



UNIVERSITAS INDONESIA

**KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN TUBERKULOSIS
DENGAN *EXOGENOUS REINFECTION***

TESIS

**SETIAWAN
1006734615**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012**



UNIVERSITAS INDONESIA

**KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN TUBERKULOSIS
DENGAN *EXOGENOUS REINFECTION***

TESIS

Diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan
memperoleh gelar magister sains

**SETIAWAN
1006734615**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK**

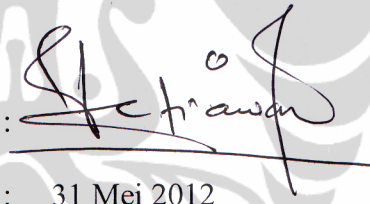
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Setiawan

NPM : 1006734615

Tanda Tangan :



Tanggal : 31 Mei 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :
Nama : Setiawan
NPM : 1006734615
Program Studi : Magister Matematika
Judul Tesis : Kontrol Optimal Penyebaran Tuberkulosis
dengan *Exogenous Reinfection*

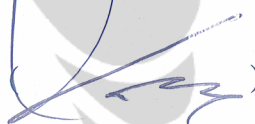
Telah berhasil dipertahankan di hadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI


Pembimbing : Dr. Hengki Tasman, M.Si.

()

Penguji I : Prof. Dr. Djati Kerami

()

Penguji II : Dr.rer.nat. Hendri Murfi, M.kom.

()

Penguji III : Dr.Sri Mardiyati, M.Kom.

()

ditetapkan di : Depok

Tanggal : 18 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Segala puji hanya bagi Allah SWT, Rabb Semesta Alam, yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dan menyelesaikan tugas belajar ini. Salawat dan salam tercurahkan untuk nabi akhir zaman, Rasulullah Muhammad SAW, pembawa syafaat bagi seluruh alam, sang teladan bagi umat manusia.

Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar Magister Sains pada Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis sadar bahwa dalam penulisan tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Hengki Tasman selaku dosen pembimbing tesis dan pembimbing akademik yang telah banyak memberikan ilmu dan motivasi dalam penyusunan tesis ini serta telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama mengikuti perkuliahan hingga selesai;
2. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami selaku Ketua Program Studi Magister Matematika Bapak Dr.rer.nat. Hendri Murfi ,telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama mengikuti perkuliahan hingga selesai;
3. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T, selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Ibu Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech, selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI;
4. Seluruh staf pengajar pada Program Magister Matematika FMIPA UI, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;
5. Staf tata usaha Departemen Matematika;
6. Seluruh Civitas Akademika SMKN 13 Jakarta yang telah memberikan semangat dan dukungn selama penulis menempuh studi S2 di Universitas Indonesia;
7. Istri tercinta yang telah memberikan dukungan penuh kepada penulis dalam menempuh studi S2 di Universitas Indonesia;

8. Anak-anakku tercinta *Tiara, Ivan dan Shofie* yang menjadi sumber spirit untuk menyelesaikan studi.
9. Kedua orang tua serta keluarga besar yang telah memberikan dukungan spritual dan moral tanpa henti;
10. Semua teman-teman magister matematika angkatan 2010 terima kasih atas *share*-nya, kebersamaan di ruang 312 tak pernah dilupakan;
11. Semua pihak yang telah berkontribusi dalam penulisan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu.

Karena penulis sangat meyakini bahwa setiap kebaikan akan dibalas dengan kebaikan pula maka semoga penulisan tesis ini menjadi amal baik buat penulis sebagai wujud kepedulian kepada kehidupan, semoga tesis ini memberikan manfaat untuk pengembangan ilmu pengetahuan pada masa yang akan datang.



Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Setiawan
NPM : 1006734615
Program Studi : Magister Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia hak bebas royalti *non-eksklusif (non-exclusive royalty free right)* atas karya ilmiah saya berjudul

Kontrol Optimal Penyebaran Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection*

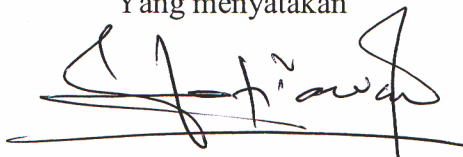
beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan hak bebas biaya royalti *non-eksklusif* ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalihmediakan/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai hak cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di: Depok

Pada tanggal: 18 Juni 2012

Yang menyatakan



(Setiawan)

ABSTRAK

Nama : Setiawan
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Kontrol Optimal Penyebaran Tuberkulosis dengan
Exogenous Reinfection

Penyakit TBC adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis (Mtb)*. Sejak tahun 1993, WHO (*World Health Organization*) menyatakan bahwa penyakit Tuberkulosis (TBC) merupakan kedaruratan global. Indonesia sekarang berada pada ranking kelima negara dengan beban TBC tertinggi di dunia. Model matematis kontrol epidemik TBC dengan *Exogenous Reinfection* sebagai permasalahan kontrol optimal yang diselesaikan dengan mentransformasikan ke dalam bentuk permasalahan pemrograman tak linear (*nonlinier programming*). Kontrol dalam penelitian ini adalah pengontrolan yang ditujukan untuk menekan terjadinya *Exogenous Reinfection*, bertujuan untuk meminimalkan jumlah individu TBC aktif (*infectious*) melalui penerapan kontrol optimal. Simulasi pada tesis ini ditinjau dari dua keadaan R_0 (*Basic Reproduction Ratio*), dengan $R_0 > 1$ untuk kasus terjadinya endemik dan $R_0 < 1$ untuk kasus tidak terjadinya endemik.

Kata kunci : Kontrol Optimal, Tuberkulosis, *Exogenous Reinfection*,
Model TBC

xiv+90 halaman ; 27 gambar; 6 tabel; 2 lampiran
Daftar Pustaka : 11 (1985-2011)

ABSTRACT

Name : Setiawan
Study Programe : Mathematics
Title : Optimal Control of the Spread of Tuberculosis with Exogenous Reinfection

Tuberculosis is an infectious disease caused by the bacterium *Mycobacterium tuberculosis (Mtb)*. In 1993, World Health Organization (WHO) declared Tuberculosis (TB) is a global emergency. Indonesia now is ranked fifth highest TB burden countries in the world. The mathematical epidemic model of TB control with Exogenous Reinfection as the optimal control problem is solved by transforming the problem into form nonlinear programming. Control of the research is aimed at controlling the pressure of Exogenous Reinfection, aiming to minimize the number of individuals with active TB through the application of optimal control. Simulation in this thesis are in terms of two states R_0 (Basic Reproduction Ratio), with $R_0 > 1$ for case occurrence of endemic and $R_0 < 1$ for case no occurrence of endemic

Keywords: Optimal control, Tuberculosis, Exogenous Reinfection, TB model

xiv+90 pages ; 27 pictures; 6 tables; 2 attachments
Bibliography : 11 (1985-2011)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penulisan	2
1.4 Metode Penelitian	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Aspek Klinis Penyakit Tuberkulosis (TBC)	4
2.2 Proses Pemodelan	5
2.2.1 Pemodelan Penyebaran TBC dengan <i>Exogenous Reinfection</i>	6
2.2.2 Model Epidemik <i>Exogenous Reinfection</i> TBC dengan Kontrol	12
2.2.3 Pemodelan <i>Performance Index</i>	13
2.2.4 <i>Basic Reproduction Ratio</i>	14
2.3 Masalah Kontrol Optimal	15
2.3.1 Kondisi Tranversalitas	16
2.3.2 Prinsip Maksimum Pontryagin	17
2.3.3 Rasionalisasi Prinsip Maximum (Minimum)	20
2.3.4 Kontrol Optimal dengan Kontrol Terbatas	27
2.4 Metode Beda Hingga	33
2.5 Metode Runge-Kutta Orde 4	35
BAB III PEMBAHASAN	37
3.1 Penyelesaian Kontrol Optimal	37
3.2 Simulasi Numerik	43
3.2.1 Proses Diskritisasi Sistem Persamaan	43
3.2.2 Hasil dan Analisis Simulasi Numerik	48

3.2.2.1 Simulasi Numerik untuk $c = 0,1(R_0 < 1)$	49
3.2.2.2 Simulasi Numerik untuk $c = 0,3(R_0 > 1)$	61

BAB IV PENUTUP	73
4.1 Kesimpulan.....	73
4.2 Saran.....	75
DAFTAR PUSTAKA	76



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penulisan	2
1.4 Metode Penelitian	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Aspek Klinis Penyakit Tuberkulosis (TBC)	4
2.2 Proses Pemodelan	5
2.2.1 Pemodelan Penyebaran TBC dengan <i>Exogenous Reinfection</i>	6
2.2.2 Model Epidemik <i>Exogenous Reinfection</i> TBC dengan Kontrol	12
2.2.3 Pemodelan <i>Performance Index</i>	13
2.2.4 <i>Basic Reproduction Ratio</i>	14
2.3 Masalah Kontrol Optimal	15
2.3.1 Kondisi Tranversalitas	16
2.3.2 Prinsip Maksimum Pontryagin	17
2.3.3 Rasionalisasi Prinsip Maximum (Minimum)	20
2.3.4 Kontrol Optimal dengan Kontrol Terbatas	27
2.4 Metode Beda Hingga	33
2.5 Metode Runge-Kutta Orde 4	35
BAB III PEMBAHASAN	37
3.1 Penyelesaian Kontrol Optimal	37
3.2 Simulasi Numerik	43
3.2.1 Proses Diskritisasi Sistem Persamaan	43
3.2.2 Hasil dan Analisis Simulasi Numerik	48

3.2.2.1 Simulasi Numerik untuk $c = 0,1(R_0 < 1)$	49
3.2.2.2 Simulasi Numerik untuk $c = 0,3(R_0 > 1)$	61

BAB IV PENUTUP	73
4.1 Kesimpulan.....	73
4.2 Saran.....	75
DAFTAR PUSTAKA	76



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Parameter-parameter epidemik	7
Tabel 3.1 Parameter Epidemik	49
Tabel 3.2 Perubahan jumlah individu tiap kelas pada keadaan awal, tanpa kontrol dan dengan kontrol	50
Tabel 3.3 Perbandingan jumlah individu tiap kelas pada sistem tanpa kontrol dan dengan kontrol.....	50
Tabel 3.4 Perubahan jumlah individu tiap kelas pada keadaan awal, tanpa kontrol dan dengan kontrol	61
Tabel 3.5 Perbandingan jumlah individu tiap kelas pada sistem tanpa kontrol dan dengan kontrol.....	62



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Diagram kompartemen model epedemik TBC	6
dengan <i>exogenous reinfection</i>	6
Gambar 2.2 Skema kontrol.....	15
Gambar 3.1 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)	51
Gambar 3.2 Simulasi kontrol penanganan TBC (u)	51
Gambar 3.3 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)	52
Gambar 3.4 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$) , individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)	53
Gambar 3.5 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)	54
Gambar 3.6 Simulasi kontrol penanganan TBC (u)	54
Gambar 3.7 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)	55
Gambar 3.8 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$) , individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)	56
Gambar 3.9 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)	57
Gambar 3.10 Simulasi kontrol penanganan TBC (u)	57
Gambar 3.11 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)	58
Gambar 3.12 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$) , individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)	59

Gambar 3.13 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)	62
Gambar 3.14 Simulasi kontrol penanganan TBC (u)	63
Gambar 3.15 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)	63
Gambar 3.16 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$) , individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)	64
Gambar 3.17 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)	65
Gambar 3.18 Simulasi kontrol penanganan TBC (u)	66
Gambar 3.19 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)	66
Gambar 3.20 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$) , individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)	67
Gambar 3.21 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)	68
Gambar 3.22 Simulasi kontrol penanganan TBC (u)	69
Gambar 3.23 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)	69
Gambar 3.24 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$) , individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)	70

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Program simulasi	78
Lampiran 2 Penurunan Rumus R_0	86



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejak tahun 1993, WHO menyatakan bahwa penyakit Tuberkulosis (TBC) merupakan kedaruratan global. Sejak tahun 2003 sampai dengan 2011, diperkirakan masih terdapat sekitar 9,5 juta kasus baru TBC, dan sekitar 0,5 juta orang meninggal akibat TBC di seluruh dunia [9]. Indonesia sekarang berada pada ranking kelima negara dengan beban TBC tertinggi di dunia. Estimasi prevalensi TBC untuk semua kasus adalah sebesar 660.000 dan estimasi insidensi berjumlah 430.000 kasus baru per tahun. Jumlah kematian akibat TBC diperkirakan 61.000 kematian per tahunnya [11]. Selain itu, pengendalian TBC mendapat tantangan baru seperti ko-infeksi TBC/HIV, TBC yang resistan obat dan tantangan lainnya dengan tingkat kompleksitas yang makin tinggi bagi kemanusiaan.

Penyakit TBC adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis (Mtb)*. TBC menular dan menyebar melalui udara oleh partikel kecil yang berisi kuman tuberkulosis yang disebut “droplet nukleus”. Jika tidak diobati, setiap orang dengan TBC aktif menginfeksi pada rata-rata 10 sampai 15 orang setiap tahun [9].

Penderita Tuberkulosis yang tidak mengalami gejala-gejala terinfeksi Tuberkulosis, tetapi sebenarnya bakteri *Mtb* sudah dalam tubuh penderita tersebut namun belum aktif disebut dengan penderita Tuberkulosis laten. Hal itu terjadi karena adanya imunitas (daya tahan tubuh) yang dapat menghentikan perkembangan bakteri tersebut. Penderita Tuberkulosis laten dapat berkembang menjadi Tuberkulosis aktif jika terjadi kontak langsung dengan individu yang menderita Tuberkulosis aktif. Hal ini terjadi karena bakteri pada penderita Tuberkulosis laten berkembang pesat dengan adanya kontak tersebut. Akibatnya jika individu terjangkit Tuberkulosis, maka hal tersebut tidak dapat hanya dilihat sebagai akibat utama dari faktor-faktor yang menyebabkan penyakit Tuberkulosis tetapi juga kemungkinan terjadinya *exogenous reinfection*.

Karena yang menjadi sumber penyebaran TBC adalah penderita TBC itu sendiri, pengendalian TBC dapat dilakukan dengan mengurangi banyaknya pasien

TBC tersebut. Ada dua cara yang tengah dilakukan untuk mengurangi banyaknya penderita TBC saat ini, yaitu terapi dan imunisasi. Pengendalian TBC dapat juga dilakukan dengan upaya pencegahan agar tidak tertular.

Salah satu pendekatan untuk menjelaskan solusi dari permasalahan yang terjadi dalam dunia nyata adalah menerjemahkan permasalahan ke dalam bahasa matematika. Dengan menerjemahkan permasalahan ke dalam bahasa matematika akan didapatkan model matematika, yaitu hasil perumusan yang menggambarkan permasalahan yang akan dicari solusinya. Model matematika dapat diterapkan untuk mengetahui penyebaran penyakit Tuberkulosis, diharapkan model matematika yang didapat bisa membantu untuk mencari solusi bagaimana mengatasi penyebaran penyakit Tuberkulosis yang kompleksitasnya cenderung meningkat.

Seringkali para ilmuwan menganalisis suatu sistem dari suatu fenomena (alam atau buatan) dengan tujuan agar sistem tersebut terkontrol atau bisa dioptimalkan kinerjanya dengan membuat model matematikanya.

Dalam tugas akhir ini, dibentuk suatu model pengontrolan optimal Penyebaran Tuberkulosis dengan *exogenous reinfection*. *Exogenous Reinfection* adalah terkena infeksi ulang dari luar tubuh penderita.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana strategi pengontrolan optimal penyebaran tuberkulosis dengan *exogenous reinfection* di suatu daerah tertutup dimana seseorang dalam populasi tersebut akan terinfeksi jika melakukan kontak langsung dengan individu yang terinfeksi ?

1.3 Tujuan Penulisan

Menemukan strategi pengontrolan optimal penyebaran tuberkulosis dengan *exogenous reinfection*.

1.4 Metode Penelitian

1.4.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi yang dipakai adalah buku, jurnal ilmiah, maupun artikel dari internet tentang penanganan Tuberkulosis dan kontrol optimal. Memperdalam pemahaman tentang model sistem sebagai ide untuk melakukan pembahasan masalah, dan juga pemahaman masalah kontrol optimal yang nantinya digunakan untuk mencari bentuk kontrol optimal dari model yang akan dibahas. Selain itu memahami teori-teori yang mendukung pembahasan Prinsip Maksimum (Minimum) Pontryagin dan metoda numerik terutama yang membahas tentang diferensiasi numerik.

1.4.2 Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada tahap ini dicari penyelesaian masalah kontrol optimal dengan menggunakan metoda Prinsip Maksimum (Minimum) Pontryagin yaitu dengan membentuk persamaan Hamiltoniannya dan menentukan *co-state* sehingga selanjutnya dapat diperoleh fungsi pengontrolnya.

1.4.3 Simulasi Numerik

Pada tahap ini dilakukan pendeskritan dengan menggunakan metoda Runge Kutta Orde 4 dan disimulasikan dengan menggunakan MATLAB. Pada persamaan *state* diselesaikan dengan menggunakan skema maju yaitu menggunakan hampiran beda maju (*forward difference approximation*) sedangkan persamaan *co-state* diselesaikan dengan menggunakan skema mundur yaitu menggunakan hampiran beda mundur (*backward difference approximation*).

1.4.4 Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan mengenai kontrol optimal dan penanganannya pada model tuberkulosis dengan melihat dari hasil pembahasan analitik dan simulasi numeriknya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Aspek Klinis Penyakit Tuberkulosis (TBC)

Penyakit TBC adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* yang sebagian besar menyerang organ paru-paru manusia. Selain menyerang paru-paru, bakteri *Mycobacterium tuberculosis* juga dapat menyerang otot, sendi, tulang, sumsum, sistem pusat syaraf, sistem limpa, dan saluran *urine*, serta menyerang banyak sistem organ.

Jika seseorang terinfeksi TBC, maka bakteri penyebab TBC tinggal di dalam tubuhnya dalam kondisi tidak aktif. Tetapi, bakteri tersebut dapat berkembang menjadi bakteri yang berada dalam kondisi aktif.

Walaupun bakteri penyebab TBC, yang tinggal di dalam tubuh penderita TBC, dapat berkembang menjadi bakteri yang berada dalam kondisi aktif, namun sistem kekebalan tubuh manusia pada umumnya dapat mencegah terjadinya hal tersebut dan membuat bakteri tetap berada dalam kondisi tidak aktif. Tetapi, jika sistem kekebalan tubuh melemah, maka bakteri penyebab TBC akan mudah berkembang menjadi bakteri yang berada dalam kondisi aktif. Oleh karena itu, individu yang terinfeksi TBC dapat dibedakan menjadi terinfeksi TBC tanpa menimbulkan gejala dan tidak dapat menularkannya ke individu lain disebut individu TBC laten (*exposed*), dan terinfeksi TBC dengan menimbulkan gejala dan dapat menularkannya ke individu lain, disebut dengan individu TBC aktif (*infectious*).

Indikasi dan gejala TBC aktif biasanya berkembang dalam 2 – 8 minggu setelah terinfeksi TBC. Indikasi dan gejala TBC aktif antara lain : batuk berkepanjangan (lebih dari 3 minggu) yang terkadang disertai dengan batuk darah, rasa sakit saat mengambil nafas atau saat batuk, kehilangan berat badan secara drastis, badan terasa amat lelah, demam ringan, keringat deras di malam hari, kedinginan, dan kehilangan selera makan.

Individu TBC laten dapat berubah menjadi individu TBC aktif, dimana perubahannya disebabkan oleh salah satu dari dua faktor berikut:

1. Karena lemahnya sistem kekebalan tubuh individu TBC laten sehingga bakteri di dalam tubuhnya berkembang menjadi bakteri yang aktif (*endogenous reactivation*).
2. Individu *exposed* memperoleh infeksi baru karena kembali melakukan kontak langsung dengan individu TBC aktif (*exogenous reinfection*).

Berdasarkan karakteristik penyebaran penyakit TBC yang tingkat penyebarannya sangat ditentukan oleh penderita TBC aktif, usaha untuk menekan perubahan individu TBC laten menjadi individu TBC aktif menjadi suatu keharusan di samping pengobatan efektif terhadap individu TBC aktif.

Penderita TBC yang telah menerima pengobatan efektif dan dinyatakan sembuh secara klinis, namun demikian bakteri TBC masih ada di dalam tubuh dengan jumlah kecil serta lemah. Oleh sebab itu daya tahan tubuh (*imunitas*) masih dapat menekan bakteri tersebut berkembang. Dalam kondisi tertentu apabila penderita yang telah sembuh dapat terinfeksi kembali setelah melakukan kontak yang individu aktif TBC. Oleh sebab itu pengendalian yang efektif bagi populasi penderita TBC aktif menjadi sangat penting, sehingga bila suatu daerah dengan tingkat keterinfeksi kembali tinggi hal ini akan mengakibatkan semakin beratnya penanganan penyebaran penyakit TBC pada daerah tersebut.

Dengan permasalahan di atas penanganan medis akan semakin berat apabila tingkat keterinfeksi kembali tidak dikendalikan. Proses pengendalian menjadi suatu keharusan untuk mengurangi biaya medis yang dilakukan bila tidak semakin banyak biaya yang dikeluarkan untuk melakukan usaha medis tersebut.

Perubahan banyaknya penduduk pada daerah tersebut dipengaruhi oleh penyebaran epidemi TBC dengan *exogenous reinfection*. Penyebaran epidemi TBC dengan *exogenous reinfection* secara matematis dapat digambarkan sebagai suatu sistem persamaan diferensial nonlinear.

2.2 Proses Pemodelan

Di dalam epidemiologi dikenal istilah individu *susceptible*, individu *exposed*, individu *infectious*, dan individu *recovered*. Individu *susceptible* adalah

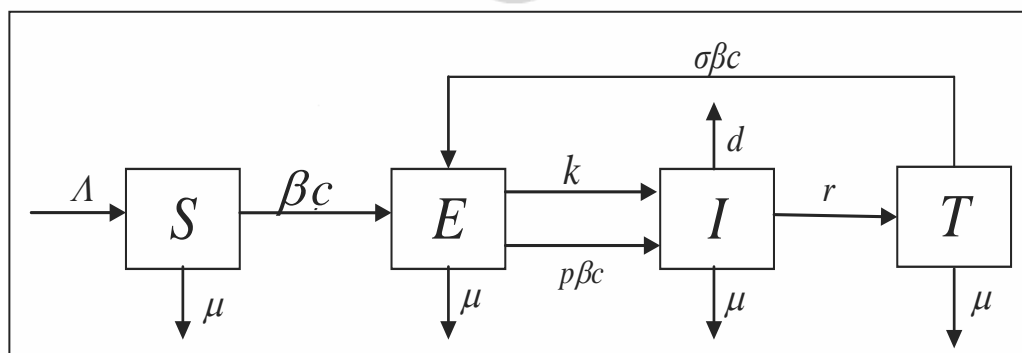
individu yang sehat dan dapat terinfeksi penyakit. Individu *exposed* adalah individu yang terinfeksi penyakit tetapi belum dapat menularkannya ke individu yang lain. Individu *infectious* adalah individu yang terinfeksi penyakit dan dapat menularkannya ke individu yang lain. Individu *recovered* adalah individu yang telah sembuh dari penyakit.[6]

Model epidemi penyakit yang membagi populasi menjadi empat kelas individu, yaitu individu *susceptible*, individu *exposed*, individu *infectious*, dan individu *recovery* disebut dengan model SEIR. Salah satu contoh penyebaran penyakit yang dapat dimodelkan dengan model SEIR adalah penyebaran TBC. [1]

2.2.1 Pemodelan Penyebaran TBC dengan *Exogenous Reinfection*

Dalam proses pemodelan penyebaran TBC dengan *exogenous reinfection* pada suatu daerah, banyaknya individu terbagi menjadi empat kelas individu, yaitu: [2]

1. Individu yang belum terinfeksi TBC dan dapat terinfeksi TBC disebut individu rentan (*susceptible*).
2. Individu yang terinfeksi TBC tetapi belum dapat menularkannya ke individu lain disebut individu TBC laten.
3. Individu yang terinfeksi TBC dan dapat menularkannya ke individu lain disebut individu TBC aktif.
4. Individu yang telah sembuh dari TBC dan dapat terinfeksi kembali oleh TBC disebut individu sembuh TBC (*Treated*).



Gambar 2.1. Diagram kompartemen model penyebaran TBC dengan *exogenous reinfection*

Adapun parameter-parameter yang digunakan dalam proses pemodelan penyebaran penyebaran TBC dengan *exogenous reinfection* dapat dilihat pada Tabel 2.1,

Tabel 2.1 Parameter-parameter Epidemik yang digunakan [2][7]

Parameter	Deskripsi
λ	Banyaknya individu rentan yang dilahirkan per satuan waktu
β	Laju Transmisi penginfeksi TBC dari individu rentan ke individu TBC laten dan individu TBC aktif
p	Proporsi menjadi individu TBC aktif, (faktor <i>exogenous reinfection</i>) $0 \leq p \leq 1$
$p\beta$	Proporsi rata-rata banyaknya individu TBC laten memperoleh infeksi baru dari satu individu TBC aktif per satuan waktu,
μ	Laju kematian alami
d	Laju kematian individu TBC aktif
k	Laju perubahan individu TBC laten menjadi individu TBC aktif per satuan waktu
r	Laju kesembuhan individu TBC aktif per satuan waktu
c	Laju kontak per kapita
σ	Proporsi individu TBC aktif yang gagal dalam pengobatannya dan berubah menjadi individu TBC laten $0 \leq \sigma \leq 1$
$\sigma\beta$	proporsi rata-rata banyaknya individu sembuh TBC terinfeksi TBC oleh satu individu TBC aktif per satuan waktu

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam proses pemodelan penyebaran TBC dengan *exogenous reinfection* adalah sebagai berikut :

1. Populasi penduduk bersifat tertutup dalam pengertian bahwa terjadinya penambahan atau pengurangan jumlah penduduk melalui emigrasi dan imigrasi diabaikan.

2. Populasi penduduk bersifat homogen.
3. Setiap individu TBC aktif memiliki probabilitas yang sama untuk menularkan TBC ke setiap individu rentan dan individu sembuh.
4. Individu rentan dan individu sembuh dapat terinfeksi TBC jika melakukan kontak langsung dengan individu TBC aktif
5. Individu TBC aktif yang telah diobati namun tidak menyelesaikan pengobatannya dapat berubah menjadi individu TBC laten .
6. Individu yang telah sembuh dari TBC tidak kembali menjadi individu TBC laten.

Selanjutnya akan dijelaskan proses pembentukan model epidemik TBC dengan *exogenous reinfection* untuk tiap-tiap kelas.

A. Perubahan banyaknya individu rentan terhadap waktu (t)

Misalkan $S(t)$ menyatakan banyaknya individu rentan pada saat t maka pada selang waktu Δt akan terjadi perubahan banyak individu rentan yang dipengaruhi oleh:

1. Jika banyaknya individu yang dilahirkan pada waktu t sebesar Λ maka $S(t)$ akan bertambah sebesar $\Lambda \Delta t$.
2. Jika proporsi banyaknya individu TBC aktif yang melakukan kontak langsung dengan individu rentan pada waktu t sebesar $\frac{I}{N}$ dan laju penginfeksian sebesar β , dan laju kontak perkapita sebesar c maka $S(t)$ akan berkurang sebesar $(\beta \cdot c \cdot S \frac{I}{N}) \Delta t$.
3. Jika laju kematian alami dari individu rentan per satuan waktu sebesar μ , maka $S(t)$ akan berkurang sebesar $(\mu S) \Delta t$.

Sehingga model matematis dari perubahan banyaknya individu rentan terhadap waktu (t) adalah sebagai berikut:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = \left(\Lambda - \beta c S \frac{I}{N} - \mu S \right) \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \Lambda - \beta c S \frac{I}{N} - \mu S$$

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta cS \frac{I}{N} - \mu S \quad (2.1)$$

B. Perubahan banyaknya individu TBC laten terhadap waktu (t)

Misalkan $E(t)$ menyatakan banyaknya individu TBC laten pada saat t maka pada selang waktu Δt akan terjadi perubahan banyak individu TBC laten yang dipengaruhi oleh:

1. Jika proporsi banyaknya individu TBC aktif yang melakukan kontak langsung dengan individu rentan pada waktu t sebesar $\frac{I}{N}$ dan laju penginfeksiannya sebesar β , maka $E(t)$ akan bertambah sebesar $\left(\beta \cdot cS \frac{I}{N} \right) \Delta t$.
2. Jika proporsi banyaknya individu TBC aktif yang melakukan kontak langsung dengan individu sembuh TBC pada waktu t sebesar $\frac{I}{N}$, dan laju penginfeksiannya sebesar $\sigma\beta c$, maka $E(t)$ akan bertambah sebesar $\left(\sigma\beta cT \frac{I}{N} \right) \Delta t$.
3. Jika proporsi banyaknya individu TBC aktif yang melakukan kontak langsung dengan individu sembuh TBC pada waktu t sebesar $\frac{I}{N}$, tingkat *exogenous reinfection* sebesar p maka laju penginfeksiannya sebesar $p\beta c$, maka $E(t)$ akan berkurang sebesar $\left(p\beta cE \frac{I}{N} \right) \Delta t$.
4. Jika laju kematian alami dari individu TBC laten per satuan waktu sebesar μ , maka $E(t)$ akan berkurang sebesar $(\mu E) \Delta t$.
5. Jika laju perubahan dari individu TBC laten menjadi individu TBC aktif persatuan waktu sebesar k maka $E(t)$ akan berkurang sebesar $(kE) \Delta t$.

Sehingga model matematis dari perubahan banyaknya individu *exposed* terhadap waktu (t) adalah sebagai berikut:

$$\Delta E = E(t + \Delta t) - E(t) = \left(\beta c S \frac{I}{N} - p\beta c E \frac{I}{N} - (\mu + k)E + \sigma\beta c T \frac{I}{N} \right) \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \beta c S \frac{I}{N} - p\beta c E \frac{I}{N} - (\mu + k)E + \sigma\beta c T \frac{I}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta c S \frac{I}{N} - p\beta c E \frac{I}{N} - (\mu + k)E + \sigma\beta c T \frac{I}{N} \quad (2.2)$$

C. Perubahan banyaknya individu TBC aktif terhadap waktu (t)

Misalkan $I(t)$ menyatakan banyaknya individu TBC aktif pada saat t maka pada selang waktu Δt akan terjadi perubahan banyak individu TBC aktif yang dipengaruhi oleh:

1. Jika proporsi banyaknya individu TBC aktif yang melakukan kontak langsung dengan individu TBC laten pada waktu t sebesar $\frac{I}{N}$, tingkat exogenous reinfection sebesar p maka laju penginfeksiannya sebesar $p\beta c$, maka $I(t)$ akan bertambah sebesar $\left(p\beta c E \frac{I}{N} \right) \Delta t$.
2. Jika laju kematian alami dari individu TBC aktif per satuan waktu sebesar μ , maka $I(t)$ akan berkurang sebesar $(\mu I) \Delta t$.
3. Jika laju kematian individu TBC aktif per satuan waktu sebesar d , maka $I(t)$ akan berkurang sebesar $(dI) \Delta t$.
4. Jika laju pengobatan dari individu TBC aktif menjadi individu sembuh TBC persatuan waktu sebesar r maka $I(t)$ akan berkurang sebesar $(rI) \Delta t$.
5. Jika laju perubahan dari individu TBC laten menjadi individu TBC aktif persatuan waktu sebesar k maka $E(t)$ akan bertambah sebesar $(kE) \Delta t$.

Sehingga model matematis dari perubahan banyaknya individu TBC aktif terhadap waktu (t) adalah sebagai berikut:

$$\Delta I = I(t + \Delta t) - I(t) = \left(p\beta c E \frac{I}{N} + kE - (\mu + r + d)I \right) \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} = p\beta c E \frac{I}{N} + kE - (\mu + r + d)I$$

$$\frac{dI}{dt} = p\beta c E \frac{I}{N} + kE - (\mu + r + d)I \quad (2.3)$$

D. Perubahan banyaknya individu sembuh TBC terhadap

waktu (t)

Misalkan $T(t)$ menyatakan banyaknya individu yang sembuh dari TBC pada saat t maka pada selang waktu Δt akan terjadi perubahan banyak individu sembuh TBC yang dipengaruhi oleh :

1. Jika proporsi banyaknya individu TBC aktif yang melakukan kontak langsung dengan individu sembuh TBC pada waktu t sebesar $\frac{I}{N}$, dan laju penginfeksiannya sebesar $\sigma\beta c$, maka $T(t)$ akan berkurang sebesar $\left(\sigma\beta c T \frac{I}{N}\right)\Delta t$.
2. Jika laju kematian alami dari individu sembuh TBC per satuan waktu sebesar μ , maka $T(t)$ akan berkurang sebesar $(\mu T)\Delta t$.
3. Jika laju pengobatan dari individu TBC aktif menjadi individu sembuh TBC persatuan waktu sebesar r maka $T(t)$ akan bertambah sebesar $(rI)\Delta t$.

Sehingga model matematis dari perubahan banyaknya individu sembuh TBC terhadap waktu (t) adalah sebagai berikut:

$$\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t) = \left(rI - \sigma\beta c T \frac{I}{N} - \mu T\right)\Delta t.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = rI - \sigma\beta c T \frac{I}{N} - \mu T.$$

$$\frac{dT}{dt} = rI - \sigma\beta c T \frac{I}{N} - \mu T. \quad (2.4)$$

Dari persamaan 2.1 sampai dengan 2.4 maka pola penyebaran epidemi TBC dapat dibuat model matematika sebagai berikut : [2]

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta c S \frac{I}{N} - \mu S,$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta c S \frac{I}{N} - p\beta c E \frac{I}{N} - (\mu + k)E + \sigma\beta c T \frac{I}{N},$$

$$\frac{dI}{dt} = p\beta c E \frac{I}{N} + kE - (\mu + r + d)I,$$

$$\frac{dT}{dt} = rI - \sigma\beta cT \frac{I}{N} - \mu T,$$

dengan $N = S + E + I + T$. (2.5)

2.2.2 Model Epidemik *Exogenous Reinfection* TBC dengan Kontrol

Pengendalian Penyebaran TBC dapat dilakukan dengan menekan jumlah individu TBC aktif dan individu TBC laten. Upaya untuk menilai efektivitas relatif dari tindakan intervensi (mengontrol) yang bertujuan untuk mengurangi jumlah individu TBC laten dan individu TBC aktif menular dengan biaya minimal pada horizon waktu yang terbatas. Selanjutnya tindakan intervensi efektif dan efisien disebut kontrol optimal.

Beberapa upaya tindakan untuk mengontrol :

1. Upaya yang dibutuhkan untuk mengurangi atau mencegah reinfeksi individu yang sembuh diobati.
2. Upaya untuk mengurangi kontak dengan individu menular melalui kebijakan isolasi, atau jarak sosial, atau melalui administrasi (jika tersedia) dari vaksin atau obat yang mengurangi kerentanan terhadap infeksi.
3. Mengontrol pengobatan TBC, upaya diarahkan pada mengobati individu yang terinfeksi.

Upaya optimal untuk mengontrol individu terpapar dan menularkan kuman TBC seminimal mungkin sambil menjaga biaya kontrol serendah mungkin. Selanjutnya upaya kontrol optimal tersebut akan dirumuskan model epidemik TBC dengan *Exogenous Reinfection*. [7]

Model dengan Kontrol

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \beta cS \frac{I}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta cS \frac{I}{N} - p\beta c(1-u)E \frac{I}{N} - (\mu + k)E + \sigma\beta cT \frac{I}{N} \quad (2.6)$$

$$\frac{dI}{dt} = p\beta c(1-u)E \frac{I}{N} + kE - (\mu + d + r)I$$

$$\frac{dT}{dt} = rI + -\mu T - \sigma\beta cT \frac{I}{N}$$

Variabel $u(t)$ adalah variabel pengontrol . Koefisien $1-u(t)$ merupakan upaya untuk mencegah reinfeksi dalam rangka untuk mengurangi kontak antara individu TBC laten dengan individu TBC aktif. Jika $u = 1$ artinya adalah pencegahan *exogenous reinfection* mencapai 100% efektif, sedangkan $u = 0$ akan didapat model *exogenous reinfection* TBC tanpa kontrol.

2.2.3 Pemodelan *Performance Index* (Fungsi Objektif)

Selanjutnya akan dimodelkan suatu *performance index* (fungsi objektif) yang menyatakan banyaknya individu TBC aktif dan biaya dari usaha medis serta non medis yang dilakukan. Yang menjadi tujuan dari usaha medis serta non medis tersebut adalah meminimumkan banyaknya individu TBC aktif dan biaya yang dikeluarkan. Tujuan tersebut dapat diperoleh dengan mengurangi kontak antara individu TBC laten dengan individu yang menularkan dan mengefektifkan pengobatan yang diberikan bagi individu TBC aktif.

Berdasarkan fakta bahwa hubungan antara biaya yang dikeluarkan untuk usaha medis dan non medis ($u(t)$) dengan banyaknya individu TBC aktif memiliki hubungan tidak linier sehingga fungsi biaya dimodelkan nonlinear dan dipilih fungsi kuadrat $u^2(t)$.

Berdasarkan uraian di atas dapat dirumuskan fungsi biaya adalah $Au^2(t)$ dengan A merupakan variabel bobot dan penyeimbang dari keuntungan biaya.[7][5]

Dari pembahasan di atas diperoleh fungsi obyektifnya sebagai berikut :

$$J(u) = \int_0^{t_{end}} I(t) + Au^2(t) dt \quad (2.7)$$

Pemodelan matematis dari masalah pengoptimalan di atas adalah pengontrolan medis atau non medis yang bertujuan mengurangi sekecil mungkin jumlah individu TBC aktif dengan biaya pengendalian minimum.

2.2.4 Basic Reproduction Ratio

Formula *Basic Reproduction Ratio* dari model matematika (2.6) dapat dituliskan dalam bentuk [3]

$$R_0 = \frac{\beta c}{\mu + r + d} \cdot \frac{k}{\mu + k} \quad (2.8)$$

(penurunan formula dapat dilihat pada lampiran 2)

dengan $\frac{\beta c}{\mu + r + d}$ menyatakan proporsi rata-rata banyaknya individu *susceptible*

yang terinfeksi TBC oleh satu individu TBC aktif selama periode penginfeksi

dari individu TBC aktif tersebut dan $\frac{k}{\mu + k}$ menyatakan bagian dari populasi

yang telah melewati periode laten, yaitu interval waktu antara saat terinfeksi dan

saat mulai dapat menularkan penyakit. Sehingga R_0 pada persamaan (2.8)

menyatakan nilai dari banyaknya kasus infeksi kedua, yang dihasilkan oleh satu individu TBC aktif dari kasus infeksi pertama selama periode penginfeksi dari individu TBC aktif tersebut dalam populasi individu rentan.

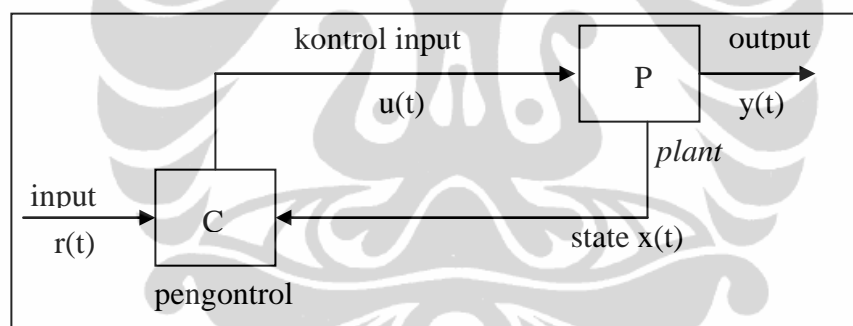
Berdasarkan rumus R_0 pada persamaan (2.8), terlihat bahwa faktor-faktor yang sangat berpengaruh terhadap penyebaran penyakit TBC adalah proporsi rata-rata banyaknya individu rentan terinfeksi TBC oleh satu individu TBC aktif per satuan waktu (β), tingkat terjadinya kontak dengan individu TBC aktif (c), tingkat kematian secara alami per satuan waktu (μ), tingkat kesembuhan per satuan waktu (r), dan tingkat kematian yang disebabkan oleh TBC per satuan waktu (d). Semakin besar proporsi rata-rata banyaknya individu rentan terinfeksi TBC oleh satu individu TBC aktif per satuan waktu atau semakin besar tingkat terjadinya kontak dengan individu TBC aktif, maka semakin besar kemungkinan terjadinya epidemi TBC, begitu pula sebaliknya; dan semakin besar tingkat kematian secara alami per satuan waktu atau semakin besar tingkat kesembuhan per satuan waktu atau semakin besar tingkat kematian yang disebabkan oleh TBC per satuan waktu, maka semakin kecil kemungkinan terjadinya epidemi TBC, begitu pula sebaliknya.

Nilai *Basic Reproduction Ratio* dibagi menjadi dua kategori yaitu $R_0 > 1$ artinya tingkat terjadinya infeksi kedua tinggi untuk kasus ini terjadinya endemik dan $R_0 < 1$ artinya tingkat terjadinya infeksi kedua rendah untuk kasus ini tidak terjadinya endemik. Endemik adalah suatu keadaan dimana penyakit telah menetap dalam masyarakat pada suatu tempat / populasi tertentu.

2.3 Masalah Kontrol Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari kontrol optimal adalah menentukan signal kontrol yang akan diproses oleh *plant* dan memenuhi konstrain fisik. *Plant* diterjemahkan sebagai suatu tempat atau keadaan dimana suatu proses dinamik terjadi, selanjutnya *plant* dideskripsikan sebagai sistem persamaan diferensial orde satu. Kemudian, pada saat yang sama dapat ditentukan ekstrim (maksimum/minimum) yang sesuai dengan kriteria *performance index* [5]

Perhatikan gambar skema kontrol [5] :



Gambar 2.2 Skema kontrol

Pada Gambar 2.2 masalah kontrol optimal adalah mendapatkan kontrol optimal (u^*) , tanda * menyatakan kondisi optimal yang akan mendorong dan mengatur *plant* P dari keadaan awal sampai keadan akhir dengan beberapa konstrain pada kontrol dengan keadaan dan waktu yang sama dapat ditentukan keadaan ekstrim berdasarkan *performance index* yang diberikan.

Secara umum dapat diformulasi dari permasalahan kontrol optimal yang diberikan adalah[5] :

1. Mendeskripsikan secara matematik artinya diperoleh model matematika dari proses terjadinya pengendalian (secara umum dalam bentuk variable keadaan).

2. Spesifikasi dari *performance index*.
3. Menentukan kondisi batas dan konstrain fisik pada keadaan (*state*) dan atau kontrol.

2.3.1 Kondisi Transversalitas

Kasus Khusus

Pandang masalah berikut untuk masing - masing kasus:

$$\begin{aligned} \text{Maks}_{\{u(t)\}} \quad J &= \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt & (2.14) \\ \text{dengan} \quad \dot{x}(t) &= g_i(t, x(t), u(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ x_i(0) &= x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Ambil fungsi $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)]$ dengan $\lambda(t)$ adalah fungsi kontinu.

Dalam masalah ini diperlukan kondisi transversalitas (*transversality condition*) yaitu suatu syarat yang berfungsi memberikan syarat tambahan mengingat bahwa $x(T)$ tidak ditentukan.

Kasus khusus (2.14) memiliki beberapa kemungkinan kondisi transversalitas sebagai berikut [8] :

1. T tetap (*fixed*) dan $x(T) = x_T$ bebas (*free*).
2. T bebas dan $x(T) = x_T$ tetap.
3. T dan $x(T) = x_T$ bebas.
4. T dan $x(T) = x_T$ tetap.

Dalam tugas akhir ini kondisi yang memenuhi adalah kondisi pertama yaitu **T tetap dan $x(T) = x_T$ bebas**. Kondisi ini dapat diselesaikan dengan

Prinsip Maksimum (Minimum) Pontryagin

2.3.2 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip maksimum (*Maximum principle*) merupakan suatu kondisi sedemikian sehingga dapat diperoleh penyelesaian kontrol optimal yang sesuai dengan tujuan (memaksimalkan *performace index*). Hal ini, telah dikembangkan pada tahun 1950 oleh L.S. Pontryagin dan rekan kerjanya, yang diaplikasikan pada masalah kalkulus variasi. [8]

Berikut ini, dibahas contoh kasus yang menjadi ide dasar untuk membantu mendapatkan penyelesaian kontrol optimal pada suatu model.

Pandang suatu sistem dari n persamaan diferensial order 1

$$\dot{x}_i(t) = g_i(t, x(t), u(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

dengan $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ dan $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]$, terdefinisi pada interval waktu tetap $[t_0, t_1]$. Dan dengan syarat awal

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

Di sini g_i, x_i, u_k adalah fungsi bernilai real, dengan $k = 1, 2, \dots, m$.

Pandang juga fungsi target $J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt$. Misalkan U adalah kelas semua fungsi $u(t)$.

Masalah kontrol optimal adalah masalah pemilihan suatu fungsi $u(t)$ dari suatu himpunan fungsi U untuk memaksimumkan (meminimumkan) suatu fungsi target J dengan kendala (2.10) dan (2.11), secara matematis dapat dinyatakan sebagai:

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \text{ dengan } t \in [t_0, t_1] \quad (2.12)$$

$$\dot{x}_i(t) = g_i(t, x(t), u(t))$$

Kondisi awal (*initial conditions*)

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (x_i^0 \text{ tetap})$$

Kondisi akhir (*terminal condition*)

$$x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$x_i(t_1) \geq x_i^l, \quad i = p+1, \dots, q \quad (x_i^l, \quad i = 1, \dots, q)$$

$$x_i(t_1) \text{ bebas, } \quad i = q+1, \dots, n$$

$u(t) \in U$ dan U adalah himpunan yang ditetapkan di dalam R^m

Selanjutnya diasumsikan $f, g_i, \frac{\partial f}{\partial x_j}$, dan $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ adalah fungsi kontinu untuk

semua $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, n$

Dan variabel $u_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$ disebut **variabel kontrol**, variabel $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ disebut **variabel state**. Range dari $u_k(t)$ di U disebut **daerah kontrol**. Untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal digunakan **Prinsip Maksimum Pontryagin** yang dinyatakan dalam teorema berikut

Teorema 2.1: Prinsip Maksimum Pontryagin

Dengan spesifikasi masalah (2.12), agar $u^*(t)$ adalah solusi optimal, dengan $x^*(t)$ yang bersesuaian maka terdapat konstanta λ_0 dan fungsi bernilai kontinu dan tidak nol, $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)]$ untuk setiap $t_0 \leq t \leq t_1$ sedemikian sehingga

(i). $\lambda(t)$ bersama $x^*(t)$ dan $u^*(t)$ dapat menyelesaikan sistem Hamiltonian berikut:

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_i}, \quad \dot{x}_i = \frac{-\partial H^*}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dimana H didefinisikan:

$$H[x(t), u(t), t, \lambda(t)] = \lambda_0 f(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i[x(t), u(t), t]$$

$$\text{dan } H^* = H[x^*(t), u^*(t), t, \lambda(t)]$$

(2.13)

selanjutnya $\lambda_0 = 1$ atau $\lambda_0 = 0$

(ii). $H[x^*(t), u^*(t), t, \lambda(t)] \geq H[x^*(t), u(t), t, \lambda(t)] \quad \forall u(t) \in U$

yaitu H dimaksimumkan terhadap $u(t)$.

(iii). Nilai $\lambda_i(t)$ mengikuti kondisi transversalitas

memenuhi :

$$\lambda_i(t_1) = \text{kondisi tidak dapat ditentukan, } i = 1, 2, \dots, p$$

$$\lambda_i(t_1) \geq 0, \quad x_i(t_1) = 0 \text{ jika } x_i(t_1) > x_i^I, \quad i = p+1, \dots, q$$

$$x_i(t_1) \text{ bebas, } i = q+1, \dots, n$$

Catatan:

Jika $u^*(t)$ berada di daerah kontrol U dan jika setiap g_i merupakan fungsi kontinu terdiferensial pada u maka kondisi (ii) dari teorema 2.1

mengakibatkan $\frac{\partial H^*}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r$

Contoh 2.1 : Selesaikan masalah kontrol optimal berikut

$$\text{Maks}_{\{u(t)\}} \int_0^1 (x+u) dt,$$

dengan $\dot{x}(t) = 1 - u^2, \quad x(0) = 1.$

Penyelesaian:

Dari keterangan masalah **Contoh 2.1** waktu akhir ditentukan dan keadaan akhir tidak ditentukan. Dengan teori yang dibahas di depan, didapat:

Hamiltoniannya dari masalah di atas adalah:

$$H = f + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i = x + u + \lambda(1 - u^2).$$

Dan sistem Hamiltoniannya adalah

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 1 - u^2 \tag{2.15}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -1 \tag{2.16}$$

dengan mengintegrasikan persamaan (2.16) dan sifat

$\lambda(1) = 0$ diperoleh $\lambda = -t + k$ dan $k = 1$ sehingga didapat $\lambda = 1 - t$.

Dari sifat optimal maka $\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - 2u\lambda = 0$ atau

$$u = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2(1-t)} \quad (2.17)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.17) ke persamaan (2.15) akan diperoleh $\dot{x} = 1 - \frac{1}{4(1-t)^2}$. Dengan mengintegrasikan persamaan ini terhadap t dan dengan

syarat batas $x(0) = 1$ akan diperoleh $x = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4}$.

Maka solusi optimal yang dihasilkan adalah :

$$x^*(t) = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4}$$

$$u^*(t) = \frac{1}{2(1-t)} \quad \lambda^*(t) = 1-t$$

2.3.3 Rasionalisasi Prinsip Maximum (Minimum)

Pada sub bab ini akan dilakukan pendefinisian kontrol optimal yang cukup sederhana.

Misalkan $x(t)$ adalah variabel state, $u(t)$ adalah variabel kontrol, t adalah waktu dengan $t_0 \leq t \leq T$ (t_0 boleh 0 dan T boleh ∞), $x(t_0) = x^0$, $x(T) = x^T$ dan diasumsikan $u(t)$ adalah fungsi kontinu (*piecewise continuous*) dan terdeferensial di t .

Tujuan dari masalah kontrol optimal adalah untuk menentukan variabel kontrol u^* yang bergerak dari x^0 ke x^T sedemikian hingga [10]

$$J = \int_0^T f(x, u, t) dt \quad \text{maksimum}$$

dimana $f(x, u)$ merupakan fungsi kontinu dan terdeferensial di t dan dipengaruhi oleh kendala $\dot{x} = g(x, u, t)$ dengan $g(x, u, t)$ adalah fungsi kontinu dan terdeferensial di t .

Jadi masalah kontrol optimal secara matematis dapat ditulis sebagai optimisasi berkendala sebagai berikut:

$$\text{Maks}_{\{u(t)\}} J = \int_0^T f(x, u, t) dt$$

$$\text{dengan } \dot{x} = g(x, u, t) \quad (2.18)$$

$$x(0) = x^0, x(T) = x^T$$

Jika u^* diperoleh maka x^* yang bersesuaian dapat diperoleh juga. Sekarang akan dibahas syarat perlu dan syarat cukup dari solusi optimal dari permasalahan (2.18).

Syarat Perlu

Pada bagian ini, dibahas syarat perlu yang harus dipenuhi u^* dan x^* (solusi dari permasalahan (2.18)). Untuk mencari u^* dan x^* yang bersesuaian maka diperlukan pengertian mengenai fungsi Hamiltonian.

Misalkan $\lambda(t)$ melambangkan pengali Lagrange untuk kendala $\dot{x} = f(x, u)$ maka definisikan fungsi Lagrange sebagai berikut : [10] [5]

$$\begin{aligned} L &= J + \int_0^T \lambda \left(g(x, u, t) - \dot{x} \right) dt \quad (2.19) \\ &= \int_0^T f(x, u, t) dt + \int_0^T \lambda \left(g(x, u, t) - \dot{x} \right) dt \\ &= \int_0^T \left(f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) - \lambda \dot{x} \right) dt \end{aligned}$$

Kemudian definisikan fungsi Hamiltonian dari masalah di atas sebagai berikut:

$$H(x, u, t) = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) \quad (2.20)$$

sehingga didapat:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^T \left(H(x, u, t) - \lambda \dot{x} \right) dt \quad (2.21) \\ &= \int_0^T H(x, u, t) dt - \int_0^T \lambda \dot{x} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T H(x,u,t) dt - \left(\lambda x \Big|_0^T - \int_0^T x \dot{\lambda} dt \right) \\
&= \int_0^T H(x,u,t) dt - (\lambda(T)x(T) - \lambda(0)x(0)) + \int_0^T x \dot{\lambda} dt \\
&= \int_0^T H(x,u,t) dt + \int_0^T \dot{\lambda} x dt - (\lambda(T)x(T) - \lambda(0)x(0)) \\
&= \int_0^T \left(H(x,u,t) + \dot{\lambda} x \right) dt - (\lambda(T)x(T) - \lambda(0)x(0)) \quad , \tag{2.22}
\end{aligned}$$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial u} du = \left(\lim_{\Delta x(t) \rightarrow 0} \frac{L(x(t) + \Delta x(t), u(t)) - L(x(t), u(t))}{\Delta x(t)} \right) dx + \left(\lim_{\Delta u(t) \rightarrow 0} \frac{L(x(t), u(t) + \Delta u(t)) - L(x(t), u(t))}{\Delta u(t)} \right) du$$

Dengan asumsi $\lambda(0) = 0$ maka dari persamaan (2.22) didapat

$$dL = \int_0^T \left(\frac{\partial H}{\partial u} du + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) dx \right) dt - \lambda(T) dx^T .$$

Dengan menggunakan prinsip maksimum maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
dL &= \int_0^T \left(\frac{\partial H}{\partial u} du + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) dx \right) dt - \lambda(T) dx^T = 0 \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda(T) dx^T = 0 \Rightarrow \lambda(T) = 0 \\ \int_0^T \left(\frac{\partial H}{\partial u} du + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) dx \right) dt = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{array} \right. , 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Dan berdasarkan definisi Hamiltonian: $H(x,u,t) = f(x,u,t) + \lambda g(x,u,t)$ maka

$$\dot{x} = f(x,u,t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

Dari uraian di atas didapat syarat perlu untuk memaksimumkan /meminimumkan L adalah

- a. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0, 0 \leq t \leq T$
- b. $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, 0 \leq t \leq T$
- d. $\lambda(T) = 0$ ($x(T) = x^T$ jika x^T diketahui)

Syarat Cukup

Selanjutnya digunakan uji turunan kedua untuk memastikan kondisi maksimum dan kondisi minimum sebagai berikut : [10] [5]

- a. Kondisi maksimum

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0, \text{ artinya } u^* \text{ memaksimalkan permasalahan (2.18)}$$

- b. Kondisi minimum

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \geq 0, \text{ artinya } u^* \text{ meminimumkan permasalahan (2.18)}$$

Untuk menguji masalah kontrol optimal (2.18) memenuhi syarat cukup untuk maksimum/minimum dapat pula menggunakan teorema 2.2 mengenai syarat cukup asalkan $f(x,u)$ dan $g(x,u)$ permasalahan (2.18) adalah fungsi konveks/konkav dari x dan u .

Teorema 2.2 : Syarat Cukup

Misal $f(x,u)$ dan $g(x,u)$ adalah fungsi terdiferensialkan dan konveks dari x dan u dalam permasalahan berikut : [8]

$$\begin{aligned} \underset{\{u(t)\}}{\text{Min}} \quad J &= \int_0^T f(x,u,t) dt \\ \dot{x} &= g(x,u,t) \\ x(0) &= x^0, x(T) = x^T \end{aligned} \quad (2.24)$$

Misal x^* , u^* dan λ memenuhi syarat perlu berikut ini :

$$\text{a. } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow f_u(x,u,t) + \lambda g_u(x,u,t) = 0$$

$$b. \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{\lambda} = -f_x(x, u, t) - \lambda g_x(x, u, t) \quad (2.25)$$

$$c. \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(x, u, t)$$

$$d. \lambda(T) = 0 \quad (x(T) = x^T \text{ jika } x^T \text{ diketahui})$$

Jika $g(x, u)$ fungsi nonlinear dari x atau u atau keduanya serta x dan λ dimisalkan kontinu dengan $\lambda(t) \geq 0$ untuk setiap t . Maka x^* dan u^* merupakan solusi dari (2.24). Jadi jika fungsi f dan g konveks di x dan u maka syarat perlu (2.25) juga merupakan syarat cukup untuk optimal.

Bukti :

Misal : x^* , u^* , λ memenuhi (2.25)

$$x, u \text{ memenuhi } \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(x, u, t)$$

akan ditunjukkan bahwa $D \equiv \int_0^T (f^* - f) dt \leq 0$

Karena f fungsi konveks dari (x, u) maka

$$f^* - f \leq (x^* - x)f_x^* + (u^* - u)f_u^*$$

sehingga

$$\begin{aligned} D &\leq \int_0^T [(x^* - x)f_x^* + (u^* - u)f_u^*] dt \\ &= \int_0^T \left[(x^* - x) \left(-\lambda g_x - \dot{\lambda} \right) + (u^* - u) - (\lambda g_u) \right] dt \\ &= -\int_0^T (x^* - x) \dot{\lambda} dt + \int_0^T \lambda [-(x^* - x)g_x - (u^* - u)g_u] dt \\ &= \int_0^T \lambda [g^* - g - (x^* - x)g_x - (u^* - u)g_u] dt \\ &= \int_0^T \lambda [g^* - g - ((x^* - x)g_x + (u^* - u)g_u)] dt \end{aligned}$$

Karena $\lambda(t) \geq 0$ dan dengan asumsi g fungsi konveks maka terbukti bahwa $D \leq 0$

Dengan persamaan-persamaan (2.19) – (2.23), kita dapat menentukan u^* , x^* dan λ .

Langkah-langkah Penyelesaian Masalah kontrol Optimal

Secara garis besar langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah sebagai berikut :

1. Definisikan fungsi Lagrange:

$$L = J + \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) - \dot{x} dt$$

2. Definisikan fungsi Hamiltonian:

$$H(x, u) = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t)$$

3. Tentukan $\{u(t)\}$, $\{\lambda(t)\}$ dan $\{x(t)\}$ yang memenuhi:

- a. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, $0 \leq t \leq T$

- b. $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, $0 \leq t \leq T$ (2.26)

- c. $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u)$

- d. $\lambda(T) = 0$ ($x(T) = x^T$ jika x^T diketahui)

- e. $x(0) = x^0$

4. Uji tununan kedua

- a. Kondisi maksimum

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0, \text{ artinya } u^* \text{ memaksimumkan}$$

- b. Kondisi minimum

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \geq 0, \text{ artinya } u^* \text{ meminimumkan}$$

Jika $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]$ dan $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]$ maka (2.26) menjadi:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad 0 \leq t \leq T \\ \text{b. } & \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{c. } \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f(x, u), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{d. } \lambda_i(T) = 0 \quad (x(T) = x^T \text{ jika } x^T \text{ diketahui}), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{e. } x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, n$$

f. Uji turunan kedua

Kondisi maksimum

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} \leq 0, \quad \text{artinya } u^* \text{ memaksimumkan}$$

Kondisi minimum

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} \geq 0, \quad \text{artinya } u^* \text{ meminimumkan}$$

Untuk lebih jelasnya diberikan contoh sebagai berikut

Contoh 2.2.

Selesaikan masalah kontrol optimal berikut:

$$\text{Maks}_{\{u(t)\}} J = \int_0^1 \sqrt{u} dt$$

$$\text{dengan } \dot{x} = -u, \quad x(0) = 1 \quad x(1) = 0 \quad (2.28)$$

Penyelesaian:

1. Definisikan fungsi Lagrange untuk masalah ini :

$$L = \int_0^1 \sqrt{u} dt + \int_0^1 \lambda(-u - \dot{x}) dt$$

2. Definisikan fungsi Hamiltonian untuk masalah ini:

$$H(x,u) = f(x,u) + \lambda g(x,u) = \sqrt{u} + \lambda(-u)$$

3. Akan ditentukan $\{u(t)\}$, $\{\lambda(t)\}$ dan $\{x(t)\}$ yang memenuhi (2.28):

$$a. \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} - \lambda = 0 \Rightarrow u^{-\frac{1}{2}} = 2\lambda \Rightarrow u = \frac{1}{4\lambda^2}$$

$$b. \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}} < 0, u^* \text{ memaksimumkan } J$$

$$c. \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda(t) = c_1$$

$$d. \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x,u) = -u \Rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{4\lambda^2} \Rightarrow x(t) = c_2 - \frac{t}{4\lambda^2}$$

$$d. x(0) = c_2 - \frac{0}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$e. x(1) = c_2 - \frac{1}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda^* = \frac{1}{2} = c_1$$

Jadi diperoleh solusi optimal sebagai berikut:

$$u^* = \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ dan } x^* = 1 - \frac{t}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - t$$

2.3.4 Kontrol Optimal dengan Kontrol Terbatas

Berikut ini, dibahas contoh kasus khusus yang menjadi ide dasar untuk membantu mendapatkan penyelesaian kontrol optimal pada suatu model.

Diberikan permasalahan sebagai berikut [8] :

$$\text{Max}_{\{u(t)\}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.29)$$

$$\text{dengan } \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.30)$$

$$a \leq u \leq b \quad (2.31)$$

Untuk $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ dapat ditulis $g(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t) = 0$ sedemikian sehingga diperoleh Fungsi Lagrangian sebagai berikut :

$$L = f(x, u, t) + \lambda \left(g(x, u, t) - \dot{x} \right) = f(x, u, t) + \lambda \cdot g(x, u, t) - \lambda \dot{x}$$

Misalkan, J adalah integral dari t_0 sampai t_1 untuk L .

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(f(x, u, t) + \lambda \cdot g(x, u, t) - \lambda \dot{x} \right) dt \quad (2.32)$$

Padahal

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_1} \lambda \dot{x} dt &= -\lambda(t) x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} x \dot{\lambda} dt \\ &= -\lambda(t_1) x(t_1) + \lambda(t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x \dot{\lambda} dt \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(f(x, u, t) + \lambda \cdot g(x, u, t) + x \dot{\lambda} \right) dt - \lambda(t_1) x(t_1) + \lambda(t_0) x(t_0) \quad (2.33)$$

Berarti untuk J bernilai maksimum

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} \left(f(x^*, u^*, t) + \lambda \cdot g(x^*, u^*, t) + x \dot{\lambda} \right) dt - \lambda(t_1) x^*(t_1) + \lambda(t_0) x^*(t_0) \quad (2.34)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.33) dan (2.34) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} J - J^* &= \int_{t_0}^{t_1} \left(f(x, u, t) + \lambda \cdot g(x, u, t) + x \dot{\lambda} \right) dt - \lambda(t_1) x(t_1) + \lambda(t_0) x(t_0) - \\ &\quad \int_{t_0}^{t_1} \left(f(x^*, u^*, t) + \lambda \cdot g(x^*, u^*, t) + x \dot{\lambda} \right) dt - \lambda(t_1) x^*(t_1) + \lambda(t_0) x^*(t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(f(x, u, t) - f(x^*, u^*, t) + \lambda \cdot (g(x, u, t) - g(x^*, u^*, t)) + \dot{\lambda} (x - x^*) \right) dt - \\ &\quad \lambda(t_1) (x(t_1) - x^*(t_1)) + \lambda(t_0) (x(t_0) - x^*(t_0)) \end{aligned}$$

Karena $x(t)$ mempunyai nilai awal maka $x(t_0) = x^*(t_0) = x_0$

$$J - J^* = \int_{t_0}^{t_1} \left(f(x, u, t) - f(x^*, u^*, t) + \lambda(g(x, u, t) - g(x^*, u^*, t)) + \dot{\lambda}(x - x^*) \right) dt - \lambda(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1)) \quad (2.35)$$

Kemudian, dilakukan ekspansi deret Taylor terhadap persamaan

$f(x, u, t) - f(x^*, u^*, t) + \lambda(g(x, u, t) - g(x^*, u^*, t))$, sedemikian hingga menjadi

$$J - J^* = \int_{t_0}^{t_1} \left(f_x + \lambda g_x + \dot{\lambda} \right) (x - x^*) + \left(f_u + \lambda g_u + \dot{\lambda} \right) (u - u^*) dt - \lambda(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} h.o.t \quad (2.36)$$

Untuk $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$, $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$, $g_u = \frac{\partial g}{\partial u}$

Asumsikan bahwa $\delta J = J - J^*$, $\delta x = x - x^*$, $\delta u = u - u^*$, sehingga dapat ditulis kembali

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(f_x + \lambda g_x + \dot{\lambda} \right) \delta x + \left(f_u + \lambda g_u \right) \delta u dt - \lambda(t_1) \delta x(t_1) \quad (2.37)$$

Dengan memilih $\dot{\lambda}$ yang memenuhi $\dot{\lambda} = -(f_x + \lambda g_x)$, $\dot{\lambda}(t_1) = 0$ (2.38)

Sehingga persamaan (2.37) dapat direduksi menjadi $\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) \delta u dt$

Sedemikian hingga untuk x, u, λ merupakan solusi yang optimal maka

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) \delta u dt \leq 0 \quad (2.39)$$

Untuk itu, dibutuhkan suatu kemungkinan untuk memodifikasi δu yang memenuhi persamaan (2.39). Jika kontrol optimal adalah pada batas bawah a untuk t maka modifikasi kontrol $a + \delta u$ yang tidak bisa kurang dari a , jadi dibutuhkan $\delta u \geq 0$.

Dengan cara yang sama, jika kontrol optimal adalah pada batas atas maka bentuk

modifikasi kontrol $b + \delta u$ yang tidak bisa lebih dari b , jadi dibutuhkan $\delta u \leq 0$.

Kesimpulannya

$$\begin{aligned} \delta u &\geq 0 && \text{jika } u = a \\ \delta u &\leq 0 && \text{jika } u = b \\ \delta u &= 0 && \text{jika } a < u < b \end{aligned}$$

Supaya persamaan (2.38) konsisten untuk semua δu , karena itu dipilih

$$\begin{aligned} u(t) &= a && \text{jika dan hanya jika } f_u + \lambda g_u \leq 0 \text{ pada } t \\ a < u(t) < b && \text{jika dan hanya jika } f_u + \lambda g_u = 0 \text{ pada } t \\ u(t) &= b && \text{jika dan hanya jika } f_u + \lambda g_u \geq 0 \text{ pada } t \end{aligned} \quad (2.40)$$

atau ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} f_u + \lambda g_u < 0 &\text{ dengan } u(t) = a \\ f_u + \lambda g_u = 0 &\text{ dengan } a \leq u(t) \leq b \\ f_u + \lambda g_u > 0 &\text{ dengan } u(t) = b \end{aligned}$$

Berarti, jika x^* dan u^* penyelesaian persamaan (2.29) sampai dengan (2.32) maka harus terdapat fungsi λ sedemikian hingga x^* , u^* dan λ memenuhi persamaan (2.30), (2.31), (2.38), dan (2.40). Syarat-syarat kondisi tersebut dapat diperluas dengan persamaan Hamiltonian adalah

$$H = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t)$$

Supaya optimal jika persamaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &\leq 0 && \text{jika } u = a \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 && \text{jika } a \leq u \leq b \\ \frac{\partial H}{\partial u} &\geq 0 && \text{jika } u = b \end{aligned}$$

Dengan persamaan *state* dan *co-state*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

$$x(t_0) = x_0 \text{ dan } \lambda(t_1) = 0$$

Untuk kondisi ini pada persamaan Hamiltonian tersebut digeneralisasi dengan memaksimalkan *performance index* (fungsi obyektif) dengan kendala (2.29) yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\text{Maks } H = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) \quad (2.41)$$

$$\text{Kendala } a \leq u \leq b \quad (2.42)$$

Dengan fungsi Lagrangian sebagai berikut :

$$L = f(x, u, t) + \lambda \left(g(x, u, t) - \dot{x} \right) + h_1 \cdot w_1 + h_2 \cdot w_2 \quad (2.43)$$

$$L = f(x, u, t) + \lambda \left(g(x, u, t) - \dot{x} \right) + (b - u) \cdot w_1 + (u - a) \cdot w_2$$

Supaya optimal jika memenuhi

Supaya optimal jika memenuhi persamaan

1. Syarat perlu (Kondisi stasioner)

$$\frac{\partial L}{\partial u} = f_u(x, u, t) + \lambda g_u(x, u, t) - w_1 + w_2 = 0 \quad (2.44)$$

$$w_1 \geq 0, \quad w_1(b - u) = 0$$

$$w_2 \geq 0, \quad w_2(u - a) = 0$$

2. Persamaan keadaan

$$\dot{x} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$x(t_0) = x_0 \text{ dan } \lambda(t_1) = 0$$

Dari persamaan (2.44) dapat diperoleh bentuk kontrol optimal u^* .

Untuk lebih jelasnya diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.3.

$$\text{Min}_{\{u(t)\}} J = \int_0^5 (u^2 + x) dt$$

dengan $\dot{x} = u, 0 \leq u(t) \leq 1, x(0) = 0$

Penyelesaian:

Hamiltonian dari masalah di atas adalah:

$$H = u^2 + x + \lambda u$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 2 > 0 \text{ (kondisi minimum)}$$

Dan $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1$, dengan $\lambda(5) = 0, \lambda = 5 - t$.

Berdasarkan (2.43), Lagrangiannya adalah:

$$L = u^2 + x + \lambda u + w_1(1-u) + w_2 u$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u + \lambda - w_1 + w_2 = 0$$

$$u = \frac{-\lambda + w_1 - w_2}{2} = \frac{t - 5 + w_1 - w_2}{2}$$

$$w_1 \geq 0, w_1(1-u) = 0$$

$$w_2 \geq 0, w_2 u = 0$$

Akan ditinjau untuk nilai-nilai u yang fisibel:

Untuk $0 < u < 1$ maka $w_1 = w_2 = 0$ sehingga

$$u^* = \frac{t - 5}{2}.$$

Untuk $u = 0$ maka $w_1 = 0$ sehingga $u = \frac{t - 5 - w_2}{2}$. Dan $w_2 = t - 5 \geq 0$, maka

$$u^* = \frac{t - 5}{2} \geq 0.$$

Untuk $u = 1$ maka $w_2 = 0$ sehingga $u = 1 = \frac{t - 5 + w_1}{2}$.

Dan $w_1 = 2 - (t - 5) \geq 0$,

$$u^* = \frac{t - 5}{2} \leq 1$$

Dari ketiga kasus tersebut, diperoleh: $u^* = \frac{t-5}{2}$

Dimana dengan syarat batasnya $0 \leq u(t) \leq 1$, $x(0) = 0$ sehingga didapat:

$$x^* = \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{2}t$$

2.4 Metode Beda Hingga [4]

Suatu teori sederhana mengenai hampiran numerik untuk dapat diperoleh melalui ekspansi deret Taylor dari $f(x+h)$ di sekitar x :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (2.45)$$

Pengurangan $f(x)$ dari kedua sisi dan membagi kedua sisi dengan ukuran langkah h menghasilkan

$$\begin{aligned} D_{f1}(x,h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \dots \\ &= f'(x) + O(h), \end{aligned}$$

dengan $O(h)$ menyatakan suku galat pemotongan yang sebanding dengan h untuk $|h| < 1$. Dari sini didapat **hampiran beda maju** (*forward difference approximation*)

untuk $f'(x)$

$$D_{f1}(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.46)$$

Yang memiliki galat sebanding dengan ukuran langkah h atau ekuivalen dalam orde dalam h

Berikutnya, dengan mensubstitusikan $-h$ untuk h dalam persamaan (2.46)

diperoleh **hampiran beda mundur** (*backward difference approximation*) untuk

$f'(x)$

$$D_{g1}(x,h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (2.47)$$

Untuk menurunkan rumus hampiran lain untuk turunan pertama, diambil deret Taylor dari $f(x+h)$ dan $f(x-h)$ sampai orde kelima :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \dots$$

Dan membagi selisih antara kedua persamaan dengan $2h$ untuk mendapatkan

hampiran beda pusat (*central difference approximation*) untuk $f'(x)$:

$$\begin{aligned} D_{f1}(x,h) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!} f''(x) + \frac{h^4}{5!} f^{(4)}(x) + \dots \\ &= f'(x) + O(h^2) \end{aligned}$$

Yang mempunyai sebanding dengan h^2 , serupa dengan persamaan (2.46) dan (2.47)

2.5 Metode Runge-Kutta Orde 4 [4]

Metode Runge-Kutta adalah teknik numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa .

Metode Runge-Kutta memberikan hasil ketelitian yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi, bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah:

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, \Delta x) \quad (2.48)$$

dengan $F(x_i, y_i, \Delta x)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval.

Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$F = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (2.49)$$

dengan a adalah konstanta dan k adalah:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

⋮

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa nilai k mempunyai hubungan berurutan.

Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2 , yang juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 , dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta adalah efisien dalam hitungan.

Metode Runge-Kutta Order 4

Metode Runge-Kutta order 4 banyak digunakan karena mempunyai ketelitian lebih tinggi. Metode ini mempunyai bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.50)$$

dengan:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

Contoh soal 2.3:

Selesaikan persamaan berikut dengan metode Runge-Kutta order 4.

$$y'(t) = y(t) - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0,5$$

Menggunakan metode *Runge-Kutta orde 4* dengan lebar langkah $h = 0,2$

Penyelesaian:

Dinyatakan bahwa

$$f(t, y(t)) = y(t) - t^2 + 1 \quad \text{dan} \quad t_0 = 0,0, \quad t_1 = 0,2, \quad t_2 = 0,4, \quad t_3 = 0,6, \quad t_4 = 0,8, \\ t_5 = 1,0, \quad t_6 = 1,2, \quad t_7 = 1,4, \quad t_8 = 1,6, \quad t_9 = 1,8, \quad t_{10} = 2,0$$

Langkah pertama pada metode Runge-Kutta order 4 yaitu menghitung k_1, k_2, k_3 dan k_4 .

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0,0.5) = 0,5 - 0^2 + 1 = 1,5$$

$$k_2 = f(t_0 + 0,1, y_0 + 0,1.k_1) = f(0,1,0.65) = 0,65 - 0,1^2 + 1 = 1,64$$

$$k_3 = f(t_0 + 0,1, y_0 + 0,1.k_2) = f(0,1,0.664) = 0,664 - 0,1^2 + 1 = 1,654$$

$$k_4 = f(t_0 + 0,2, y_0 + 0,2.k_1) = f(0,2, 0,0,8308) = 0,8308 - 0,2^2 + 1 = 1,7908$$

Dengan menggunakan persamaan (2.50), dihitung nilai $y(x)$:

$$y_1(0,2) = y(0) + \frac{0,2}{6}(1,5 + 2(1,64) + 2(1,645) + 1,7908) = 0,8293$$

Dengan cara yang sama $y(0,4)$,, $y(2)$ dapat dihitung .





BAB III
PEMBAHASAN DAN ANALISIS
KONTROL OPTIMAL PADA SUATU MODEL EPIDEMIK TBC
DENGAN *EXOGENOUS REINFECTION*

3.1 Penyelesaian Kontrol optimal

Untuk mendapatkan penyelesaian kontrol optimal dari persamaan-persamaan berikut digunakan Prinsip Maksimum (Minimum) Pontryagin.

Model

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - \beta c S \frac{I}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \beta c S \frac{I}{N} - p \beta c (1-u) E \frac{I}{N} - (\mu + k) E + \sigma \beta c T \frac{I}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= p \beta c (1-u) E \frac{I}{N} + k E - (\mu + d + r) I \\ \frac{dT}{dt} &= r I + -\mu T - \sigma \beta c T \frac{I}{N} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + T(t)$$

Dimana nilai u diambil dari himpunan U

$$u \in U = \{u(t) | 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$$

Sistem persamaan diferensial (3.1) disebut sebagai **persamaan keadaan (state equation)**.

Performance index yang digunakan berdasarkan pembentukan fungsi obyektif pada bab II adalah :

$$J[u] = \int_0^T (I + Au^2) dt, \quad A \text{ adalah variabel bobot yang berkorelasi dengan biaya}$$

penggunaan kontrol (*control cost*) yaitu sebagai faktor penyeimbang dari biaya pengendalian sistem.

Dalam hal ini akan dicari fungsi u^* yang mengakibatkan J yang memiliki nilai minimum yaitu :

$$J[u^*] = \min_{u \in U} J[u],$$

dengan $S(t_0) = S_0$, $E(t_0) = E_0$, $I(t_0) = I_0$, $T_0(t_0) = T_0$

Dalam persoalan ini kasus T tetap dan $X_i(T) = X_i^T$ bebas adalah syarat dari kondisi transversal dengan kontrol terbatas dapat dibentuk fungsi Hamiltoniannya sebagai berikut :

$$H = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t)$$

$$\begin{aligned} H = & I + Au^2 + \lambda_S \left(\Lambda - \mu S - \beta c S \frac{I}{N} \right) + \\ & \lambda_E \left(\beta c S \frac{I}{N} - p\beta c (1-u) E \frac{I}{N} - (\mu + k) E + \sigma \beta c T \frac{I}{N} \right) + \\ & \lambda_I \left(p\beta c (1-u) E \frac{I}{N} + kE - (\mu + d + r) I \right) + \lambda_T \left(rI + -\mu T - \sigma \beta c T \frac{I}{N} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Untuk mencari $u^*(t)$ yang mengakibatkan *performance index* minimum maka berdasarkan Prinsip Maksimum (Minimum) Pontryagin didapat

$$H(x^*(t), u^*(t), t, \lambda(t)) \leq H(x(t), u(t), t, \lambda(t))$$

$$X^*(t) = (S^*(t), E^*(t), I^*(t), T^*(t))$$

$$U^*(t) = (u^*(t))$$

$$\lambda(t) = (\lambda_S(t), \lambda_E(t), \lambda_I(t), \lambda_T(t))$$

Syarat perlu dari kondisi diatas adalah

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad \dot{X}_i(t) = (\dot{S}(t), \dot{E}(t), \dot{I}(t), \dot{T}(t))$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{\lambda}_i(T) = 0 \quad i = S, E, I \text{ dan } T \quad (3.3)$$

Dijabarkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_S &= -\frac{\partial H}{\partial S} \\ &= -\left(\lambda_S \left(-\mu - \beta c \frac{I}{N} \right) + \lambda_E \left(\beta c \frac{I}{N} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \lambda_S \left(\mu + \beta c \frac{I}{N} \right) - \lambda_E \left(\beta c \frac{I}{N} \right)$$

$$\dot{\lambda}_E = -\frac{\partial H}{\partial E}$$

$$= -\left(\lambda_E \left(-p\beta c(1-u) \frac{I}{N} - (\mu + k) \right) + \lambda_I \left(p\beta c(1-u) \frac{I}{N} + k \right) \right)$$

$$= \lambda_E \left(p\beta c(1-u) \frac{I}{N} + (\mu + k) \right) - \lambda_I \left(p\beta c(1-u) \frac{I}{N} + k \right)$$

$$\dot{\lambda}_I = -\frac{\partial H}{\partial I}$$

$$= -\left(\begin{aligned} &1 + \lambda_S \left(-\frac{\beta c S}{N} \right) + \lambda_E \left(\frac{\beta c S}{N} - \frac{p\beta c(1-u)E}{N} - (\mu + k)E + \frac{\sigma\beta c T}{N} \right) + \\ &\lambda_I \left(\frac{p\beta c(1-u)E}{N} - (\mu + d + r) \right) + \lambda_T \left(r - \frac{\sigma\beta c T}{N} \right) \end{aligned} \right)$$

$$= \left(\begin{aligned} &-1 + \lambda_S \left(\frac{\beta c S}{N} \right) - \lambda_E \left(\frac{\beta c S}{N} - \frac{p\beta c(1-u)E}{N} - (\mu + k)E + \frac{\sigma\beta c T}{N} \right) - \\ &\lambda_I \left(\frac{p\beta c(1-u)E}{N} - (\mu + d + r) \right) + \lambda_T \left(-r + \frac{\sigma\beta c T}{N} \right) \end{aligned} \right)$$

$$\dot{\lambda}_T = -\frac{\partial H}{\partial T}$$

$$= -\left(\lambda_E \left(\sigma\beta c \frac{I}{N} \right) + \lambda_T \left(-\mu - \sigma\beta c \frac{I}{N} \right) \right)$$

$$= \lambda_T \left(\mu + \sigma\beta c \frac{I}{N} \right) - \lambda_E \left(\sigma\beta c \frac{I}{N} \right)$$

Berdasarkan teori kontrol optimal dengan variabel kontrol terbatas dalam kasus ini variabel kontrolnya yaitu $U = \{u(t) | 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$

Selanjutnya dapat dibentuk fungsi lagrangian sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
L &= I + Au^2 + \lambda_S \left(\Lambda - \mu S - \beta c S \frac{I}{N} \right) + \\
&\lambda_E \left(\beta c S \frac{I}{N} - p \beta c (1-u) E \frac{I}{N} - (\mu + k) E + \sigma \beta c T \frac{I}{N} \right) + \\
&\lambda_I \left(p \beta c (1-u) E \frac{I}{N} + k E - (\mu + d + r) I \right) + \lambda_T \left(r I + -\mu T - \sigma \beta c T \frac{I}{N} \right) + w_1 (1-u) + w_2 u
\end{aligned}$$

Diperoleh :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2Au + \lambda_E \left(p \beta c E \frac{I}{N} \right) - \lambda_I \left(p \beta c E \frac{I}{N} \right) - w_1 + w_2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = 2Au$$

Karena A adalah bilangan positif dan $u \in U = \{u(t) | 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ maka

$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \geq 0$, artinya memenuhi syarat cukup untuk mencapai nilai minimum

Selanjutnya kontrol optimal u dapat diselesaikan dengan menggunakan kondisi

optimal, yaitu pada saat $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

$$2Au + (\lambda_E - \lambda_I) \left(p \beta c E \frac{I}{N} \right) - w_1 + w_2 = 0$$

$$u = \frac{1}{2AN} ((\lambda_I - \lambda_E)(p \beta c EI) + w_1 - w_2)$$

$$w_1 \geq 0, w_1(1-u) = 0$$

$$w_2 \geq 0, w_2(u) = 0$$

Akan ditinjau untuk nilai-nilai u yang fisibel :

Karena $U = \{u(t) | 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$

Kasus 1

Untuk $0 < u < 1$ maka $w_1 = w_2 = 0$ sehingga

$$u^* = \frac{I}{2AN}(\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cEI)$$

Kasus 2

Untuk $u = 0$ maka $w_1 = 0$ sehingga $u = \frac{I}{2AN}((\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cEI) - w_2) = 0$.

Dan didapat $w_2 = (\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cEI) \geq 0$, maka

$$u^* = \frac{I}{2AN}(\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cEI) \geq 0$$

Kasus 3

Untuk $u = 1$ maka $w_2 = 0$ sehingga $u = \frac{I}{2AN}((\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cEI) + w_1) = 1$.

Dan didapat $w_1 = 2AN - (\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cEI) \geq 0$, maka

$$u^* = \frac{I}{2AN}(\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cEI) \leq 1$$

Dari ketiga kasus tersebut, diperoleh :

$$u^* = \frac{I}{2AN}(\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cEI)$$

Karena $U = \{u(t) | 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq t \leq T, u(t)\}$, sehingga diperoleh nilai batas atas terkecil (*supremum*) dari u sebagai u optimal

$$u^* = \min\left(1, \max\left(0, \frac{I}{2AN}(\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cE^* I^*)\right)\right) \quad (3.4)$$

Kontrol optimal u^* disubstitusikan ke dalam persamaan state (3.1) maka diperoleh sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - \beta c S \frac{I}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \beta c S \frac{I}{N} - p\beta c \left(1 - \min\left(1, \max\left(0, \frac{I}{2AN}(\lambda_I - \lambda_E)(p\beta cE^* I^*)\right)\right)\right) E \frac{I}{N} \\ &\quad - (\mu + k)E + \sigma\beta c T \frac{I}{N} \end{aligned}$$

$$\frac{dI}{dt} = p\beta c \left(1 - \min \left(1, \max \left(0, \frac{I}{2AN} (\lambda_I - \lambda_E) (p\beta c E^* I^*) \right) \right) \right) E \frac{I}{N} + kE - (\mu + d + r)I$$

$$\frac{dT}{dt} = rI - \mu T - \sigma\beta c T \frac{I}{N} \quad (3.5)$$

$$\dot{\lambda}_S = \lambda_S \left(\mu + \beta c \frac{I}{N} \right) - \lambda_E \left(\beta c \frac{I}{N} \right)$$

$$\dot{\lambda}_E = \lambda_E \left(p\beta c (1-u) \frac{I}{N} + (\mu + k) \right) - \lambda_I \left(p\beta c (1-u) \frac{I}{N} + k \right)$$

$$\dot{\lambda}_I = -\frac{\partial H}{\partial I}$$

$$= - \left(1 + \lambda_S \left(-\frac{\beta c S}{N} \right) + \lambda_E \left(\frac{\beta c S}{N} - \frac{p\beta c (1-u) E}{N} - (\mu + k) E + \frac{\sigma\beta c T}{N} \right) + \right. \\ \left. \lambda_I \left(\frac{p\beta c (1-u) E}{N} - (\mu + d + r) \right) + \lambda_T \left(r - \frac{\sigma\beta c T}{N} \right) \right)$$

$$= - \left(-1 + \lambda_S \left(\frac{\beta c S}{N} \right) - \lambda_E \left(\frac{\beta c S}{N} - \frac{p\beta c (1-u) E}{N} - (\mu + k) E + \frac{\sigma\beta c T}{N} \right) - \right. \\ \left. \lambda_I \left(\frac{p\beta c (1-u) E}{N} - (\mu + d + r) \right) + \lambda_T \left(-r + \frac{\sigma\beta c T}{N} \right) \right)$$

$$\dot{\lambda}_T = -\frac{\partial H}{\partial T}$$

$$= - \left(\lambda_E \left(\sigma\beta c \frac{I}{N} \right) + \lambda_T \left(-\mu - \sigma\beta c \frac{I}{N} \right) \right)$$

$$= \lambda_T \left(\mu + \sigma\beta c \frac{I}{N} \right) - \lambda_E \left(\sigma\beta c \frac{I}{N} \right)$$

3.2 Simulasi Numerik

Strategi penanganan optimal diperoleh dengan memecahkan sistem optimalitas, terdiri atas 8 persamaan diferensial biasa dari persamaan state dan

co-state. Dimulai dengan memecahkan model sistem dengan memperkirakan kontrol pada waktu yang disimulasikan dengan menggunakan skema maju. Sedangkan pada persamaan co-state dipecahkan dengan skema mundur karena adanya kondisi transversalitas.

Penyelesaian persamaan (3.1) dan (3.2) pada model sistem dengan menggunakan *Runge-Kutta Orde 4*.

3.2.1 Proses Diskritisasi Sistem Persamaan

Persamaan state diselesaikan dengan menggunakan skema maju.

Tahap 1 $i = 0, 1, 2, \dots, n$ $N = N_i = S_i + E_i + I_i + T_i$

$$m1S = f(t_i, S_i)$$

$$= \Lambda - \mu S_i - \beta c S_i \frac{I_i}{N}$$

$$m1E = f(t_i, E^i)$$

$$= \beta c S_i \frac{I_i}{N} - p(1 - u_i) \beta c E_i \frac{I_i}{N} - (\mu + k) E_i + \sigma \beta c T_i \frac{I_i}{N}$$

$$m1I = f(t_i, I^i)$$

$$= p(1 - u_i) \beta c E_i \frac{I_i}{N} + k E_i - (\mu + d + r) I_i$$

$$m1T = f(t_i, T^i)$$

$$= r I_{i+1} - \mu T_i - \sigma \beta c T_i \frac{I_i}{N}$$

Tahap 2

$$m2S = f(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}h m1S)$$

$$= \Lambda - \mu (S_i + \frac{1}{2}h m1S) - \beta c (S_i + \frac{1}{2}h m1S) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m1I)}{N}$$

$$m2E = f(t_i + \frac{1}{2}h, E_i + \frac{1}{2}h m1E)$$

$$= \beta c(S_i + \frac{1}{2}h m1S) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m1I)}{N} - p \frac{1}{2}((1-u_i) + (1-u_{i+1})) \beta c(E_i + \frac{1}{2}h m1E) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m1I)}{N} - (\mu + k)(E_i + \frac{1}{2}h m1E) + \sigma \beta c(T_i + \frac{1}{2}h m1I) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m1I)}{N}$$

$$m2I = f(t_i + \frac{1}{2}h, I_i + \frac{1}{2}h m1I)$$

$$= p \frac{1}{2}((1-u_i) + (1-u_{i+1})) \beta c(E_i + \frac{1}{2}h m1E) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m1I)}{N} + k(E_i + \frac{1}{2}h m1E) -$$

$$(\mu + d + r)(I_i + \frac{1}{2}h m1I)$$

$$m2T = f(t_i + \frac{1}{2}h, T_i + \frac{1}{2}h m1T)$$

$$= \left(r(I_i + \frac{1}{2}h m1I) - \mu(T_i + \frac{1}{2}h m1T) - \sigma \beta c(T_i + \frac{1}{2}h m1T) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m1I)}{N} \right)$$

Tahap 3

$$m3S = f(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}h m2S)$$

$$= h \left(\Lambda - \mu(S_i + \frac{1}{2}h m2S) - \beta c(S_i + \frac{1}{2}h m2S) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N} \right)$$

$$m3E = f(t_i + \frac{1}{2}h, E_i + \frac{1}{2}h m2E)$$

$$= \beta c(S_i + \frac{1}{2}h m2S) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N} - p \frac{1}{2}((1-u_i) + (1-u_{i+1})) \beta c(E_i + \frac{1}{2}h m2E) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N} - (\mu + k)(E_i + \frac{1}{2}h m2E) + \sigma \beta c(T_i + \frac{1}{2}h m2I) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N}$$

$$= \beta c(S_i + \frac{1}{2}h m2S) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N} - p \frac{1}{2}((1-u_i) + (1-u_{i+1})) \beta c(E_i + \frac{1}{2}h m2E) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N} - (\mu + k)(E_i + \frac{1}{2}h m2E) + \sigma \beta c(T_i + \frac{1}{2}h m2I) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N}$$

$$m3I = f(t_i + \frac{1}{2}h, I_i + \frac{1}{2}h m2I)$$

$$= p \frac{1}{2}((1-u_i) + (1-u_{i+1})) \beta c(E_i + \frac{1}{2}h m2E) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N} +$$

$$k(E_i + \frac{1}{2}h m2E) - (\mu + d + r)(I_i + \frac{1}{2}h m2I)$$

$$m3T = f(t_i + \frac{1}{2}h, T_i + \frac{1}{2}h m2T)$$

$$= r(I_i + \frac{1}{2}h m2I) - \mu(T_i + \frac{1}{2}h m2T) - \sigma \beta c(T_i + \frac{1}{2}h m2T) \frac{(I_i + \frac{1}{2}h m2I)}{N}$$

Tahap 4

$$m4S = f(t_i + h, S_i + h m3S)$$

$$= \Lambda - \mu(S_i + h m3S) - \beta c(S_i + h m3S) \frac{(I_i + h m3I)}{N}$$

$$m4E = f(t_i + h, E_i + h m3E)$$

$$= \beta c(S_i + h m3S) \frac{(I_i + h m3I)}{N} - p \frac{1}{2} ((1 - u_i) + (1 - u_{i+1})) \beta c(E_i + h m3E) \frac{(I_i + h m3I)}{N} - (\mu + k)(E_i + h m3E) + \sigma \beta c(T_i + h m3T) \frac{(I_i + h m3I)}{N}$$

$$m4I = f(t_i + h, I_i + h m3I)$$

$$= p \frac{1}{2} ((1 - u_i) + (1 - u_{i+1})) \beta c(E_i + h m3E) \frac{(I_i + h m3I)}{N} + k(E_i + h m3E) - (\mu + d + r)(I_i + h m3I)$$

$$m4T = f(t_i + h, T_i + h m3T)$$

$$= r(I_i + h m3I) - \mu(T_i + h m3T) - \sigma \beta c(T_i + h m3T) \frac{(I_i + h m3I)}{N}$$

Setelah proses diskritisasi tahap 1, tahap 2, tahap 3 dan tahap 4 maka akan dibentuk persamaan berikut :

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{6}(m1S + 2.m2S + 2.m3S + m4S)$$

$$E_{i+1} = E_i + \frac{h}{6}(m1E + 2.m2E + 2.m3E + m4E)$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{6}(m1I + 2.m2I + 2.m3I + m4I)$$

$$T_{i+1} = T_i + \frac{h}{6}(m1T + 2.m2T + 2.m3T + m4T) \quad (3.7)$$

Persamaan *co-state* diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga mundur

$$\mathbf{Tahap 1} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad N = N_i = S_i + E_i + I_i + T_i$$

$$j = (n+2-i)$$

$$m1S = f(t_i, \lambda_S^j)$$

$$= \lambda_S^j \mu + (\lambda_S^j - \lambda_E^j) \beta c \frac{I_j}{N}$$

$$m1E = f(t_i, \lambda_E^j)$$

$$= \lambda_E^j \mu + (\lambda_E^j - \lambda_I^j) \left(k + p(1-u_j) \right) \beta c \frac{I_j}{N}$$

$$m1I = f(t_i, \lambda_I^j)$$

$$= -1 + \lambda_I^j (\mu + d) + (\lambda_S^j - \lambda_E^j) \beta c \frac{S_j}{N} + (\lambda_E^j - \lambda_I^j) p(1-u_j) \beta c \frac{E_j}{N} +$$

$$(\lambda_T^j - \lambda_I^j) \sigma \beta c \frac{T_j}{N} + (\lambda_3^j - \lambda_4^j) r$$

$$m1T = f(t_i, \lambda_T^j)$$

$$= \lambda_T^j \mu + (\lambda_T^j - \lambda_E^j) \sigma \beta c \frac{I_j}{N}$$

Tahap 2

$$j=(n+2-i)$$

$$m2S = f(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_S^j - \frac{1}{2}h m1S)$$

$$= (\lambda_S^j - \frac{1}{2}h m1S) \mu + \left((\lambda_S^j - \frac{1}{2}h m1S) - (\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E) \right) \beta c \frac{0.5(I_j + I_{j-1})}{N}$$

$$m2E = f(t_i, \lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E)$$

$$= (\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E) \mu +$$

$$\left((\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E) - (\lambda_I^j - \frac{1}{2}h m1I) \right) \left(k + p0.5((1-u_j) + (1-u_{j-1})) \right) \beta c \frac{0.5(I_j + I_{j-1})}{N}$$

$$m2I = f(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_I^j - \frac{1}{2}h m1I)$$

$$= -1 + (\lambda_I^j - \frac{1}{2}h m1I) (\mu + d) + \left((\lambda_S^j - \frac{1}{2}h m1S) - (\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E) \right) \beta c \frac{0.5(S_j + S_{j-1})}{N} +$$

$$\left((\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E) - (\lambda_I^j - \frac{1}{2}h m1I) \right) p0.5((1-u_j) + (1-u_{j-1})) \beta c \frac{0.5(E_j + E_{j-1})}{N} +$$

$$\left((\lambda_T^j - \frac{1}{2}h m1T) - (\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E) \right) \sigma \beta c \frac{0.5(T_j + T_{j-1})}{N} + \left((\lambda_I^j - \frac{1}{2}h m1I) - (\lambda_T^j - \frac{1}{2}h m1T) \right) r$$

$$\begin{aligned}
m2T &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_T^j - \frac{1}{2}m1T\right) \\
&= \left(\lambda_T^j - \frac{1}{2}h m1T\right)\mu + \left(\left(\lambda_T^j - \frac{1}{2}h m1T\right) - \left(\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E\right)\right)\sigma\beta c \frac{0.5(I_j + I_{j-1})}{N}
\end{aligned}$$

Tahap 3

$$j=(n+2-i)$$

$$\begin{aligned}
m3S &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_S^j - \frac{1}{2}h m2S\right) \\
&= \left(\lambda_S^j - \frac{1}{2}h m2S\right)\mu + \left(\left(\lambda_S^j - \frac{1}{2}h m2S\right) - \left(\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m2E\right)\right)\beta c \frac{0.5(I_j + I_{j-1})}{N} \\
m3E &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_E^j - \frac{1}{2}m2E\right) \\
&= \left(\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m2E\right)\mu + \\
&\quad \left(\left(\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m2E\right) - \left(\lambda_I^j - \frac{1}{2}h m2I\right)\right)\left(k + p0.5((1-u_j) + (1-u_{j-1}))\right)\beta c \frac{0.5(I_j + I_{j-1})}{N} \\
m3I &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_I^j - \frac{1}{2}m2I\right) \\
&= -1 + \left(\lambda_I^j - \frac{1}{2}h m2I\right)\mu + d + \left(\left(\lambda_S^j - \frac{1}{2}h m2S\right) - \left(\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m1E\right)\right)\beta c \frac{0.5(S_j + S_{j-1})}{N} + \\
&\quad \left(\left(\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m2E\right) - \left(\lambda_I^j - \frac{1}{2}h m2I\right)\right)p0.5((1-u_j) + (1-u_{j-1}))\beta c \frac{0.5(E_j + E_{j-1})}{N} + \\
&\quad \left(\left(\lambda_T^j - \frac{1}{2}h m2T\right) - \left(\lambda_E^j - \frac{1}{2}h m2E\right)\right)\sigma\beta c \frac{0.5(T_j + T_{j-1})}{N} + \\
&\quad \left(\left(\lambda_I^j - \frac{1}{2}h m2I\right) - \left(\lambda_T^j - \frac{1}{2}h m2T\right)\right)r \\
m3T &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_T^j - \frac{1}{2}m2T\right) \\
&= \left(\lambda_T^j - \frac{1}{2}hm2T\right)\mu + \left(\left(\lambda_T^j - \frac{1}{2}hm2T\right) - \left(\lambda_E^j - \frac{1}{2}hm2E\right)\right)\sigma\beta c \frac{0.5(I_j + I_{j-1})}{N}
\end{aligned}$$

Tahap 4

$$j=(n+2-i)$$

$$\begin{aligned}
m4S &= f\left(t_i - h, \lambda_S^j - h m3S\right) \\
&= \left(\lambda_S^j - h m3S\right)\mu + \left(\left(\lambda_S^j - h m3S\right) - \left(\lambda_E^j - h m3E\right)\right)\beta c \frac{I_{j-1}}{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m4E &= f(t_i - h, \lambda_E^j - m3E) \\
&= (\lambda_E^j - h m3E)\mu + \left((\lambda_E^j - h m3E) - (\lambda_I^j - h m3I) \right) \left(k + p(1 - u_{j-1})\beta c \frac{I_{j-1}}{N} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m4I &= f(t_i - h, \lambda_I^j - m3I) \\
&= -1 + (\lambda_I^j - h m3I)(\mu + d) + \left((\lambda_S^j - h m3S) - (\lambda_E^j - h m3E) \right) \beta c \frac{S_{j-1}}{N} + \\
&\quad \left((\lambda_E^j - h m3E) - (\lambda_I^j - h m3I) \right) p(1 - u_{j-1})\beta c \frac{E_{j-1}}{N} + \\
&\quad \left((\lambda_T^j - h m3T) - (\lambda_E^j - h m3E) \right) \sigma \beta c \frac{T_{j-1}}{N} + \left((\lambda_I^j - h m3I) - (\lambda_T^j - h m3T) \right) r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m4T &= f(t_i - h, \lambda_T^j - h m3T) \\
&= (\lambda_T^j - h m3T)\mu + \left((\lambda_T^j - h m3T) - (\lambda_E^j - h m3E) \right) \sigma \beta c \frac{I_{j-1}}{N}
\end{aligned}$$

Setelah proses diskritisasi tahap 1, tahap 2, tahap 3 dan tahap 4 maka akan dibentuk persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
\lambda_S^j &= \lambda_S^{j-1} - \frac{h}{6}(m1S + 2.m2S + 2.m3S + m4S) \\
\lambda_E^j &= \lambda_E^{j-1} - \frac{h}{6}(m1E + 2.m2E + 2.m3E + m4E) \\
\lambda_I^j &= \lambda_I^{j-1} - \frac{h}{6}(m1I + 2.m2I + 2.m3I + m4I) \\
\lambda_T^{i+1} &= \lambda_T^i - \frac{h}{6}(m1T + 2.m2T + 2.m3T + m4T) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Selanjutnya hasil diskritisasi (3.3) dan (3.4) diterjemahkan dalam program MATLAB R2010b.

3.2.2 Hasil dan Analisis Simulasi Numerik

Untuk simulasi menggunakan data parameter pada Tabel 3.1., untuk simulasi ini dilakukan dua simulasi yaitu untuk $c = 0,1$ dan $c = 0,3$. Di samping itu akan dibagi menjadi beberapa kasus dengan mengganti parameter A sebagai variabel bobot biaya.

Tabel 3.1. Parameter Epidemik [3]

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
Λ	417 individu per tahun	r	2 per tahun
β	80 per kontak per tahun	c	0,1 kontak per tahun per kapita 0,3 kontak per tahun per kapita
μ	0,0167 per tahun	σ	0,9
d	0,1 per tahun	p	0,4
k	0,005 per tahun		
Periode Simulasi	5 Tahun		

Adapun syarat awal dari simulasi numerik untuk masing kelas sebagai berikut :

$$N(0) = 25000 \text{ individu}$$

$$S(0) = 13250 \text{ individu}$$

$$E(0) = 10500 \text{ individu}$$

$$I(0) = 1000 \text{ individu}$$

$$T(0) = 250 \text{ individu}$$

3.2.2.1 Simulasi Numerik untuk $c = 0,1$

Dari Tabel 3.1 dapat dihitung *basic reproduction ratio* (R_0)

$$R_0 = \left(\frac{\beta c}{\mu + r + d} \right) \left(\frac{k}{\mu + k} \right) = \left(\frac{(80)(0,1)}{0,0167 + 2 + 0,2} \right) \left(\frac{0,005}{0,0167 + 0,005} \right) = 0,871 < 1.$$

Setelah dilakukan simulasi numerik didapat data sebagai berikut Tabel 3.2, Tabel 3.3 dan Gambar 3.1 sampai dengan 3.12. sebagai berikut :

Tabel 3.2 menyajikan perubahan jumlah individu tiap kelas pada tahun kelima tanpa kontrol dan dengan kontrol dibandingkan jumlah individu tiap kelas pada keadaan awal.

Tabel 3.2. Perubahan jumlah individu tiap kelas pada keadaan awal, tanpa kontrol dan dengan kontrol

PARAMETER EPIDEMIK	AWAL (t = 0)	TANPA KONTROL (t = 5)		DENGAN KONTROL (t = 5)					
			↑↓%	A = 10	↑↓%	A = 100	↑↓%	A = 1000	↑↓%
<i>Susceptible(S)</i>	13250	7327	↓44,7	11978	↓9,6	11683	↓11,8	10656	↓19,6
<i>Exposed (E)</i>	10500	13122	↑ 25	11698	↑11,4	11830	↑12,7	12329	↑17,4
<i>Infectious (I)</i>	1000	254	↑74,6	37	↓96,3	63	↓93,7	101	↓89,9
<i>Treated(T)</i>	250	3215	↑1186,4	1228	↑391,2	1357	↑442,8	1817	↑626,8
<i>Populasi Total (N)</i>	25000	23918	↓4,3	24941	↓0,2	24933	↓0,3	24903	↓0,4
Keterangan : satuan dalam Individu									

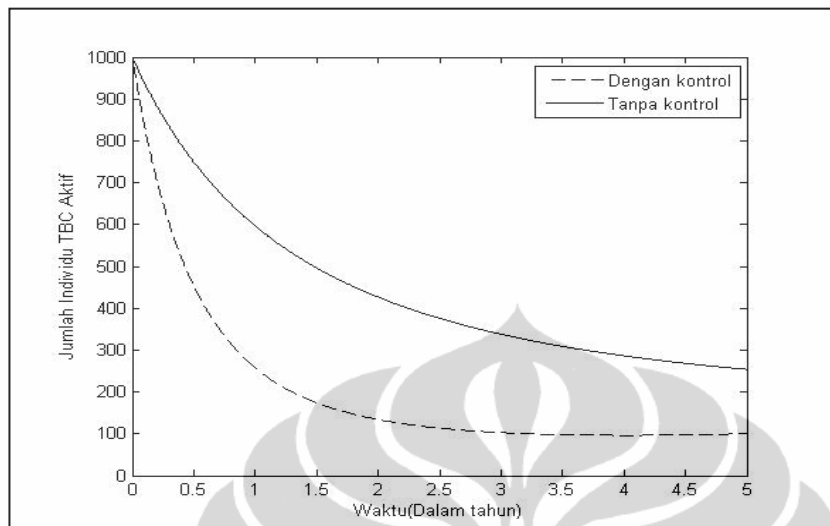
Data Tabel 3.3 menyajikan perbandingan jumlah individu tiap kelas pada tahun kelima sistem dengan kontrol dibandingkan jumlah tiap individu pada tahun kelima tanpa kontrol

Tabel 3.3 Perbandingan jumlah individu tiap kelas pada sistem tanpa kontrol dan dengan kontrol

PARAMETER EPIDEMIK	TANPA KONTROL	DENGAN KONTROL					
		A = 10	↑↓%	A = 100	↑↓%	A = 1000	↑↓%
<i>Susceptible(S)</i>	7327	11978	↑63,5	11683	↑59,5	10656	↑45,4
<i>Exposed (E)</i>	13122	11698	↓10,9	11830	↓9,8	12329	↓6,0
<i>Infectious (I)</i>	254	37	↓85,4	63	↓75,2	101	↓60,2
<i>Treated(T)</i>	3215	1228	↓61,8	1357	↓57,8	1817	↓43,5
<i>Populasi Total (N)</i>	23918	24941	↑4,3	24933	↑4,2	24903	↑4,1
Ket. : satuan dalam Individu							

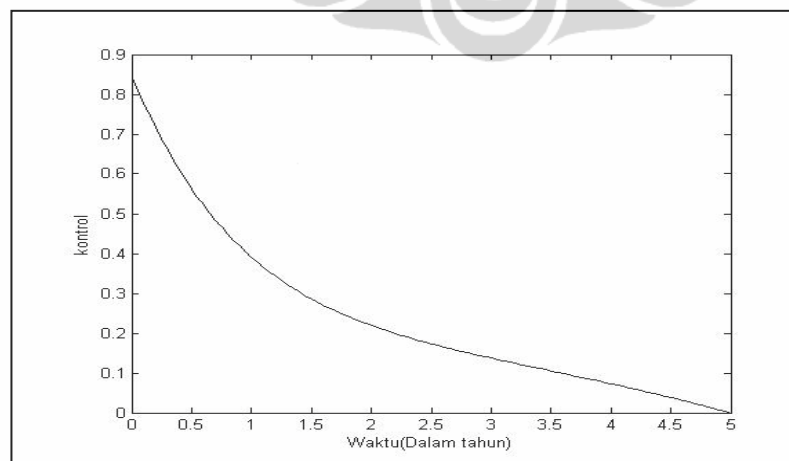
Untuk lebih jelas hasil simulasi masing-masing kasus ditampilkan dalam grafik berikut :

Kasus 1 dengan nilai parameter $A = 1000$



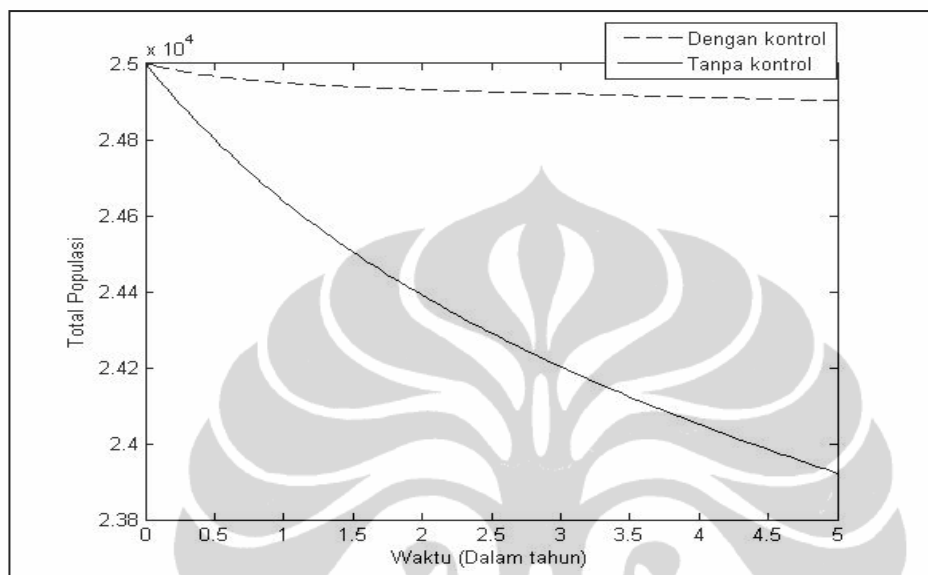
Gambar 3.1. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)

Pada Gambar 3.1. dan Tabel 3.3 . sistem tanpa kontrol jumlah individu TBC aktif pada akhir periode waktu (5 tahun) sebesar 254 Individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu TBC aktif sebesar 101 Individu artinya control dapat mereduksi jumlah individu sebesar TBC aktif 60,2 % .



Gambar 3.2 Simulasi kontrol penanganan TBC (u)

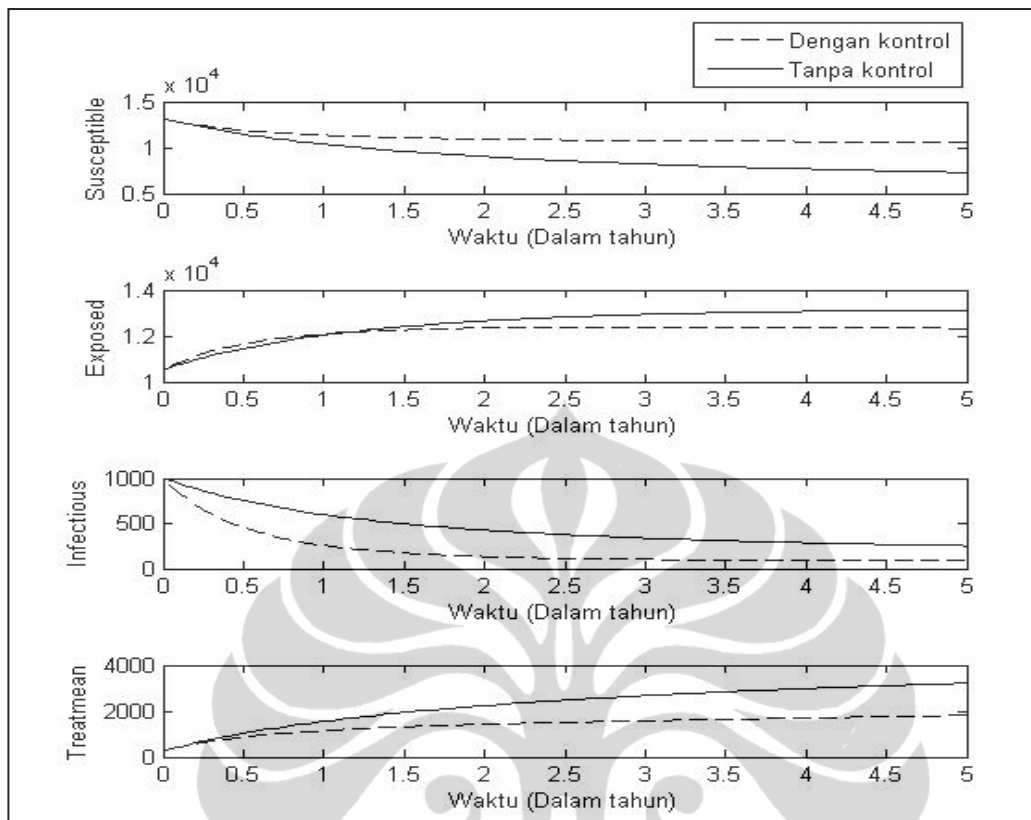
Pada eksperimen dengan parameter $A = 1000$ Gambar 3.2. nilai fungsi kontrol yang diterapkan berkisar $0 \leq u \leq 0,85$, mampu menurunkan jumlah individu TBC aktif sebesar 89,9% dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populasi.



Gambar 3.3. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)

Pada Gambar 3.3. dan Tabel 3.2. sistem dengan kontrol, jumlah populasi hanya berkurang sebesar 0,4% yaitu 97 Individu. Pada awal sistem populasi berjumlah 25.000 individu sedangkan pada akhir periode waktu (5 tahun) berjumlah 24903, artinya sistem relatif dapat mempertahankan jumlah populasinya.

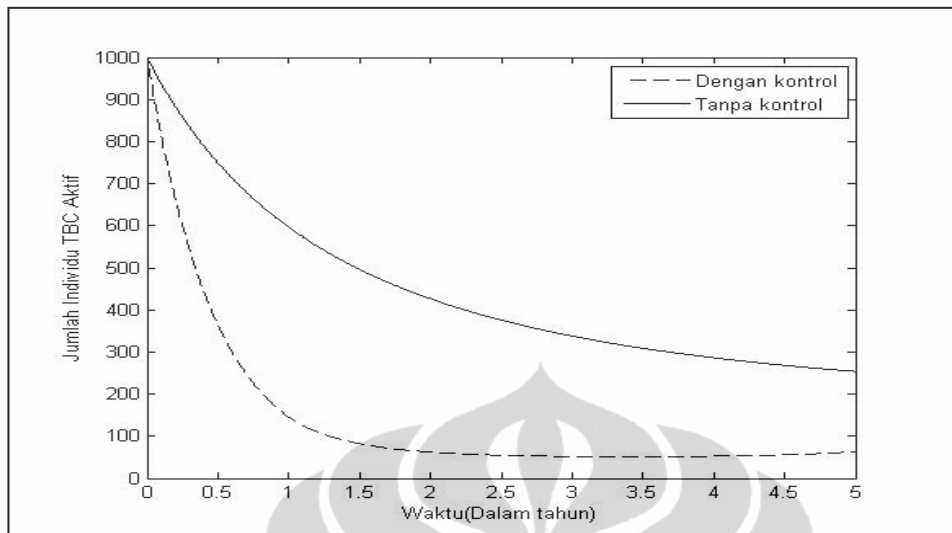
Selanjutnya dari hasil simulasi pada Gambar 3.4. dan Tabel 3.2. fungsi kontrol berjalan sangat efektif terlihat terjadi penurunan jumlah individu TBC aktif yang signifikan dari awal pengontrolan diterapkan hingga interval waktu 5 tahun. Pada eksperimen ini terlihat jumlah individu rentan ($S(t)$) hanya berkurang 19,6%, jumlah individu TBC laten ($E(t)$) menurun 17,4% sedangkan jumlah individu sembuh ($T(t)$) meningkat 626,8%.



Gambar 3.4. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$), individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)

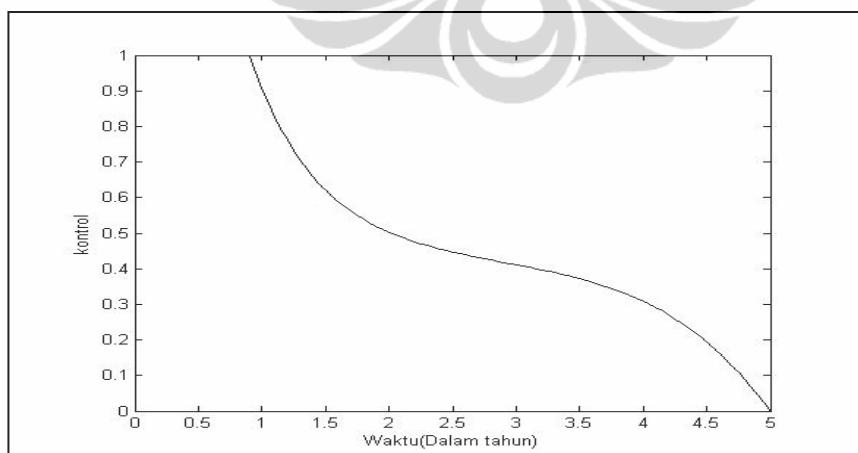
Dari hasil simulasi pada Gambar 3.4. dan Tabel 3.3. sistem tanpa kontrol jumlah individu sembuh hasil pengobatan pada akhir tahun ke-5 sebesar 3215 individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu sehat hasil pengobatan sebesar 1817 individu, artinya dapat mereduksi individu 43,5 %, dapat diinterpretasikan dapat menghemat biaya pengobatan sebesar 43,5 %.

Kasus 2 dengan nilai parameter $A = 100$



Gambar 3.5. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)

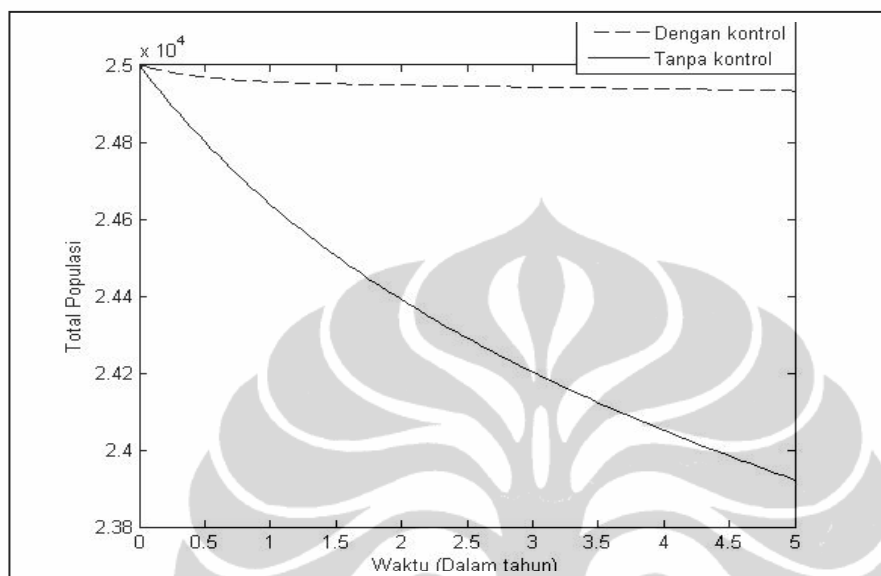
Pada Gambar 3.5. dan Tabel 3.3. sistem tanpa kontrol jumlah individu TBC aktif pada akhir periode waktu (5 tahun) sebesar 254 Individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu TBC aktif sebesar 63 Individu artinya dapat mereduksi jumlah individu TBC aktif 75,2 % .



Gambar 3.6. Simulasi kontrol penanganan TBC (u)

Pada eksperimen dengan parameter $A = 100$ Gambar 3.6. nilai fungsi kontrol yang diterapkan berkisar $0 \leq u \leq 1$, dengan menggunakan kontrol

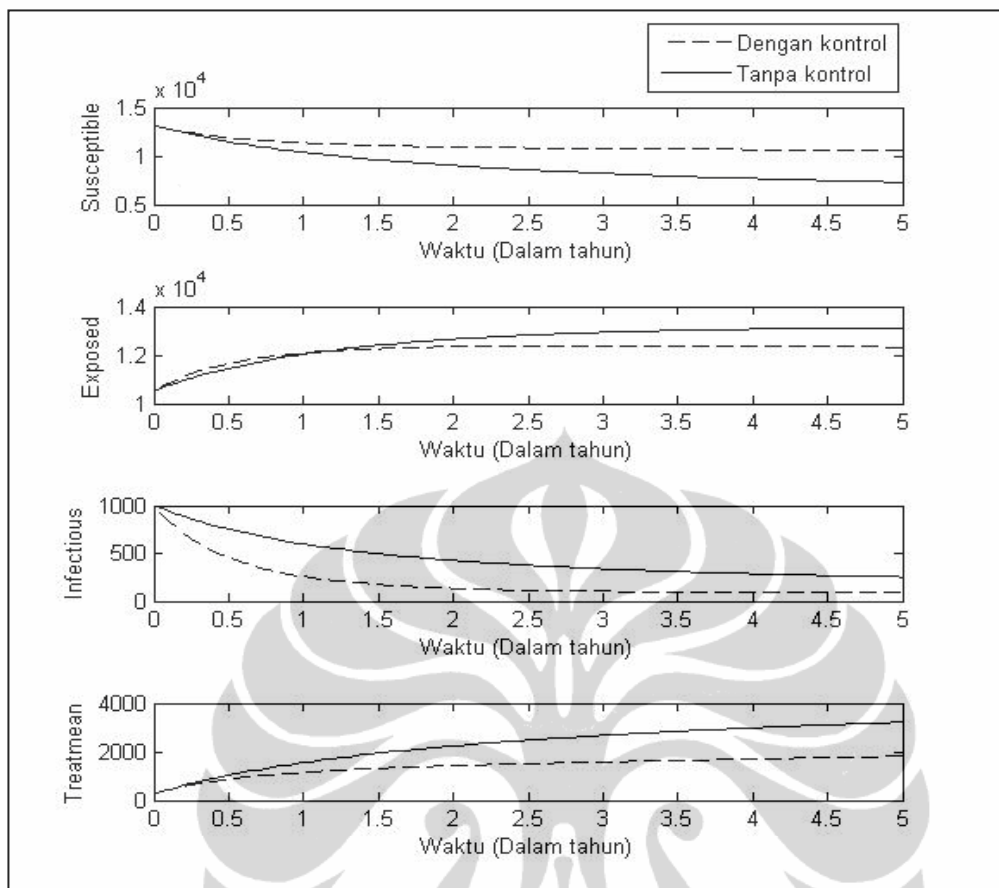
maksimal pada awal periode kurang dari 1 tahun. Untuk selanjutnya sistem tidak menerapkan kontrol maksimal yang mungkin bisa diterapkan, mampu menurunkan jumlah individu TBC aktif sebesar 93,7 % dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populasinya.



Gambar 3.7. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)

Pada Gambar 3.7. dan Tabel 3.2. sistem dengan kontrol, jumlah populasi hanya berkurang sebesar 0,3% yaitu 67 Individu. Pada awal sistem populasi berjumlah 25.000 individu sedangkan pada akhir periode waktu (5 tahun) berjumlah 24933, artinya sistem relatif dapat mempertahankan jumlah populasinya.

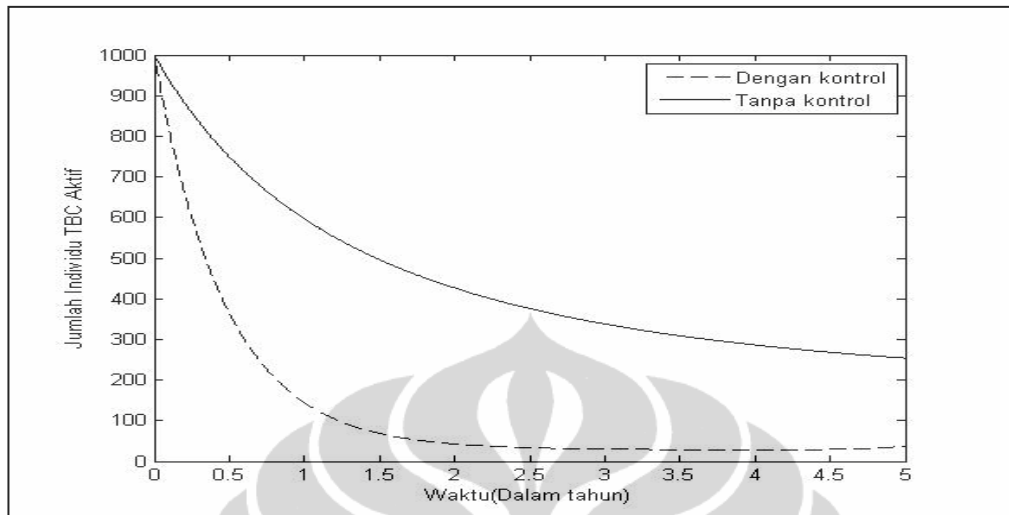
Selanjutnya dari hasil simulasi pada Gambar 3.8. dan Tabel 3.2. fungsi kontrol berjalan sangat efektif terlihat terjadi penurunan jumlah individu TBC aktif yang signifikan dari awal pengontrolan diterapkan hingga interval waktu 5 tahun. Pada eksperimen ini terlihat jumlah individu rentan ($S(t)$) hanya berkurang 11,8 % , jumlah individu TBC laten ($E(t)$) menurun 12,7 % sedangkan jumlah individu sembuh ($T(t)$) meningkat 442,8 % .



Gambar 3.8. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$), individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)

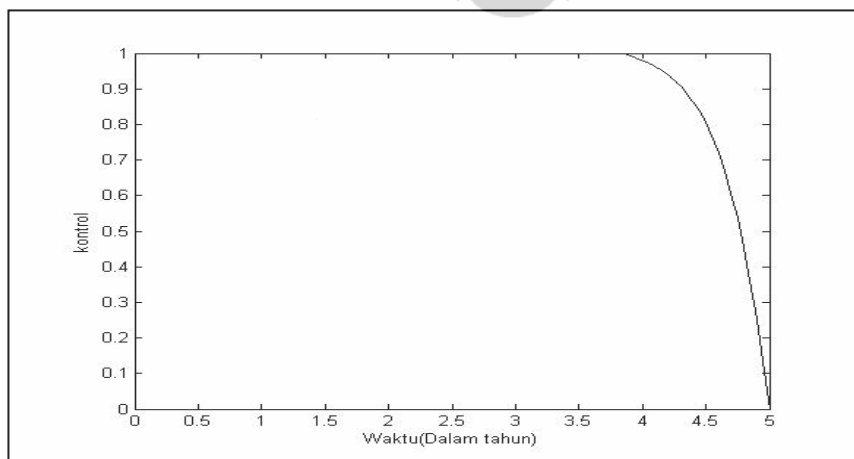
Dari hasil simulasi pada Gambar 3.8. dan Tabel 3.3. sistem tanpa kontrol jumlah individu sembuh hasil pengobatan pada akhir tahun ke-5 sebesar 3215 individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu sehat hasil pengobatan sebesar 1357 individu, artinya dapat mereduksi individu 57,8 %, dapat diinterpretasikan dapat menghemat biaya pengobatan sebesar 57,8 %.

Kasus 3 dengan nilai parameter $A = 10$



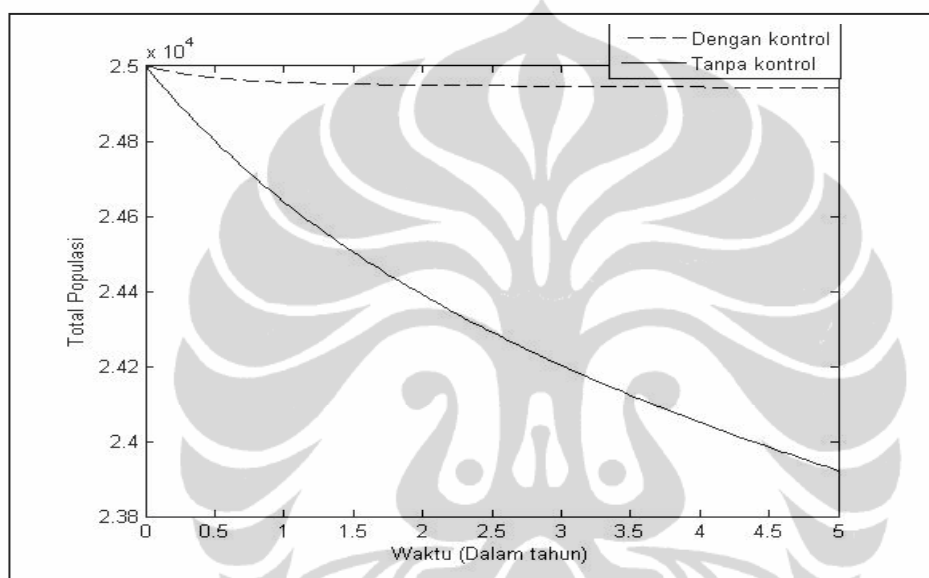
Gambar 3.9. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)

Pada Gambar 3.9. dan Tabel 3.3. sistem tanpa kontrol jumlah individu TBC aktif pada akhir periode waktu (5 tahun) sebesar 254 Individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu TBC aktif sebesar 63 Individu artinya dapat mereduksi individu TBC aktif 85,4 %, dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populasinya



Gambar 3.10 Simulasi kontrol penanganan TBC (u)

Pada eksperimen dengan parameter $A = 10$ Gambar 3.10. nilai fungsi kontrol yang diterapkan berkisar $0 \leq u \leq 1$, dengan menggunakan kontrol maksimal pada periode hampir selama 4 tahun. Untuk selanjutnya sistem tidak menerapkan kontrol maksimal yang mungkin bisa diterapkan, mampu menurunkan jumlah individu TBC aktif sebesar 96,3% dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populasinya.

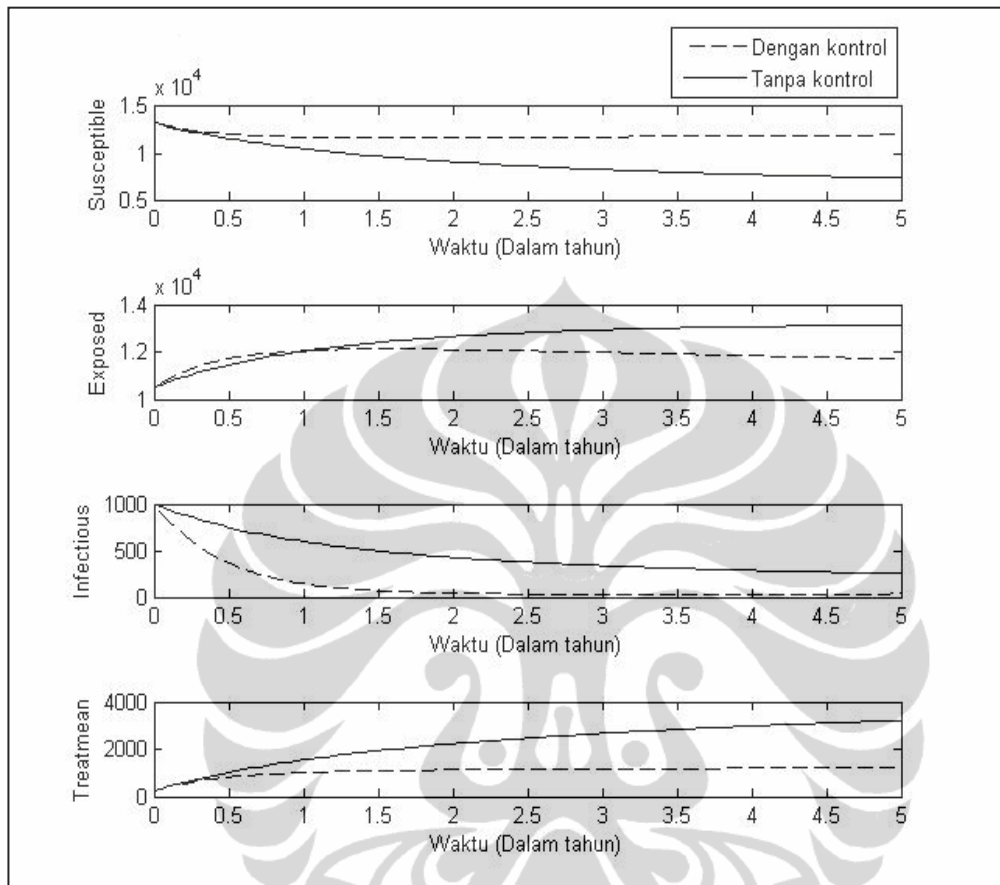


Gambar 3.11. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)

Pada Gambar 3.11. dan Tabel 3.2. sistem dengan kontrol, jumlah populasi hanya berkurang sebesar 0,2% yaitu 59 individu. Pada awal sistem populasi berjumlah 25.000 individu sedangkan pada akhir periode waktu (5 tahun) berjumlah 24941, artinya sistem relatif dapat mempertahankan jumlah populasinya.

Selanjutnya dari hasil simulasi pada Gambar 3.12. dan Tabel 3.2. fungsi kontrol berjalan sangat efektif terlihat terjadi penurunan jumlah individu TBC aktif yang signifikan dari awal pengontrolan diterapkan hingga interval waktu 5 tahun. Pada eksperimen ini terlihat jumlah individu rentan ($S(t)$) hanya berkurang

9,6 % , jumlah individu TBC laten ($E(t)$) menurun 11,4 % sedangkan jumlah individu sembuh ($T(t)$) meningkat 391,2 % .



Gambar 3.12. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($E(t)$) , individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)

Dari hasil simulasi pada Gambar 3.12. dan Tabel 3.3. sistem tanpa kontrol jumlah individu sembuh hasil pengobatan pada akhir tahun ke-5 sebesar 3215 individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu sehat hasil pengobatan sebesar 1228 individu, artinya dapat mereduksi individu 61,8 % , dapat diinterpretasikan dapat menghemat biaya pengobatan sebesar 61,8 %.

Kesimpulan dari kasus 1 , 2 dan 3

Dari ketiga kasus eksperimen yang dilakukan dengan mengganti nilai parameter A yaitu 10 , 100 dan 1000 yang merupakan variabel bobot biaya pengendalian sistem, dari hasil simulasi didapat pada saat parameter $A = 10$ pengontrolan mencapai hasil paling baik dibanding yang lain. Namun demikian perlu dipertimbangkan faktor biaya pengontrolan yang relatif lebih tinggi hal ini terlihat dari nilai fungsi kontrol yang digunakan. Jika dibandingkan saat $A = 100$ dan $A = 1000$ pencapaian dari pengontrolan tidak berbeda jauh dengan hasil pada saat $A = 10$, dengan keuntungan yang didapat biaya pengendalian relatif lebih rendah.

Strategi penggunaan kontrol sebagai pengendalian faktor *exogenous reinfection*, adalah dengan melihat dan mempertimbangkan tahap-tahap pengontrolan yang tepat dan pemberian kontrol yang sesuai sehingga hasil yang didapat optimal yaitu efisiensi biaya seminimal mungkin dan mampu dengan efektif menekan individu TBC aktif (*infectious*).

3.2.2.2 Simulasi Numerik untuk $c = 0,3$

Dari Tabel 3.1 diatas dapat dihitung *basic reproduction ratio* (R_0)

$$R_0 = \left(\frac{\beta c}{\mu + r + d} \right) \left(\frac{k}{\mu + k} \right) = \left(\frac{(80)(0,3)}{0,0167 + 2 + 0,1} \right) \left(\frac{0,005}{0,0167 + 0,005} \right) = 2,62 > 1 ,$$

Setelah dilakukan simulasi numerik didapat data sebagai berikut

Tabel 3.4, Tabel 3.5 dan Gambar 3.13 sampai dengan 3.24 sebagai berikut :

Tabel 3.4. menyajikan perubahan jumlah individu tiap kelas pada tahun kelima tanpa kontrol dan dengan kontrol dibandingkan jumlah individu tiap kelas pada keadaan awal.

Tabel 3.4. Perubahan jumlah individu tiap kelas keadaan awal, tanpa kontrol dan dengan kontrol

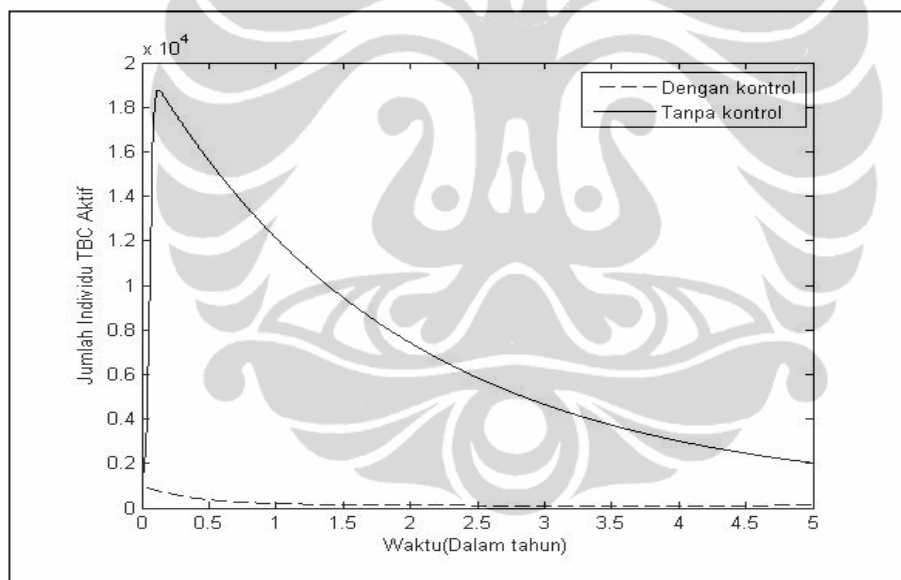
PARAMETER EPIDEMIK	AWAL (t= 0)	TANPA KONTROL (t = 5)		DENGAN KONTROL (t = 5)					
			↑↓%	A= 10	↑↓%	A = 100	↑↓%	A = 1000	↑↓%
<i>Susceptible(S)</i>	13250	24	↓99,8	8403	↓36,6	8052	↓39,2	6407	↓51,6
<i>Exposed (E)</i>	10500	514	↓95,1	15440	↑47,0	15646	↑49,0	17022	↑62,1
<i>Infectious (I)</i>	1000	2033	↑103,3	46	↓95,4	139	↓86,1	172	↓82,8
<i>Treated(T)</i>	250	263	↑5,2	1048	↑319,2	1097	↑338,8	1308	↑423,2
<i>Populasi Total (N)</i>	25000	2834	↓88,7	24937	↓0,3	24934	↓0,3	24909	↓0,4
Keterangan : satuan dalam Individu									

Pada Tabel 3.5. menyajikan perbandingan jumlah individu tiap kelas pada tahun kelima sistem dengan kontrol dibandingkan jumlah tiap individu pada tahun kelima tanpa kontrol.

Tabel 3.5 Perbandingan jumlah individu tiap kelas tanpa kontrol dan dengan kontrol

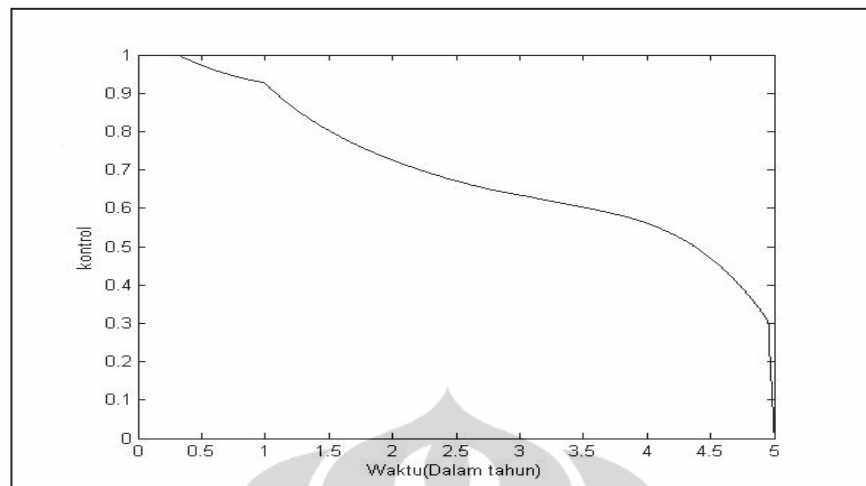
PARAMETER EPIDEMIK	TANPA KONTROL	DENGAN KONTROL					
		A= 10	↑↓%	A = 100	↑↓%	A = 1000	↑↓%
<i>Susceptible(S)</i>	24	8403	↑34912,5	8052	↑33450	6407	↑3190,8
<i>Exposed (E)</i>	514	15440	↑2903,9	15646	↑2944	17022	↑296,1
<i>Infectious (I)</i>	2033	46	↓97,7	139	↓93,2	172	↓88,4
<i>Treated(T)</i>	263	1048	↓298,5	1097	↓317,1	1308	↓39,9
<i>Populasi Total (N)</i>	2834	24937	↑779,9	24934	↑779,8	24909	↑778,9
Keterangan : satuan dalam Individu							

Kasus 1 dengan nilai parameter A = 1000



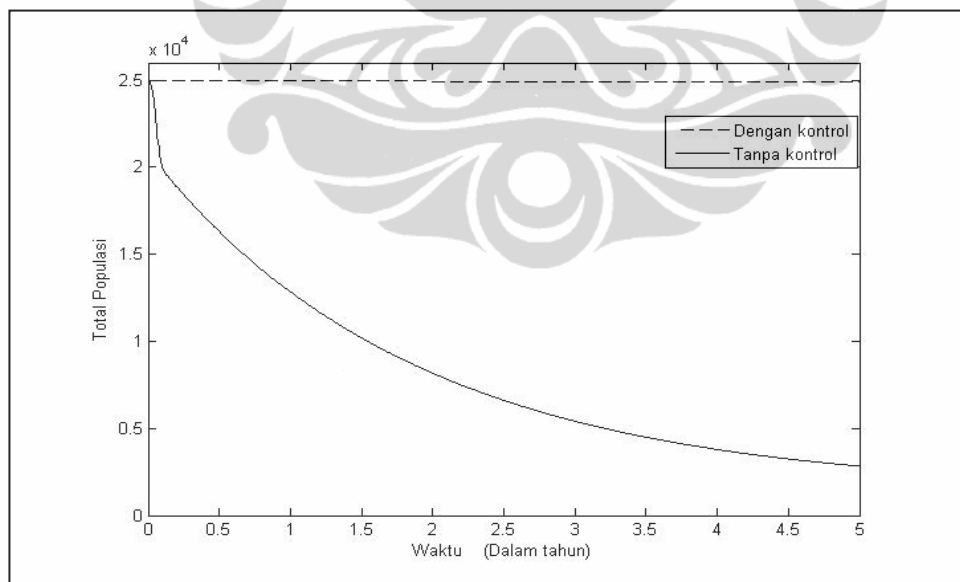
Gambar 3.13. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$).

Pada Gambar 3.13. dan Tabel 3.5. sistem tanpa kontrol jumlah individu TBC aktif pada akhir periode waktu (5 tahun) sebesar 2033 individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu TBC aktif sebesar 172 Individu artinya dapat mereduksi individu TBC aktif 91,5 % .



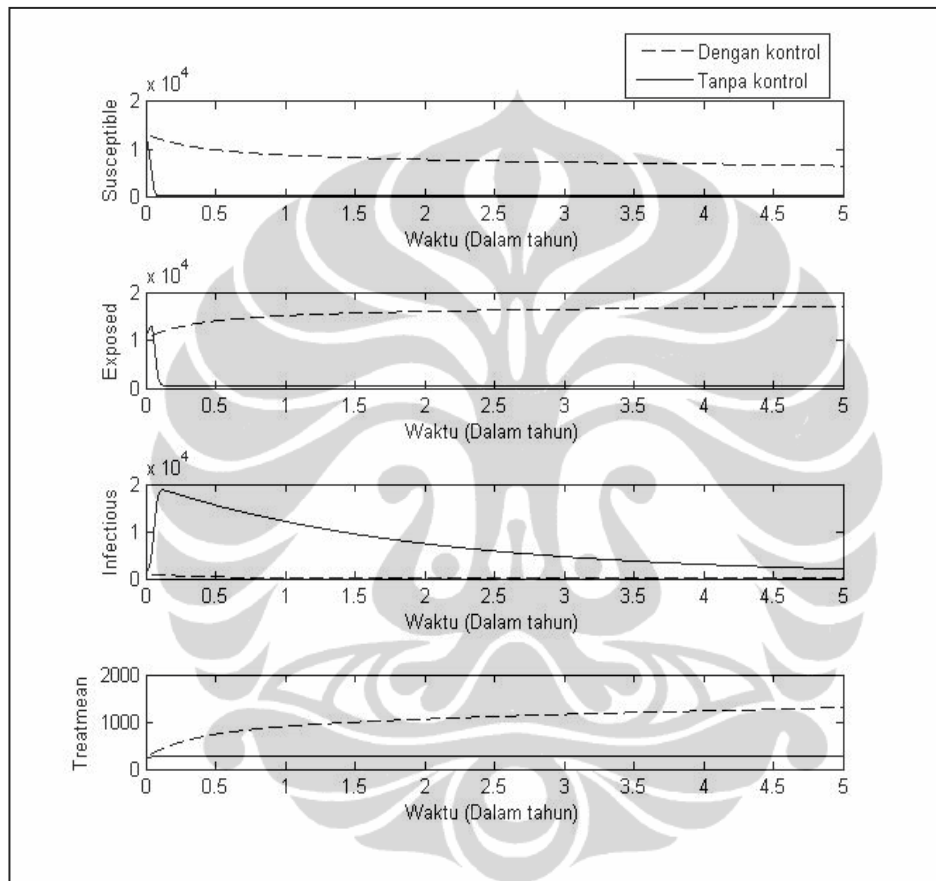
Gambar 3.14. Simulasi kontrol penanganan TBC (u)

Pada simulasi dengan parameter $A = 1000$ terlihat pada Gambar 3.14. fungsi kontrol yang diterapkan berkisar $0 \leq u \leq 1$, dengan menggunakan kontrol maksimal pada awal periode kurang 0,5 tahun, untuk selanjutnya sistem tidak menerapkan pengontrolan maksimal yang mungkin biasa diterapkan, mampu menurunkan jumlah individu TBC aktif sebesar 82,8 %, dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populasinya



Gambar 3.15. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)

Pada Gambar 3.15. dan Tabel 3.4. sistem dengan kontrol jumlah populasi hanya berkurang sebesar 0,4% yaitu 91 individu. Pada awal sistem populasi berjumlah 25.000 individu sedangkan pada akhir periode waktu (5 tahun) berjumlah 24909, artinya sistem relatif dapat mempertahankan jumlah populasinya.



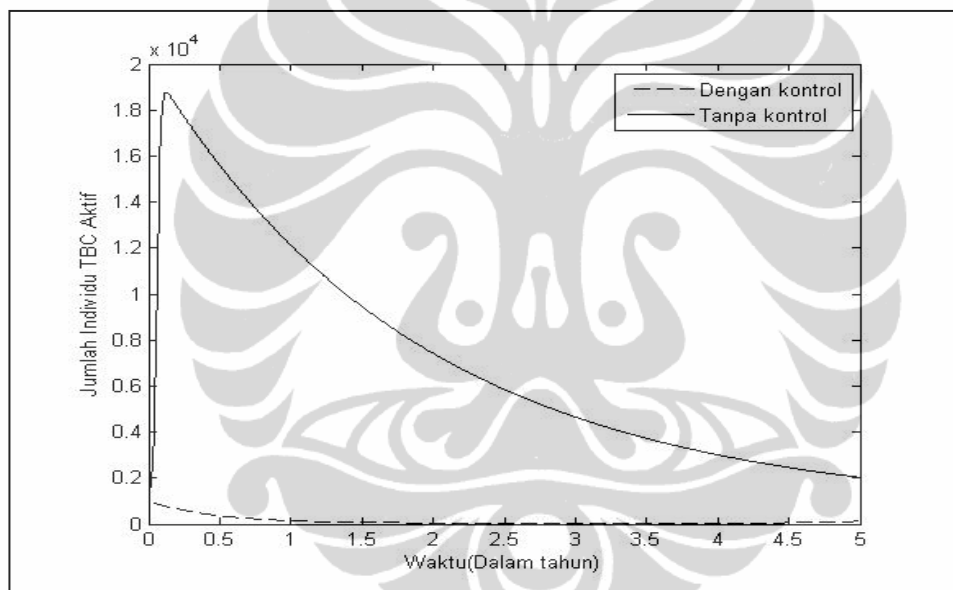
Gambar 3.16 Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($S(t)$), individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)

Dari hasil simulasi pada Gambar 3.16. dan Tabel 3.4. fungsi kontrol berjalan sangat efektif terlihat terjadi penurunan jumlah individu TBC aktif yang signifikan dari awal pengontrolan diterapkan hingga interval waktu 5 tahun. Pada simulasi ini terlihat jumlah individu rentan ($S(t)$) hanya berkurang 51,6 % ,

jumlah individu TBC laten ($E(t)$) meningkat 62,1 % sedangkan jumlah individu sembuh ($T(t)$) meningkat 423,2 % .

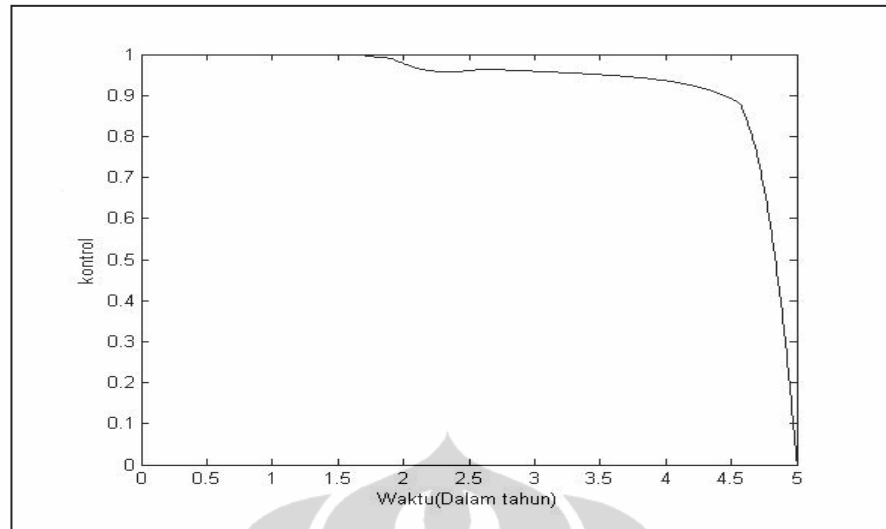
Dari hasil simulasi pada Gambar 3.16. dan Tabel 3.5. sistem tanpa kontrol jumlah individu sembuh hasil pengobatan pada akhir tahun ke-5 sebesar 263 Individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu sehat hasil pengobatan sebesar 1380 Individu, artinya dapat individu yang sembuh diobati meningkat 397,3% , dapat diinterpretasikan dapat biaya pengobatan meningkat sebesar 397.3%. Kondisi ini karena populasi dapat mempertahankan jumlahnya.

Kasus 2 dengan nilai parameter $A = 100$



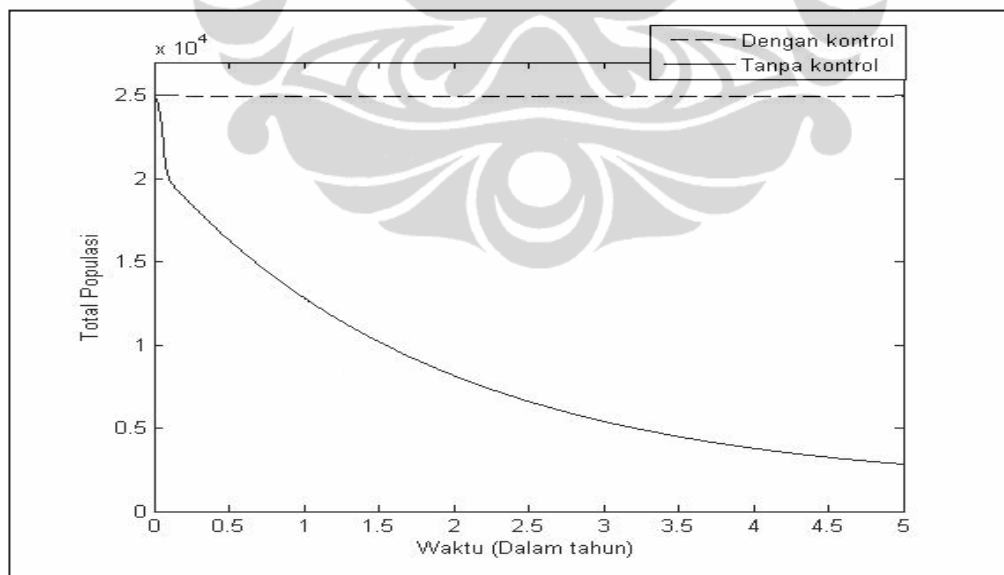
Gambar 3.17. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)

Pada Gambar 3.17. dan Tabel 3.5. sistem tanpa kontrol jumlah individu TBC aktif pada akhir periode waktu (5 tahun) sebesar 2033 individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu TBC aktif sebesar 139 Individu artinya dapat mereduksi individu TBC aktif 93,2 % , dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populasinya.



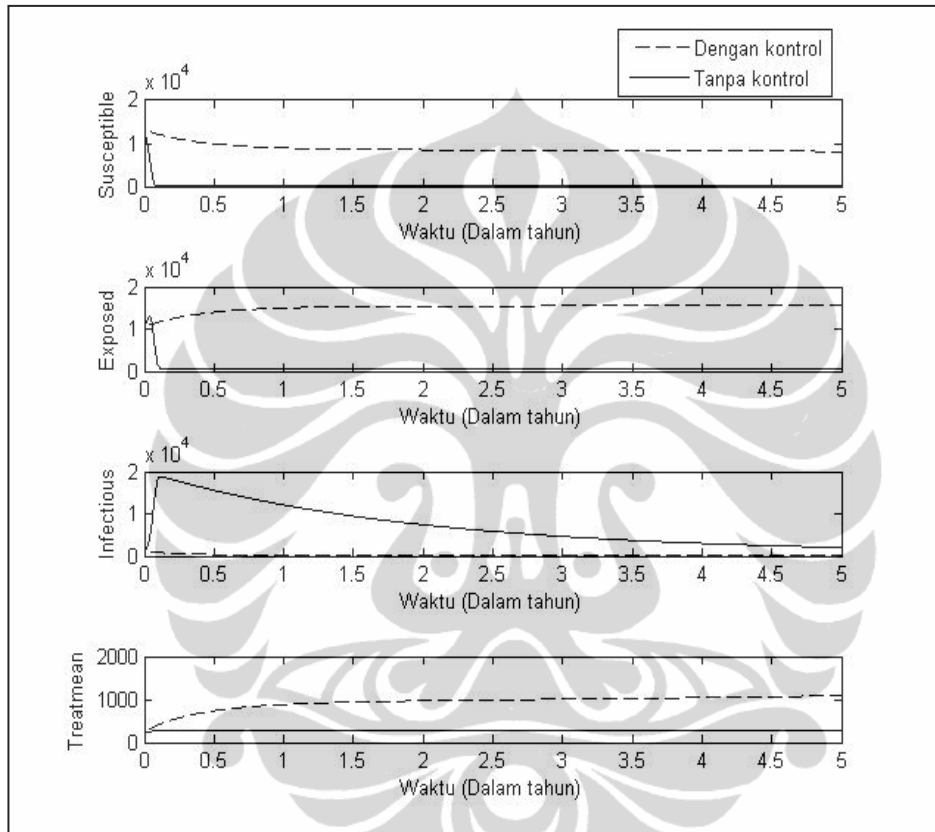
Gambar 3.18. Simulasi kontrol penanganan TBC (u)

Pada simulasi dengan parameter $A = 100$ terlihat pada Gambar 3.18 nilai fungsi kontrol yang diterapkan berkisar $0 \leq u \leq 1$, dengan menggunakan kontrol maksimal pada awal periode kurang 2 tahun, untuk selanjutnya sistem tidak menerapkan pengontrolan maksimal yang mungkin biasa diterapkan, mampu menurunkan jumlah individu TBC aktif sebesar 86,1 %, dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populsinya.



Gambar 3.19. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)

Pada Gambar 3.19. dan Tabel 3.4. sistem dengan kontrol jumlah populasi hanya berkurang sebesar 0,3% yaitu 64 Individu. Pada awal sistem populasi berjumlah 25.000 Individu sedangkan pada akhir periode waktu (5 tahun) berjumlah 24934, artinya sistem relatif dapat mempertahankan jumlah populasinya.



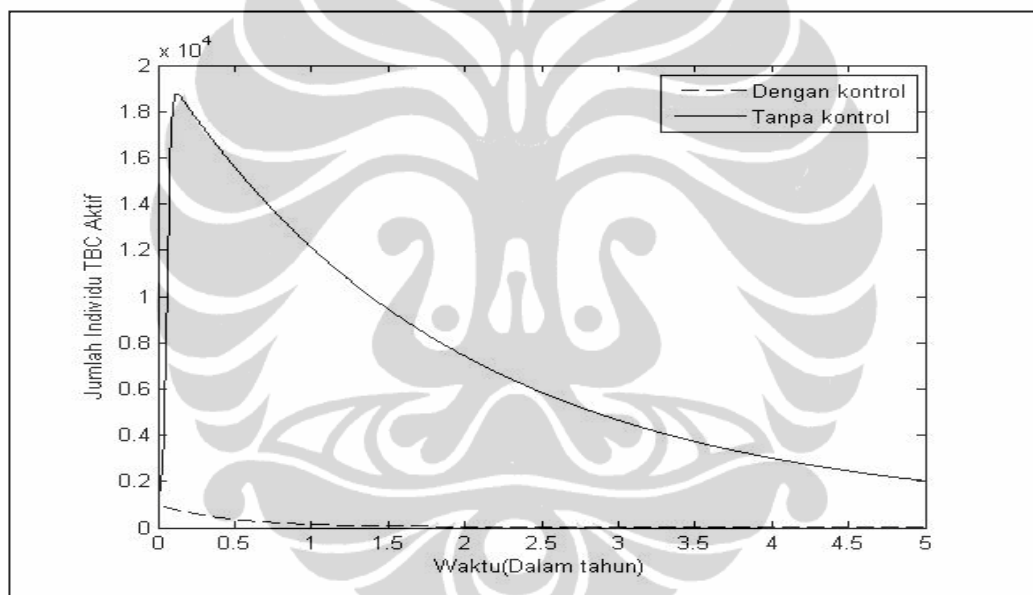
Gambar 3.20. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($S(t)$), individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)

Dari hasil simulasi pada Gambar 3.20. dan Tabel 3.4. fungsi kontrol berjalan sangat efektif terlihat terjadi penurunan jumlah individu TBC aktif yang signifikan dari awal pengontrolan diterapkan hingga interval waktu 5 tahun. Pada simulasi ini terlihat jumlah individu rentan ($S(t)$) hanya berkurang 39,2% ,

jumlah individu TBC laten ($E(t)$) meningkat 49,0 % sedangkan jumlah individu sembuh ($T(t)$) meningkat 338,8 % .

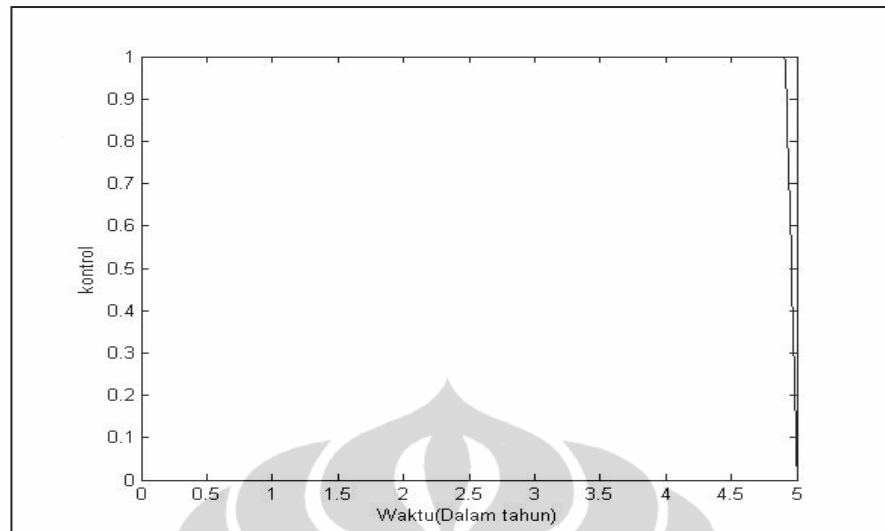
Dari hasil simulasi pada Gambar 3.20. dan Tabel 3.4. sistem tanpa kontrol jumlah individu sembuh hasil pengobatan pada akhir tahun ke-5 sebesar 263 individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu sehat hasil pengobatan sebesar 1097 individu. Artinya individu yang sembuh diobati meningkat 338,8% , dapat diinterpretasikan dapat biaya pengobatan meningkat sebesar 338,8%, kondisi ini karena populasi dapat mempertahankan jumlahnya.

Kasus 3 dengan nilai parameter $A = 10$



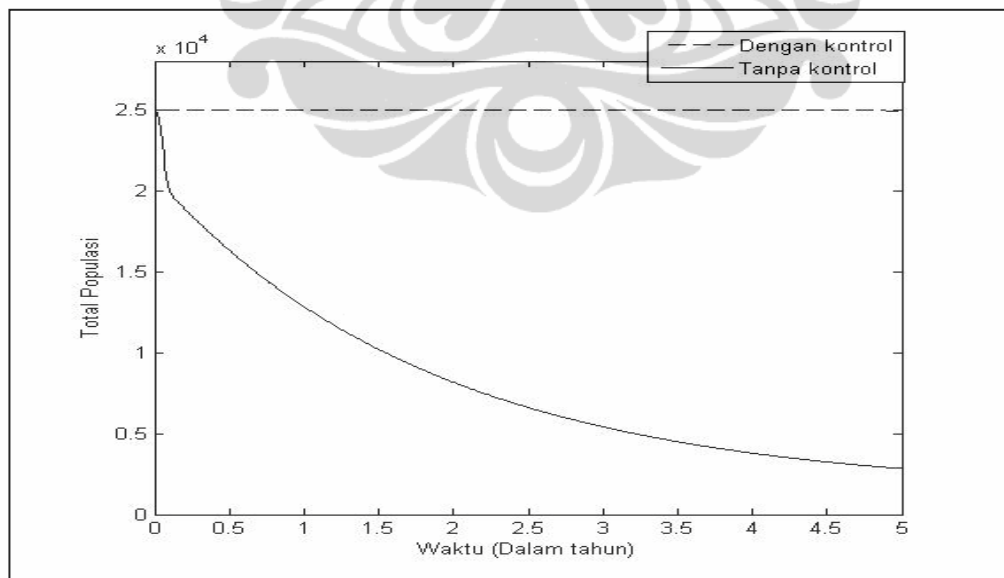
Gambar 3.21. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu TBC aktif ($I(t)$)

Pada Gambar 3.21. dan Tabel 3.5. sistem tanpa kontrol jumlah individu TBC aktif pada akhir periode waktu (5 tahun) sebesar 2033 individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu TBC aktif sebesar 139 Individu artinya dapat mereduksi individu TBC aktif 97,7 % dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populasinya.



Gambar 3.22. Simulasi kontrol penanganan TBC (u)

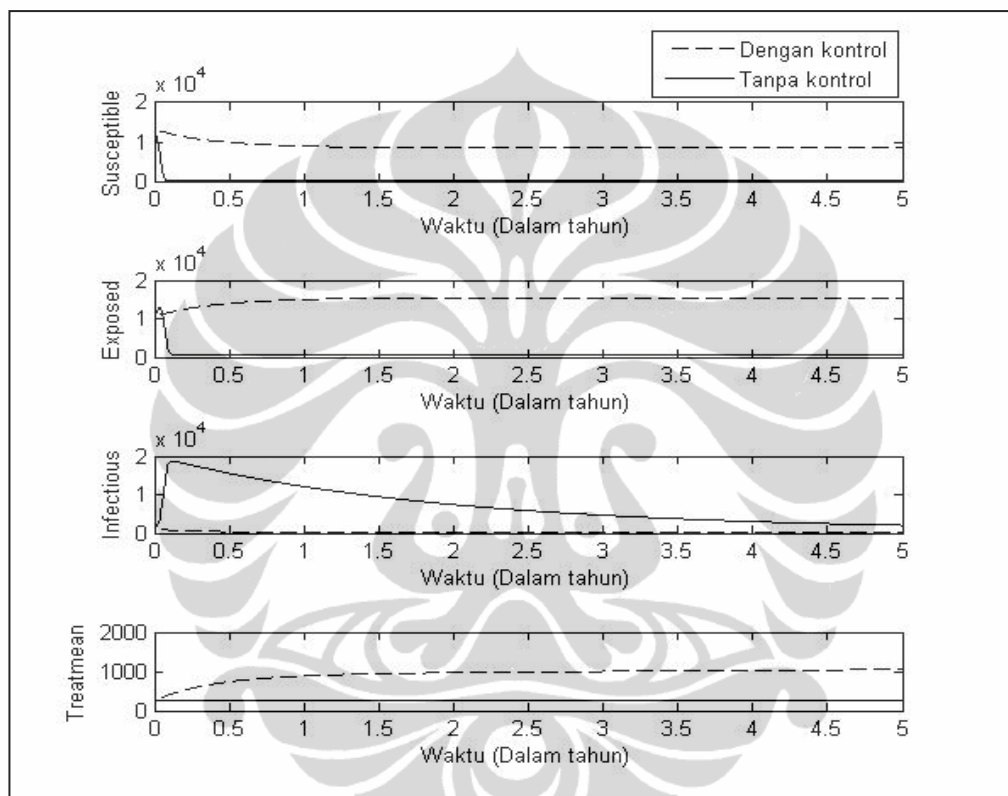
Pada simulasi dengan parameter $A = 10$ terlihat pada Gambar 3.18. fungsi kontrol yang diterapkan berkisar $0 \leq u \leq 1$, dengan menggunakan kontrol maksimal hampir selama periode 5 tahun, mampu menurunkan jumlah individu TBC aktif sebesar 95,4 %, dengan relatif tetap mempertahankan jumlah populasinya.



Gambar 3.23. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1. yang membandingkan antara pengaruh

pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada jumlah anggota populasi ($N(t)$)

Pada Gambar 3.23. dan Tabel 3.4. sistem dengan kontrol jumlah populasi hanya berkurang sebesar 0,3% yaitu 63 Individu. Pada awal sistem populasi berjumlah 25.000 Individu sedangkan pada akhir periode waktu (5 tahun) berjumlah 24937, artinya sistem relatif dapat mempertahankan jumlah populasinya.



Gambar 3.24. Simulasi dari model Epidemik TBC dengan data parameter dari Tabel 3.1 yang membandingkan antara pengaruh pemberian kontrol u dengan tanpa kontrol pada individu rentan ($S(t)$), Individu TBC laten ($S(t)$), individu TBC aktif ($I(t)$) dan individu sembuh dari TBC ($T(t)$)

Dari hasil simulasi pada Gambar 3.24. dan Tabel 3.4. fungsi kontrol berjalan sangat efektif terlihat terjadi penurunan jumlah individu TBC aktif yang signifikan dari awal pengontrolan diterapkan hingga interval waktu 5 tahun. Pada simulasi ini terlihat jumlah individu rentan ($S(t)$) hanya berkurang 36.6% ,

jumlah individu TBC laten ($E(t)$) meningkat 47 % sedangkan jumlah individu sembuh ($T(t)$) meningkat 319,2 % .

Dari hasil simulasi pada Gambar 3.24. dan Tabel 3.4. sistem tanpa kontrol jumlah individu sembuh hasil pengobatan pada akhir tahun ke-5 sebesar 263 Individu sedangkan pada sistem dengan kontrol jumlah individu sehat hasil pengobatan sebesar 1098 Individu, artinya dapat individu yang sembuh diobati meningkat 319,2% , dapat diinterpretasikan dapat biaya pengobatan meningkat sebesar 319,2%. Kondisi ini karena populasi dapat mempertahankan jumlahnya

Kesimpulan dari kasus 1 , 2 dan 3

Dari ketiga kasus eksperimen yang dilakukan dengan mengganti nilai parameter A yaitu 10 , 100 dan 1000 yang merupakan variabel bobot biaya pengontrolan sistem, dari hasil simulasi didapat pada saat parameter $A = 10$ pengontrolan mencapai hasil paling baik dibanding yang lain. Namun demikian perlu dipertimbangkan faktor biaya pengontrolan yang relatif lebih tinggi hal ini terlihat dari nilai fungsi kontrol yang digunakan. Jika dibandingkan saat $A = 100$ dan $A = 1000$ pencapaian dari pengontrolan tidak berbeda jauh dengan hasil pada saat $A = 10$, dengan keuntungan yang didapat biaya pengontrolan relatif lebih rendah.

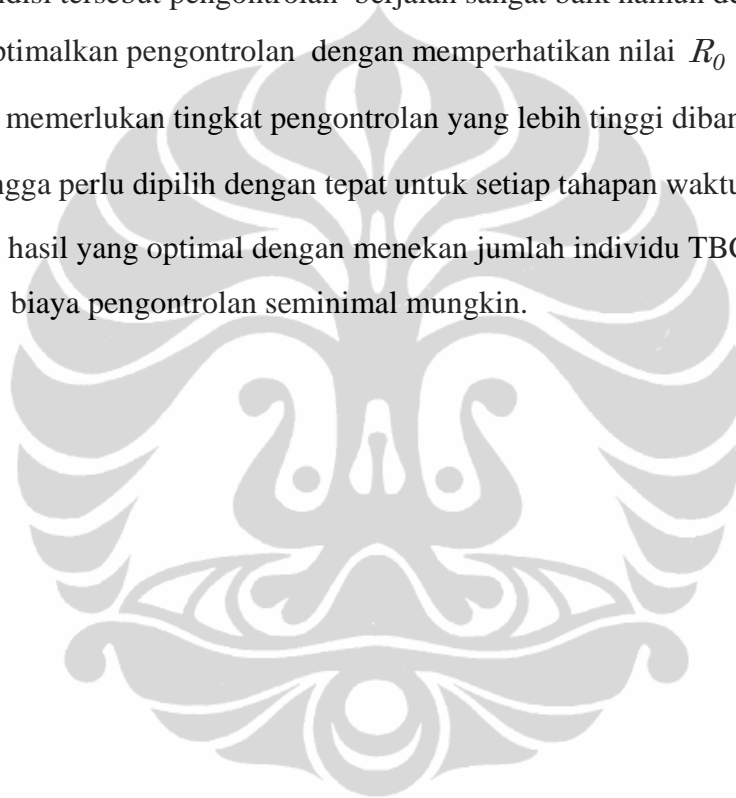
Strategi penggunaan kontrol sebagai pengendalian faktor *exogenous reinfection*, adalah dengan melihat dan mempertimbangkan tahap-tahap pengontrolan yang tepat dan pemberian kontrol yang sesuai sehingga hasil yang didapat optimal yaitu efisiensi biaya seminimal mungkin dan mampu dengan efektif menekan individu TBC aktif.

Kesimpulan 2 simulasi numerik dengan $c = 0,1$ ($R_0 < 1$) dan $c = 0,3$ ($R_0 > 1$)

Dari hasil eksperimen yang disajikan pada tabel dan grafik dari masing-masing kelas populasi terlihat kontrol dapat diterapkan sangat efektif untuk menekan jumlah individu TBC aktif ($I(t)$). Untuk populasi pertama yang datanya disajikan pada Tabel 3.1. untuk nilai parameter $c = 0,3$ didapat

$$R_0 = 2,612 (R_0 > 1) \text{ dan untuk nilai parameter } c = 0,1 \quad R_0 = 0,871 (R_0 < 1)$$

untuk dua kondisi tersebut pengontrolan berjalan sangat baik namun demikian untuk mengoptimalkan pengontrolan dengan memperhatikan nilai R_0 untuk kasus $R_0 > 1$ memerlukan tingkat pengontrolan yang lebih tinggi dibandingkan $R_0 < 1$, sehingga perlu dipilih dengan tepat untuk setiap tahapan waktu untuk menghasilkan hasil yang optimal dengan menekan jumlah individu TBC aktif ($I(t)$), disertai biaya pengontrolan seminimal mungkin.



BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah diberikan sebelumnya, maka secara matematis masalah pengoptimalan pengontrolan penyebaran TBC dengan memperhatikan faktor *Exogenous Reinfection* (terkena infeksi ulang dari luar tubuh penderita) dapat dimodelkan ke dalam sistem diferensial nonlinier order satu sebagai berikut :

$$\text{Min } J[u] = \int_0^T (I + Au^2) dt$$

Model

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \beta c S \frac{I}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta c S \frac{I}{N} - p\beta c (1-u) E \frac{I}{N} - (\mu + k) E + \sigma \beta c T \frac{I}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = p\beta c (1-u) E \frac{I}{N} + k E - (\mu + d + r) I$$

$$\frac{dT}{dt} = r I + -\mu T - \sigma \beta c T \frac{I}{N}$$

$$J[u^*] = \min_{u \in U} J[u], \quad u \in U = \{u(t) | 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$$

Dengan menggunakan Prinsip Maksimum (Minimum) Pontryagin dapat diperoleh fungsi kontrol yang mengoptimalkan fungsi objektif yang dimaksud, yaitu sebagai berikut :

$$u^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{1}{2AN} (\lambda_I - \lambda_E) (p\beta c E^* I^*) \right) \right)$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat dilihat faktor-faktor yang sangat mempengaruhi fungsi kontrol $u(t)$ adalah banyaknya individu TBC laten (*Exposed*), banyaknya individu TBC aktif (*Infectious*), Proporsi individu *exposed* menjadi individu *infectious* (*exogenous reinfection*) (p), Laju kontak per kapita (c)

, Laju Transmisi penginfeksi TBC dari individu rentan (*susceptible*) ke individu TBC laten (*exposed*) dan individu TBC aktif (*Infectious*) (β), dan faktor bobot (A) dari fungsi kontrol yang berkorelasi dengan biaya pengontrolan untuk mengurangi terjadinya *exogenous reinfection* berdasarkan $u(t)$.

Dengan melakukan simulasi menggunakan perangkat lunak (*software*) MATLAB, bisa dilihat banyaknya individu yang terinfeksi TBC akan berkurang lebih banyak bila dilakukan pengontrolan dan dengan berjalannya waktu individu terinfeksi semakin kecil mendekati nol. Keadaan ini karena banyaknya individu yang terinfeksi TBC yang sembuh bertambah, kemudian sistem mampu menekan terjadinya *exogenous reinfection* (terkena infeksi ulang dari luar tubuh penderita), sedemikian sehingga sistem dapat mempertahankan jumlah populasinya.

Dari hasil eksperimen yang disajikan pada tabel dan grafik dari masing-masing kelas populasi terlihat kontrol dapat diterapkan sangat efektif untuk menekan jumlah individu TBC aktif pada tahun kelima terlihat fungsi kontrol yang diterapkan mampu mereduksi jumlah individu TBC aktif rata-rata 93,1% pada kasus $R_0 > 1$ dan mereduksi jumlah individu TBC aktif rata-rata 73,6% pada kasus $R_0 < 1$.

Namun demikian pengontrolan populasi Epidemik TBC agar pengontrolannya efektif dan efisien, mengoptimalkan pengontrolan harus memperhatikan nilai R_0 untuk kasus $R_0 > 1$ memerlukan tingkat pengontrolan yang lebih tinggi dibandingkan $R_0 < 1$, ***sehingga perlu dipilih dengan tepat untuk setiap tahapan waktu untuk menghasilkan hasil yang optimal dengan menekan jumlah individu TBC aktif, disertai biaya pengontrolan seminimal mungkin.***

Dengan demikian strategi untuk pengontrolan optimal Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection* dengan menekan jumlah individu TBC aktif dengan salah satu caranya adalah dengan mereduksi terjadinya *Exogenous Reinfection* (terkena infeksi ulang dari luar tubuh penderita) yaitu dengan mengurangi frekuensi kontak individu TBC laten dan individu TBC aktif.

Kemudian untuk strategi meminimalkan biaya pengontrolan adalah dengan cara dalam keadaan awal periode harus dilakukan intensitas pengendalian maksimal sampai periode tertentu kemudian mengurangi intensitas pengendalian dengan

kadar yang sesuai dengan keadaan populasi. Hal tersebut diharapkan pengontrolan yang dilakukan cukup efektif dan efisien sehingga dapat meminimumkan biaya pengontrolan.

4.2 Saran

Dari hasil simulasi terlihat individu laten dari sistem dengan kontrol meningkat sangat signifikan, kondisi ini menjadi bahaya yang tersembunyi apabila ada imigrasi dari populasi lain dengan masuknya individu TBC aktif atau menurunnya imunitas individu laten dan pengontrolan kontak dengan individu TBC aktif berkurang, kondisi ini dapat menimbulkan pertumbuhan individu TBC aktif akibat infeksi kedua dengan cepat,

Kondisi di atas akan menambah biaya pengobatan yang relatif lebih tinggi, karena ada kemungkinan terjadinya resisten obat. Sehingga menurut penulis model pengontrolan yang hanya menekankan pertumbuhan individu TBC aktif masih belum efektif untuk jangka panjang, oleh sebab itu model tersebut dapat dikembangkan dengan menambahkan fungsi kontrol yang menekan pertumbuhan individu TBC laten.

Daftar Pustaka

- [1] Aparicio, P. J. dan Chaves,C.C. (2009), *Mathematical Modelling for Tuberculosis Epidemic Mathematical Biosciences And Engineering*, Vol. 6, Number 2, April 2009 , 209-237.
- [2] Chaves,C.C. dan Feng, Z (2000), “A Model for TBC with Exogeneous Reinfecion “,Theor. Pop. Biol. 57, 235.
- [3] Choi ,S., Jung, E. dan Chaves,C.C. (2009), *Optimal Treatment Strategies for Tuberculosis with Exogenous Reinfecion, Nasional Science Foundation (NSF – Grant DMPS 0838705)*.
- [4] Chapra, S.C. dan . Canale, R.P, (1985). “*Numerical Methods for Engineers*”, McGraw – Hill Book Company,USA.
- [5] Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. USA: CRC Presses LCC.
- [6] Hethcote, H.W. (2008). *The Basic Epidemiology Model, Expressions for R_0 , Parameter Estimation, and Applications*. Mathematical Understanding of Infectious Disease Dynamics, Lecture Note Series(Vol 16) , Institute for Mathematical Sciences, National Univesity of Singapura
<http://www.worldscibooks.com/mathematics/7020.html>
- [7] Hattaf, K., Rachik, M., Saadi, S. , Tabit, Y. dan Yousfi, N. (2009)
“*Optimal Control of Tuberculosis with Exogenous Reinfecion*”, Jurnal Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, no. 5, 231 – 240.
- [8] Kamien, M. I. dan Schwartz, N. L. (1991). *Dynamic Optimization*, North-Holland, Amsterdam.

- [9] Kementerian Kesehatan REPUBLIK INDONESIA Direktorat Jenderal Pengendalian Penyakit dan Penyehatan Lingkungan (2011), *Strategi Pengendalian TBC di Indonesia 2010-2014*. Jakarta Kemenkesnas
- [10] Neilan, R.M. , Lenhart,S., (2010)
“*An Introduction to Optimal Control with an Application in Disease Modeling*”, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol.75, 2010
- [11] World Health Organization (2011). *Global Tuberculosis Control, WHO REPORT 2011*





Penggunaan kontrol optimal dalam konteks model penularan memiliki sejarah panjang aplikasi dalam ilmu kehidupan dan sosial. Kontribusi terakhir menggunakan pendekatan kontrol optimal (dari influenza untuk minum) telah menghasilkan wawasan tentang nilai investasi pada spesifik kebijakan kesehatan masyarakat (Gonzalez-Parra et al., 2011, Lee et al, 2010a., B, 2011). Upaya untuk menilai efektivitas relatif dari tindakan intervensi yang bertujuan untuk mengurangi jumlah individu TBC laten dan secara aktif menular dengan biaya minimal dan horizon waktu yang terbatas dapat ditemukan dalam literatur (Jung et al., 2002). Kami menyoroti penggunaan kontrol optimal dalam konteks Model (4). Tiga, belum ditentukan, fungsi-fungsi (kebijakan): $u_i(t)$; $i = 1, 2, 3$ diperkenalkan.

Ketiga kebijakan dinilai berdasarkan kemampuan mereka untuk mengurangi atau menghilangkan tingkat laten-dan aktif-TBC prevalensi dalam populasi dengan biaya berkurang. Dalam hal ini TBC mengatur, eksogen infeksi ulang memainkan peran dan karenanya proses optimasi harus memperhitungkan kemungkinan seperti itu. Oleh karena itu penting untuk mengidentifikasi strategi yang optimal dalam masyarakat berisiko rendah TBC di mana penyakit ini endemik meskipun adanya norma-norma kesehatan masyarakat yang efektif ($R_0 < 1$) serta dalam komunitas berisiko tinggi TBC, $R_0 > 1$ (skenario dominan di bagian dunia di mana TBC yang sangat endemik).

Tiga kontrol atau kebijakan intervensi time-dependent belum dihitung, diperkenalkan sebagai pengganda terhadap kejadian dan tingkat pengobatan: $BS(t) = (1 - u_1(t)) SI = N$, $BE(t) = p(1 - u_1(t)) EI = N$, $BE(t) = ?(1 - u_2(t)) TI = N$, dan $u_3(t)$.

Kontrol pertama, $u_1(t)$, bekerja untuk mengurangi kontak dengan individu menular melalui kebijakan isolasi, atau jarak sosial, atau melalui administrasi (jika tersedia) dari vaksin atau obat yang mengurangi kerentanan terhadap infeksi. Kontrol kedua, $u_2(t)$, model usaha yang dibutuhkan untuk mengurangi atau mencegah reinfeksi individu diobati. Kontrol ini tidak identik dengan $u_1(t)$ karena individu dengan TBC sebelum pertarungan cenderung bereaksi berbeda di hadapan-aktif kasus TBC. Kontrol pengobatan, $u_3(t)$, model usaha diarahkan pada mengobati individu yang terinfeksi. Tujuan dari meminimalkan jumlah individu terpapar dan menular sambil menjaga biaya serendah mungkin

membutuhkan akses ke data yang jarang tersedia. Oleh karena itu, fokus di sini adalah pada identifikasi solusi yang hanya memasukkan biaya relatif yang terkait dengan setiap kebijakan atau kombinasi kebijakan. Identifikasi kebijakan yang optimal terikat ke dalam minimalisasi J fungsional (didefinisikan di bawah), atas himpunan yang layak kontrol ($u_i(t)$: $i = 1, 2, 3$), semua diterapkan selama waktu yang terbatas pra-dipilih interval $[0; t_f]$. Tujuan fungsional diberikan oleh ekspresi <http://mbi.osu.edu/eduprograms/graduate2011resources.html>



Lampiran 1 (Program simulasi)

Program 1

```

close
clear
clc

pilih1=0;
pilih2=0;

lamdaVal = 417;
myuVal = 0.0167;
betaVal = 80 ;
C = 0.3;
d = 0.1;
k = 0.005;
p = 0.4;
sigmaVal = 0.9;
r = 2;
%N =TP0= 25000;
A = 100;
S0 = 13250;
E0 = 10500;
I0 = 1000;
T0 = 250;
Ta = 5;
TP0 = 25000;

y1
=simulasigb11R(lamdaVal,myuVal,betaVal,C,d,k,p,sigmaVal,r,A,S0,E0,
I0,T0,Ta,TP0);
disp(' ')

clc
while(pilih1==0)
    disp(' PILIH GRAFIK HASIL SIMULASI YANG INGIN DI TAMPILKAN
')
    disp(' ATAU MENGAKHIRI SIMULASI
')

disp('=====')
disp('
')
disp(' 1. INDIVIDU RENTAN (Susceptible)')
disp(' 2. INDIVIDU TBC LATEN (Exposed)')
disp(' 3. INDIVIDU TBC AKTIF (Infectious)')
disp(' 4. INDIVIDU TBC SEMBUH (Treatmean)')
disp(' 5. TINGKAT PENGENDALIAN/KONTROL(control)')
disp(' 6. TOTAL POPULASI')
disp(' 7. MENAMPILKAN SELURUH GRAFIK')
disp(' 8. SELESAI')
disp('
')

```

```

disp('
')
pilih2=input('SILAHKAN PILIH 1, 2, 3, 4, 5 , 6, 7 atau 8:');

disp('
')
disp('
')
if((pilih2==1) | (pilih2==2) | (pilih2==3) | (pilih2==4) |
(pilih2==5)| (pilih2==6)| (pilih2==7)| (pilih2==8))

        if(pilih2==1)
            plot(y1(1,:),y1(2,:), '--
black',y1(1,:),y1(7,:), 'black')
            xlabel('Waktu (Dalam tahun)')
            ylabel('Jumlah Individu Rentan')
            legend('Dengan kontrol', 'Tanpa kontrol')
            pilih1=0;
        elseif(pilih2==2)
            plot(y1(1,:),y1(3,:), '--
black',y1(1,:),y1(8,:), 'black')
            xlabel('Waktu (Dalam tahun)')
            ylabel('Jumlah Individu TBC Laten ')
            legend('Dengan kontrol', 'Tanpa kontrol')
            pilih1=0;
        elseif(pilih2==3)
            plot(y1(1,:),y1(4,:), '--
black',y1(1,:),y1(9,:), 'black')
            xlabel('Waktu(Dalam tahun)')
            ylabel('Jumlah Individu TBC Aktif
(Infectious)')
            legend('Dengan kontrol', 'Tanpa kontrol')
            pilih1=0;
        elseif(pilih2==4)
            plot(y1(1,:),y1(5,:), '--
black',y1(1,:),y1(10,:), 'black')
            xlabel('Waktu (Dalam tahun)')
            ylabel('Jumlah Individu sembuh ')
            legend('Dengan kontrol', 'Tanpa kontrol')
            pilih1=0;
        elseif(pilih2==5)
            plot(y1(1,:),y1(6,:), 'black')
            xlabel('Waktu(Dalam tahun)')
            ylabel('kontrol')
            pilih1=0;

        elseif(pilih2==6)
            plot(y1(1,:),y1(11,:), '--
black',y1(1,:),y1(12,:), 'black')
            xlabel('Waktu (Dalam tahun)')
            ylabel('Total Populasi')
            legend('Dengan kontrol', 'Tanpa kontrol')
            pilih1=0;
        elseif(pilih2==7)
            subplot(4,1,1);plot(y1(1,:),y1(2,:), '--
black',y1(1,:),y1(7,:), 'black')

```

```

        subplot(4,1,1);xlabel('Waktu (Dalam tahun)')
        subplot(4,1,1);ylabel('Susceptible')
        legend('Dengan kontrol','Tanpa kontrol')
        subplot(4,1,2);plot(y1(1,:),y1(3:),'--
black',y1(1,:),y1(8:),'black')
        subplot(4,1,2);xlabel('Waktu (Dalam tahun)')
        subplot(4,1,2);ylabel('Exposed')
        subplot(4,1,3);plot(y1(1,:),y1(4:),'--
black',y1(1,:),y1(9:),'black')
        subplot(4,1,3);xlabel('Waktu (Dalam tahun)')
        subplot(4,1,3);ylabel('Infectious')
        subplot(4,1,4);plot(y1(1,:),y1(5:),'--

        pilih1=0;

        elseif(pilih2==8)
            pilih1=1;
        end

    end
    clc

end
disp('')
disp('')
disp('')
disp('HASIL AKHIR SIMULASI')
y1(:,end)
pilih1=1;
disp('SELESAI')

```

Program 2

```

function y =
simulasigb11R(lamdaVal,myuVal,betaVal,C,d,k,p,sigmaVal,r,A,S0,E0,I
0,T0,Ta,TP0)

M = 1000;
t=linspace(0,Ta,M+1);
h=Ta/M;
h2 = h/2;

S=zeros(1,M+1);
E=zeros(1,M+1);
I=zeros(1,M+1);
T=zeros(1,M+1);
TP=zeros(1,M+1);

S1=zeros(1,M+1);
E1=zeros(1,M+1);
I1=zeros(1,M+1);
T1=zeros(1,M+1);
TP1=zeros(1,M+1);

S(1)=S0;
E(1)=E0;
I(1)=I0;
T(1)=T0;
TP(1)= TP0;

S1(1)=S0;
E1(1)=E0;
I1(1)=I0;
T1(1)=T0;
TP1(1)= TP0;

lambdaS=zeros(1,M+1);
lambdaE=zeros(1,M+1);
lambdaI=zeros(1,M+1);
lambdaT=zeros(1,M+1);

u=zeros(1,M+1);

kk=0
for i = 1:M
kk=kk+1;
    oldu = u;
    N = TP(i)
    N1 = TP1(i)
    fprintf('iterasi ke = %i \n ',kk)

    %program dengan kontrol%
    for i = 1:M

```

```

m1S = lamdaVal- myuVal*S(i)- betaVal*C*S(i)*(I(i)/N);
m1E = betaVal*C*S(i)*(I(i)/N)- p*(1-
u(i))*betaVal*C*E(i)*(I(i)/N) - (myuVal+ k )*E(i) +
betaVal*C*sigmaVal*T(i)*(I(i)/N);
m1I = p*(1-u(i))*betaVal*C* E(i)*(I(i)/N)+ k*E(i)- (myuVal
+ d + r)*I(i);
m1T = r*I(i)- myuVal*T(i) -
sigmaVal*betaVal*C*T(i)*(I(i)/N);

m2S = lamdaVal- myuVal*(S(i)+ h2*m1S)- betaVal*C*(S(i)+
h2*m1S)*((I(i)+ h2*m1I)/N);
m2E = betaVal*C*(S(i)+ h2*m1S)*((I(i)+ h2*m1I)/N)-
p*0.5*((1-u(i))+ (1-u(i+1)))*betaVal*C*(E(i)+ h2*m1E)*((I(i)+
h2*m1I)/N) - (myuVal+ k )*(E(i)+h2*m1E) +
betaVal*C*sigmaVal*(T(i)+ h2*m1T)*((I(i)+ h2*m1I)/N);
m2I = p*0.5*((1-u(i))+ (1-u(i+1)))*betaVal*C*(E(i)+
h2*m1E)*((I(i)+ h2*m1I)/N)+ k*(E(i)+ h2*m1E)- (myuVal + d +
r)*(I(i)+ h2*m1I);
m2T = r*(I(i)+ h2*m1I)- myuVal*(T(i)+ h2*m1T) -
sigmaVal*betaVal*C*(T(i)+ h2*m1T)*((I(i)+ h2*m1I)/N);

m3S = lamdaVal- myuVal*(S(i)+ h2*m2S)- betaVal*C*(S(i)+
h2*m2S)*((I(i)+ h2*m2I)/N);
m3E = betaVal*C*(S(i)+ h2*m2S)*((I(i)+ h2*m2I)/N)-
p*0.5*((1-u(i))+ (1-u(i+1)))*betaVal*C*(E(i)+ h2*m2E)*((I(i)+
h2*m2I)/N) - (myuVal+ k )*(E(i)+h2*m2E) +
betaVal*C*sigmaVal*(T(i)+ h2*m2T)*((I(i)+ h2*m2I)/N);
m3I = p*0.5*((1-u(i))+ (1-u(i+1)))*betaVal*C*(E(i)+
h2*m2E)*((I(i)+ h2*m2I)/N)+ k*(E(i)+ h2*m2E)- (myuVal + d +
r)*(I(i)+ h2*m2I);
m3T = r*(I(i)+ h2*m2I)- myuVal*(T(i)+ h2*m2T) -
sigmaVal*betaVal*C*(T(i)+ h2*m2T)*((I(i)+ h2*m2I)/N);

m4S = lamdaVal- myuVal*(S(i)+ h*m3S)- betaVal*C*(S(i)+
h*m3S)*((I(i)+ h*m3I)/N);
m4E = betaVal*C*(S(i)+ h*m3S)*((I(i)+ h*m3I)/N)- p*(1-
u(i+1))*betaVal*C*(E(i)+ h*m3E)*((I(i)+ h*m3I)/N) - (myuVal+ k
)*(E(i)+h*m3E) + betaVal*C*sigmaVal*(T(i)+ h*m3T)*((I(i)+
h*m3I)/N);
m4I = p*(1-u(i+1))*betaVal*C*(E(i)+ h*m3E)*((I(i)+
h*m3I)/N)+ k*(E(i)+ h*m3E)- (myuVal + d + r)*(I(i)+ h*m3I);
m4T = r*(I(i)+ h*m3I)- myuVal*(T(i)+ h*m3T) -
sigmaVal*betaVal*C*(T(i)+ h*m3T)*((I(i)+ h*m3I)/N);

S(i+1) = S(i) + (h/6)*(m1S + 2*m2S + 2*m3S + m4S);
E(i+1) = E(i) + (h/6)*(m1E + 2*m2E + 2*m3E + m4E);
I(i+1) = I(i) + (h/6)*(m1I + 2*m2I + 2*m3I + m4I);
T(i+1) = T(i) + (h/6)*(m1T + 2*m2T + 2*m3T + m4T);
TP(i+1)= S(i+1)+ E(i+1)+ I(i+1)+ T(i+1);
end
for i = 1:M
j = M + 2 - i;

m1S = lambdaS(j)*myuVal + (lambdaS(j) -
lambdaE(j))*(betaVal*C)*(I(j)/N);
m1E = lambdaE(j)*myuVal + (lambdaE(j) - lambdaI(j))*(k +
p*(1- u(j)))*betaVal*C*(I(j)/N);

```

```

m1I = -1 + lambdaI(j)*(myuVal + d) + (lambdaS(j)-
lambdaE(j))*betaVal*C*(S(j)/N) + (lambdaE(j) - lambdaI(j))*p*(1-
u(j))*betaVal*C*(E(j)/N) + (lambdaT(j) -
lambdaE(j))*betaVal*C*sigmaVal*(T(j)/N) + (lambdaI(j) -
lambdaE(j))*r ;
m1T = lambdaT(j)*myuVal + (lambdaT(j) -
lambdaI(j))*betaVal*C*sigmaVal*(I(j)/N);

m2S = (lambdaS(j) - h2*m1S)*myuVal + ((lambdaS(j) -
h2*m1S) - (lambdaE(j) - h2*m1E))*(betaVal*C)*0.5*((I(j)+I(j-
1))/N);
m2E = (lambdaE(j)-h2*m1E)*myuVal + ((lambdaE(j)-h2*m1E) -
(lambdaI(j)-h2*m1I))*(k + p*0.5*((1- u(j))+ (1- u(j-
1))))*betaVal*C*0.5*((I(j)+ I(j-1))/N);
m2I = -1 + (lambdaI(j)-h2*m1I)*(myuVal + d) +
((lambdaS(j)-h2*m1S)-(lambdaE(j)-
h2*m1E))*betaVal*C*(0.5*(S(j)+S(j-1))/N)+ ((lambdaE(j)- h2*m1E) -
(lambdaI(j)-h2*m1I))*p*(0.5*((1-u(j))+ (1- u(j-
1))))*betaVal*C*(E(j)+ E(j-1))/N) + ((lambdaT(j)-h2*m1T) -
(lambdaE(j)-h2*m1E))*betaVal*C*sigmaVal*(0.5*(T(j)+T(j-1))/N) +
((lambdaI(j)-h2*m1I) - (lambdaE(j)-h2*m1E))*r ;
m2T = (lambdaT(j)- h2*m1T)*myuVal + ((lambdaT(j)-h2*m1T) -
(lambdaI(j)-h2*m1I))*betaVal*C*sigmaVal*(0.5*(I(j)+I(j-1))/N);

m3S = (lambdaS(j) - h2*m2S)*myuVal + ((lambdaS(j) -
h2*m2S) - (lambdaE(j) - h2*m2E))*(betaVal*C)*0.5*((I(j)+I(j-
1))/N);
m3E = (lambdaE(j)-h2*m2E)*myuVal + ((lambdaE(j)-h2*m2E) -
(lambdaI(j)-h2*m2I))*(k + p*0.5*((1- u(j))+ (1- u(j-
1))))*betaVal*C*0.5*((I(j)+ I(j-1))/N);
m3I = -1 + (lambdaI(j)-h2*m2I)*(myuVal + d) +
((lambdaS(j)-h2*m2S)-(lambdaE(j)-
h2*m2E))*betaVal*C*(0.5*(S(j)+S(j-1))/N)+ ((lambdaE(j)- h2*m2E) -
(lambdaI(j)-h2*m2I))*p*(0.5*((1-u(j))+ (1-
u(j))))*betaVal*C*0.5*(E(j)+ E(j-1))/N) + ((lambdaT(j)-h2*m2T) -
(lambdaE(j)-h2*m2E))*betaVal*C*sigmaVal*(0.5*(T(j)+T(j-1))/N) +
((lambdaI(j)-h2*m2I) - (lambdaE(j)-h2*m2E))*r ;
m3T = (lambdaT(j)- h2*m2T)*myuVal + ((lambdaT(j)-h2*m2T) -
(lambdaI(j)-h2*m2I))*betaVal*C*sigmaVal*(0.5*(I(j)+I(j-1))/N);

m4S = (lambdaS(j) - h*m3S)*myuVal + ((lambdaS(j) - h*m3S)
- (lambdaE(j) - h*m3E))*(betaVal*C)*(I(j-1)/N);
m4E = (lambdaE(j)-h*m3E)*myuVal + ((lambdaE(j)-h*m3E) -
(lambdaI(j)-h*m3I))*(k + p*(1- u(j-1))*betaVal*C*( I(j-1)/N));
m4I = -1 + (lambdaI(j)-h*m3I)*(myuVal + d) + ((lambdaS(j)-
h*m3S)-(lambdaE(j)-h*m3E))*betaVal*C*(S(j-1)/N)+ ((lambdaE(j)-
h*m3E) - (lambdaI(j)-h*m3I))*p*(1- u(j-1))*betaVal*C*( E(j-1)/N) +
((lambdaT(j)-h*m3T) - (lambdaE(j)-h*m3E))*betaVal*C*sigmaVal*(T(j-
1)/N) + ((lambdaI(j)-h*m3I) - (lambdaE(j)-h*m3E))*r ;
m4T = (lambdaT(j)- h*m3T)*myuVal + ((lambdaT(j)-h*m3T) -
(lambdaI(j)-h*m3I))*betaVal*C*sigmaVal*(I(j-1)/N);

lambdaS(j-1) = lambdaS(j) - (h/6)*(m1S + 2*m2S + 2*m3S +
m4S);
lambdaE(j-1) = lambdaE(j) - (h/6)*(m1E + 2*m2E + 2*m3E +
m4E);

```



```

lambdaI(j-1) = lambdaI(j) - (h/6)*(m1I + 2*m2I + 2*m3I +
m4I);
lambdaT(j-1) = lambdaT(j) - (h/6)*(m1T + 2*m2T + 2*m3T +
m4T);

u(j) = min(1,max(0,((E(i)*I(i)*(lambdaI(j)-
lambdaE(j))*p*betaVal*C)/(2*A*N))));
end

for i = 1:M

    m1S1 = lamdaVal- myuVal*S1(i)- betaVal*C*S1(i)*(I1(i)/N1);
    m1E1 = betaVal*C*S1(i)*(I1(i)/N1)-
p*betaVal*C*E1(i)*(I1(i)/N1) - (myuVal+ k )*E1(i) +
betaVal*C*sigmaVal*T1(i)*(I1(i)/N1);
    m1I1 = p*betaVal*C* E1(i)*(I1(i)/N1)+ k*E1(i)- (myuVal + d
+ r)*I1(i);
    m1T1 = r*I1(i)- myuVal*T1(i) -
sigmaVal*betaVal*C*T1(i)*(I1(i)/N1);

    m2S1 = lamdaVal- myuVal*(S1(i)+ h2*m1S1)- betaVal*C*(S1(i)+
h2*m1S1)*((I1(i)+ h2*m1I1)/N1);
    m2E1 = betaVal*C*(S1(i)+ h2*m1S1)*((I1(i)+ h2*m1I1)/N1)-
p*betaVal*C*(E1(i)+ h2*m1E1)*((I1(i)+ h2*m1I1)/N1) - (myuVal+ k
)*(E1(i)+h2*m1E1) + betaVal*C*sigmaVal*(T1(i)+ h2*m1T1)*((I1(i)+
h2*m1I1)/N1);
    m2I1 = p*betaVal*C*(E1(i)+ h2*m1E1)*((I1(i)+ h2*m1I1)/N1)+
k*(E1(i)+ h2*m1E1)- (myuVal + d + r)*(I1(i)+ h2*m1I1);
    m2T1 = r*(I1(i)+ h2*m1I1)- myuVal*(T1(i)+ h2*m1T1) -
sigmaVal*betaVal*C*(T1(i)+ h2*m1T1)*((I1(i)+ h2*m1I1)/N1);

    m3S1 = lamdaVal- myuVal*(S1(i)+ h2*m2S1)- betaVal*C*(S1(i)+
h2*m2S1)*((I1(i)+ h2*m2I1)/N1);
    m3E1 = betaVal*C*(S1(i)+ h2*m2S1)*((I1(i)+ h2*m2I1)/N1)-
p*betaVal*C*(E1(i)+ h2*m2E1)*((I1(i)+ h2*m2I1)/N1) - (myuVal+ k
)*(E1(i)+h2*m2E1) + betaVal*C*sigmaVal*(T1(i)+ h2*m2T1)*((I1(i)+
h2*m2I1)/N1);
    m3I1 = p*betaVal*C*(E1(i)+ h2*m2E1)*((I1(i)+ h2*m2I1)/N1)+
k*(E1(i)+ h2*m2E1)- (myuVal + d + r)*(I1(i)+ h2*m2I1);
    m3T1 = r*(I1(i)+ h2*m2I1)- myuVal*(T1(i)+ h2*m2T1) -
sigmaVal*betaVal*C*(T1(i)+ h2*m2T1)*((I1(i)+ h2*m2I1)/N1);

    m4S1 = lamdaVal- myuVal*(S1(i)+ h*m3S1)- betaVal*C*(S1(i)+
h*m3S1)*((I1(i)+ h*m3I1)/N1);
    m4E1 = betaVal*C*(S1(i)+ h*m3S1)*((I1(i)+ h*m3I1)/N1)-
betaVal*C*(E1(i)+ h*m3E1)*((I1(i)+ h*m3I1)/N1) - (myuVal+ k
)*(E1(i)+h*m3E1) + betaVal*C*sigmaVal*(T1(i)+ h*m3T1)*((I1(i)+
h*m3I1)/N1);
    m4I1 = p*betaVal*C*(E1(i)+ h*m3E1)*((I1(i)+ h*m3I1)/N1)+
k*(E1(i)+ h*m3E1)- (myuVal + d + r)*(I1(i)+ h*m3I1);
    m4T1 = r*(I1(i)+ h*m3I1)- myuVal*(T1(i)+ h*m3T1) -
sigmaVal*betaVal*C*(T1(i)+ h*m3T1)*((I1(i)+ h*m3I1)/N1);

    S1(i+1) = S1(i) + (h/6)*(m1S1 + 2*m2S1 + 2*m3S1 + m4S1);
    E1(i+1) = E1(i) + (h/6)*(m1E1 + 2*m2E1 + 2*m3E1 + m4E1);
    I1(i+1) = I1(i) + (h/6)*(m1I1 + 2*m2I1 + 2*m3I1 + m4I1);

```

```

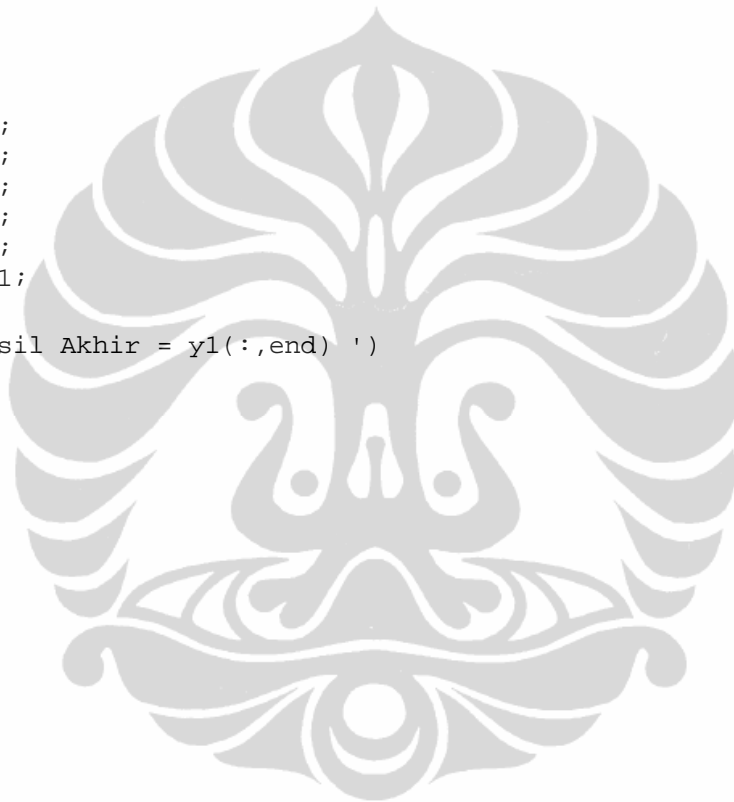
T1(i+1) = T1(i) + (h/6)*(m1T1 + 2*m2T1 + 2*m3T1 + m4T1);
TP1(i+1)= S1(i+1)+ E1(i+1)+ I1(i+1)+ T1(i+1);

end
temp =((E.*I.*(lambdaI-lambdaE)*p*betaVal*C)/(2*A*N));
u1 = min(1,max(0,temp));
u = 0.5*(u1 + oldu);
end

fprintf('jumlah iterasi = %i ',kk)
y(1,:) = t;
y(2,:) = S;
y(3,:) = E;
y(4,:) = I;
y(5,:) = T;
y(6,:) = u;
y(7,:) = S1;
y(8,:) = E1;
y(9,:) = I1;
y(10,:)= T1;
y(11,:)= TP;
y(12,:)= TP1;

fprintf('Hasil Akhir = y1(:,end) ')

```



Lampiran 2 (Penurunan Rumus R_0)

Dalam penurunan rumus R_0 , dapat digunakan beberapa metode:

Metode Pendekatan Operator Generasi Selanjutnya (*The next generation operator approach Method*)

Dalam metode pendekatan operator generasi selanjutnya ini, R_0 didefinisikan sebagai radius spektral dari operator generasi selanjutnya.

Definisi 1 (Radius Spektral). Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks A , maka radius spektral dari matriks A didefinisikan sebagai

$$\rho(A) = \max_{i=1, \dots, n} \{|\lambda_i|\}$$

Langkah dari metode pendekatan operator generasi (*The next generation operator approach Method*) selanjutnya ini adalah sebagai berikut:

Misalkan model epidemi suatu penyakit dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X &= f(X, Y, Z), \\ \frac{d}{dt} Y &= g(X, Y, Z), \\ \frac{d}{dt} Z &= h(X, Y, Z); \end{aligned}$$

dengan $X \in \mathbb{R}^r$, $Y \in \mathbb{R}^s$, $Z \in \mathbb{R}^n$; $r, s, n \geq 0$; dan $h(X, 0, 0) = 0$.

Komponen X menyatakan banyaknya individu dari kelas-kelas individu yang tidak terinfeksi penyakit yang sedang diamati, yaitu individu rentan

(*susceptibles*), individu yang telah sembuh (*recovered*) Komponen Y menyatakan banyaknya individu dari kelas-kelas individu yang terinfeksi penyakit yang sedang diamati, tetapi tidak dapat menularkan penyakit tersebut yaitu individu laten (*non infectious stages*). Komponen Z menyatakan banyaknya individu dari kelas-kelas individu yang terinfeksi penyakit yang sedang diamati dan dapat menularkan penyakit tersebut yaitu individu terinfeksi akti (*infectious*).

Selanjutnya, misalkan

- a. $U_0 = (X^*, 0, 0) \in \mathbb{R}^{r+s+n}$ adalah titik *equilibrium* bebas penyakit dari sistem, yaitu $f(X^*, 0, 0) = g(X^*, 0, 0) = h(X^*, 0, 0) = 0$.
- b. Misalkan kemudian ada yang terinfeksi penyakit, maka didapat persamaan $g(X^*, Y, Z) = 0$, yang dapat diubah menjadi $Y = \tilde{g}(X^*, Z)$.
- c. Definisikan $A = \frac{\partial}{\partial Z} h(X^*, \tilde{g}(X^*, 0), 0)$.

Jika A dapat dituliskan dalam bentuk $A = M - D$; dengan $M \geq 0$ ($m_{ij} \geq 0$) dan $D > 0$ adalah matriks diagonal, maka R_0 didefinisikan sebagai radius spektral dari matriks MD^{-1} , sehingga berdasarkan definisi 1, diperoleh $R_0 = \rho(MD^{-1})$.

PENURUNAN RUMUS *BASIC REPRODUCTION RATIO NUMBER* (R_0)

Berdasarkan teori mengenai metode yang digunakan dalam penurunan rumus *basic reproduction ratio* (R_0), yaitu metode pendekatan operator generasi selanjutnya, maka untuk sistem

$$\frac{d}{dt}S = \Lambda - \beta c S \frac{I}{N} - \mu S,$$

$$\frac{d}{dt}E = \beta c S \frac{I}{N} - p\beta c E \frac{I}{N} - (\mu + k)E + \sigma\beta c R \frac{I}{N},$$

$$\frac{d}{dt}I = p\beta c E \frac{I}{N} + kE - (\mu + r + d)I,$$

$$\frac{d}{dt}R = rI - \sigma\beta c R \frac{I}{N} - \mu R,$$

berlaku:

$$X = (S, R), Y = E, Z = I,$$

$$f_S(X, Y, Z) = f_S(S, R, E, I) = \Lambda - \beta c S \frac{I}{N} - \mu S,$$

$$f_R(X, Y, Z) = f_R(S, R, E, I) = rI - \sigma\beta c R \frac{I}{N} - \mu R,$$

$$g(X, Y, Z) = g(S, R, E, I) = \beta c S \frac{I}{N} - p\beta c E \frac{I}{N} - (\mu + k)E + \sigma\beta c R \frac{I}{N},$$

$$h(X, Y, Z) = h(S, R, E, I) = p\beta c E \frac{I}{N} + kE - (\mu + r + d)I.$$

a. Misalkan $U_0 = (X^*, 0, 0) = (S^*, R^*, 0, 0)$ adalah titik *equilibrium* bebas penyakit, maka:

(i) Dari persamaan $f_S(S^*, R^*, 0, 0) = 0$ diperoleh $S^* = \Lambda/\mu$;

(ii) Dari persamaan $f_R(S^*, R^*, 0, 0) = 0$ diperoleh $R^* = 0$;

Sehingga

$$U_0 = (S^*, R^*, 0, 0) = (\Lambda/\mu, 0, 0, 0),$$

$$N^* = S^* + R^* = (\Lambda/\mu) + 0 = \Lambda/\mu.$$

b. Dari persamaan $g(S^*, R^*, E, I) = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} E &= \tilde{g}(S^*, R^*, I) \\ &= \frac{I}{\mu + k + p\beta c \frac{I}{N}} \left(\beta c S^* \frac{I}{N} + \sigma \beta c R^* \frac{I}{N} \right) \\ &= \frac{I}{\mu + k + p\beta c \frac{I}{N}} \left(\beta c \frac{\Lambda I}{\mu N} \right), \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} h(S^*, R^*, E, I) &= h(S^*, R^*, \tilde{g}(S^*, R^*, I), I) \\ &= p\beta c \left(\frac{I}{\mu + k + p\beta c \frac{I}{N}} \left(\beta c \frac{\Lambda I}{\mu N} \right) \right) \frac{I}{N} \\ &\quad + k \left(\frac{I}{\mu + k + p\beta c \frac{I}{N}} \left(\beta c \frac{\Lambda I}{\mu N} \right) \right) - (\mu + r + d) I \\ &= \frac{p\beta^2 c^2 \frac{\Lambda I^2}{\mu N^2}}{\mu + k + p\beta c \frac{I}{N}} + \frac{k \beta c \frac{\Lambda I}{\mu N}}{\mu + k + p\beta c \frac{I}{N}} - (\mu + r + d) I, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, \tilde{g}(S^*, R^*, I), I) &= \\ &= \frac{\left(2p\beta^2 c^2 \frac{\Lambda I}{\mu N^2} \right) \left(\mu + k + p\beta c \frac{I}{N} \right) - \left(p\beta^2 c^2 \frac{\Lambda I^2}{\mu N^2} \right) \left(p\beta c \frac{I}{N} \right)}{\left(\mu + k + p\beta c \frac{I}{N} \right)^2} \\ &\quad + \frac{\left(k \beta c \frac{\Lambda I}{\mu N} \right) \left(\mu + k + p\beta c \frac{I}{N} \right) - \left(k \beta c \frac{\Lambda I}{\mu N} \right) \left(p\beta c \frac{I}{N} \right)}{\left(\mu + k + p\beta c \frac{I}{N} \right)^2} - (\mu + r + d). \end{aligned}$$

c. Misalkan $A = \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, \tilde{g}(S^*, R^*, 0), 0)$.

Karena

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, \tilde{g}(S^*, R^*, 0), 0) &= \frac{\left(k \beta c \frac{A}{\mu N^*} \right) (\mu + k)}{(\mu + k)^2} - (\mu + r + d) \\ &= \frac{k \beta c \frac{A}{\mu N^*}}{\mu + k} - (\mu + r + d) \\ &= \frac{k \beta c \frac{A}{\mu (A/\mu)}}{\mu + k} - (\mu + r + d) \\ &= \frac{k \beta c}{\mu + k} - (\mu + r + d), \end{aligned}$$

maka

$$A = \frac{k \beta c}{\mu + k} - (\mu + r + d).$$

Karena A dapat dituliskan dalam bentuk $A = M - D$ dengan $M = \frac{k \beta c}{\mu + k} \geq 0$ dan

$D = \mu + r + d > 0$, maka

$$R_0 = \rho(MD^{-1}) = \left(\frac{k \beta c}{\mu + k} \right) \left(\frac{1}{\mu + r + d} \right).$$

Persamaan dapat dituliskan dalam bentuk

$$R_0 = \left(\frac{\beta c}{\mu + r + d} \right) \left(\frac{k}{\mu + k} \right)$$