berpangkat p dengan bobot lintasan dari simpul j ke simpul i pada graf *precedence* $G(A)$.

Contoh 2.3.17

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & e & 1 \\ 2 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & e \end{bmatrix}$, maka graf *precedence* $G(A)$ dari matriks A adalah:



Bobot maksimum semua lintasan di $G(A)$ dengan panjang 3 ditentukan dari elemen-elemen $A^{\otimes 3}$.

$$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 7 \\ 8 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas diperoleh $(A^{\otimes 3})_{31} = 8$, maka bobot maksimum semua lintasan di $G(A)$ dengan panjang 3 yang berawal dari simpul 1 dan berakhir di simpul 3 adalah 8. Dari graf *precedence* terlihat bahwa lintasan tersebut adalah $1 \to 2 \to 2 \to 3$, bobot lintasannya adalah $|\rho|_w = w(1,2) \otimes w(2,2) \otimes w(2,3)$

$$= a_{21} \otimes a_{22} \otimes a_{23} = 2 \otimes 4 \otimes 2 = 8$$

Jika pada definisi 2.2.7 telah didefinisikan $A^{\otimes p}$ dengan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, maka berikut ini dinotasikan

$A^{+} = A\oplus A^{2}\oplus A^{3}\oplus \dots$ atau ditulis $A^{+} = \oplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k}$ dan $A^{*} = E_n \oplus A^{+}$ dengan E_n matriks identitas pada $\mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sehingga dapat ditulis $A^{*} = \oplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes k}$.

Karena $(A^{\otimes p})_{ij}$ merupakan bobot maksimum semua lintasan dalam graf $G(A)$ dengan panjang p dari simpul j ke simpul i, maka $(A^{+})_{ij}$ merupakan bobot maksimum semua lintasan dalam graf $G(A)$ dari simpul j ke simpul i. Jika tidak terdapat lintasan dari simpul i ke simpul j maka $(A^{+})_{ij} = \varepsilon$ dan $(A^{+})_{ij}$ dikatakan tidak terdefinisi jika $(A^{+})_{ij} = \infty$.

Karena diketahui $A^{+} = \oplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k}$ dan $A^{*} = E_n \oplus A^{+} = \oplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes k}$, maka:

$$\begin{aligned} A^{+} &= A\oplus A^{2}\oplus \dots \oplus A^{n-1}\oplus A^{n}\oplus \dots \oplus A^{\infty} \\ &= A \otimes (E \oplus A\oplus A^{2}\oplus \dots \oplus A^{n-1}\oplus A^{n}\oplus \dots \oplus A^{\infty}) \\ &= A \otimes A^{*} \qquad \dots (2.4) \end{aligned}$$

BAB 3

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN PADA MATRIKS DAN MATRIKS SIRKULAN DALAM ALJABAR *MAX-PLUS*

Pada subbab 2.1 telah dijelaskan definisi nilai eigen dan vektor eigen pada matriks yang elemen-elemennya bilangan real. Selain vektor dan matriks real pada subbab 2.2 juga telah dijelaskan definisi dan operasi pada vektor dan matriks dalam aljabar *max-plus*.

Seperti pada matriks real, pada matriks dalam aljabar *max-plus* juga dapat dipelajari nilai eigen dan vektor eigen. Pada bab 3 ini akan dibahas definisi nilai eigen dan vektor eigen serta cara menentukannya pada matriks dan matriks sirkulan dalam aljabar *max-plus*.

Berikut ini definisi nilai eigen dan vektor eigen dalam aljabar *max-plus*.

Definisi 3.1

Misalkan $A \in \mathcal{R}_{max}^{n\times n}$, suatu vektor $\vec{v} \neq \vec{\varepsilon}$ di $\mathbb{R}_{max}^{n}$ disebut vektor eigen dari A jika memenuhi:

$$A \otimes \vec{v} = \mu \otimes \vec{v}$$

skalar $\mu \in \mathbb{R}_{max}$ disebut nilai eigen dari A dan $\vec{v}$ disebut suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan μ (Bacelli dkk, 2001).

Sesuai dengan definisi 3.1 diperoleh akibat berikut:

i) Karena vektor eigen dari matriks dalam aljabar *max-plus* $\vec{v} \neq \vec{\varepsilon}$, maka vektor eigen harus memuat paling sedikit satu komponen berhingga.

ii) Jika vektor eigen $\vec{v}$ mempunyai komponen yang seluruhnya tidak sama dengan ε, maka vektor $\vec{v}$ disebut vektor eigen berhingga (Farlow, 2009).

iii) Nilai eigen μ merupakan skalar pada $\mathbb{R}_{max}$, sehingga μ bisa bernilai ε.

Berikut ini dijelaskan suatu lemma yang berkaitan dengan karakteristik matriks A yang memiliki nilai eigen bernilai ε.

Lemma 3.2

ε merupakan suatu nilai eigen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ jika dan hanya jika ada kolom di A yang semua elemennya bernilai ε.

Bukti:

$\rightarrow$) Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dengan nilai eigen ε

$A = [a_{ij}]$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$

$\vec{v} \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan ε

v_i merupakan komponen baris ke$-i$ dari $\vec{v}$, $i = 1, \dots, n$

$(A \otimes v)_i$ merupakan komponen baris ke$-i$ dari $A \otimes \vec{v}$, $i = 1, \dots, n$

$(\varepsilon \otimes v)_i$ merupakan komponen baris ke$-i$ dari $\varepsilon \otimes \vec{v}$, $i = 1, \dots, n$

akan ditunjukkan ada kolom di A yang semua elemennya ε

karena ε merupakan nilai eigen dari matriks A, maka:

$A \otimes \vec{v} = \varepsilon \otimes \vec{v}$

Sehingga elemen-elemen yang bersesuaian sama

$(A \otimes \vec{v})_i = (\varepsilon \otimes \vec{v})_i$

$(A \otimes \vec{v})_i = \varepsilon \otimes v_i$

$(A \otimes \vec{v})_i = \varepsilon$

karena $\vec{v} \neq \vec{\varepsilon}$ maka vektor eigen memuat paling sedikit satu komponen di $\vec{v}$ yang tidak sama dengan ε.

andaikan $v_c \neq \varepsilon, 1 \leq c \leq n$

Pandang $(A \otimes \vec{v})_i = \bigoplus_{j=1}^{n} (a_{ij} \otimes v_j)$

$= maks_{\,1 \leq j \leq n} (a_{ij} + v_j)$

$= maks_{\,1 \leq j \leq n} (a_{i1} + v_1, a_{i2} + v_2, \dots, a_{ic} + v_c, \dots, a_{in} + v_n)$

karena $v_c \neq \varepsilon$ dan $v_i = \varepsilon$ untuk $i \neq c$ sehingga haruslah $a_{ic} = \varepsilon$.

karena a_{ic} merupakan elemen baris ke-i kolom ke-c matriks A untuk $i = 1, 2, \dots, n$ maka a_{ic} merupakan elemen kolom ke-c matriks A yang seluruh elemennya ε (terbukti)

←) Misalkan: $A = [a_{ij}]$ untuk $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$

μ merupakan nilai eigen dari matriks A.

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n_{max}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan μ

v_i merupakan komponen baris ke$-i$ dari $\vec{v}$

$(A \otimes v)_i$ merupakan komponen baris ke$-i$ dari $A \otimes \vec{v}$

$(\varepsilon \otimes v)_i$ merupakan komponen baris ke$-i$ dari $\varepsilon \otimes \vec{v}$

A matriks yang mempunyai satu kolom yang semua elemennya ε

sebut c adalah kolom pada matriks A yang semua elemennya ε

sedemikian hingga $a_{ic} = \varepsilon, \ i = 1, 2, \dots, n$

akan ditunjukkan nilai eigen μ dari matriks A adalah ε

sesuai dengan definisi 3.1

$A \otimes \vec{v} = \mu \otimes \vec{v}$

Sehingga elemen-elemen yang bersesuaian sama

$(A \otimes \vec{v})_i = (\mu \otimes \vec{v})_i$

$\bigoplus_{j=1}^{n} (a_{ij} \otimes v_j) = \mu \otimes v_i$

karena $\vec{v} \neq \vec{\varepsilon}$ maka vektor eigen memuat paling sedikit satu elemen yang tidak sama dengan ε.

ambil sembarang $v_c \in \vec{v}, \ v_c \neq \varepsilon$

untuk $i = c$

$\bigoplus_{j=1}^{n} (a_{cj} \otimes v_j) = \mu \otimes v_c$

$maks_{\,1 \le j \le n}(a_{cj} + v_j) = \mu + v_c$

$maks_{\,1 \le j \le n}(a_{c1} + v_1, a_{c2} + v_2, \dots, a_{cc} + v_c, \dots, a_{cn} + v_n) = \mu + v_c$

karena $a_{cc} = \varepsilon$ maka:

$\mu + v_c = \varepsilon$

karena $v_c \neq \varepsilon$, maka haruslah $\mu = \varepsilon$ (terbukti)

Karakteristik matriks yang memiliki nilai eigen bernilai ε pada lemma 3.2 memberikan suatu akibat pada matriks *irreducible*. Berikut ini dijelaskan akibat dari lemma 3.2 terhadap matriks *irreducible*.

Akibat 3.3

Jika matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ adalah matriks *irreducible*, maka nilai eigen dari A selalu tidak sama dengan ε.

Bukti:

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ adalah matriks *irreducible*

$$A = [a_{ij}] \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

Dengan pembuktian kontradiksi

Andaikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ memiliki nilai eigen sama dengan ε. Berdasarkan lemma 3.2 maka matriks A memiliki kolom yang seluruh elemennya bernilai ε, sebut kolom c sedemikian sehingga $a_{ic} = \varepsilon$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, sesuai dengan definisi 2.3.14 maka $w(c, i) = \varepsilon$ dan artinya tidak terdapat busur dari simpul c kesimpul i untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Akibatnya sesuai dengan definisi 2.3.13 dan 2.3.16 maka matriks A tidak *irreducible* sehingga pengandaian salah. Oleh karena itu, nilai eigen dari matriks A selalu tidak sama dengan ε.

Sesuai dengan lemma 3.2 diketahui bahwa ε merupakan suatu nilai eigen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ jika dan hanya jika ada kolom di A yang semua elemennya bernilai ε atau jika:

$P =$ ε merupakan suatu nilai eigen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$

$Q =$ ada kolom di A yang semua elemennya bernilai ε

maka lemma 3.2 dapat dinotasikan $P \Leftrightarrow Q$. $P \Leftrightarrow Q$ benar jika P dan Q kedua-duanya benar atau kedua-duanya salah (Hungerford, 2000). Dari uraian tersebut maka dapat disimpulkan bahwa nilai eigen berhingga dimiliki oleh matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ yang tidak mempunyai kolom yang seluruh elemennya bernilai ε.

Berikut ini diberikan suatu lemma tentang perhitungan nilai eigen berhingga pada suatu matriks.

Lemma 3.4

Nilai eigen berhingga μ dari suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ adalah nilai bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$.

Bukti:

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan $A = [a_{ij}]$ dengan nilai eigen berhingga μ

$\vec{v} \in \mathbb{R}_{max}^{n}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan μ

v_{i_c} merupakan komponen baris ke$-$ i_c dari $\vec{v}$

$(A \otimes v)_{i_c}$ merupakan komponen baris ke$-$ i_c dari $A \otimes \vec{v}$

$(\varepsilon \otimes v)_{i_c}$ merupakan komponen baris ke$-$ i_c dari $\varepsilon \otimes \vec{v}$

i_c merupakan indeks, $c = 1, 2, \ldots$

$|\rho|_w$ adalah bobot sirkuit elementer ρ di $G(A)$

$|\rho|_\iota$ adalah panjang sirkuit elementer ρ di $G(A)$

Akan ditunjukkan $\mu = \frac{|\rho|_w}{|\rho|_\iota}$

Sesuai dengan definisi 3.1 diketahui vektor eigen $\vec{v} \neq \vec{\varepsilon}$, sehingga $\vec{v}$ memuat paling sedikit satu elemen berhingga. Sebut $v_{i_1} \neq \vec{\varepsilon}$, maka:

$$(A \otimes \vec{v})_{i_1} = \mu \otimes v_{i_1} \neq \varepsilon$$

terdapat indeks i_2, sedemikian sehingga:

$$a_{i_1 i_2} \otimes v_{i_2} = \mu \otimes v_{i_1}$$

akibatnya $v_{i_2} \neq \varepsilon$, $a_{i_1 i_2} \neq \varepsilon$ dan $(i_2, i_1) \in E(A)$

karena $v_{i_2} \neq \varepsilon$, maka terdapat indeks i_3, sedemikian sehingga:

$$a_{i_2 i_3} \otimes v_{i_3} = \mu \otimes v_{i_2}$$

akibatnya $v_{i_3} \neq \varepsilon$, $a_{i_2 i_3} \neq \varepsilon$ dan $(i_3, i_2) \in E(A)$

karena $v_{i_3} \neq \varepsilon$, maka terdapat indeks i_4, sedemikian sehingga:

$$a_{i_3 i_4} \otimes v_{i_4} = \mu \otimes v_{i_3}$$

akibatnya $v_{i_4} \neq \varepsilon$, $a_{i_3 i_4} \neq \varepsilon$ dan $(i_4, i_3) \in E(A)$

uraian di atas bisa terus diulangi dan diperoleh barisan $\{i_j\}$ sedemikian sehingga $a_{i_{j-1} i_j} \otimes v_{i_j} = \mu \otimes v_{i_{j-1}}$, akibatnya $v_{i_j} \neq \varepsilon$, $a_{i_{j-1} i_j} \neq \varepsilon$ dan $(i_j, i_{j-1}) \in E(A)$.

Pada suatu tahapan akan dicapai suatu indeks i_k yang sebelumnya telah ditemui di barisan tersebut karena indeks i_j merupakan simpul pada $G(A)$ yang jumlahnya berhingga. Oleh karena itu, diperoleh suatu sirkuit elementer

$\rho = (i_k, i_{k+l-1}, i_{k+l-2}, \cdots, i_{k+2}, i_{k+1}, i_k)$

$$a_{i_k i_{k+1}} \otimes v_{i_{k+1}} = \mu \otimes v_{i_k}$$
$$a_{i_{k+1} i_{k+2}} \otimes v_{i_{k+2}} = \mu \otimes v_{i_{k+1}}$$
$$\vdots$$
$$a_{i_{k+l-2} i_{k+l-1}} \otimes v_{i_{k+l-1}} = \mu \otimes v_{i_{k+l-2}}$$
$$a_{i_{k+l-1} i_k} \otimes v_{i_k} = \mu \otimes v_{i_{k+l-1}}$$

$$a_{i_k i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes a_{i_{k+l-1} i_k} \otimes v_{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{k+l-1}} \otimes v_{i_k} = \mu^{\otimes l} \otimes v_{i_k} \otimes v_{i_{k+1}} \ldots \otimes v_{i_{k+l-1}}$$
$$a_{i_k i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes a_{i_{k+l-1} i_k} = \mu^{\otimes l}$$
$$a_{i_{k+l-1} i_k} \otimes a_{i_{k+l-2} i_{k+l-1}} \otimes \ldots \otimes a_{i_{k+1} i_{k+2}} \otimes a_{i_k i_{k+1}} = \mu^{\otimes l}$$

artinya:

$$a_{i_{k+l-1} i_k} + a_{i_{k+l-2} i_{k+l-1}} + \ldots + a_{i_{k+1} i_{k+2}} + a_{i_k i_{k+1}} = l.\mu$$
$$w(i_k, i_{k+l-1}) + w(i_{k+l-1}, i_{k+l-2}) + \cdots + w(i_{k+2}, i_{k+1}) + w(i_{k+1}, i_k) = l.\mu \qquad \ldots (3.1)$$

maka:

$w(i_k, i_{k+l-1}) + w(i_{k+l-1}, i_{k+l-2}) + \cdots + w(i_{k+2}, i_{k+1}) + w(i_{k+1}, i_k)$ merupakan bobot sirkuit $|\rho|_w$ untuk sirkuit $\rho = (i_k, i_{k+l-1}, i_{k+l-2}, \cdots, i_{k+2}, i_{k+1}, i_k)$ dengan panjang sirkuit $|\rho|_\iota = l$.

Sehingga persamaan (3.1) menjadi:

$$|\rho|_w = l.\mu \text{ atau } |\rho|_w = |\rho|_\iota . \mu$$

Jadi terbukti $\mu = \frac{|\rho|_w}{|\rho|_\iota}$

Dari lemma di atas diketahui bahwa nilai eigen berhingga μ dari $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan bobot rata-rata dari sirkuit elementer di $G(A)$. Selanjutnya akan didefinisikan suatu matriks yang merupakan hasil operasi $\otimes$ suatu skalar yang merupakan invers dari nilai eigen berhingga dengan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$.

Definisi 3.5

Misalkan λ adalah nilai eigen berhingga dari $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, matriks $A_\lambda \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ didefinisikan dengan $(A_\lambda)_{ij} = (-\lambda \otimes A)_{ij}$.

Sesuai dengan lemma 3.4 diketahui bahwa nilai eigen berhingga dari matriks A adalah bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$. Jika nilai eigen yang digunakan adalah nilai eigen maksimum yang merupakan maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$, maka sesuai dengan definisi di atas diperoleh maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A_\lambda)$ sama dengan e.

Sebelumnya pada bab 2 telah dinotasikan $A^+ = A\oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \ldots$ atau ditulis $A^+ = \oplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k}$ dan $A^* = E_n \oplus A^+$ atau ditulis $A^* = \oplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes k}$. A^+ merupakan bobot maksimum semua lintasan dalam graf $G(A)$. Berikut ini akan diberikan suatu lemma yang berkaitan dengan A^+, untuk matriks A yang memiliki bobot rata-rata sirkuit elementer maksimal di $G(A)$ sama dengan e.

Lemma 3.6

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ adalah suatu matriks yang memiliki maksimum bobot rata-rata sirkuit di $G(A)$ sama dengan e maka A^+ ada dan didefinisikan dengan:

$$A^+ = A\oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^n = \oplus_{k=1}^{n} A^{\otimes k}$$

(Farlow, 2009)

Bukti:

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan maksimum rata-rata bobot dari sirkuit elementer di $G(A)$ sama dengan e.

$A = [a_{ij}]$

Akan ditunjukkan

i) A^+ ada

ii) $A^+ = A\oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^n = \oplus_{k=1}^{n} A^{\otimes k}$

i) Diketahui $A^+ = \oplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k}$

$$= A\oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^n \oplus A^{n+1} \oplus \ldots \oplus A^{\infty}$$

$$(A^+)_{ij} = \text{maks}\left\{\left(A^{\otimes k}\right)_{ij} : 1 \le k \le \infty\right\} \ge \text{maks}\left\{\left(A^{\otimes k}\right)_{ij} : 1 \le k \le n\right\} \quad \ldots (3.2)$$

Karena A matriks beordo $n \times n$, maka untuk seluruh lintasan di $G(A)$ dari simpul i ke simpul j yang mempunyai panjang lebih atau sama dengan n akan terjadi paling sedikit satu pengulangan simpul. Sehingga terbentuk setidaknya satu sirkuit yang panjangnya tidak lebih dari n.

Selanjutnya dikarenakan maksimum bobot rata-rata dari sirkuit elementer di $G(A)$ sama dengan e, maka dapat kita asumsikan bahwa maksimum bobot sirkuit elementer di $G(A)$ sama dengan e. Karena maksimum bobot sirkuit elementer di $G(A)$ sama dengan e maka bobot lintasan tidak akan bertambah besar setiap terjadi pengulangan simpul, sehingga terdapat bobot maksimum untuk lintasan dari simpul i ke simpul j. Jadi terbukti A^+ ada.

ii) Karena maksimum bobot sirkuit elementer di $G(A)$ sama dengan e maka bobot lintasan tidak akan bertambah besar setiap terjadi pengulangan simpul, maka $A\oplus A^2\oplus \ldots \oplus A^{n-1} \geq A^n \oplus \ldots \oplus A^\infty$

$$A^+ = \oplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k}$$
$$= A\oplus A^2\oplus \ldots \oplus A^{n-1}\oplus A^n\oplus \ldots \oplus A^\infty$$
$$= A\oplus A^2\oplus \ldots \oplus A^{n-1}$$

$$(A^+)_{ij} = \text{maks}\left\{(A^{\otimes k})_{ij} : 1 \leq k \leq n-1\right\} \leq \text{maks}\left\{(A^{\otimes k})_{ij} : 1 \leq k \leq n\right\} \quad \ldots(3.3)$$

Dari persamaan (3.2) dan (3.3) diperoleh $(A^+)_{ij} = \text{maks}\left\{\left(A^{\otimes k}\right)_{ij} : 1 \leq k \leq n\right\}$.

Jadi terbukti $A^+ = A\oplus A^2\oplus \ldots \oplus A^n$.

Pada lemma di atas dijelaskan tentang A^+ untuk matriks A yang memiliki maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$ sama dengan e. Selanjutnya akan dijelaskan tentang A^* untuk matriks A yang memiliki bobot rata-rata sirkuit elementer maksimal di $G(A)$ sama dengan e.

Sesuai dengan lemma 3.6 diketahui bahwa A^+ ada dan $A^+ = A\oplus \ldots \oplus A^n$

$$A^+ = A\oplus A^2\oplus \ldots \oplus A^n$$
$$= A\otimes(E_n\oplus A\oplus A^2\oplus \ldots \oplus A^{n-1})$$

Sesuai dengan persamaan 2.4 diketahui bahwa $A^+ = A \otimes A^*$ sehingga diperoleh:

$$A^* = E_n\oplus A\oplus A^2\oplus \ldots \oplus A^{n-1}$$

Jadi A^* ada dan $A^* = E_n\oplus A\oplus A^2\oplus \ldots \oplus A^{n-1}$. …(3.4)

Setelah dibahas tentang A^+ dan A^* untuk matriks A dengan maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$ sama dengan e, selanjutnya akan diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan sirkuit elementer di $G(A)$ yang memiliki bobot rata-rata maksimal.

Definisi 3.7

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan himpunan sirkuit elementer di $G(A)$ dinotasikan dengan $C(A)$. Suatu sirkuit $\rho \in C(A)$ yang mempunyai bobot rata-rata maksimal disebut sirkuit kritis.

Definisi 3.8

Graf kritis dari $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ memuat simpul-simpul dan busur-busur sirkuit kritis di $G(A)$. Graf kritis dari A dinotasikan dengan $G^c(A)$ dan himpunan simpul-simpul di $G^c(A)$ dinotasikan dengan $V^c(A)$.

Setelah diberikan definisi yang berkaitan dengan sirkuit elementer di $G(A)$ yang memiliki bobot rata-rata maksimal, selanjutnya akan diberikan suatu lemma mengenai perhitungan vektor eigen dari A yang bersesuain dengan nilai eigen yang merupakan maksimum rata-rata bobot sirkuit elementer di $G(A)$.

Lemma 3.9

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ memiliki maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer berhingga λ, maka λ merupakan nilai eigen dari A dan untuk suatu $v \in V^c(A)$, kolom $(A_\lambda^*)_v$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

Bukti:

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$

$$\lambda = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$$

$v \in V^c(A)$ dan kolom dari A_λ^* dinotasikan dengan $(A_\lambda^*)_v$

Akan ditunjukkan $A \otimes (A_\lambda^*)_v = \lambda \otimes (A_\lambda^*)_v$

Sesuai dengan definisi 3.5:

$$(A_\lambda)_{ij} = (-\lambda \otimes A)_{ij}$$

maka sirkuit kritis di $G(A)$ sama dengan di $G(A_\lambda)$. Jika maksimum rata-rata bobot sirkuit elementer di $G(A) = \lambda$ maka maksimum rata-rata bobot sirkuit elementer di $G(A_\lambda) = e$. Sehingga sesuai dengan lemma 3.6 diketahui A_λ^+ dan A_λ^* ada dan untuk

$$v \in V^c(A),\ (A_\lambda^+)_{vv} = e \qquad \dots (3.5)$$

$A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda^+$ dan dari persamaan (2.4) diketahui $A_\lambda^+ = A_\lambda \otimes A_\lambda^*$

$$(A_\lambda^*)_{iv} = (E \oplus A_\lambda^+)_{iv} = \begin{cases} \varepsilon \oplus (A_\lambda^+)_{iv} : untuk\ i \neq v \\ e \oplus (A_\lambda^+)_{iv} : untuk\ i = v \end{cases}$$

Sesuai dengan persamaan (3.5) maka $(A_\lambda^+)_{iv} = (A_\lambda^*)_{iv}$. Selanjutnya notasikan kolom ke$-v$ dari matriks A_λ dengan $(A_\lambda)_v$ sehingga:

$$(A_\lambda^+)_v = (A_\lambda^*)_v$$

$$A_\lambda \otimes (A_\lambda^*)_v = (A_\lambda^*)_v$$

$$-\lambda \otimes A \otimes (A_\lambda^*)_v = (A_\lambda^*)_v$$

$$A \otimes (A_\lambda^*)_v = \lambda \otimes (A_\lambda^*)_v$$

Jadi terbukti nilai eigen dari A adalah $\lambda = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$ dan untuk suatu $v \in V^c(A)$, kolom ke$-v$ dari A_λ^* adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Pada lemma di atas dibahas mengenai perhitungan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen berhingga yang merupakan maksimum rata-rata bobot sirkuit elementer di $G(A)$. Sesuai dengan akibat 3.3 diketahui bahwa matriks A yang *irreducible* memiliki nilai eigen berhingga, selanjutnya akan diberikan suatu lemma tentang karakteristik vektor eigen dari matriks A yang *irreducible*.

Lemma 3.10

Jika $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ merupakan matriks yang *irreducible*, maka seluruh komponen vektor eigen $\vec{v}$ dari matriks A merupakan elemen berhingga.

Bukti:

Misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ merupakan matriks *irreducible* dan $A = [a_{ij}]$

λ merupakan vektor eigen berhingga dari A

$\vec{v}$ merupakan vektor eigen dari A

v_i merupakan komponen baris ke$-i$ dari $\vec{v}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$

$(A \otimes v)_i$ merupakan komponen baris ke$-i$ dari $A \otimes \vec{v}$, $i = 1, \dots, n$

$(\varepsilon \otimes v)_i$ merupakan komponen baris ke$-i$ dari $\varepsilon \otimes \vec{v}$, $i = 1, \dots, n$

akan ditunjukkan $v_i \neq \varepsilon$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$

Dengan pembuktian kontradiksi

Andaikan vektor eigen $\vec{v}$ memuat komponen yang merupakan elemen tidak berhingga, sebut $v_b = \varepsilon, 1 \leq b \leq n$.

Sesuai dengan definisi 3.1

$$A \otimes \vec{v} = \mu \otimes \vec{v}$$

Sehingga elemen-elemen yang bersesuaian sama

$$(A \otimes \vec{v})_b = (\mu \otimes \vec{v})_b$$

$$= \mu \otimes v_b$$

$$= \varepsilon \qquad \ldots (3.6)$$

Pandang $(A \otimes \vec{v})_b$, sesuai dengan definisi perkalian matriks maka:

$$(A \otimes \vec{v})_b = \bigoplus_{j=1}^{n} (a_{bj} \otimes v_j)$$

$$= maks_{1 \leq j \leq n}\left(a_{bj} + v_j\right)$$

$$= maks_{1 \leq j \leq n}(a_{b1} + v_1,\ a_{b2} + v_2, \ldots, a_{bb} + v_b, \ldots, a_{bn} + v_n \ \ )$$

karena $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ merupakan matriks *irreducible*, maka sesuai dengan definisi 2.3.14, 2.3.13 dan 2.3.16 terdapat $a_{bi} \neq \varepsilon$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Sehingga

$$(A \otimes \vec{v})_b \neq \varepsilon \qquad \ldots (3.7)$$

terjadi kontradiksi antara persamaan 3.6 dan 3.7 maka pengandaian salah. Sehingga $v_i \neq \varepsilon$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$.

Setelah pada teorema di atas di jelaskan karakteristik vektor eigen $\vec{v}$ dari A yang merupakan matriks yang *irreducible*, selanjutnya akan diberikan suatu teorema tentang karakteristik nilai eigen dari matriks A yang *irreducible.*

Teorema 3.11

Jika $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ merupakan matriks yang *irreducible*, maka maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$ adalah nilai eigen unik dari A.

Bukti:

Misalkan: $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ merupakan matriks *irreducible* dan $A = \left[a_{ij}\right]$

λ merupakan nilai eigen dari A

akan ditunjukkan

i) $\lambda = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$

ii) λ unik

i) Sesuai dengan akibat 3.3 diketahui bahwa nilai eigen dari matriks A yang *irreducible* merupakan elemen berhingga, selanjutnya sesuai dengan lemma 3.4 diketahui bahwa nilai eigen berhingga dari matriks dalam aljabar *max-plus* merupakan bobot rata-rata sirkuit elementer pada graf *precedence* dari matriks dalam aljabar *max-plus*. Jadi $maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = \lambda$

ii) Karena A matriks yang *irreducible*, maka terdapat paling sedikit satu sirkuit elementer di $G(A)$.

Ambil sembarang sirkuit elementer $\rho = \left(i_1, i_2, \dots i_{p-1}, i_p, i_1\right)$ di $G(A)$. Sesuai dengan lemma 3.10 diketahui bahwa seluruh $v_i \in \vec{v}$ merupakan elemen berhingga, sehingga diperoleh:

$a_{i_2 i_1} \otimes v_{i_1} \leq \lambda \otimes v_{i_2}$

$\vdots$

$a_{i_p i_{p-1}} \otimes v_{i_{p-1}} \leq \lambda \otimes v_{i_p}$

$a_{i_1 i_p} \otimes v_{i_p} \leq \lambda \otimes v_{i_1}$

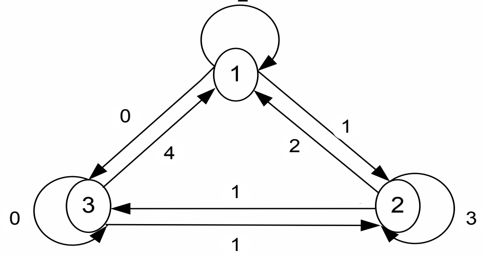
Sehingga $\frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} \leq \lambda$ artinya setiap nilai eigen berhingga λ lebih besar atau sama dengan bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$. Sesuai dengan lemma 3.4 diketahui bahwa nilai eigen berhingga sama dengan bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$. Oleh karena itu λ dan unik.

Contoh 3.12

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks A dalam aljabar *max-plus*

Jawab:

Graf *precedence* $G(A)$ dari matriks A



bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$ untuk:

sirkuit dengan panjang 1: $a_{11} = 2,\ a_{22} = 3,\ a_{33} = 0$

panjang 2: $(a_{12} + a_{21})/2 = (2+1)/2 = 3/2$

$(a_{13} + a_{31})/2 = (4+0)/2 = 2$

$(a_{23} + a_{32})/2 = (1+1)/2 = 1$

panjang 3: $(a_{13} + a_{32} + a_{21})/2 = (4+1+1)/3 = 2$

$(a_{12} + a_{23} + a_{31})/2 = (2+1+0)/3 = 1$

karena graf $G(A)$ terhubung kuat, maka matriks A *irreducible* dan sesuai teorema 3.11 maka nilai eigen unik dari A adalah $maks\ (2,3,0,3/2\,,2,1,2,1) = 3$ dan sesuai definisi 3.8 maka $V^c(A) = \{2\}$. Sesuai dengan lemma 3.9 kolom ke-2 dari A_λ^* merupakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

$$A_\lambda = -\lambda \otimes A = -3 \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A_\lambda)^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda \oplus (A_\lambda)^{\otimes 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen 3 adalah = $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Setelah dibahas cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks yang *irreducible*, selanjutnya akan dibahas cara menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada salah satu bentuk khusus matriks yang dinamakan matriks sirkulan. Matriks sirkulan yang ditentukan nilai eigen dan vektor eigennya pada penelitian ini juga merupakan matriks sirkulan yg *irreducible*.

Berikut ini akan didefinisikan definisi dari matriks sirkulan.

Definisi 3.13

Matriks A beordo $n \times n$ merupakan matriks sirkulan jika $a_{i,j} = a_{i'j'}$ untuk $i - i' = j - j'\ (mod\ n)$ (Tomaskova, 2010).

Selanjutnya diberikan bentuk umum matriks sirkulan A berordo $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

Dari definisi dan bentuk umum matriks sirkulan di atas terlihat bahwa matriks sirkulan merupakan matriks khusus yang baris atau kolomnya merupakan pergeseran sirkular dari baris atau kolom sebelumnya. Seluruh elemen pada matriks A sama dengan elemen pada baris pertamanya, elemen-elemen tersebut terletak pada setiap kolom yang berbeda pada matriks A.

Seperti yang telah didefinisikan pada definisi 2.2.4, terdapat tiga operasi pada matriks dalam aljabar *max-plus*. Berikut ini akan diberikan suatu lemma yang berhubungan dengan tiga operasi matriks dalam aljabar *max-plus* yang berlaku pada matriks sirkulan.

Lemma 3.14

Jika A, B adalah matriks sirkulan berordo $n \times n$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$ maka $A \oplus B$, $A \otimes B$ dan $\alpha \otimes A$ juga merupakan matriks sirkulan.

Bukti:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ b_n & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_1 \end{bmatrix}$$

i) Misalkan $A \oplus B = C$, dimana $c_i = maks\ (a_i, b_i)$

Akan ditunjukkan C merupakan matriks sirkulan

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ b_n & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} maks\ (a_1, b_1) & maks\ (a_2, b_2) & \dots & maks\ (a_n, b_n) \\ maks\ (a_n, b_n) & maks\ (a_1, b_1) & \dots & maks\ (a_{n-1}, b_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ maks\ (a_2, b_2) & maks\ (a_3, b_3) & \cdots & maks\ (a_1, b_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

Karena matriks C memenuhi bentuk umum matriks sirkulan maka C merupakan matriks sirkulan.

ii) Misalkan $A \otimes B = D$ dengan d_i adalah elemen kolom ke-i pada baris pertama matriks D.

$$d_1 = maks\ (a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_{n,} a_3 \otimes b_{n-1}, \dots,\ a_n \otimes b_2),$$

$$d_2 = maks\ (a_1 \otimes b_2, a_2 \otimes b_{1,} a_3 \otimes b_n, \dots,\ a_n \otimes b_3),$$

$$\vdots$$

$$d_{n-1} = maks\ (a_1 \otimes b_{n-1}, a_2 \otimes b_{n-2,} a_3 \otimes b_{n-3}, \dots,\ a_n \otimes b_n),$$

$$d_n = maks\ (a_1 \otimes b_n, a_2 \otimes b_{n-1,} a_3 \otimes b_{n-2}, \dots,\ a_n \otimes b_1)$$

Akan ditunjukkan D merupakan matriks sirkulan

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ d_n & d_1 & \cdots & d_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_2 & d_3 & \cdots & d_1 \end{bmatrix}$$

Karena matriks D memenuhi bentuk umum matriks sirkulan maka D merupakan matriks sirkulan.

iii) Misalkan $\alpha \otimes A = E$, dengan $e_i = \alpha \otimes a_i$ adalah elemen kolom ke-i pada baris pertama matriks E .

Akan ditunjukkan C merupakan matriks sirkulan

$$\alpha \otimes A = \alpha \otimes \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \otimes a_1 & \alpha \otimes a_2 & \alpha \otimes a_3 & \dots & \alpha \otimes a_n \\ \alpha \otimes a_n & \alpha \otimes a_1 & \alpha \otimes a_2 & \dots & \alpha \otimes a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \otimes a_2 & \alpha \otimes a_3 & \alpha \otimes a_4 & \dots & \alpha \otimes a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ e_n & e_1 & \dots & e_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_2 & e_3 & \cdots & e_1 \end{bmatrix}$$

Karena matriks E memenuhi bentuk umum matriks sirkulan maka E merupakan matriks sirkulan.

Teorema 3.15

Jika $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ adalah matriks sirkulan yang *irreducible*, elemen kolom ke$-i$ baris pertama matriks A dinotasikan dengan a_i untuk $i = 1, \dots, n$ dengan $a_c = maks\ a_i$, maka a_c merupakan nilai eigen unik dari A dan kolom-kolom di $A_{a_c}^*$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan a_c.

Bukti:

Misalkan

$A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan matriks sirkulan yang *irreducible*

a_i merupakan elemen kolom ke$-i$ baris pertama matriks A, $maks\ a_i = a_c$

$maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$ merupakan maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$

sesuai dengan teorema 3.12 diketahui maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer di $G(A)$ merupakan nilai eigen unik dari matriks A yang *irreducible* dan sesuai definisi 3.5 $A_{a_c} = -a_c \otimes A$, sehingga

akan dibuktikan:

i) $a_c = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$

akan ditunjukkan:

- $maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} \leq a_c$
- $maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} \geq a_c$

ii) Sesuai dengan lemma 3.9 maka akan ditunjukkan $V^c(A) = \{1, 2, \dots, n\}$

i) Akan dibuktikan $a_c = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$

- Akan ditunjukkan $maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} \leq a_c$

  Misalkan $\gamma = (c, c+1, c+2, \dots, c+(l-2), c+(l-1)+(c+l))$, untuk $c = c + l$ adalah sirkuit kritis di $G(A)$ dengan panjang l, sehingga

$$\frac{|\gamma|_w}{|\gamma|_l} = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$$

$$= \frac{w(c, c+1) \otimes w(c+1, c+2) \otimes \dots \otimes w(c+(n-1), c+n)}{l}$$

$$= \frac{\overbrace{a_{c+1,c} + a_{c+2,c+1} + \dots + a_{c+n,c+n-1}}^{sebanyak\ l}}{l}$$

karena a_c merupakan elemen maksimum pada baris pertama di A maka a_c juga merupakan elemen maksimum pada matriks A sehingga seluruh elemen di A kurang dari atau sama dengan a_c sehingga:

$$\frac{|\gamma|_w}{|\gamma|_l} = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = \frac{\overbrace{a_{c+1,c}+a_{c+2,c+1}+\ldots+a_{c+n,c+n-1}}^{sebanyak\ l}}{l} \leq \frac{l.a_c}{l}$$

$$maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} \leq a_c \qquad \ldots (3.8)$$

- Akan ditunjukkan $maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} \geq a_c$

  Berdasarkan definisi dan bentuk umum matriks sirkulan di atas terlihat bahwa seluruh elemen pada matriks A sama dengan elemen pada baris pertamanya. Elemen-elemen tersebut terletak pada setiap kolom yang berbeda pada matriks A. Sehingga elemen kolom $ke-c$ pada baris pertama matriks A yang dinotasikan dengan a_c berada pada setiap baris dan setiap kolom matriks A, sehingga:

$$A \otimes v = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} \otimes v$$

$$a_c + v_1 + a_c + v_2 + \cdots + a_c + v_n \leq n.maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n$$

$$n.a_c + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n \leq n.maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n$$

$$a_c \leq maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} \qquad \ldots (3.9)$$

  Berdasarkan pertidaksamaan (3.8) dan (3.9) terbukti $a_c = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$

ii) Dari (i) diketahui $a_c = maks\ \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$, sesuai bentuk umum matriks sirkulan dan definisi 3.13 diketahui terdapat n buah elemen berhingga a_c pada matriks A yang terdapat pada setiap baris dan setiap kolom yang berbeda di A. Sesuai dengan definisi 2.3.14 maka terdapat n buah busur di $G(A)$ yang mempunyai bobot a_c yang terletak pada baris $ke-1$ sampai dengan baris $ke-n$. Berdasarkan letaknya penjumlahan bobot busur tersebut dari baris ke-1 sampai dengan baris ke$-n$ pada matriks A adalah:

$$a_{1,c} + a_{2,c+1} + \cdots + a_{n-c,n-1} + a_{n-c+1,n} + a_{n-c+2,n+1} + a_{n-c+3,n+2} + \cdots + a_{n-1,c-2} + a_{n,c-1}$$

atau

$$a_{n-c+2,1} + \cdots + a_{n-1,c-2} + a_{n-c,n-1} + \cdots + a_{2,c+1} + a_{n-c+3,2} + \cdots + a_{n,c-1} + a_{n-c+1,n} + \cdots + a_{1,c}$$

atau sesuai dengan definisi graf *precedence* dapat juga ditulis:

$$w(1, n-c+2) + \cdots + w(c-2, n-1) + w(n-1, n-c) + \cdots + w(c+1,2) + w(2, n-c+3) + \cdots + w(c-1, n) + w(n, n-c+1) + \cdots + w(c, 1)$$

karena bobot lintasan merupakan penjumlahan dari bobot busur, maka terdapat sirkuit elementer :

$\rho = (1, n-c+2, \ldots, c-2, n-1, n-c, \ldots, c+1, 2, n-c+3, \ldots, c-1, n, n-c+1, \ldots, c, 1)$

dengan bobot sirkuit $|\rho|_w = n.a_c$ dan panjang sirkuit $|\rho|_l = n$ sehingga $\frac{|\rho|_w}{|\rho|_l} = a_c$. Dari point (i) diketahui $a_c = maks \frac{|\rho|_w}{|\rho|_l}$ sehingga sirkuit elementer

$\rho = (1, n-c+2, \ldots, c-2, n-1, n-c, \ldots, c+1, 2, n-c+3, \ldots, c-1, n, n-c+1, \ldots, c, 1)$

merupakan sirkuit kritis dengan $V^c(A) = \{1, 2, \ldots, n\}$

Contoh 3.16

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks A dalam aljabar *max-plus*

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

Sesuai dengan definisi 3.13, 2.3.13, 2.3.14 dan 2.3.16 diketahui matriks A merupakan matriks sirkulan yang *irreducible* maka

a) Sesuai dengan teorema 3.15 diperoleh nilai eigen λ dari matriks A adalah 4

$$A_\lambda = -\lambda \otimes A = -4 \otimes \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_\lambda)^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda \oplus (A_\lambda)^{\otimes 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan teorema 3.15 maka vektor eigen dari matriks A yang

bersesuaian dengan nilai eigen 4 adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) Sesuai dengan teorema 3.15 diperoleh nilai eigen λ dari matriks B adalah 3

$$B_\lambda = -\lambda \otimes B = -3 \otimes \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(B_\lambda)^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_\lambda)^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_\lambda^* = E \oplus B_\lambda \oplus (B_\lambda)^{\otimes 2} \oplus (B_\lambda)^{\otimes 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan teorema 3.15 maka vektor eigen dari matriks B yang bersesuaian

dengan nilai eigen 3 adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

BAB 4

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Sesuai dengan pembahasan pada Bab 3 diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Nilai eigen unik λ dari matriks A yang *irreducible* merupakan maksimum bobot rata-rata sirkuit elementer pada graf $G(A)$, sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ merupakan kolom ke$-v$ dari matriks A_λ^*, untuk suatu $v \in V^c(A)$ dan $A_\lambda = -\lambda \otimes A$.
2. Nilai eigen unik λ dari matriks sirkulan A yang *irreducible* merupakan elemen maksimum baris pertama matriks A, sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ merupakan kolom-kolom dari matriks A_λ^*, dimana $A_\lambda = -\lambda \otimes A$.

4.2 Saran

Dari pembahasan pada bab 3 diketahui bahwa perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks khusus yang dinamakan matriks sirkulan yang *irreducible* pada aljabar *max-plus* relatif lebih mudah dilakukan dibandingkan perhitungan nilai eigen matriks yang *irreducible*. Oleh karena itu penulis menyarankan untuk melakukan penelitian untuk matriks khusus yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. (2005). *Elementary Linear Algebra*. New York: Wiley &Sons.

Arifin, A. (2001). *Aljabar Linier*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., and Quadrat, J. P. (2001). *Syncronization and Linearity: an algebra for discrete event system*. New York: Wiley- Interscience.

Farlow, K.G. (2009). *Max Plus Algebra*. Master's thesis Virginia Polytechnic Institute and State University. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University

Hungerford, T. W. (2000). *Algebra Graduate Text in Mathematics*. Washington: Springer.

Jacob, B. (1990). *Linear algebra*. New York: Wh. Freeman and Company.

Kolman, B., Hill, D. R. (2001). *Introductory Linear Algebra with Application*. New Jersey: Prentice Hall.

Tomaskova, H. (2010). Eigenproblem for circulant matrices in max- plus algebra. *Proceeding of the 12th WSEAS International Conference on Mathematical Method, Computational Techniques and Intelligent System*.

West, D.B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. New Jersey: Prentice Hall.