UNIVERSITAS INDONESIA

KOEFISIEN RELIABILITAS TARKKONEN'S RHO

SKRIPSI

DHEA AMELLIA
0806325491

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

KOEFISIEN RELIABILITAS TARKKONEN'S RHO

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

DHEA AMELLIA
0806325491

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Dhea Amellia
NPM	:	0806325491
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	19 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh	:	
Nama	:	Dhea Amellia
NPM	:	0806325491
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Koefisien Reliabilitas Tarkkonen's Rho

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	: Dra. Rianti Setiadi, M.Si.	( )
Penguji I	: Dra. Ida Fithriani, M.Si.	( )
Penguji II	: Sarini Abdullah, M.Stats.	( )
Penguji III	: Mila Novita, M.Si.	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 19 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillaahirabbil ‘aalamiin, puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat, nikmat, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Penulisan tugas akhir ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk menjadi Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Dalam penulisan tugas akhir ini tentunya tidak terlepas atas dukungan, bantuan, dan doa dari berbagai pihak mulai dari masa perkuliahan, sampai dengan penyusunan tugas akhir ini. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dra. Rianti Setiadi, M.Si, selaku pembimbing I atas segala waktu, tenaga, pikiran, masukan dan doa yang telah diberikan kepada penulis dalam penyusunan tugas akhir ini,
2. Bapak Yudi Satria, MT. selaku ketua Departemen Matematika UI, mbak Rahmi Rusin, S.Si. M.Sc.Tech. selaku Sekretaris Departemen Matematika UI, dan ibu Dr. Dian Lestari selaku Koordinator Pendidikan Departemen Matematika UI, dan ibu Dr. Sri Mardiyati, M.Kom selaku Pembimbinga Akademik yang telah banyak membantu dalam proses penyelesaian tugas akhir ini,
3. Seluruh dosen Departemen Matematika UI yang telah banyak memberikan ilmu pengetahuan selama penulis berkuliah di Departemen Matematika UI,
4. Seluruh staf TU dan staf perpustakaan Departemen Matematika UI yang telah banyak membantu penulis,
5. Mr. Kimmo Vehkalahti, Mr. Lauri Tarkkonen, dan Mr. Simo Puntanen yang telah bersedia untuk menjawab pertanyaan penulis,
6. Seluruh pihak FPSB Indonesia atas segala pengertian yang diberikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir sekaligus magang,
7. Keluarga tercinta, terutama orang tua penulis, yaitu Papa Ajang Rosid (Alm) dan Mama Nani Rochaeni atas segala dukungan, dan doa yang tidak lelah untuk diberikan kepada penulis, adik-adik penulis, yaitu Aulia

Pangestu, Ikbal Taufik Ramadhan, dan Ilham Rizki Ramadhan atas bantuan, doa, dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis,

8. Laki-laki spesial bagi penulis, Rifyal Tumber, atas segala cinta, sayang, waktu, dukungan, dan doa yang diberikan,
9. Teman-teman satu bimbingan: Kak Anis, Emy, Oline, Janu, sebagai tempat curhat penulis.
10. Teman-teman angkatan 2008 atas dukungan, bantuan, dan semangat selama penulis berkuliah,
11. Teman-teman HMD Matematika UI atas segala dukungan dan pengalaman berorganisasi selama penulis berkuliah
12. Untuk Qiqi, Luthfa, Numa, Cindy, Icha, Ines, Tuti, Risya, Andy dan teman-teman seperjuangan dalam menyusun tugas akhir ini atas segala dukungan dan semangat kepada penulis,
13. Untuk Maimun, Umbu, dan Reza yang sudah banyak membantu kesulitan penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini,
14. Teman-teman angkatan 2009 terima kasih atas segala dukungannya,
15. Teman-teman angkatan 2010, terima kasih atas segala dukungannya,
16. Kakak-kakak angkatan 2007 atas segala dukungannya,
17. Teman-teman 1 kost penulis: Muti, Inah, Dhipuw, Mbak Nursih, Dewi, Biancha, Mei, Widya, dan Maida sebagai teman di kala sedih dan senang,
18. Untuk pihak-pihak yang telah membantu penulis, mohon maaf tidak bisa disebutkan satu persatu, terima kasih atas bantuannya.

Penulis menyadari tugas ini tidak luput dari kekurangan, oleh karena itu penulis sangat membutuhkan kritik dan saran yang dapat membangun agar penyusunan tugas akhir ini lebih baik lagi ke depannya.

Akhir kata, semoga tugas ini bermanfaat bagi yang membacanya, khususnya bagi penulis sendiri.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Dhea Amellia
NPM	:	0806325491
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Koefisien Reliabilitas Tarkkonen's Rho

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 19 Juni 2012
Yang menyatakan

(Dhea Amellia)

ABSTRAK

Nama : Dhea Amellia
Program Studi : Matematika
Judul : Koefisien Reliabilitas Tarkkonen's Rho

Reliabilitas suatu alat ukur yang menggunakan Skala Likert seringkali ditaksir dengan koefisien Alpha Cronbach. Tetapi ternyata dapat ditunjukkan bahwa Koefisien Alpha Cronbach akan memberikan taksiran yang *underestimate* jika asumsi τ-*equivalent* tidak dipenuhi. Penaksir koefisien Koefisien Tarkkonen's Rho diperkenalkan dalam tugas akhir ini. Dapat dibuktikan bahwa Koefisien Tarkkonen's Rho memberikan nilai taksiran yang lebih besar dari Koefisien Alpha Cronbach jika asumsiτ-*equivalent* tidak dipenuhi dan akan bernilai sama dengan Alpha Cronbach jika asumsiτ-equivalent dipenuhi. Contoh penerapan diberikan untuk membandingkan taksiran reliabilitas dengan menggunakan Koefisien Alpha Cronbach dan Koefisien Tarkkonen's Rho.

Kata Kunci : reliabilitas, Koefisien Alpha Cronbach, *underestimate*, τ-*equivalent*, Koefisien Tarkkonen's Rho.
xiv+72 halaman : 3 gambar; 3 tabel
Daftar Pustaka : 14 (1967 – 2009)

ABSTRACT

Name : Dhea Amellia
Study Program : Mathematics
Title : Reliability Coefficient Tarkkonen's Rho

Reliability of measurement which uses Likert Scale is usually estimated by Cronbach's Alpha coefficient. But it can be shown that Cronbach's Alpha coefficient will give an underestimate estimation if the τ-equivalence assumption is not fulfilled. The reliability estimator, called Tarkkonen's Rho Coefficient, will be introduced in this mini thesis. It can be proved that Tarkkonen's Rho coefficient will give greater reliability estimation than Cronbach's Alpha Coefficient if the τ-equivalence assumption is not fulfilled and will give same reliability estimation if the τ-equivalence assumption is fulfilled. An example of application will be given to compare the reliability estimations which is gotten by using Cronbach's Alpha Coefficient and Tarkkonen's Rho Coefficient.

Key word : reliability, Cronbach's Alpha Coefficient, underestimate, τ-equivalent, Tarkkonen's Rho Coefficient
xiv+72 pages : 3 pictures; 3 tables
Bibliography : 14 (1967 – 2009)

DAFTAR ISI

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS iii
HALAMAN PENGESAHAN iv
KATA PENGANTAR v
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KE ARAH ILMIAH vii
ABSTRAK viii
ABSTRACT ix
DAFTAR ISI x
DAFTAR GAMBAR xii
DAFTAR TABEL xiii
DAFTAR LAMPIRAN xiv

1. PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Permasalahan 2
1.3 Tujuan 2
1.4 Pembatasan Masalah 3

2. LANDASAN TEORI 4
2.1 Model-Model Pengukuran 4
2.2 Reliabilitas 8
2.2.1 Reliabilitas Item 8
2.2.2 Reliabilitas Alat Ukur 11
2.3 Koefisien Alpha Cronbach 13
2.3.1 Pengertian Koefisien Alpha Cronbach 13
2.4 Analisis Faktor 21
2.4.1 Model Analisis Faktor 22

3. KOEFISIEN RELIABILITAS TARKKONEN'S RHO 26
3.1 Pendahuluan 26
3.2 Koefisien Reliabilitas Tarkkonen's Rho 26
3.3 Pembuktian Koefisien Tarkkonen's Rho Bernilai 0 Sampai dengan 1 31
3.4 Koefisien Tarkkonen's Rho Memberikan Hasil Taksiran yang Lebih Besar daripada Koefisien Alpha Cronbach dan Bernilai Sama dengan Alpha Cronbach Jika dan Hanya Jika Asumsi τ-*equivalent* Terpenuhi 31

4. CONTOH PENERAPAN 36
4.1 Sumber Data 36
4.2 Analisis Data 36

5. PENUTUP 39
5.1 Kesimpulan 39
5.2 Saran 39

DAFTAR PUSTAKA 41
LAMPIRAN.. 42

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Diagram Model Pengukuran 5
Gambar 2.2. Diagram Model Analisis Faktor.. 22
Gambar 3.1. Diagram Model Pengukuran untuk Mengukur.................................29

DAFTAR TABEL

Tabel 4. 1. Taksiran Koefisien Alpha Cronbach 37
Tabel 4. 2. Kaiser-Meyer-Olkin *Measure of Sampling Adequacy* dan Tes Bartlett 37
Tabel 4. 3 Matriks S 38

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Menunjukkan $cov(\boldsymbol{X}) = cov(\boldsymbol{B}T + \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \sigma_T^2 \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Psi_d}$ 42

Lampiran 2 Membuktikan Pertidaksamaan Cauchy-Schwartz $\left[cov\left(M_i, M_j\right)\right]^2 \leq \sigma_{M_i}^2 \sigma_{M_j}^2$ 44

Lampiran 3 Membuktikan $\hat{\alpha} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}-1}\left(1 - \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} \mathrm{S}_{\mathrm{X_i}}^2}{\mathrm{S}_{\mathrm{U}}^2}\right)$ adalah Penaksir yang Konsisten untuk Koefisien Alpha Cronbach 45

Lampiran 4 Metode Iterasi untuk Mencari Taksiran *Factor Loading*................60

Lampiran 5 Kuesioner 63

Lampiran 6 Data 65

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada beberapa penelitian, khususnya penelitian sosial sering kali variabel yang digunakan berupa variabel *latent*, yaitu variabel yang tidak dapat diukur secara langsung. Variabel *latent* biasanya diukur dengan menggunakan alat ukur dengan skala Likert. Alat ukur ini terdiri dari beberapa item pernyataan yang diberi skor berjenjang. Pengukuran variabel *latent* didapat dari penjumlahan skor dari item-item terkait yang disebut sebagai variabel komposit. Skor pengamatan dari item-item tersebut dapat dibedakan menjadi nilai murni dari item tersebut dan kesalahan pengukuran (sebut *error*). Begitu juga penjumlahan dari skor pengamatan item-item terkait (sebut variabel pengamatan komposit), dapat juga dibedakan menjadi penjumlahan nilai murni item-item terkait (sebut variabel nilai murni komposit), dan penjumlahan kesalahan pengukuran (sebut variabel kesalahan komposit). Reliabilitas suatu alat ukur didefinisikan sebagai rasio antara variansi nilai murni komposit dan variansi nilai pengamatan komposit alat ukur tersebut.

Salah satu penaksir koefisien reliabilitas yang sering digunakan adalah koefisien reliabilitas Alpha Cronbach. Alpha Cronbach sebenarnya membutuhkan asumsi yang harus dipenuhi, yaitu nilai murni dari setiap item pada alat ukur tersebut sama. Keadaan ini disebut dengan keadaan *τ-equivalent*. Jika asumsi tidak terpenuhi maka taksiran reliabilitas berdasarkan metode Alpha Cronbach akan *underestimate.*

Penaksir reliabilitas alternatif sudah banyak dicetuskan oleh para statistikawan dan atau para ahli psikologi, tetapi tetap saja tidak berhasil menggantikan Alpha Cronbach. Penaksir reliabilitas terbaru dicetuskan oleh Tarkkonen dan Vehkalahti, yang dikenal dengan nama Tarkkonen’s Rho. Penaksir ini dapat ditunjukkan mempunyai nilai yang lebih besar daripada koefisien Alpha Cronbach jika asumsi *τ-equivalent* tidak dipenuhi sehingga paling tidak diharapkan dapat memperbaiki koefisien Alpha Cronbach yang memberikan taksiran yang *underestimate* jika asumsi *τ-equivalent* tidak dipenuhi.

Pada tugas akhir ini, penulis akan menunjukkan bahwa koefisien Alpha Cronbach akan memberikan taksiran yang *underestimate* jika model pengukuran tidak *τ-equivalent*. Menunjukkan bahwa koefisien Alpha Cronbach akan memberikan taksiran reliabilitas alat ukur yang sama dengan reliabilitas alat ukur sebenarnya jika model pengukuran *τ-equivalent*. Selain itu dalam tugas akhir ini akan dibahas tentang koefisien Tarkkonen's Rho, ditunjukkan bahwa koefisien Tarkkonen's Rho bernilai antara 0 sampai dengan 1, dan akan memberikan taksiran koefisien reliabilitas yang lebih besar daripada koefisien Alpha Cronbach jika model pengukuran tidak *τ-equivalent*. Sebagai contoh penerapan, koefisien Alpha Cronbach dan koefisien Tarkkonen's Rho akan dibandingkan pada alat ukur "fondasi moral".

1.2 Permasalahan

- Bagaimana menunjukkan koefisien Alpha Cronbach merupakan taksiran koefisien reliabilitas yang *underestimate* jika model pengukuran tidak *τ-equivalent*?
- Bagaimana mengatasi permasalahan koefisien Alpha Cronbach yang *underestimate* jika model pengukuran tidak *τ-equivalent* dengan menggunakan koefisien Tarkkonen's Rho?

1.3 Tujuan

- Menunjukkan bahwa koefisien Alpha Cronbach akan memberi taksiran yang *underestimate* jika asumsi *τ-equivalent* tidak terpenuhi,
- Membahas tentang koefisien reliabilitas Tarkkonen's Rho,

- Menunjukkan bahwa koefisien Tarkkonen's Rho mempunyai nilai yang lebih besar daripada koefisien Alpha Cronbach jika asumsi τ-*equivalent* tidak dipenuhi.

1.4 Pembatasan Masalah

Pada tugas akhir ini, model pengukuran yang digunakan adalah model pengukuran *congeneric.*

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Model-Model Pengukuran

Dalam bidang psikologi, misalnya, suatu variabel yang tidak bisa diukur secara langsung dari suatu individu (merupakan variabel *latent*) biasanya diukur dengan menggunakan skala Likert yang berupa suatu alat tes yang terdiri dari beberapa item pernyataan. Skor dari karakteristik individu tersebut diukur berdasarkan nilai-nilai yang diberikan individu terhadap item-item terkait. Untuk menjamin mutu dari alat ukur tersebut, salah satu hal yang perlu dilakukan adalah memeriksa reliabilitas dari alat ukur tersebut. Biasanya nilai pengamatan tidak secara akurat mengukur nilai yang sebenarnya (disebut nilai murni), tetapi juga dipengaruhi oleh faktor-faktor lain (disebut kesalahan). Misalkan $X_i; i = 1, 2, \dots, p$ adalah variabel pengamatan dari item ke-i yang memiliki nilai yang disebut $x_i; i = 1, 2, \dots, p$; M_i ; $i = 1, 2, \dots, p$ adalah variabel skor murni dari item ke-i yang memiliki nilai yang disebut m_i ; $i = 1, 2, \dots, p$; dan $\mathcal{E}_i$; $i = 1, 2, \dots, p$ adalah variabel skor kesalahan (*error*) dari item ke-i yang memiliki nilai yang disebut ε_i ; $i = 1, 2, \dots, p$.

Model pengukuran dapat dituliskan sebagai berikut:

$$X_i = M_i + \mathcal{E}_i, \qquad i = 1, 2, \dots, p \tag{2.1}$$

Jika diasumsikan:

1. $E(\mathcal{E}_i) = 0; i = 1,2, \dots, p$

   Asumsi ini menyatakan bahwa mean nilai kesalahan (*error*) dari item ke-i sama dengan 0.
2. Nilai-nilai kesalahan (*error*) antara dua item saling bebas. Hal ini mengakibatkan $cov(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) = 0$ dan $\rho_{\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j} = 0$; $i \neq j; i, j = 1,2, \dots, p$.
3. Nilai kesalahan (*error*) dan nilai murni dari suatu item saling bebas. Hal ini mengakibatkan $cov(\mathcal{E}_i, M_i) = 0$ dan $\rho_{\mathcal{E}_i M_i} = 0;\ i = 1, 2, \dots, p$.

4. Nilai kesalahan (*error*) dari suatu item saling bebas dengan nilai murni item yang lainnya. Hal ini mengakibatkan $cov(\varepsilon_i, M_j) = 0$ atau $cov(\varepsilon_j, M_i) = 0$ dan $\rho_{\varepsilon_i M_j} = 0$ atau $\rho_{\varepsilon_j M_i} = 0$; $i \neq j; i, j = 1,2, \dots, p$.

Dari asumsi-asumsi di atas didapat bahwa $\sigma_{X_i}^2 = \sigma_{M_i}^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$.

Secara matriks, model pengukuran dapat dituliskan

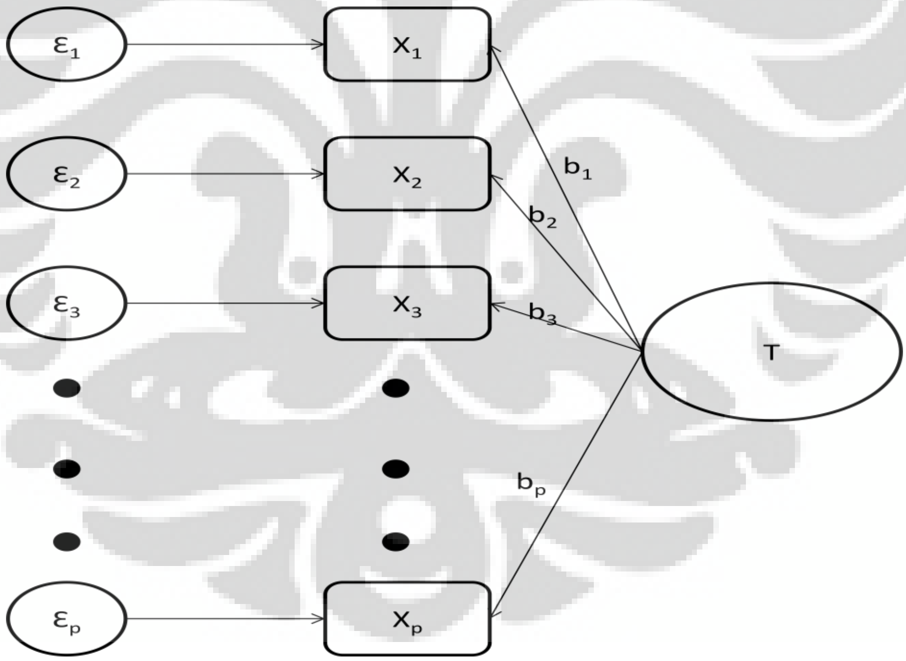
$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{2.2}$$

Dimana

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

Misalkan suatu variabel *latent* T yang memiliki nilai yang disebut τ diukur berdasarkan variabel-variabel pengamatan $X_1, X_2, \dots, X_p$.

Pandang diagram di bawah ini:



Gambar 2. 1. Diagram Model Pengukuran

Pandang $M_i = b_i T$; $b_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, \dots, p$. Maka

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} T$$

Dengan demikian model pengukuran dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

Secara matriks dapat dituliskan

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}T + \boldsymbol{\mathcal{E}} \qquad (2.3)$$

Dimana

$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$, dan T adalah variabel *latent* yang akan diukur.

Berdasarkan asumsi-asumsi pada model pengukuran, maka:

- $E(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = E\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,
- $cov(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} cov(b_1T, \varepsilon_1) & cov(b_1T, \varepsilon_2) & \dots & cov(b_1T, \varepsilon_p) \\ cov(b_2T, \varepsilon_1) & cov(b_2T, \varepsilon_2) & \dots & cov(b_2T, \varepsilon_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(b_pT, \varepsilon_1) & cov(b_pT, \varepsilon_2) & \dots & cov(b_pT, \varepsilon_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$,

  karena $b_1, b_2, \dots, b_p \neq 0$, maka $cov(T, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} cov(T, \varepsilon_1) \\ cov(T, \varepsilon_2) \\ \vdots \\ cov(T, \varepsilon_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \dots & cov(\varepsilon_1, \varepsilon_p) \\ cov(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \dots & cov(\varepsilon_2, \varepsilon_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\varepsilon_p, \varepsilon_1) & cov(\varepsilon_p, \varepsilon_2) & \dots & \sigma_{\varepsilon_p}^2 \end{pmatrix}$

  $= \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon_p}^2 \end{pmatrix}$

Misalkan $cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \boldsymbol{\Psi_d}$, dan $\boldsymbol{B}$ adalah vektor berukuran $p \times 1$, maka dapat dibuktikan

$cov(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = cov(\boldsymbol{\mathcal{M}}) + cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = cov(\boldsymbol{B}T) + cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \sigma_T^2 \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Psi_d}$ (akan dibuktikan pada lampiran 1).

Model pengukuran tersebut dapat digolongkan menjadi:

1. Jika $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} T$, sehingga dapat dikatakan

   $M_1 = M_2 = \cdots = M_p = T$ dan $\sigma^2_{M_1} = \sigma^2_{M_2} = \cdots = \sigma^2_{M_p}$. Misalkan variansi kesalahan (*error*) untuk tiap item sama, sebut σ^2_{ξ}, maka

   $\boldsymbol{\Psi_d} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\xi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\xi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\xi} \end{pmatrix}$. Model pengukuran di atas disebut model pengukuran paralel.

2. Jika $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} T$, sehingga dapat dikatakan

   $M_1 = M_2 = \cdots = M_p = T$ dan $\sigma^2_{M_1} = \sigma^2_{M_2} = \cdots = \sigma^2_{M_p}$. Misalkan variansi kesalahan (*error*) untuk tiap item tidak perlu sama, maka

   $\boldsymbol{\Psi_d} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon_p} \end{pmatrix}$. Model pengukuran di atas disebut model pengukuran τ-*equivalent*.

3. Jika $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ maka $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} T$. Dapat dituliskan $M_i = b_i T$ yang berarti nilai murni dari tiap item tidak perlu sama, dan variansi nilai murni dari tiap item tidak perlu sama. Misalkan variansi kesalahan (*error*) untuk tiap item tidak perlu sama, maka $\boldsymbol{\Psi_d} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon_p} \end{pmatrix}$. Model pengukuran di atas disebut model pengukuran *congeneric*.

2.2 Reliabilitas

Reliabilitas mempunyai nama lain, yaitu keandalan, konsistensi, keterpercayaan, dan sebagainya. Suatu alat ukur dikatakan reliabel jika hasil pengukurannya akan konsisten bila diberikan kembali kepada individu atau kelompok yang sama dengan kondisi yang relatif sama. Dalam pengukuran dengan skala Likert, reliabilitas dapat dibagi menjadi dua, yaitu reliabilitas item dan reliabilitas alat ukur.

2.2.1 Reliabilitas Item

Misalkan suatu variabel *latent* T diukur berdasarkan variabel pengamatan $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Seperti yang telah disebutkan di atas, model pengukuran secara umum dapat dituliskan sebagai:

$X_i = M_i + \mathcal{E}_i \; ; \; i = 1, 2, \ldots, p$

Dimana

X_i adalah variabel pengamatan item ke-i

M_i adalah variabel skor murni dari item ke-i

$\mathcal{E}_i$ adalah variabel nilai kesalahan (*error*) dari item ke-i.

Jika diasumsikan:

1. $E(\mathcal{E}_i) = 0; i = 1,2, \ldots, p$

   Asumsi ini menyatakan bahwa mean nilai kesalahan (*error*) dari item ke-i sama dengan 0.
2. Nilai-nilai kesalahan (*error*) antara dua item saling bebas. Hal ini mengakibatkan $cov(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) = 0$ dan $\rho_{\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j} = 0 \; ; i \neq j; i, j = 1,2, \ldots, p$.
3. Nilai kesalahan (*error*) dan nilai murni dari suatu item saling bebas. Hal ini mengakibatkan $cov(\mathcal{E}_i, M_i) = 0$ dan $\rho_{\mathcal{E}_i M_i} = 0; \; i = 1, 2, \ldots, p$.
4. Nilai kesalahan (*error*) dari suatu item saling bebas dengan nilai murni item yang lainnya. Hal ini mengakibatkan $cov(\mathcal{E}_i, M_j) = 0$ atau $cov(\mathcal{E}_j, M_i) = 0$ dan $\rho_{\mathcal{E}_i M_j} = 0$ atau $\rho_{\mathcal{E}_j M_i} = 0; \; i \neq j; i, j = 1,2, \ldots, p$.

Dari asumsi-asumsi di atas didapat bahwa $\sigma^2_{X_i} = \sigma^2_{M_i} + \sigma^2_{\mathcal{E}_i}$.

Reliabilitas item ke-i, dinotasikan dengan R_i secara umum didefinisikan sebagai

$$R_i = \frac{\sigma^2_{M_i}}{\sigma^2_{X_i}} \tag{2.4}$$

Karena $cov(X_i, M_i) = cov(M_i + \mathcal{E}_i, M_i) = cov(M_i, M_i) + cov(\mathcal{E}_i, M_i) = cov(M_i, M_i) + 0 = var(M_i) = \sigma^2_{M_i}$, maka reliabilitas item dapat dituliskan

$$R_i = \frac{\sigma^2_{M_i}}{\sigma^2_{X_i}} = \frac{\left(\sigma^2_{M_i}\right)^2}{\sigma^2_{X_i}\sigma^2_{M_i}} = \frac{[cov(X_i, M_i)]^2}{var(X_i)var(M_i)} = \rho^2_{X_i M_i} \tag{2.5}$$

Jadi reliabilitas item ke-i dapat dilihat sebagai kuadrat dari korelasi antara X_i dan M_i. Karena reliabilitas suatu item dapat dinyatakan sebagai kuadrat korelasi antara variabel pengamatan item ke-i dengan variabel nilai murni item ke-i, reliabilitas suatu item mempunyai nilai antara 0 sampai dengan 1.
Karena $X_i = M_i + \mathcal{E}_i$ dimana M_i dan $\mathcal{E}_i$ tidak diketahui dan reliabilitas item ke-i diukur dengan $\rho^2_{X_i M_i} = \frac{\sigma^2_{M_i}}{\sigma^2_{X_i}}$, untuk menaksir reliabilitas item ke-i, salah satu dari $\sigma^2_{M_i}$ atau $\sigma^2_{\mathcal{E}_i}$ harus ditaksir.

Dari asumsi-asumsi sebelumnya, jika M_i adalah nilai murni dari item ke-i dan M_j adalah nilai murni dari item ke-j ; $\forall i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, p$, maka berlaku:

$$cov(X_1, X_2) = cov\left[(M_i + \mathcal{E}_i), (M_j + \mathcal{E}_j)\right]$$
$$= \left[cov\left(M_i, M_j\right) + cov\left(M_i, \mathcal{E}_j\right) + cov\left(M_j, \mathcal{E}_i\right) + cov\left(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j\right)\right]$$

Karena $cov\left(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j\right) = 0$, dan $cov\left(M_i, \mathcal{E}_j\right) = cov\left(M_j, \mathcal{E}_i\right) = 0$, maka

$$cov(X_1, X_2) = cov\left(M_i, M_j\right) \tag{2.6}$$

Reliabilitas suatu item juga dapat diukur sebagai korelasi antara variabel pengamatan dari dua item yang paralel. Misalkan X_i dan X_j variabel pengamatan dari dua item yang paralel ; $i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p. X_i$ adalah variabel pengamatan item ke-i,dengan variabel nilai murni M_i dan variabel kesalahan (*error*) $\mathcal{E}_i$, X_j adalah variabel pengamatan item ke-j, dengan variabel nilai murni M_j dan variabel kesalahan (*error*) $\mathcal{E}_j$. Sesuai dengan definisi subbab sebelumnya, jika item ke-i dan item ke-j paralel, maka $M_i = M_j$ dan $\sigma^2_{\mathcal{E}_i} = \sigma^2_{\mathcal{E}_j}$. Akan dibuktikan bahwa reliabilitas item ke-i atau reliabilitas item ke-j merupakan korelasi antara variabel X_i dengan variabel X_j, yang dinotasikan sebagai $\rho_{X_i X_j} = \frac{cov(X_i, X_j).}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}}$

<u>Bukti:</u>

Berdasarkan definisi reliabilitas:

$$R_i = \frac{\sigma_{M_i}^2}{\sigma_{X_i}^2}$$

$$= \frac{cov(M_i, M_i)}{\sigma_{X_i}^2}$$

Jika diasumsikan item ke-i dan item ke-j adalah item yang paralel untuk mengukur T, maka $M_i = M_j$. Sehingga dapat ditulis

$$R_i = \frac{cov(M_i, M_j)}{\sigma_{X_i}^2}$$

Karena $cov(\varepsilon_i, M_j) = cov(\varepsilon_j, M_i) = cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, maka dapat ditulis

$$R_i = \frac{cov(M_i, M_j) + cov(\varepsilon_i, M_j) + cov(\varepsilon_j, M_i) + cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}{\sigma_{X_i}^2}$$

$$= \frac{\{E(M_i M_j) - E(M_i)E(M_j)\} + \{E(\varepsilon_i M_j) - E(\varepsilon_i)E(M_j)\} + \{E(\varepsilon_j M_i) - E(\varepsilon_j)E(M_i)\} + \{E(\varepsilon_i \varepsilon_j) - E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j)\}}{\sigma_{X_i}^2}$$

$$= \frac{E[M_i M_j + \varepsilon_i M_j + \varepsilon_j M_i + \varepsilon_i \varepsilon_j] - [E(M_i)E(M_j) + E(\varepsilon_i)E(M_j) + E(\varepsilon_j)E(M_i) + E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j)]}{\sigma_{X_i}^2}$$

$$= \frac{E[M_i M_j + \varepsilon_i M_j + \varepsilon_j M_i + \varepsilon_i \varepsilon_j] - [E(M_i) + E(\varepsilon_i)][E(M_j) + E(\varepsilon_j)]}{\sigma_{X_i}^2}$$

$$= \frac{E[(M_i + \varepsilon_i)(M_j + \varepsilon_j)] - E(M_i + \varepsilon_i)E(M_j + \varepsilon_j)}{\sigma_{X_i}^2}$$

$$= \frac{E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_i}}$$

Jika item ke-i dan item ke-j adalah item yang paralel untuk mengukur T, maka dapat dibuktikan bahwa $\sigma_{X_i} = \sigma_{X_j}$.

<u>Bukti:</u>

Berdasarkan model pengukuran, didapat

$$\sigma_{X_i} = \sigma_{M_i + \varepsilon_i}$$
$$= \sqrt{\sigma^2_{M_i + \varepsilon_i}}$$
$$= \sqrt{\sigma^2_{M_i} + \sigma^2_{\varepsilon_i}}$$

Berdasarkan definisi variabel item paralel, maka diperoleh

$$\sigma_{X_i} = \sqrt{\sigma^2_{M_j} + \sigma^2_{\varepsilon_j}}$$
$$= \sqrt{\sigma^2_{M_j + \varepsilon_j}}$$
$$= \sigma_{M_j + \varepsilon_j}$$
$$= \sigma_{X_j}$$

Sehingga didapatkan $\sigma_{X_i} = \sigma_{X_j}$

Karena $\sigma_{X_i} = \sigma_{X_j}$, maka

$$R_i = \frac{E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}}$$
$$= \frac{cov(X_i, X_j).}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}}$$
$$= \rho_{X_i X_j} \tag{2.7}$$

■

Maka secara umum, $R_i = \rho_{X_i X_j}$; $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, p$

Jika nilai koefisien korelasi antara dua variabel pengamatan item yang paralel tersebut semakin besar, maka kedua item tersebut semakin reliabel.

2.2.2 Reliabilitas Alat Ukur

Suatu alat ukur dapat dibangun dari beberapa item, misalnya terdapat p item dalam suatu alat ukur. Pengukuran yang dibangun dari beberapa item disebut pengukuran komposit . Sebut $U = \sum_{i=1}^{p} X_i$ sebagai variabel pengamatan komposit. Berdasarkan model pengukuran didapat :

$$U = \sum_{i=1}^{p} X_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p} (M_i + \mathcal{E}_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} M_i + \sum_{i=1}^{p} \mathcal{E}_i$$

Misalkan $M = \sum_{i=1}^{p} M_i$ merupakan variabel nilai murni komposit, dan $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{E}_i$ merupakan variabel kesalahan (error) komposit, maka

$$U = M + \mathcal{E} \tag{2.8}$$

Karena $E(\mathcal{E}_i) = 0$, maka

$$E(\mathcal{E}) = E(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_P)$$
$$= E(\mathcal{E}_1) + E(\mathcal{E}_2) + \cdots + E(\mathcal{E}_p)$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0$$
$$= 0,$$

Dan karena $cov(M_i, \mathcal{E}_j) = 0$; $i, j = 1, 2, \ldots, p$, maka

$$cov(M, \mathcal{E}) = cov(M_1 + M_2 + \cdots + M_p, \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_p)$$
$$= cov(M_1, \mathcal{E}_1) + cov(M_1, \mathcal{E}_2) + \cdots + cov(M_p, \mathcal{E}_p)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} cov(M_i, \mathcal{E}_j)$$
$$= 0$$

Reliabilitas alat ukur, dinotasikan dengan R_u, didefinisikan sebagai

$$R_u = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_U^2} \tag{2.9}$$

tetapi karena

$$cov(U, M) = cov(X_1 + X_2 + \cdots + X_p, M_1 + M_2 + \cdots + M_p)$$
$$= cov(M_1 + M_2 + \cdots + M_p + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_p, M_1 + M_2 + \cdots + M_p)$$
$$= cov(M_1, M_1) + cov(M_1 + M_2) + \cdots + cov(M_p, M_p) + cov(M_1, \mathcal{E}_1)$$
$$+ cov(M_1, \mathcal{E}_2) + \cdots + cov(M_p, \mathcal{E}_p)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \{cov(M_i, M_j) + cov(M_i, \mathcal{E}_j)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \{cov(M_i, M_j)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (\sigma_{M_i}^2) + \sum_{i \neq j} \sum \{cov(M_i, M_j)\}$$

$$= \sigma_{M_1+M_2+\cdots+M_p}^2$$

$$= \sigma_M^2$$

Maka

$$R_u = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_U^2} = \frac{(\sigma_M^2)^2}{\sigma_U^2 \sigma_M^2} = \frac{[cov(U, M)]^2}{\sigma_U^2 \sigma_M^2} = \rho_{UM}^2 \qquad (2.10)$$

2.3 Koefisien Alpha Cronbach

Dalam menaksir koefisien reliabilitas, metode yang sering digunakan adalah koefisien Alpha Cronbach. Koefisien Alpha Cronbach menggunakan pendekatan konsistensi internal. Koefisien Alpha Cronbach memerlukan asumsi, yaitu model pengukuran *τ-equivalent*. Pada subbab ini akan dibahas mengenai koefisien Alpha Cronbach.

2.3.1 Pengertian Koefisien Alpha Cronbach

Cronbach mencetuskan suatu penaksir reliabilitas alat ukur dengan asumsi model pengukuran *τ-equivalent*. Telah diketahui bahwa reliabilitas alat ukur didefinisikan sebagai

$$R_u = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_U^2}$$

Misalkan suatu alat ukur dibangun dari item-item yang saling *τ-equivalent*. Akan dicari reliabilitas alat ukur yang dibangun dari item-item yang *τ-equivalent* tersebut. Karena reliabilitas tergantung dari variansi dari U dan variansi dari M, maka dibawah ini akan dicari variansi dari U dan variansi dari M.

$$\sigma_U^2 = \sigma_{X_1+X_2+\cdots+X_p}^2$$

$$= cov(X_1 + X_2 + \cdots + X_p, X_1 + X_2 + \cdots + X_p)$$

$$= \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \cdots + \sigma_{X_p}^2 + \sum_{i \neq j}\sum cov(X_i, X_j)$$

Dari persamaan (2.6) didapatkan

$$\sigma_U^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \cdots + \sigma_{X_p}^2 + \sum_{i \neq j}\sum cov(M_i, M_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i \neq j}\sum cov(M_i, M_j)$$

Karena item ke-i dan item ke-j; $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, p$ merupakan item yang τ-*equivalent*, maka $M_i = M_j$

$$\sigma_U^2 = \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i \neq j}\sum cov(M_i, M_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i \neq j}\sum \sigma_{M_i}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 + (p-1)\sum_{i=1}^{p} \sigma_{M_i}^2$$

Karena $R_i = \frac{\sigma_{M_i}^2}{\sigma_{X_i}^2}$, berarti $\sigma_{M_i}^2 = R_i \sigma_{X_i}^2$, maka

$$\sigma_U^2 = \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 + (p-1)\sum_{i=1}^{p} R_i \sigma_{X_i}^2 \qquad (2.11)$$

Sekarang akan dicari variansi dari M, yaitu

$$\sigma_M^2 = \sigma_{M_1+M_2+\cdots+M_p}^2$$

$$= cov(M_1 + M_2 + \cdots + M_p, M_1 + M_2 + \cdots + M_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} cov(M_i, M_j)$$

Karena item ke-i dan item ke-j ; $\forall i \neq j$; $i = 1, 2, \ldots, p$ merupakan item yang τ-*equivalent*, maka $M_i = M_j$, sehingga

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} cov(M_i, M_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} p\sigma_{M_i}^2$$

$$= p\sum_{i=1}^{p} \sigma_{M_i}^2$$

Karena $R_i = \frac{\sigma_{M_i}^2}{\sigma_{X_i}^2}$, berarti $\sigma_{M_i}^2 = R_i\sigma_{X_i}^2$, maka

$$\sigma_M^2 = p\sum_{i=1}^{p} R_i\sigma_{X_i}^2$$

Dari persamaan (2.11), yaitu $\sigma_U^2 = \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 + (p-1)\sum_{i=1}^{p} R_i\sigma_{X_i}^2$, berarti $\sum_{i=1}^{p} R_i\sigma_{X_i}^2 = \frac{\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2}{p-1}$, didapatkan

$$\sigma_M^2 = \frac{p}{p-1}\left(\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2\right)$$

Sehingga

$$R_u = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_U^2}$$

$$= \frac{\frac{p}{p-1}\left(\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2\right)}{\sigma_U^2}$$

$$= \frac{p}{p-1}\left(\frac{\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)$$

$$= \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)$$

Bentuk ini disebut sebagai koefisien Alpha Cronbach (dinotasikan dengan α).

$$\alpha = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right) \tag{2.12}$$

Apabila variabel-variabel pengamatan tiap item tersebut distandardisasi, $\sigma_{X_i}^2 = 1$, untuk semua i, maka koefisien Alpha Cronbach menjadi

$$\alpha = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} 1}{\sigma_U^2}\right)$$

$$= \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{p}{\sigma_U^2}\right) \tag{2.13}$$

Pada praktiknya, kondisi τ-*equivalent* jarang sekali ditemui, sehingga koefisien Alpha Cronbach sering kali digunakan untuk menaksir reliabilitas alat ukur dengan tidak memperhatikan asumsi τ-*equivalent*. Oleh karena itu, berkaitan dengan koefisien Alpha Cronbach, perlu diperhatikan hal-hal di bawah ini:

- Koefisien Alpha Cronbach adalah batas bawah koefisien reliabilitas alat ukur sebenarnya

  Bukti:

  Dimulai dengan pernyataan

$$\left[\sigma_{M_i} - \sigma_{M_j}\right]^2 \geq 0 \tag{2.14}$$

$$\sigma^2_{M_i} - 2\sigma_{M_i}\sigma_{M_j} + \sigma^2_{M_j} \geq 0$$

$$\sigma^2_{M_i} + \sigma^2_{M_j} \geq 2\sigma_{M_i}\sigma_{M_j}$$

  Berdasarkan pertidaksamaan Cauchy-Schwartz (bukti pada lampiran 2):

$$\left[cov\left(M_i, M_j\right)\right]^2 \leq \sigma^2_{M_i}\sigma^2_{M_j}$$

$$\sqrt{\left[cov\left(M_i, M_j\right)\right]^2} \leq \sqrt{\sigma^2_{M_i}\sigma^2_{M_j}}$$

$$\left|cov\left(M_i, M_j\right)\right| \leq \sigma_{M_i}\sigma_{M_j} \tag{2.15}$$

  Sehingga

$$\sigma^2_{M_i} + \sigma^2_{M_j} \geq 2\left|cov\left(M_i, M_j\right)\right| \geq 2cov\left(M_i, M_j\right) \tag{2.16}$$

  Dengan memberikan sumasi untuk $i \neq j$, maka

$$\sum_{i \neq j}\sum \left[\sigma^2_{M_i} + \sigma^2_{M_j}\right] \geq 2\sum_{i \neq j}\sum cov\left(M_i, M_j\right) \tag{2.17}$$

  Pandang

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left[\sigma^2_{M_i} + \sigma^2_{M_j}\right] = \sum_{i=1}^{p}\left[p\sigma^2_{M_i} + \sum_{j=1}^{p}\sigma^2_{M_j}\right]$$

$$= p\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 + p\sum_{j=1}^{p}\sigma_{M_j}^2$$

$$= 2p\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2$$

Pandang pula

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left[\sigma_{M_i}^2+\sigma_{M_j}^2\right] = \sum_{i=j}\sum\left[\sigma_{M_i}^2+\sigma_{M_j}^2\right] + \sum_{i\neq j}\sum\left[\sigma_{M_i}^2+\sigma_{M_j}^2\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 + \sum_{i\neq j}\sum\left[\sigma_{M_i}^2+\sigma_{M_j}^2\right]$$

Oleh karena itu

$$2p\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 = 2\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 + \sum_{i\neq j}\sum\left[\sigma_{M_i}^2+\sigma_{M_j}^2\right]$$

$$2p\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 = \sum_{i\neq j}\sum\left[\sigma_{M_i}^2+\sigma_{M_j}^2\right]$$

$$2(p-1)\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 = \sum_{i\neq j}\sum\left[\sigma_{M_i}^2+\sigma_{M_j}^2\right]$$

Sehingga pertidaksamaan (2.17) menjadi

$$2(p-1)\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 \geq 2\sum_{i\neq j}\sum cov(M_i, M_j)$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 \geq \frac{1}{p-1}\sum_{i\neq j}\sum cov(M_i, M_j) \tag{2.18}$$

Telah diketahui bahwa

$$\sigma_M^2 = var(M_1 + M_2 + \cdots + M_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sigma_{M_i}^2 + \sum_{i\neq j}\sum cov(M_i, M_j)$$

Subtitusikan pertidaksamaan (2.18), didapatkan

$$\sigma_M^2 \geq \frac{1}{p-1}\sum_{i\neq j}\sum cov\left(M_i, M_j\right) + \sum_{i\neq j}\sum cov\left(M_i, M_j\right)$$

$$\sigma_M^2 \geq \frac{p}{p-1}\sum_{i\neq j}\sum cov\left(M_i, M_j\right) \tag{2.19}$$

Telah diketahui pula bahwa

$$\sigma_U^2 = var\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_p\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i\neq j}\sum cov(X_i, X_j)$$

$$\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 = \sum_{i\neq j}\sum cov(X_i, X_j)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.6), maka

$$\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 = \sum_{i\neq j}\sum cov\left(M_i, M_j\right)$$

Lalu substitusikan pertidaksamaan (2.19), didapat

$$\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2 \leq \frac{p-1}{p}\sigma_M^2$$

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2\right) \leq \sigma_M^2$$

Lalu bagi dengan σ_U^2 didapat

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{\sigma_U^2 - \sum_{i=1}^{p}\sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right) \leq \frac{\sigma_M^2}{\sigma_U^2}$$

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p}\sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right) \leq \frac{\sigma_M^2}{\sigma_U^2} = R_u \tag{2.20}$$

Dimana

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{p}\sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)=\alpha$$

α merupakan koefisien Alpha Cronbach. ■

- Koefisien Alpha Cronbach memberikan taksiran yang sama dengan koefisien reliabilitas alat ukur sebenarnya jika dan hanya jika model pengukuran τ-*equivalent*.

Bukti:

Dari pembuktian di atas dapat ditunjukkan bahwa syarat perlu dan syarat cukup agar $\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{p}\sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)=R_u$ adalah

$$\left[\sigma_{M_i}-\sigma_{M_j}\right]^2=0 \quad (2.21)$$

$$\sigma_{M_i}\sigma_{M_j}=\left|cov\left(M_i,M_j\right)\right| \quad (2.22)$$

dan

$$\left|cov\left(M_i,M_j\right)\right|=cov\left(M_i,M_j\right) \quad (2.23)$$

Dari persamaan (2.21) didapatkan

$$\left[\sigma_{M_i}-\sigma_{M_j}\right]^2=0$$

$$\sigma_{M_i}-\sigma_{M_j}=0$$

$$\sigma_{M_i}=\sigma_{M_j}$$

Dari persamaan (2.22) didapatkan

$$\sigma_{M_i}\sigma_{M_j}=\left|cov\left(M_i,M_j\right)\right|$$

Karena $\sigma_{M_i}=\sigma_{M_j}$, maka

$$\sigma_{M_i}\sigma_{M_i}=\left|cov\left(M_i,M_j\right)\right|$$

$$\sigma_{M_i}^2=\left|cov\left(M_i,M_j\right)\right|$$

Dari persamaan (2.23), yaitu $\left|cov\left(M_i,M_j\right)\right|=cov\left(M_i,M_j\right)$, didapatkan

$$\sigma_{M_i}^2=cov\left(M_i,M_j\right)$$

Dapat disimpulkan bahwa koefisien Alpha Cronbach memberikan taksiran yang sama dengan reliabilitas alat ukur yang sebenarnya jika dan hanya jika

$\sigma^2_{M_i} = \sigma^2_{M_j} = cov(M_i, M_j) = \theta;\ \forall i \neq j\ ; i, j = 1, 2, \dots, p$. Dengan perkataan lain seluruh elemen matriks kovariansi dari nilai murni tiap item sama, atau

$$
\begin{aligned}
cov(\boldsymbol{\mathcal{M}}) = cov(\boldsymbol{B}T) = \sigma_T^2 \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' \\
&= \begin{pmatrix} \theta^2 & \theta^2 & \dots & \theta^2 \\ \theta^2 & \theta^2 & \dots & \theta^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^2 & \theta^2 & \dots & \theta^2 \end{pmatrix} \\
&= \theta^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \theta^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \theta^2 \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}';\ \theta \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan pada sub bab sebelumnya, jika $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ menunjukkan bahwa model pengukuran τ-*equivalent.* ■

Dari pembuktian di atas juga dapat disimpulkan bahwa jika model pengukuran tidak τ-*equivalent*, atau $\boldsymbol{B} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, maka koefisien Alpha Cronbach akan memberikan taksiran reliabilitas alat ukur yang kurang dari reliabilitas alat ukur sebenarnya, dengan perkataan lain hasil taksiran *underestimate*.

Penaksir yang konsisten dari koefisien Alpha Cronbach adalah

$$\hat{\alpha} = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} S^2_{X_i}}{S^2_U}\right) \qquad (2.24)$$

(Bukti pada lampiran 3)

Dimana

$S^2_{X_i}$ adalah $var(X_i)$ yang diperoleh dari sampel

S^2_U adalah $var(U)$ yang diperoleh dari sampel.

2.4 Analisis Faktor

Analisis faktor digunakan untuk mereduksi sejumlah variabel menjadi beberapa faktor (lebih sedikit dari banyaknya variabel) yang dianggap dapat merepresentasikan seluruh variabel-variabel semula. Pada subbab ini akan dibahas sekilas mengenai analisis faktor. Sifat-sifat faktor diantaranya:

- Dapat menjelaskan semaksimal mungkin variansi yang ada
- Antar faktor saling bebas
- Tiap faktor dapat diinterpretasikan

Analisis faktor dapat dibagi menjadi dua, yaitu:

- Analisis Faktor *Exploratory*

  Pada analisis faktor *exploratory*, para peneliti tidak memiliki informasi tentang banyaknya faktor.
- Analisis Faktor *Confirmatory*

  Para peneliti sudah memiliki informasi yang mendasari data dan sudah menentukan banyaknya faktor.

Sebelum menggunakan analisis faktor, perlu dilihat kelayakan data untuk analisis faktor. Beberapa tahapan dalam melihat kelayakan data tersebut adalah:

- KMO (Kaiser-Meyer-Olkin *Measure of Sampling Adequacy*)

  Jika nilai KMO kecil menunjukkan adanya variabel yang perlu dikeluarkan dari analisis. Sebaliknya, jika nilai KMO besar menunjukkan semua variabel sudah siap untuk dipakai dalam analisis faktor. Kaiser (1974) menyarankan 0.5 sebagai batas nilai KMO.
- Tes Bartlett

  Tes Bartlett digunakan untuk melihat apakah matriks kovariansi variabel pengamatan adalah matriks identitas. Hipotesisnya adalah:

  H_0: Matriks kovariansi variabel pengamatan adalah matriks identitas.

  H_1: Matriks kovariansi variabel pengamatan bukan merupakan matriks identitas.

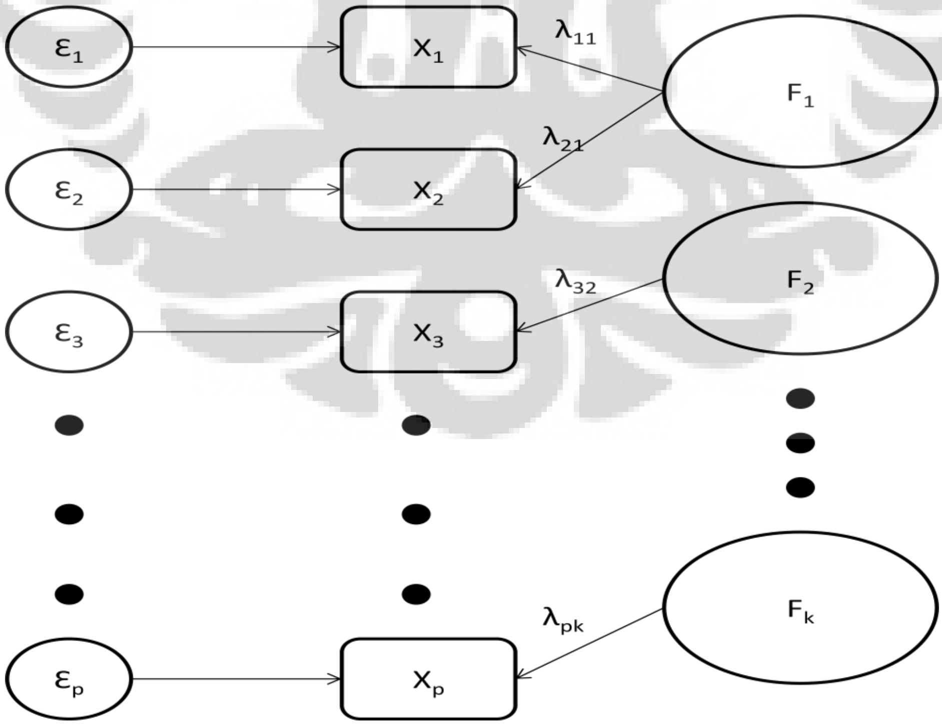
  Jika pada tes Bartlett didapatkan kesimpulan bahwa matriks kovariansi variabel pengamatan merupakan matriks identitas maka variabel-variabel yang digunakan tidak saling berhubungan, sehingga analisis faktor tidak perlu dilakukan.

- Lakukan ekstraksi variabel sehingga hanya digunakan beberapa faktor saja.
- Faktor-faktor yang terbentuk harus menggambarkan perbedaan antar faktor. Untuk memastikan bahwa setiap faktor berbeda secara signifikan, maka dilakukan proses rotasi. Tetapi apabila hanya terdapat satu faktor, proses rotasi tidak perlu dilakukan.

2.4.1 Model Analisis Faktor

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_p$ merupakan variabel random yang akan direduksi menjadi k-faktor. Sebut $F_1, F_2, \dots, F_k$ merupakan faktor-faktor yang merepresentasikan variabel $X_1, X_2, \dots, X_p$, dan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ merupakan kesalahan dari tiap variabel. $X_1, X_2, \dots, X_p$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $F_1, F_2, \dots, F_k$ ditambah dengan variabel kesalahan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$.

Perhatikan gambar 2.2 berikut:



Gambar 2. 2. Diagram Model Analisis Faktor

Model dapat ditulis sebagai berikut:

$$X_1 = \lambda_{11}F_1 + \lambda_{12}F_2 + \cdots + \lambda_{1k}F_k + \varepsilon_1$$
$$X_2 = \lambda_{21}F_1 + \lambda_{22}F_2 + \cdots + \lambda_{2k}F_k + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$X_p = \lambda_{p1}F_1 + \lambda_{2p}F_2 + \cdots + \lambda_{pk}F_k + \varepsilon_p$$

Dimana λ_{iq} disebut sebagai *factor loading*. Jika $X_1, X_2, \dots, X_p$ dan $F_1, F_2, \dots, F_k$ distandardisasi, maka λ_{iq} merupakan koefisien korelasi dari X_i dan F_q ; $i = 1, 2, \dots, p$; $q = 1, 2, \dots, k$.

Dalam bentuk matriks dapat dituliskan:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda F} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{2.25}$$

Dimana

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}, \text{dan } \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pk} \end{pmatrix}.$$

Diasumsikan

- $E(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$,
- $cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{\varepsilon_p} \end{pmatrix}$, dan
- $cov(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} cov(F_1, \varepsilon_1) & cov(F_1, \varepsilon_2) & \dots & cov(F_1, \varepsilon_p) \\ cov(F_2, \varepsilon_1) & cov(F_2, \varepsilon_2) & \dots & cov(F_2, \varepsilon_p) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ cov(F_k, \varepsilon_1) & cov(F_k, \varepsilon_2) & \dots & cov(F_k, \varepsilon_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$

Sehingga matriks kovariansi dari $\boldsymbol{X}$, dituliskan sebagai

$cov(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = cov(\boldsymbol{\Lambda F}) + \mathrm{cov}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \boldsymbol{\Lambda \Phi \Lambda}' + \boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d}$, dimana

$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{F_1} & cov(F_1, F_2) & \cdots & cov(F_1, F_k) \\ cov(F_2, F_1) & \sigma^2_{F_2} & \cdots & cov(F_2, F_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(F_k, F_1) & cov(F_k, F_2) & \dots & \sigma^2_{F_k} \end{pmatrix}$ adalah matriks kovariansi antar faktor. Jika diasumsikan faktor distandardisasi, dan faktor saling bebas ($\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I}$), maka

$$cov(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}} \tag{2.26}$$

Dengan menggunakan $X_1, X_2, \dots, X_p$ yang distandardisasi, maka $\boldsymbol{\Sigma}$ merupakan matriks korelasi dari $\boldsymbol{X}$. Misalkan $\boldsymbol{P_\rho}$ adalah matriks korelasi dari $\boldsymbol{X}$.

$$\boldsymbol{P_\rho} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}}$$

Jika diasumsikan faktor distandardisasi dan saling bebas ($\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I}$), maka

$$\boldsymbol{P_\rho} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}} \tag{2.27}$$

Dimana $\boldsymbol{\Lambda}$ merupakan matriks yang elemennya adalah korelasi antara $\boldsymbol{X}$ dengan $\boldsymbol{F}$. Sebut λ_{iq} adalah elemen matriks $\boldsymbol{\Lambda}$, kan dibuktikan bahwa λ_{iq} adalah korelasi dari X_i dengan F_q

<u>Bukti:</u>

$$\begin{aligned}
\rho_{X_iF_q} &= \frac{cov(X_i, F_q)}{\sigma_{X_i}\sigma_{F_q}} \\
&= \frac{cov(\lambda_{iq}F_q + \mathcal{E}_i, F_q)}{\sigma_{X_i}\sigma_{F_q}} \\
&= \frac{cov(\lambda_{iq}F_q, F_q) + cov(\mathcal{E}_i, F_q)}{\sigma_{X_i}\sigma_{F_q}}
\end{aligned}$$

Karena $cov(\mathcal{E}_i, F_q) = 0$, maka

$$\begin{aligned}
\rho_{X_iF_q} &= \frac{\lambda_{iq}\, cov(F_q, F_q)}{\sigma_{X_i}\sigma_{F_q}} \\
&= \frac{\lambda_{iq}\,\sigma_{F_q}^2}{\sigma_{X_i}\sigma_{F_q}}
\end{aligned}$$

Karena X_i dan F_q distandardisasi, maka $\sigma_{X_i} = 1$ dan $\sigma_{F_q} = 1$. Sehingga

$$\rho_{X_iF_q} = \lambda_{iq}$$

■

Jika $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{F}$ distandardisasi, maka diagonal matriks $\boldsymbol{P_\rho}$ dapat dituliskan

$$diag(\boldsymbol{P_\rho}) = diag(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}') + diag(\boldsymbol{\Psi_d})$$

sehingga

$$(\lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2 + \dots + \lambda_{im}^2) + \sigma_{\mathcal{E}_i}^2 = 1$$

$$h_i^2 + \sigma_{\mathcal{E}_i}^2 = 1$$

Dimana

$h_i^2 = \lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2 + \cdots + \lambda_{im}^2$ adalah elemen diagonal matriks $\mathbf{\Lambda\Lambda}'$ yang disebut *communality*, dan

$\sigma_{\varepsilon_i}^2$ adalah elemen diagonal ke-i dari matriks $\boldsymbol{\Psi_d}$ yang disebut variansi unik.

Penaksiran *factor loading* dilakukan dengan metode iterasi (lampiran 4).

BAB 3
KOEFISIEN RELIABILITAS TARKKONEN'S RHO

3.1 Pendahuluan

Seperti telah dijelaskan pada bab terdahulu, penaksir koefisien reliabilitas yang sering digunakan yaitu koefisien Alpha Cronbach. Sayangnya koefisien Alpha Cronbach bisa memberikan hasil taksiran yang *underestimate* jika asumsi τ-*equivalent* tidak dipenuhi. Banyak penaksir lain yang dicetuskan oleh para ahli psikologi atau statistikawan, tetapi tetap saja tidak bisa mengatasi masalah dari koefisien Alpha Cronbach. Penaksir baru dicetuskan oleh Tarkkonen dan Vehkalahti yang dikenal dengan Tarkkonen's Rho. Penaksir tersebut dapat dibuktikan memberikan hasil yang lebih besar dari koefisien Alpha Cronbach jika asumsi τ-*equivalent* tidak dipenuhi, dan akan bernilai sama dengan Alpha Cronbach jika asumsi τ-*equivalent* dipenuhi. Hal ini akan dijelaskan pada bab ini.

Pada bab ini, akan dijelaskan tentang koefisien Tarkkonen's Rho, dan akan dibuktikan Tarkkonen's Rho mempunyai nilai antara 0 sampai dengan 1, dapat memberikan hasil taksiran yang lebih besar daripada koefisien Alpha Cronbach jika asumsi τ-*equivalent* tidak dipenuhi, dan akan bernilai sama dengan Alpha Cronbach jika asumsi τ-*equivalent* dipenuhi.

3.2 Koefisien Reliabilitas Tarkkonen's Rho

Misalkan X_i adalah variabel pengamatan item ke-i, M_i adalah variabel skor murni item ke-i, dan $\mathcal{E}_i$ adalah variabel kesalahan item ke-i, maka model pengukuran dapat dituliskan

$$X_i = M_i + \mathcal{E}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

Secara matriks dapat dituliskan

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

Dimana

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_p \end{pmatrix}$$

Misalkan suatu variabel *latent* T yang memiliki nilai yang disebut τ diukur berdasarkan variabel-variabel pengamatan $X_1, X_2, \dots, X_p$. Pandang M_i sebagai kombinasi linier dari T, dapat dituliskan $M_i = b_i T;\ b_i \in \mathbb{R};\ i = 1, 2, \dots, p$. Maka model pengukuran di atas dapat dituliskan kembali dengan

$X_i = b_i T + \mathcal{E}_i,\ \ i = 1, 2, \dots, p$

Secara matriks dapat dituliskan

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}T + \boldsymbol{\mathcal{E}}$

Dimana

$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_p \end{pmatrix}$, dan T adalah variabel *latent* yang akan diukur.

Berdasarkan asumsi-asumsi pada model pengukuran, maka:

- $E(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = E\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,
- $cov(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} cov(b_1T, \mathcal{E}_1) & cov(b_1T, \mathcal{E}_2) & \dots & cov(b_1T, \mathcal{E}_p) \\ cov(b_2T, \mathcal{E}_1) & cov(b_2T, \mathcal{E}_2) & \dots & cov(b_2T, \mathcal{E}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(b_pT, \mathcal{E}_1) & cov(b_pT, \mathcal{E}_2) & \dots & cov(b_pT, \mathcal{E}_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$,

  karena $b_1, b_2, \dots, b_p \neq 0$, maka $cov(T, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} cov(T, \mathcal{E}_1) \\ cov(T, \mathcal{E}_2) \\ \vdots \\ cov(T, \mathcal{E}_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\mathcal{E}_1} & cov(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) & \dots & cov(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_p) \\ cov(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) & \sigma^2_{\mathcal{E}_2} & \dots & cov(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_1) & cov(\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_2) & \dots & \sigma^2_{\mathcal{E}_p} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2_{\mathcal{E}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\mathcal{E}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{\mathcal{E}_p} \end{pmatrix}$$

Misalkan $cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \boldsymbol{\Psi_d}$, dan $\boldsymbol{B}$ adalah vektor berukuran $p \times 1$, maka dapat dibuktikan

$cov(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = cov(\boldsymbol{\mathcal{M}}) + cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = cov(\boldsymbol{B}T) + cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \sigma_T^2 \boldsymbol{BB}' + \boldsymbol{\Psi_d}$

(bukti pada lampiran 1)

Sebut $U = \sum_{i=1}^{p} X_i$ sebagai variabel pengamatan komposit. Berdasarkan model pengukuran didapat :

$$U = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (M_i + \mathcal{E}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} M_i + \sum_{i=1}^{p} \mathcal{E}_i$$

$$= M + \mathcal{E}$$

Dimana $M = \sum_{i=1}^{p} M_i$ merupakan variabel nilai murni komposit, dan

$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{E}_i$ merupakan variabel kesalahan (*error*) komposit.

Secara matriks dapat dituliskan

$U = \boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}$, $M = \boldsymbol{1}'\boldsymbol{\mathcal{M}}$, dan $\mathcal{E} = \boldsymbol{1}'\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

Dimana

$$\boldsymbol{1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}' = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1), \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}, \text{dan } \boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_p \end{pmatrix}$$

Maka

$var(M) = var(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{\mathcal{M}}) = var(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{B}T) = \boldsymbol{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\boldsymbol{1}$

$var(\mathcal{E}) = var(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \boldsymbol{1}'\boldsymbol{\Psi_d}\boldsymbol{1}$

dan

$var(U) = var(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{1}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}'(\sigma_T^2\boldsymbol{BB}' + \boldsymbol{\Psi_d})\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}'\boldsymbol{\Psi_d}\boldsymbol{1}$

Reliabilitas alat ukur didefinisikan dengan

$$R_u = \frac{var(M)}{var(U)}$$

Secara matriks dapat dituliskan

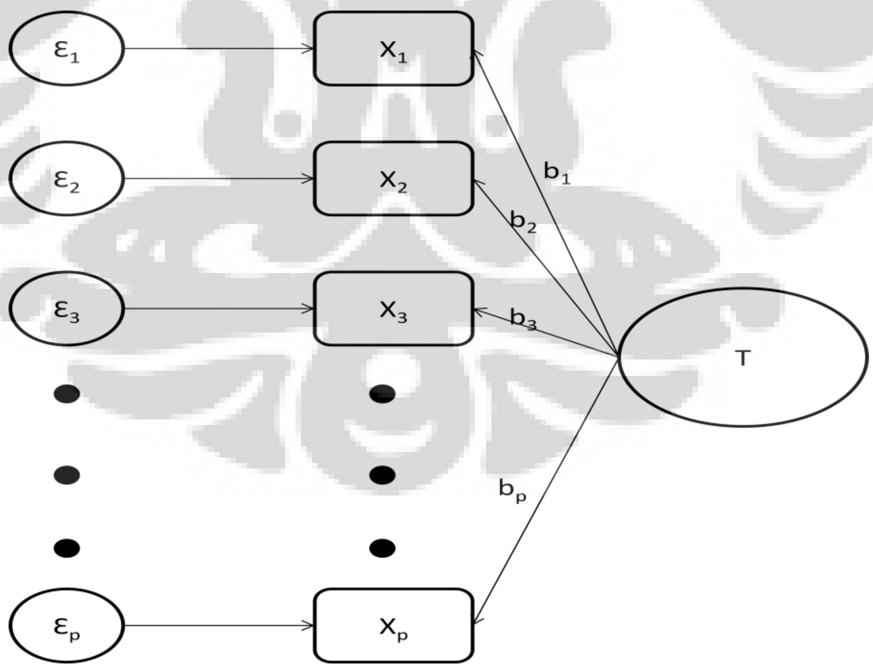
$$R_u = \mathbf{1}' \sigma_T^2 \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' \mathbf{1}(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1})^{-\mathbf{1}} \tag{3.1}$$

Jika $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, atau dengan perkataan lain model pengukuran τ*-equivalent*, telah ditunjukkan taksiran dari R_u dapat menggunakan koefisien Alpha Cronbach yang dirumuskan dengan

$$\alpha = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)$$

Telah dibuktikan pula pada subbab 2.3 jika $\boldsymbol{B} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ maka taksiran reliabilitas alat ukur dengan menggunakan Alpha Cronbach akan menjadi *underestimate.*

Pandang gambar 3.1 di bawah ini:



Gambar 3.1. Diagram Model Pengukuran untuk Mengukur Variabel *Latent* T

Model pengukuran untuk mengukur variabel latent T dapat dipandang sebagai analisis faktor *confirmatory* dengan mereduksi variabel $X_1, X_2, \dots, X_p$ menjadi satu faktor, yaitu T.

Model pengukurannya adalah

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}T + \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

Dan kovariansi dari $\boldsymbol{X}$ dirumuskan dengan

$$cov(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = cov(\boldsymbol{B}T) + cov(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \boldsymbol{B}\sigma_T^2\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Psi_d}$$

Dalam analisis faktor, matriks $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ merupakan matriks yang elemennya merupakan *factor loading*. Jika diasumsikan $X_1, X_2, \dots, X_p$ dan T distandardisasi, maka b_i merupakan korelasi antara X_i ; $i = 1, 2, \dots, p$ dengan T.

Koefisien Tarkkonen's Rho, dinotasikan dengan ρ_{uu}, didapatkan dari definisi reliabilitas alat ukur, dimana $\boldsymbol{B}$ merupakan matriks yang elemennya adalah *factor loading* terkait. Jadi dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \rho_{uu} &= \boldsymbol{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{1}(\boldsymbol{1}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{1})^{-1} \\ &= \boldsymbol{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{1}(\boldsymbol{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}'\boldsymbol{\Psi_d}\boldsymbol{1})^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dimana

$\boldsymbol{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{1}' = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$,

$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, b_i merupakan *factor loading*

$\boldsymbol{B}' = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_p)$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = cov(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_p) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_p, X_1) & cov(X_p, X_2) & \dots & \sigma_{X_p}^2 \end{pmatrix}$$, dan

$$\boldsymbol{\Psi_d} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{\varepsilon_p} \end{pmatrix}$$

3.3 Pembuktian Koefisien Tarkkonen's Rho Bernilai 0 Sampai dengan 1

Berikut ini akan dibuktikan bahwa Koefisien Tarkkonen's Rho bernilai 0 sampai dengan 1.

Bukti:

Terlihat bahwa $\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}$ merupakan bentuk kuadrat, sehingga $\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1} \geq 0$ dan karena $\boldsymbol{\Psi_d} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{\varepsilon_p} \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{1}'\boldsymbol{\Psi_d}\mathbf{1} \geq 0$. Sehingga $\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'\boldsymbol{\Psi_d}\mathbf{1} \geq 0$, dan $\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'\boldsymbol{\Psi_d}\mathbf{1} \geq \mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}$**.** Jadi

$0 \leq \mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}(\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1} + \mathbf{1}'\boldsymbol{\Psi_d}\mathbf{1})^{-\mathbf{1}} \leq 1$

$0 \leq \rho_{uu} \leq 1$ ∎

Jadi taksiran reliabilitas dengan menggunakan Tarkkonen's Rho selalu berkisar antara 0 sampai dengan 1.

3.4 Koefisien Tarkkonen's Rho Memberikan Hasil Taksiran yang Lebih Besar daripada Koefisien Alpha Cronbach dan Bernilai Sama dengan Alpha Cronbach Jika dan Hanya Jika Asumsi $\boldsymbol{\tau}$-*equivalent* Terpenuhi

Pada subbab ini akan dibuktikan bahwa Tarkkonen's Rho memberikan taksiran yang lebih besar daripada Alpha Cronbach, dan akan sama dengan Alpha Cronbach jika dan hanya jika model pengukuran τ-*equivalent.*

Telah diketahui bahwa rumus untuk koefisien Alpha Cronbach adalah

$\alpha = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p}\sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)$, dan matriks $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_p) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_p, X_1) & cov(X_p, X_2) & \dots & \sigma_{X_p}^2 \end{pmatrix}$

maka

$tr(\mathbf{\Sigma}) = \sum_{i=1}^{p}\sigma_{X_i}^2.$

Telah ditunjukkan pula bahwa $\sigma_U^2 = \mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{1}$, maka rumus koefisien Alpha Cronbach dapat dituliskan dengan

$$\alpha = \frac{p}{p-1}\left(1 - tr(\mathbf{\Sigma})\left(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{1}\right)^{-1}\right) \tag{3.3}$$

Sedangkan rumus untuk koefisien Tarkkonen's Rho adalah

$\rho_{uu} = \mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\mathbf{1}(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{1})^{-\mathbf{1}}$

Akan dibuktikan bahwa koefisien Tarkkonen's Rho memberikan hasil taksiran lebih besar daripada koefisien Alpha Cronbach, dengan perkataan lain akan dibuktikan bahwa:

$$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'\mathbf{1}(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{1})^{-\mathbf{1}} \geq \frac{p}{p-1}(1 - tr(\mathbf{\Sigma})(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{1})^{-1})$$

<u>Bukti:</u>

Misalkan $\sigma_T^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' = \sigma_T^2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_p)$

$$= \sigma_T^2\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & \dots & b_1b_p \\ b_2b_1 & b_2^2 & \dots & b_2b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_pb_1 & b_pb_2 & \dots & b_p^2 \end{pmatrix}$$

Misalkan $z_i = \sigma_T b_i$, maka dapat dituliskan

$$\sigma_T^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} z_1^2 & z_1z_2 & \dots & z_1z_p \\ z_2z_1 & z_2^2 & \dots & z_2z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_pz_1 & z_pz_2 & \dots & z_p^2 \end{pmatrix}$$

Pandang

$(z_1 - z_2)^2 + \cdots + \left(z_1 - z_p\right)^2 + (z_2 - z_3)^2 + \cdots + \left(z_{p-1} - z_p\right)^2 \geq 0$

$(p-1)\left(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2\right) - 2\left(z_1z_2 + \cdots + z_{p-1}z_p\right) \geq 0$

$(p-1)\left(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2\right) \geq 2\left(z_1z_2 + \cdots + z_{p-1}z_p\right)$

Lalu bagi dengan $(p-1)$ didapatkan

$$\left(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2\right)\geq\frac{2}{p-1}\left(z_1z_2+\cdots+z_{p-1}z_p\right)$$

$$\left(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2\right)\geq\frac{2p-2p+2}{p-1}\left(z_1z_2+\cdots+z_{p-1}z_p\right)$$

$$\left(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2\right)\geq\frac{2p-2(p-1)}{p-1}\left(z_1z_2+\cdots+z_{p-1}z_p\right)$$

$$\left(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2\right)+\frac{2(p-1)}{p-1}\left(z_1z_2+\cdots+z_{p-1}z_p\right)\geq\frac{p}{p-1}\left(2\left(z_1z_2+\cdots+z_{p-1}z_p\right)\right)$$

$$\left(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2\right)+2\left(z_1z_2+\cdots+z_{p-1}z_p\right)\geq\frac{p}{p-1}\left(2\left(z_1z_2+\cdots+z_{p-1}z_p\right)\right)$$

$$\left(z_1+z_2+\cdots+z_p\right)^2\geq\frac{p}{p-1}\left(\left(z_1+z_2+\cdots+z_p\right)^2-\left(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^2 & z_1z_2 & \dots & z_1z_p \\ z_2z_1 & z_2^2 & \dots & z_2z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_pz_1 & z_pz_2 & \dots & z_p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$\geq\frac{p}{p-1}\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^2 & z_1z_2 & \dots & z_1z_p \\ z_2z_1 & z_2^2 & \dots & z_2z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_pz_1 & z_pz_2 & \dots & z_p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} - \left(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2\right)\right]$$

Dapat dituliskan menjadi

$$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}\geq\frac{p}{p-1}\left(\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}-tr(\sigma_T^2\boldsymbol{BB}')\right)$$

$$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}\geq\frac{p}{p-1}(\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}+\mathbf{1}'\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d}\mathbf{1}-tr(\sigma_T^2\boldsymbol{BB}')-\mathbf{1}'\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d}\mathbf{1})$$

Karena $\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d}$ merupakan matriks diagonal, maka

$$\mathbf{1}'\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d}\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon_p}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\sigma_{\varepsilon_i}^2$$

$=tr(\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d})$, sehingga

$$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}\geq\frac{p}{p-1}(\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}+\mathbf{1}'\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d}\mathbf{1}-tr(\sigma_T^2\boldsymbol{BB}')-tr(\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{d}))$$

$$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1} \geq \frac{p}{p-1}\left(\mathbf{1}'(\sigma_T^2\boldsymbol{BB}' + \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}})\mathbf{1} - tr(\sigma_T^2\boldsymbol{BB}' + \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}})\right)$$

Karena $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_T^2\boldsymbol{BB}' + \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}}$, sehingga

$$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1} \geq \frac{p}{p-1}(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1} - tr(\boldsymbol{\Sigma}))$$

Kalikan dengan $(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1})^{-\mathbf{1}}$ didapatkan

$$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1})^{-\mathbf{1}} \geq \frac{p}{p-1}(1 - tr(\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1})^{-1})$$ ■

Jadi koefisien Tarkkonen's Rho bernilai yang lebih besar daripada koefisien Alpha Cronbach.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1})^{-\mathbf{1}} = \frac{p}{p-1}(1 - tr(\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1})^{-1})$$

Jika dan hanya jika model pengukuran τ-*equivalent*.

<u>Bukti:</u>

Dari pembuktian di atas dapat ditunjukkan

$\mathbf{1}'\sigma_T^2\boldsymbol{BB}'\mathbf{1}(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1})^{-\mathbf{1}} = \frac{p}{p-1}(1 - tr(\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1})^{-1})$, jika dan hanya jika

$$(z_1 - z_2)^2 + \cdots + (z_1 - z_p)^2 + (z_2 - z_3)^2 + \cdots + (z_{p-1} - z_p)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = z_2 = \cdots = z_p = \theta,\ \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_T^2\boldsymbol{BB}' = \begin{pmatrix} \theta^2 & \theta^2 & \dots & \theta^2 \\ \theta^2 & \theta^2 & \dots & \theta^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^2 & \theta^2 & \dots & \theta^2 \end{pmatrix}$$

$$= \theta^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \theta^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \theta^2\mathbf{11}'$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hal ini berarti nilai murni untuk tiap item sama dan variansi dari nilai murni untuk tiap item sama. Kondisi ini disebut dengan τ-*equivalent*. ■

Dapat disimpulkan bahwa koefisien Tarkkonen's Rho bernilai lebih besar daripada koefisien Alpha Cronbach, dan akan memberikan nilai yang sama dengan koefisien Alpha Cronbach jika dan hanya jika model pengukuran τ-*equivalent*.

Penaksir koefisien Tarkkonen's Rho adalah sebagai berikut:

$$\widehat{\rho_{UU}} = \mathbf{1}' S_T^2 \widehat{\boldsymbol{B}} \widehat{\boldsymbol{B}}' \mathbf{1} (\mathbf{1}' \boldsymbol{S} \mathbf{1})^{-\mathbf{1}} \tag{3.4}$$

Dimana

$\boldsymbol{S}$ adalah matriks kovariansi dari $X_1, X_2, \ldots, X_p$ yang diperoleh dari sampel

$\widehat{\boldsymbol{B}}$ adalah vektor yang elemennya adalah taksiran *factor loading*

S_T^2 adalah variansi T yang diperoleh dari sampel.

Jika diasumsikan T distandardisasi, $S_T^2 = 1$, maka taksiran koefisien Tarkkonen's Rho menjadi

$$\widehat{\rho_{UU}} = \mathbf{1}' \widehat{\boldsymbol{B}} \widehat{\boldsymbol{B}}' \mathbf{1} (\mathbf{1}' \boldsymbol{S} \mathbf{1})^{-\mathbf{1}} \tag{3.5}$$

Taksiran dari *factor loading* yang didapat dari metode iterasi yang telah disebut pada bab sebelumnya.

BAB 4
CONTOH PENERAPAN

Pada bab ini akan diberikan contoh perbandingan taksiran koefisien reliabilitas dengan koefisien Alpha Cronbach dan koefisien Tarkkonen's Rho dari suatu alat ukur fondasi moral yang diberikan kepada murid-murid dari suatu bimbingan belajar di Jakarta.

4.1 Sumber Data

Data yang digunakan pada tugas akhir ini merupakan data sekunder dengan populasi yaitu semua murid pada bimbingan belajar yang bersangkutan. Sedangkan yang menjadi sampel adalah 98 siswa yang diambil secara *purposive sampling* dari murid-murid bimbingan belajar tersebut. Alat ukur tersebut terdiri dari 16 item dan menggunakan skala *Likert*. Data dan kuesioner terlampir pada lampiran 5 dan 6.

4.2 Analisis Data

Akan ditaksir reliabilitas alat ukur tersebut dengan menggunakan koefisien Alpha Cronbach. Dari data yang didapat diperoleh taksiran koefisien Alpha Cronbach sebesar 0.525. Nunnally (1978) mengatakan bahwa suatu alat ukur dikatakan reliabel dengan koefisien Alpha Cronbach minimal sama dengan 0.7. Jadi dapat disimpulkan bahwa alat ukur landasan moral tersebut tidak reliabel.

Tabel 4. 1. Taksiran Koefisien Alpha Cronbach

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.525	16

Kemudian reliabilitas alat ukur tersebut akan ditaksir dengan menggunakan taksiran koefisien Tarkkonen’s Rho yang mempunyai formula

$$\widehat{\rho_{uu}} = \mathbf{1}' S_T^2 \widehat{\boldsymbol{B}}\widehat{\boldsymbol{B}}' \mathbf{1}\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{S}\mathbf{1}\right)^{-\mathbf{1}}$$

Dimana $\widehat{\boldsymbol{B}}$ adalah matriks yang elemennya merupakan taksiran *factor loading* yang didapat dari analisis faktor *confirmatory* dengan 16 item pengamatan yang direduksi menjadi satu faktor. Jika diasumsikan faktor distandardisasi, variansi dari faktor sama dengan 1, yang berarti $S_T^2 = 1$, taksiran koefisien Tarkkonen’s Rho menjadi

$$\widehat{\rho_{uu}} = \mathbf{1}' \widehat{\boldsymbol{B}}\widehat{\boldsymbol{B}}' \mathbf{1}\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{S}\mathbf{1}\right)^{-\mathbf{1}}$$

Jika $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ distandardisasi, matriks $\boldsymbol{S}$ merupakan matriks korelasi. Dari data didapat sebagai berikut:

Tabel 4. 2. Kaiser-Meyer-Olkin *Measure of Sampling Adequacy* dan Tes Bartlett

KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		.561
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	205.463
	Df	120
	Sig.	.000

Berdasarkan tabel di atas terlihat bahwa syarat untuk melakukan analisis faktor dipenuhi, karena KMO bernilai lebih besar dari 0.5, dan tes Bartlett menghasilkan penolakan hipotesis bahwa matriks kovariansi merupakan matriks identitas.

Matriks $\boldsymbol{S}$ yang diperoleh dari data adalah sebagai berikut:

Tabel 4. 3 Matriks **S**

Correlation Matrix

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16
Correlation	X1	1.000	.200	.116	-.093	.064	.002	.103	.242	.057	.002	.122	.022	-.121	-.008	-.045	.085
	X2	.200	1.000	.242	-.048	.135	.142	.000	.293	.239	-.230	.018	.071	.027	-.033	-.079	.117
	X3	.116	.242	1.000	.379	.207	.138	.132	.318	.025	.014	-.083	.006	-.008	.093	.122	.201
	X4	-.093	-.048	.379	1.000	.141	.005	.197	.076	.204	.008	-.311	-.051	-.030	.198	.084	-.018
	X5	.064	.135	.207	.141	1.000	.055	.188	.140	.222	-.055	.117	.256	-.031	.029	.007	.196
	X6	.002	.142	.138	.005	.055	1.000	-.091	.220	.017	-.057	.190	.225	.044	-.006	-.015	.194
	X7	.103	.000	.132	.197	.188	-.091	1.000	.174	.075	.010	-.089	-.015	.010	.102	.047	-.010
	X8	.242	.293	.318	.076	.140	.220	.174	1.000	.268	-.022	.154	.115	.017	-.027	.004	.128
	X9	.057	.239	.025	.204	.222	.017	.075	.268	1.000	-.084	-.004	.043	-.104	.333	-.022	-.008
	X10	.002	-.230	.014	.008	-.055	-.057	.010	-.022	-.084	1.000	.197	-.089	.136	-.058	.214	-.103
	X11	.122	.018	-.083	-.311	.117	.190	-.089	.154	-.004	.197	1.000	.139	.299	-.192	.067	.021
	X12	.022	.071	.006	-.051	.256	.225	-.015	.115	.043	-.089	.139	1.000	.029	-.007	-.096	.466
	X13	-.121	.027	-.008	-.030	-.031	.044	.010	.017	-.104	.136	.299	.029	1.000	-.061	.133	.000
	X14	-.008	-.033	.093	.198	.029	-.006	.102	-.027	.333	-.058	-.192	-.007	-.061	1.000	.063	.063
	X15	-.045	-.079	.122	.084	.007	-.015	.047	.004	-.022	.214	.067	-.096	.133	.063	1.000	-.113
	X16	.085	.117	.201	-.018	.196	.194	-.010	.128	-.008	-.103	.021	.466	.000	.063	-.113	1.000

Taksiran *factor loading* yang didapat dari analisis faktor adalah sebagai berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0.320 \\ 0.527 \\ 0.562 \\ 0.298 \\ 0.528 \\ 0.367 \\ 0.267 \\ 0.623 \\ 0.459 \\ -0.232 \\ 0.048 \\ 0.426 \\ -0.071 \\ 0.214 \\ -0.070 \\ 0.492 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa $\widehat{\boldsymbol{B}} \neq \mathbf{1}$ yang berarti model pengukuran tidak bersifat τ- *equivalent*.

Dari data diperoleh taksiran koefisien Tarkkonen’s Rho bernilai

$$\widehat{\rho_{uu}} = 0.719$$

Terlihat bahwa hasil taksiran dengan menggunakan koefisien Tarkkonen’s Rho lebih besar daripada hasil taksiran dengan menggunakan koefisien Alpha Cronbach.

Dapat disimpulkan bahwa model pengukuran tidak bersifat τ-*equivalent*, sehingga dengan menggunakan koefisien Tarkkonen’s Rho didapatkan hasil taksiran yang lebih besar daripada koefisien Alpha Cronbach.

BAB 5
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Koefisien Alpha Cronbach yang sering digunakan untuk menaksir reliabilitas alat ukur sebenarnya memerlukan asumsi, yaitu model pengukuran τ-*equivalent*. Jika asumsi tersebut tidak dipenuhi, penaksiran reliabilitas alat ukur dengan Alpha Cronbach akan *underestimate*. Penaksir reliabilitas lain yang dinamakan koefisien Tarkkonen's Rho dicetuskan oleh Tarkkonen dan Vehkalahti menggunakan model analisis faktor dalam penaksiran reliabilitas. Koefisien Tarkkonen's Rho terbukti akan bernilai lebih besar dari koefisien Alpha Cronbach jika asumsi τ-*equivalent* tidak dipenuhi, dan akan bernilai sama dengan koefisien Alpha Cronbach jika asumsi τ-*equivalent* dipenuhi.

5.2 Saran

- Dalam menaksir reliabilitas alat ukur, perlu diperiksa terlebih dahulu apakah model pengukuran pada alat ukur tersebut bersifat τ-*equivalent*. Jika model pengukuran pada alat ukur tersebut bersifat τ-*equivalent*, taksiran reliabilitas dapat menggunakan koefisien Alpha Cronbach karena alasan praktis. Tetapi jika model pengukuran pada alat ukur tersebut tidak bersifat τ-*equivalent*, hendaknya digunakan koefisien Tarkkonen's Rho.
- Pada penelitian selanjutnya dapat dibahas mengenai penaksiran reliabilitas pada suatu alat ukur multidimensional dengan menggunakan koefisien Tarkkonen's Rho.

DAFTAR PUSTAKA

Azwar, Saifuddin. 1999. *Dasar-Dasar Psikometri*. Yogyakarta:Pustaka Pelajar

Azwar, Saifuddin. 2003. *Reliabilitas dan Validitas*.Yogyakarta:Pustaka Pelajar

Crocker, Linda & Algina, James. 1986. *Introduction to Classical & Modern Test Theory*. Florida:Harcourt Brace Jovanovich College Publishers.

Embretson, Susan E. & Reise, Steven P. 2000. *Item Response Theory for Psychologists*. New Jersey:Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Hogg, Robert V.& Craig, Allen T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edition. New Jersey:Prentice-Hall International, Inc.

Kaiser, H. F. 1974. *An Index of Factorial Simplicity*. Psychometrika. Volume 39, No. 1: 31-36.

Mulya, Thamrin H. 2007. *Membandingkan Koefisien Alpha Cronbach dari Dua Buah Alat Tes yang Panjangnya Telah Disesuaikan*. Depok:Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia.

Nunnally, J. C. 1978. *Psychometric Theory*, Second Editon. New York:McGraw-Hill.

Novick, Melvin R., Lewis, Charles. 1967. *Coefficient Alpha and The Reliability of Composite Measurement*. Psychometrika, Volume 32, No. 1: 1-13.

Rencher, Alvin C. 2002.*Methods of Multivariate Analysis*, Second Edition. New York:John Wiley and Sons, Inc.

Sharma, Subhash. 1996. *Applied Multivariate Techniques*. New York:John Wiley and Sons, Inc.

Vehkalahti, K., Puntanen, S., & Tarkkonen, L. 2006. *Estimation of Reliability; A Better Alternative for Cronbach's Alpha*. Elsevier Science.

Vehkalahti, Kimmo. 2000. *Reliability of Measurement Scales; Tarkkonen's General Method Supersedes Cronbach's Alpha*. Helsinki:Finnish Statistical Society

Vehkalahti, K., Puntanen, S., & Tarkkonen, L. 2009. *Implications of Dimensionality on Measurement Reliability*. Statistical Inference , Econometric Analysis, and Matrix Algebra: 143-160.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Menunjukkan $cov(\boldsymbol{X}) = cov(\boldsymbol{B}T + \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \sigma_T^2 \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Psi_d}$

Akan dibuktikan bahwa $cov(\boldsymbol{X}) = cov(\boldsymbol{B}T + \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \sigma_T^2 \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Psi_d}$.

<u>Bukti:</u>

Diketahui bahwa matriks kovariansi dari $\boldsymbol{X}$ adalah:

$$cov(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_p) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \dots & cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_p, X_1) & cov(X_p, X_2) & \dots & \sigma_{X_p}^2 \end{pmatrix}$$

Akan dicari variansi dari X_i

$$\begin{aligned} var(X_i) &= cov(X_i, X_i) \\ &= cov(b_i T + \mathcal{E}_i, b_i T + \mathcal{E}_i) \\ &= cov(b_i T, b_i T) + cov(\mathcal{E}_i, b_i T) + cov(b_i T, \mathcal{E}_i) + cov(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i) \\ &= cov(b_i T, b_i T) + 2cov(b_i T, \mathcal{E}_i) + cov(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i) \end{aligned}$$

Karena $cov(b_i T, \mathcal{E}_i) = cov(M_i, \mathcal{E}_i) = 0$, maka

$$var(X_i) = b_i^2 var(T) + var(\mathcal{E}_i)$$

Kemudian akan dicari kovariansi dari X_i dengan X_j; $i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) &= cov(b_i T + \mathcal{E}_i, b_j T + \mathcal{E}_j) \\ &= cov(b_i T, b_j T) + cov(\mathcal{E}_i, b_j T) + cov(b_i T, \mathcal{E}_j) + cov(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) \end{aligned}$$

Karena $cov(\mathcal{E}_i, T) = 0$, $cov(\mathcal{E}_j, T) = 0$, dan $cov(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) = 0$, maka

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) &= cov(b_i T, b_j T) \\ &= E(b_i T b_j T) - E(b_i T)E(b_j T) \\ &= E(b_i b_j T^2) - b_i b_j [E(T)]^2 \\ &= b_i b_j \{E(T^2) - [E(T)]^2\} \\ &= b_i b_j var(T) \end{aligned}$$

Jadi

$$cov(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} b_1^2 var(T) + var(\mathcal{E}_1) & b_1 b_2 var(T) & \dots & b_1 b_p var(T) \\ b_2 b_1 var(T) & b_2^2 var(T) + var(\mathcal{E}_2) & \dots & b_2 b_p var(T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_p b_1 var(T) & b_p b_2 var(T) & \dots & b_p^2 var(T) + var(\mathcal{E}_p) \end{pmatrix}$$

(lanjutan)

$$= \begin{pmatrix} b_1^2 var(T) & b_1 b_2 var(T) & \dots & b_1 b_p var(T) \\ b_2 b_1 var(T) & b_2^2 var(T) & \dots & b_2 b_p var(T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_p b_1 var(T) & b_p b_2 var(T) & \dots & b_p^2 var(T) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} var(\mathcal{E}_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & var(\mathcal{E}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \quad 0 & \dots & var(\mathcal{E}_p) \end{pmatrix}$$

$$= var(T) \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & \dots & b_1 b_p \\ b_2 b_1 & b_2^2 & \dots & b_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_p b_1 & b_p b_2 & \dots & b_p^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} var(\mathcal{E}_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & var(\mathcal{E}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \quad 0 & \dots & var(\mathcal{E}_p) \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_T^2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_p) + \boldsymbol{\Psi_d}$$

$$= \sigma_T^2 \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Psi_d} \qquad \blacksquare$$

Lampiran 2: Membuktikan Pertidaksamaan Cauchy-Schwartz

$$\left[cov\left(M_i, M_j\right)\right]^2 \leq \sigma_{M_i}^2 \sigma_{M_j}^2$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\left[cov\left(M_i, M_j\right)\right]^2 \leq \sigma_{M_i}^2 \sigma_{M_j}^2$$

<u>Bukti:</u>

Misalkan v adalah variabel (bukan variabel random), perhatikan fungsi

$$h(v) = E\left[\left\{\left(M_i - \mu_{M_i}\right) + v\left(M_j - \mu_{M_j}\right)\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left(M_i - \mu_{M_i}\right)^2 + v^2\left(M_j - \mu_{M_j}\right)^2 + 2v\left(M_i - \mu_{M_i}\right)\left(M_j - \mu_{M_j}\right)\right]$$

$$= E\left[\left(M_i - \mu_{M_i}\right)^2\right] + 2vE\left[\left(M_i - \mu_{M_i}\right)\left(M_j - \mu_{M_j}\right)\right] + v^2 E\left[\left(M_j - \mu_{M_j}\right)^2\right]$$

$$= v^2 \sigma_{M_j}^2 + 2cov\left(M_i, M_j\right)v + \sigma_{M_i}^2$$

Jadi fungsi $h(v)$ adalah fungsi kuadrat, tetapi karena

$$h(v) = E\left[\left\{\left(M_i - \mu_{M_i}\right) + v\left(M_j - \mu_{M_j}\right)\right\}^2\right] \geq 0 \; ; \; \forall v \in \mathbb{R}$$

Maka $h(v)$ adalah fungsi kuadrat definit positif, sehingga diskriminannya akan ≤ 0

$$\left[2cov\left(M_i, M_j\right)\right]^2 - 4\sigma_{M_j}^2 \sigma_{M_i}^2 \leq 0$$

$$4\left[cov\left(M_i, M_j\right)\right]^2 \leq 4\sigma_{M_j}^2 \sigma_{M_i}^2$$

$$\left[cov\left(M_i, M_j\right)\right]^2 \leq \sigma_{M_i}^2 \sigma_{M_j}^2 \qquad \blacksquare$$

Lampiran 3: Membuktikan $\hat{\alpha} = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_{X_i}}{S_U^2}\right)$ adalah Penaksir yang Konsisten untuk Koefisien Alpha Cronbach

- Pertama, akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa S^2 adalah penaksir yang konsisten untuk σ^2.

Definisi 1 Suatu barisan variabel *random* (A_n) dikatakan konvergen dalam probabilitas ke A jika dan hanya jika $\forall\varepsilon > 0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|A_n - A| < \varepsilon] = 1$$

Atau

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|A_n - A| \geq \varepsilon] = 0$$

Definisi 2 Suatu statistik yang konvergen dalam probabilitas ke suatu parameter ω disebut penaksir yang konsisten dari parameter ω.

Sesuai dengan Definisi 2, S^2 dikatakan penaksir yang konsisten untuk σ^2 jika

$$S^2 \xrightarrow{Pr} \sigma^2$$

Atau dengan perkataan lain, sesuai dengan Definisi 1,

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|S^2 - \sigma^2| < \varepsilon) = 1$$

Maka akan dibuktikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|S^2 - \sigma^2| < \varepsilon) = 1$$

<u>Bukti:</u>

Misalkan $X_a; a = 1, 2, \ldots, n$ adalah sampel *random* berukuran n yang *mutually independent* dan identik.

(lanjutan)

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}(X_a - \bar{X})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}(X_a - \mu + \mu - \bar{X})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{a=1}^{n}(X_a - \mu)^2 + \sum_{a=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2 - 2\sum_{a=1}^{n}(X_a - \mu)(\bar{X} - \mu)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a - \mu)^2) + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\left(\sum_{a=1}^{n}X_a - \sum_{a=1}^{n}\mu\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a - \mu)^2) + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)(n\bar{X} - n\mu)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{a=1}^{n}((X_h - \mu)^2) + n(\bar{X} - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a - \mu)^2) - n(\bar{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}((X_a - \mu)^2) - \frac{n}{n-1}(\bar{X} - \mu)^2$$

Akan dicari variansi dari S^2

$$var(S^2) = var\left[\frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}((X_a - \mu)^2) - \frac{n}{n-1}(\bar{X} - \mu)^2\right]$$

(lanjutan)

$$= var\left[\frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2)\right] + var\left[\frac{n}{n-1}(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$+ 2cov\left[\frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), -\frac{n}{n-1}(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= var\left[\frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2)\right] + var\left[\frac{n}{n-1}(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{a=1}^{n}(var[(X_a-\mu)^2]) + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 var[(\bar{X}-\mu)^2]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

Perhatikan bahwa

$$var[(X_a-\mu)^2] = E[(X_a-\mu)^4] - [E\{(X_a-\mu)^2\}]^2$$

$$= \sigma^4\kappa_{X_a} - \sigma^4$$

$$= \sigma^4(\kappa_{X_a} - 1)$$

Dimana $\kappa_{X_a} = \frac{E[(X_a-\mu)^4]}{\sigma^4}$

Karena $X_a; a = 1,2,\ldots,n$ identik, maka $\kappa_{X_1} = \kappa_{X_2} = \cdots = \kappa_{X_n} = \kappa_X$.

Dengan cara yang similar,

$$var[(\bar{X}-\mu)^2] = E[(\bar{X}-\mu)^4] - [E\{(\bar{X}-\mu)^2\}]^2$$

$$= \frac{\sigma^4}{n^2}\kappa_{\bar{X}} - \frac{\sigma^4}{n^2}$$

(lanjutan)

$$= \frac{\sigma^4}{n^2}(\kappa_{\bar{X}} - 1)$$

Dimana $\kappa_{\bar{X}} = \frac{E[(\bar{X}-\mu)^4]}{\sigma^4/_{n^2}}$

Sehingga didapatkan

$$var(S^2) = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{a=1}^{n}(var[(X_h - \mu)^2]) + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 var[(\bar{X} - \mu)^2]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a - \mu)^2), (\bar{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{n\sigma^4(\kappa_X - 1)}{(n-1)^2} + \frac{n^2}{(n-1)^2}\frac{\sigma^4}{n^2}(\kappa_{\bar{X}} - 1)$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a - \mu)^2), (\bar{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}[n(\kappa_X - 1) + (\kappa_{\bar{X}} - 1)]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a - \mu)^2), (\bar{X} - \mu)^2\right]$$

Perhatikan

$$E\left[\left(\sum_{a=1}^{n}X_a - \mu_{\sum_{a=1}^{n}X_a}\right)^4\right] = E\left[\left(\sum_{a=1}^{n}X_a - \sum_{a=1}^{n}\mu\right)^4\right]$$

$$= E\left[\left\{\sum_{a=1}^{n}(X_a - \mu)\right\}^4\right]$$

(lanjutan)

Sedangkan

$$\left(\sum_{a=1}^{n} X_a - \mu\right)^4 = \sum_{a=1}^{n} (X_a - \mu)^4 + \Pi[(X_1 - \mu), (X_2 - \mu), \dots, (X_n - \mu)]$$

Dengan $\Pi[(X_1 - \mu), (X_2 - \mu), \dots, (X_n - \mu)]$ adalah polinomial dengan suku-sukunya adalah

$(X_a - \mu)(X_b - \mu)(X_c - \mu)(X_d - \mu), (X_a - \mu)(X_b - \mu)(X_c - \mu)^2,$

$(X_a - \mu)^2(X_b - \mu)^2$, dan

$(X_a - \mu)(X_b - \mu)^3; a \neq b \neq c \neq d; a, b, c, d = 1, 2, \dots, n.$

Karena $X_1, X_2, \dots, X_n$ *mutually independent* dan identik, maka ekspektasi dari

$(X_a - \mu)(X_b - \mu)(X_c - \mu)(X_d - \mu), (X_a - \mu)(X_b - \mu)(X_c - \mu)^2$, dan

$(X_a - \mu)(X_b - \mu)^3; a \neq b \neq c \neq d; a, b, c, d = 1, 2, \dots, n$ akan sama dengan 0 (perhatikan $E(X_a - \mu) = E(X_a) - \mu = \mu - \mu = 0$).

Sehingga

$$E\big[\Pi[(X_1 - \mu), (X_2 - \mu), \dots, (X_n - \mu)]\big] = \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} E[(X_a - \mu)^2(X_b - \mu)^2]$$

$$= \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} E[(X_a - \mu)^2]E[(X_b - \mu)^2]$$

$$= \binom{n}{2}\sigma^4$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\sigma^4$$

(lanjutan)

Sehingga

$$E\left[\left(\sum_{a=1}^{n} X_a - \mu_{\sum_{a=1}^{n} X_a}\right)^4\right] = E\left[\sum_{a=1}^{n}(X_a-\mu)^4\right] + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^4$$

$$= \sum_{a=1}^{n}\left(E[(X_a-\mu)^4]\right) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^4$$

$$= \sum_{a=1}^{n}(\kappa_X\sigma^4) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^4$$

$$= n\kappa_X\sigma^4 + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^4$$

$$= n\sigma^4\left[\kappa_X + \frac{n-1}{2}\right]$$

Kita tahu bahwa (karena $X_1X_2, \dots, X_n$ *mutually independent* dan identik)

$$var\left(\sum_{a=1}^{n} X_a\right) = \sum_{a=1}^{n} var(X_a) = n\sigma^2$$

Sehingga

$$\kappa_{\sum_{a=1}^{n} X_a} = \frac{E\left[\left(\sum_{a=1}^{n} X_a - \mu_{\sum_{a=1}^{n} X_a}\right)^4\right]}{[var(\sum_{a=1}^{n} X_a)]^2}$$

$$= \frac{n\sigma^4\left[\kappa_X + \frac{n-1}{2}\right]}{n^2\sigma^4}$$

$$= \frac{\kappa_X}{n} + \frac{n-1}{2n}$$

(lanjutan)

Selain itu, kita juga tahu

$$\kappa_{\frac{1}{n}X} = \frac{E\left[\left(\frac{1}{n}X - \frac{1}{n}\mu\right)^4\right]}{\sigma^4/_{n^4}} = \frac{n^4}{n^4}\frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \kappa_X$$

Sehingga

$$\kappa_{\bar{X}} = \kappa_{\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} X_a} = \kappa_{\sum_{a=1}^{n} X_a} = \frac{\kappa_X}{n} + \frac{n-1}{2n}$$

Akibatnya

$$var(S^2) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\left[n(\kappa_X - 1) + (\kappa_{\bar{X}} - 1)\right]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\left[n(\kappa_X - 1) + \left(\frac{\kappa_X}{n} + \frac{n-1}{2n} - 1\right)\right]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\left[n\kappa_X - n + \left(\frac{\kappa_X}{n} + \frac{n-1}{2n} - 1\right)\right]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\left[\frac{n^2\kappa_X + \kappa_X}{n} - \left(\frac{2n^2+n+1}{2n}\right)\right]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2}cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

(lanjutan)

$$= \sigma^4 \left[\frac{n^2+1}{(n-1)^2}\frac{\kappa_X}{n} - \left(\frac{2n^2+n+1}{2n(n-1)^2}\right)\right]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2} cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \sigma^4 \left[\frac{2(n^2+1)\kappa_X - (2n^2+n+1)}{2n(n-1)^2}\right]$$

$$-2\frac{n}{(n-1)^2} cov\left[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^4\left[2(n^2+1)\kappa_X - \left(2n^2+n+1\right)\right] - 4n^2 cov[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2]}{2n(n-1)^2}$$

Berdasarkan pertidaksamaan Chebysev, yaitu

$$Pr\left(|S^2 - E(S^2)| < k\sqrt{var(S^2)}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Karena S^2 adalah penaksir tak bias untuk σ^2, sehingga $E(S^2) = \sigma^2$

$$Pr\left(|S^2 - \sigma^2| < k\sqrt{var(S^2)}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$Pr\left(|S^2-\sigma^2| < k\frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{\sigma^4[2(n^2+1)\kappa_X - (2n^2+n+1)] - 4n^2 cov[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2]}{2n}}\right)$$
$$\geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Ambil $\varepsilon = k\frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{\sigma^4[2(n^2+1)\kappa_X-(2n^2+n+1)]-4n^2cov[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2),(\bar{X}-\mu)^2]}{2n}}$, sehingga

$$k = \varepsilon(n-1)\sqrt{\frac{2n}{\sigma^4[2(n^2+1)\kappa_X-(2n^2+n+1)]-4n^2cov[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2),(\bar{X}-\mu)^2]}}$$

Didapatkan

$$Pr(|S^2-\sigma^2| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^4[2(n^2+1)\kappa_X - (2n^2+n+1)] - 4n^2 cov[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2]}{\varepsilon^2(n-1)^2 2n}$$

(lanjutan)

Dengan mengambil limit untuk n menuju tak hingga, didapatkan

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|S^2 - \sigma^2| < \varepsilon)$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{\sigma^4[2(n^2+1)\kappa_X - (2n^2+n+1)] - 4n^2 cov[\sum_{a=1}^{n}((X_a-\mu)^2), (\bar{X}-\mu)^2]}{\varepsilon^2(n-1)^2 2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|S^2 - \sigma^2| < \varepsilon) \geq 1$$

Tetapi karena $Pr(|S^2 - \sigma^2| < \varepsilon) \leq 1$, maka

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|S^2 - \sigma^2| < \varepsilon) = 1$$

Jadi $S^2 \xrightarrow{Pr} \sigma^2$ ■

Dapat disimpulkan S^2 adalah penaksir yang konsisten untuk σ^2.

Jadi $S_{X_i}^2$ merupakan penaksir yang konsisten untuk $\sigma_{X_i}^2; i = 1, 2, \dots, p$ dan S_U^2 merupakan penaksir yang konsisten untuk σ_U^2, dimana $X_i; i = 1, 2, \dots, p$ adalah variabel pengamatan untuk item ke-i, dan U adalah variabel pengamatan komposit dari suatu alat ukur.

Definisi 3 Misalkan $f(x)$ adalah fungsi satu variabel bernilai *real*. f dikatakan kontinu di g jika dan hanya jika $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $|x - g| < \delta$ maka $|f(x) - f(g)| < \varepsilon$.

Definisi 4 Misalkan $f(x, y)$ adalah fungsi dua variabel bernilai *real*. f dikatakan kontinu di (g, h) jika dan hanya jika $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\sqrt{(x-g)^2 + (y-h)^2} < \delta$ maka $|f(x, y) - f(g, h)| < \varepsilon$.

(lanjutan)

Definisi 5 Barisan vektor random $((A_n, B_n))$ dikatakan konvergen dalam probabilitas ke (A, B) jika dan hanya jika $\forall \varepsilon > 0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left[\left|\sqrt{(A_n - A)^2 + (B_n - B)^2}\right| < \varepsilon\right] = 1$$

Teorema 1 Misalkan $A_n \xrightarrow{Pr} g$. Jika $f(x)$ fungsi kontinu di $x = g$ maka $f(A_n) \xrightarrow{Pr} f(g)$.

<u>Bukti:</u>

Berdasarkan definisi fungsi kontinu, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga jika $|A_n - g| < \delta$ maka $|f(A_n) - f(g)| < \varepsilon$.

Misalkan : A adalah kejadian $|A_n - g| < \delta$

B adalah kejadian $|f(A_n) - f(g)| < \varepsilon$

Karena jika A terjadi, kejadian B pasti terjadi, maka $Pr(B|A) = 1$.

$$Pr(B) = Pr(B|A^c)\, Pr(A^c) + Pr(B|A)\, Pr(A)$$

$$= Pr(B|A^c)\, Pr(A^c) + Pr(A) \geq Pr(A)$$

Maka

$$Pr(|f(A_n) - f(g)| < \varepsilon) \geq Pr(|A_n - g| < \delta)$$

Sehingga dengan mengambil limit, dan karena $A_n \xrightarrow{Pr} c$, maka

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|f(A_n) - f(g)| < \varepsilon] \geq \lim_{n\to\infty} Pr[|A_n - g| < \delta] = 1$$

Tetapi karena $Pr[|f(A_n) - f(g)| < \varepsilon] \leq 1$, sehingga

(lanjutan)

$\lim_{n\to\infty} Pr[|f(A_n) - f(g)| < \varepsilon] = 1$

Jadi $f(A_n) \xrightarrow{Pr} f(g)$. ∎

Teorema 2 Jika $a + b \geq \varepsilon$, maka $a \geq \varepsilon/_2$ atau $b \geq \varepsilon/_2$.

Bukti:

Andaikan tidak, jadi $a < \varepsilon/_2$ dan $b < \varepsilon/_2$, maka

$a + b < \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 = \varepsilon$.

Hal tersebut kontradiksi dengan premis, sehingga haruslah

Jika $a + b \geq \varepsilon$, maka $a \geq \varepsilon/_2$ atau $b \geq \varepsilon/_2$. ∎

Teorema 3 Misalkan (A_n) dan (B_n) adalah dua buah barisan variabel *random*. Jika $A_n \xrightarrow{Pr} g$ dan $B_n \xrightarrow{Pr} h$ maka $(A_n, B_n) \xrightarrow{Pr} (g, h)$.

Bukti:

Dengan ketaksamaan segitiga di R^2, kita tahu bahwa

$$\sqrt{(A_n - g)^2 + (B_n - h)^2} \leq \sqrt{(A_n - g)^2} + \sqrt{(B_n - h)^2} = |A_n - g| + |B_n - h|$$

Sehingga jika $\sqrt{(A_n - g)^2 + (B_n - h)^2} \geq \varepsilon$ maka $|A_n - g| + |B_n - h| \geq \varepsilon$.

Misalkan: A adalah kejadian $\sqrt{(A_n - g)^2 + (B_n - h)^2} \geq \varepsilon$

B adalah kejadian $|A_n - g| + |B_n - h| \geq \varepsilon$

Karena jika A terjadi, kejadian B pasti terjadi, maka $Pr(B|A) = 1$.

$Pr(B) = Pr(B|A^c)\, Pr(A^c) + Pr(B|A)\, Pr(A)$

(lanjutan)

$$= Pr(B|A^c)\, Pr(A^c) + Pr(A) \geq Pr(A)$$

Maka

$$Pr\left(\sqrt{(A_n - g)^2 + (B_n - h)^2} \geq \varepsilon\right) \leq Pr(|A_n - g| + |B_n - h| \geq \varepsilon)$$

Dengan Teorema 2, kita dapat jika $|A_n - g| + |B_n - h| \geq \varepsilon$ maka

$|A_n - g| \geq \varepsilon/2$ atau $|B_n - h| \geq \varepsilon/2$.

Misalkan: C adalah kejadian $|A_n - g| \geq \varepsilon/2$ atau $|B_n - h| \geq \varepsilon/2$.

Karena jika B terjadi, kejadian C pasti terjadi, maka $Pr(C|B) = 1$.

$$Pr(C) = Pr(C|B^c)\, Pr(B^c) + Pr(C|B)\, Pr(B)$$

$$= Pr(C|B^c)\, Pr(B^c) + Pr(B) \geq Pr(B)$$

Maka

$$Pr(|A_n - g| + |B_n - h| \geq \varepsilon) \leq Pr\left(|A_n - g| \geq \varepsilon/2 \text{ atau } |B_n - h| \geq \varepsilon/2\right)$$

Sehingga

$$Pr\left(\sqrt{(A_n - g)^2 + (B_n - h)^2} \geq \varepsilon\right) \leq Pr(|A_n - g| + |B_n - h| \geq \varepsilon)$$

$$\leq Pr\left(|A_n - g| \geq \varepsilon/2 \text{ atau } |B_n - h| \geq \varepsilon/2\right)$$

Dengan sifat probabilitas dan ketaksamaan di atas akan kita dapatkan

$$Pr\left[\sqrt{(A_n - g)^2 + (B_n - h)^2} \geq \varepsilon\right] \leq Pr\left(|A_n - g| \geq \varepsilon/2 \text{ atau } |B_n - h| \geq \varepsilon/2\right)$$

$$\leq Pr\left[|A_n - g| \geq \varepsilon/2\right] + Pr\left[|B_n - h| \geq \varepsilon/2\right]$$

Berdasarkan definisi $A_n \overset{Pr}{\to} g$ dan $B_n \overset{Pr}{\to} h$, maka $\forall \varepsilon > 0$ berlaku

(lanjutan)

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left[\sqrt{(A_n-g)^2+(B_n-h)^2} \geq \varepsilon\right]$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} Pr\left[|A_n-g| \geq {}^{\varepsilon}/_{2}\right] + \lim_{n\to\infty} Pr\left[|B_n-h| \geq {}^{\varepsilon}/_{2}\right] = 0$$

Tetapi karena $Pr\left[\sqrt{(A_n-g)^2+(B_n-h)^2} \geq \varepsilon\right] \geq 0$, maka

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left[\sqrt{(A_n-g)^2+(B_n-h)^2} \geq \varepsilon\right] = 0$$

Dapat disimpulkan $(A_n, B_n) \overset{Pr}{\rightarrow} (g,h)$. ■

Teorema 4 Jika $A_n \overset{Pr}{\rightarrow} g$ dan $B_n \overset{Pr}{\rightarrow} h$. Misalkan $f(x,y)$ adalah fungsi kontinu di (g,h), maka $f(A_n,B_n) \overset{Pr}{\rightarrow} f(g,h)$.

<u>Bukti:</u>

Berdasarkan Teorema 3 kita tahu bahwa $(A_n, B_n) \overset{Pr}{\rightarrow} (g,h)$. Kemudian dengan definisi kekontinuan dua variabel, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\sqrt{(A_n-g)^2+(B_n-h)^2} < \delta$ maka $|f(A_n,B_n) - f(g,h)| < \varepsilon$.

Misalkan: A adalah kejadian $\sqrt{(A_n-g)^2+(B_n-h)^2} < \delta$

B adalah kejadian $|f(A_n,B_n) - f(g,h)| < \varepsilon$

Karena jika A terjadi, kejadian B pasti terjadi, maka $Pr(B|A) = 1$.

$$Pr(B) = Pr(B|A^c)\,Pr(A^c) + Pr(B|A)\,Pr(A)$$
$$= Pr(B|A^c)\,Pr(A^c) + Pr(A) \geq Pr(A)$$

Maka

$$Pr[|f(A_n,B_n) - f(g,h)| < \varepsilon] \geq Pr\left[\sqrt{(A_n-g)^2+(B_n-h)^2} < \delta\right]$$

Sehingga dengan mengambil limit, dan karena $(A_n, B_n) \overset{Pr}{\rightarrow} (g,h)$, didapat

(lanjutan)

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|f(A_n, B_n) - f(g,h)| < \varepsilon] \geq \lim_{n\to\infty} Pr\left[\sqrt{(A_n - g)^2 + (B_n - h)^2} < \delta\right] = 1$$

Tetapi karena $Pr[|f(A_n, B_n) - f(g,h)| < \varepsilon] \leq 1$ sehingga

$\lim_{n\to\infty} Pr[|f(A_n, B_n) - f(g,h)| < \varepsilon] = 1$

Jadi $f(A_n, B_n) \xrightarrow{Pr} f(g,h)$ ∎

Corollary 5 Misalkan (A_n) dan (B_n) adalah dua barisan variabel *random* dan k adalah konstanta *real*. Jika $A_n \xrightarrow{Pr} g$ dan $B_n \xrightarrow{Pr} h$, maka $A_n + k \xrightarrow{Pr} g + k$, $kA_n \xrightarrow{Pr} kg, A_n + B_n \xrightarrow{Pr} g + h$, $A_nB_n \xrightarrow{Pr} gh$, $\frac{1}{A_n} \xrightarrow{Pr} \frac{1}{g}$, $\frac{A_n}{B_n} \xrightarrow{Pr} \frac{g}{h}$, dan $A_n^k \xrightarrow{Pr} g^k$.

Bukti:

Jika diketahui $A_n \xrightarrow{Pr} g$, $A_n + k$ merupakan fungsi kontinu satu variabel, sehingga dengan menggunakan Teorema 1 didapat $A_n + k \xrightarrow{Pr} g + k$, selain itu kA_n merupakan fungsi kontinu satu variabel, sehingga dengan menggunakan Teorema 1 didapat $kA_n \xrightarrow{Pr} kg$, $\frac{1}{A_n}$ merupakan fungsi kontinu satu variabel, sehingga dengan menggunakan Teorema 1 didapat $\frac{1}{A_n} \xrightarrow{Pr} \frac{1}{g}$, dan A_n^k adalah fungsi kontinu satu variabel, sehingga dengan menggunakan Teorema 1 didapat $A_n^k \xrightarrow{Pr} g^k$. Selain itu, jika diketahui $A_n \xrightarrow{Pr} g$ dan $B_n \xrightarrow{Pr} h$, $A_n + B_n$ merupakan fungsi kontinu dua variabel, sehingga dengan menggunakan Teorema 4 didapatkan $A_n + B_n \xrightarrow{Pr} g + h$, selain itu A_nB_n merupakan fungsi kontinu dua variabel, sehingga dengan menggunakan Teorema 4 didapatkan $A_nB_n \xrightarrow{Pr} gh$, dan $\frac{A_n}{B_n}; B_n \neq 0$ adalah fungsi kontinu dua variabel, sehingga dengan menggunakan Teorema 4 didapat

$\frac{A_n}{B_n} \xrightarrow{Pr} \frac{g}{h}; h \neq 0.$ ∎

(lanjutan)

- Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\hat{\alpha} = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_{X_i}{}^2}{S_U^2}\right)$ adalah penaksir yang konsisten untuk $\alpha = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)$

<u>Bukti:</u>

Karena $\left(S_{X_i}^2\right)$ dan (S_U^2) adalah barisan dari variabel *random*, $S_{X_i}^2$ merupakan penaksir yang konsisten untuk $\sigma_{X_i}^2$, dan $S_U^2 \neq 0$ merupakan penaksir yang konsisten untuk $\sigma_U^2 \neq 0$, yang berarti $S_{X_i}^2 \xrightarrow{Pr} \sigma_{X_i}^2$ dan $S_U^2 \xrightarrow{Pr} \sigma_U^2$. Dengan menggunakan *Corollary* 5,

$$\frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_{X_i}{}^2}{S_U^2}\right) \xrightarrow{Pr} \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)$$

Jadi

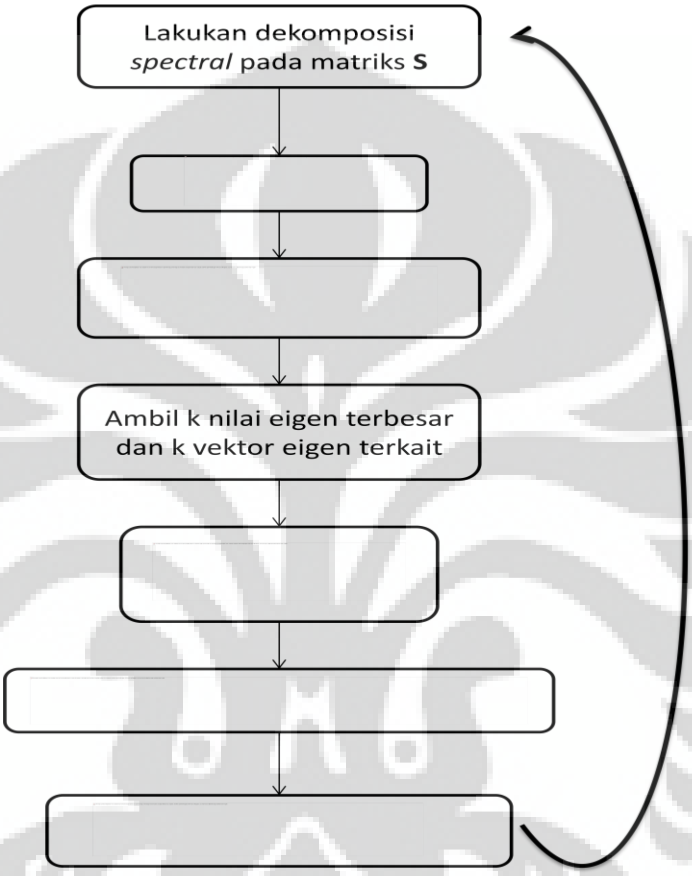
$\hat{\alpha} = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} S_{X_i}{}^2}{S_U^2}\right)$ adalah penaksir yang konsisten untuk

$$\alpha = \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{p} \sigma_{X_i}^2}{\sigma_U^2}\right)$$

■

Lampiran 4: Metode Iterasi untuk Mencari Taksiran *Factor Loading*

Misalkan $\boldsymbol{S}$ adalah matriks kovariansi sampel. $\boldsymbol{S}$ adalah taksiran untuk $\boldsymbol{\Sigma}$. Misalkan diasumsikan faktor distandardisasi. Akan dicari taksiran dari *factor loading* sehingga $\boldsymbol{S} \cong \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}' + \widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\boldsymbol{d}}$.



Penjelasan:

Langkah 1: Karena $\boldsymbol{S}$ adalah matriks simetris, maka dapat dilakukan dekomposisi *spectral*.

Misalkan :

$\boldsymbol{C}$ adalah matriks *orthogonal* (matriks yang inner product dari kolom-kolomnya sama dengan 0 dan norm dari kolom-kolomnya sama dengan 1) yang elemen dari kolom-kolomnya adalah vektor eigen yang dinormalisasi dari matriks $\boldsymbol{S}$.

(lanjutan)

$\boldsymbol{D}$ adalah matriks diagonal yang elemen diagonalnya adalah nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{S}$, yaitu $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$.

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{CDC'}$

Langkah 2: Karena $\boldsymbol{S}$ adalah matriks semidefinit positif, maka nilai eigen dari $\boldsymbol{S}$ bernilai positif atau 0 (tidak dibuktikan pada skripsi ini).

Oleh karena itu matriks $\boldsymbol{D}$ bisa difaktorkan menjadi

$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{D}^{1/2}$

Dimana

$$\boldsymbol{D}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\gamma_p} \end{pmatrix}$$

Sehingga dapat dituliskan

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{CD}^{1/2}\boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{CD}^{1/2}\left(\boldsymbol{CD}^{1/2}\right)'$

Langkah 3: Pilih k nilai eigen terbesar dan k vektor eigen terkait.Misalkan $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_k$

$$\boldsymbol{D_1} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_k \end{pmatrix}, \text{ sehingga } \boldsymbol{D_1}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\gamma_k} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C_1} = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_k}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pk} \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Bentuk $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(1)} = \boldsymbol{C_1}\boldsymbol{D_1}^{1/2}$. Dimana $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(1)}$adalah nilai $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$ pada iterasi pertama.

Langkah 5: Misalkan $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\boldsymbol{d}}^{(1)}$ adalah nilai $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\boldsymbol{d}}$ pada iterasi pertama, maka elemen diagonal $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\boldsymbol{d}}$ didapatkan dengan

$diag\left(\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\boldsymbol{d}}^{(1)}\right) = diag(\boldsymbol{S}) - diag\left(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(1)}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(1)\prime}\right)$

(lanjutan)

$$\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^{(1)}\right)^2 = s_{ii} - \sum_{q=1}^{k}\left(\hat{\lambda}_{iq}^{(1)}\right)^2$$

Dimana $\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^{(1)}\right)^2$ adalah elemen diagonal ke-i matriks $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\boldsymbol{d}}^{(1)}$, s_{ii} adalah elemen diagonal ke-i matriks $\boldsymbol{S}$.

Langkah 6: Bentuk $\boldsymbol{S}^* = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(1)}\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(1)'} + \widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{\boldsymbol{d}}^{(1)}$

Iterasi selanjutnya dilakukan mulai dari langkah 1 dengan menggunakan matriks $\boldsymbol{S}^*$untuk mendapatkan $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(2)}$. Proses iterasi ini dilakukan terus-menerus hingga nilai taksiran dari *factor loading* konvergen. Matriks $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{(w)}$yang diperoleh dari iterasi terakhir adalah matriks yang akan digunakan sebagai taksiran dari matriks $\boldsymbol{\Lambda}$, dimana w menunjukkan banyaknya iterasi hingga nilai taksiran dari *factor loading* konvergen.

Lampiran 5: Kuesioner

NAMA :
KELAS:

Berikan tanggapan Anda terhadap pernyataan yang ada di bawah ini dengan memberikan tanda (√) pada salah satu skala antara 1 s/d 5.

Silakan baca pernyataan berikut dan tunjukkan persetujuan atau ketidaksetujuan Anda:

[1] = Sama sekali tidak setuju.
[2] = Tidak setuju.
[3] = Netral.
[4] = Setuju.
[5] = Sangat setuju.

1	Rasa belas kasihan pada orang yang menderita merupakan sikap yang menentukan kebaikan seseorang.	1	2	3	4	5
2	Ketika pemerintah membuat aturan hukum, prinsip pertama adalah memastikan bahwa setiap orang diperlakukan secara adil.	1	2	3	4	5
3	Saya bangga pada sejarah bangsaku.	1	2	3	4	5
4	Hormat pada otoritas (atasan/orang yang berwenang) adalah sesuatu yang harus diajarkanpada semua anak.	1	2	3	4	5
5	Seseorang tidak seharusnya melakukan hal yang memalukan walaupun tidak ada orang yang dirugikan/dilukai.	1	2	3	4	5
6	Lebih diutamakan melakukan kebaikan daripada hal yang buruk.	1	2	3	4	5
7	Salah satu hal paling buruk yang dapat dilakukan seseorang adalah melukai hewan yang tidak berdaya.	1	2	3	4	5
8	Keadilan adalah syaratpaling penting yang harus ada di dalam suatu masyarakat.	1	2	3	4	5
9	Seseorang harus setia pada anggota keluarga mereka, walaupun mereka telah berbuat sesuatu yang salah.	1	2	3	4	5
10	Laki-laki dan perempuan mempunyai peranan yang berbeda di masyarakat.	1	2	3	4	5
11	Saya akan menilai suatu perbuatan adalahsalah,dikarenakan perbuatan itu tidak wajar.	1	2	3	4	5
12	Membunuh seorang manusia tidak pernah dapat	1	2	3	4	5

	dibenarkan.					
13	Anak-anak yang kaya mewarisi banyak uang sementara anak-anak yang miskin tidak mewarisi apa-apa.	1	2	3	4	5
14	Lebih penting mempunyai kerjasama tim yang baik daripada mengekspresikan diri sendiri.	1	2	3	4	5
15	Jika saya seorang prajurit dan tidak setuju dengan perintah atasan saya, maka saya akan tetap patuh sebab memang itu adalah tugas saya.	1	2	3	4	5
16	Kesucian adalah suatu kebajikan yang penting dan berharga.	1	2	3	4	5

Lampiran 6: Data

NAMA BIMBEL	SEKOLAH	NAMA SISWA	KELAS	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16
SALEMBA GROUP	SMA 99	HAFIZH.A	3 IPS	3	5	4	4	3	5	1	5	4	3	4	5	3	4	4	5
SALEMBA GROUP	SMA 98 JKT	ANGGARA S	3 IPS	4	2	5	5	3	3	3	5	5	4	3	2	1	4	4	3
SALEMBA GROUP	SMA 98 JKT	BEGUNDAH	3 IPA	3	5	4	3	3	5	1	5	5	5	5	1	3	3	3	3
SALEMBA GROUP	MAN 13	MILA	3 IPS	4	5	4	4	3	5	1	5	4	3	2	5	3	4	4	5
SALEMBA GROUP	SMA 98 JKT	FAHRI.A	3 IPS	3	4	4	3	4	5	4	5	4	4	3	5	3	5	4	5
SALEMBA GROUP	SMA 98 JKT	RISCHA	3 IPS	4	4	3	5	4	5	5	4	5	3	4	5	3	3	3	3
SALEMBA GROUP	SMA 98 JKT	DIANDEVO J	3 IPS	5	5	3	1	5	5	2	5	5	1	5	5	1	3	1	5
SALEMBA GROUP	SMA 98 JKT	AGUNG	3 IPS	4	5	5	2	4	5	1	5	4	2	4	5	3	4	4	4
SALEMBA GROUP	MAN 13	FIVI L	3 IPS	5	5	4	3	3	5	5	4	5	3	5	5	1	5	3	5
SALEMBA GROUP	ZT	NIA	3 IPS	4	4	3	2	4	5	4	4	4	3	4	4	3	4	4	4
SALEMBA GROUP	SMAN 51 JKT	SOFIYATUS S	3 IPA	4	2	4	3	3	5	2	5	5	4	4	3	3	5	3	5

SALEMBA GROUP	SMAN 51 JKT	GALUH FG	3 IPA 3	4	4	5	5	5	5	4	4	4	2	2	2	1	4	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 51 JKT	FINKY	3 IPA	3	4	4	3	3	5	3	4	3	4	3	4	2	4	3	4
SALEMBA GROUP	SMA 9 JKT	DEWI PUTRICIA	3 IPA	4	5	4	3	4	5	4	5	4	3	3	5	1	4	2	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	NATASHA R	3 IPA 4	4	5	5	4	5	5	4	5	5	4	4	5	1	3	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	MARIA MF	3 IPA 4	4	4	3	4	4	5	4	5	4	4	4	5	2	4	3	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	FARAH QOONITA	3 IPA 4	4	5	5	4	3	5	5	5	3	1	2	2	1	5	1	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	RAUDHAH	3 IPA 4	3	4	5	5	5	5	4	4	4	4	3	4	2	3	4	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	NARA P V	3 IPA 4	4	4	5	3	4	5	4	5	4	4	4	5	1	3	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	NABILLA R	3 IPA 4	3	4	3	2	3	4	3	4	4	2	3	4	3	3	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	SHAFIRA A	3 IPA 4	4	3	3	3	4	4	3	4	4	4	4	5	2	4	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	ROSDIANA DP	3 IPA 4	4	3	3	4	4	5	3	4	4	4	4	5	1	4	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	CECILIA R	3 IPA 4	4	3	3	2	3	4	3	4	4	4	4	5	1	3	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	INDIRA S	3 IPA 4	4	4	3	4	3	5	5	4	5	3	3	1	3	5	5	3
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	ADHILA G	3 IPA 4	4	4	3	3	4	5	2	3	4	4	4	4	2	4	4	4

SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	JURGEN M	3 IPA 4	2	3	4	2	3	3	4	4	3	4	3	4	4	4	3	3
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	AMI P W P	3 IPA 4	4	5	5	3	5	5	3	5	5	5	5	5	2	4	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	DETHISYAH A	3 IPA 4	3	5	4	3	4	4	5	5	4	4	3	4	5	2	1	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	AYU C.M	3 IPA 4	3	4	4	4	3	3	2	3	3	4	1	2	3	3	4	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	ARSI A	3 IPA 4	3	3	3	4	3	4	5	4	3	4	2	3	1	3	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	JOSEPH. C	3 IPA 6	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1	5	1	5	5	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	ANISA. N. A	3 IPA 6	4	3	4	4	4	4	4	4	3	3	3	4	3	4	3	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	ARDHITOT	3 IPA 6	4	5	4	4	5	4	4	4	4	3	3	3	1	4	3	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	ANCHIKA. I. A	3 IPA 6	4	5	3	3	1	5	2	5	5	4	2	3	3	4	2	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	JOANE INEZ. M	3 IPA 6	5	4	5	4	2	4	5	4	2	4	1	5	2	2	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	EVITA NUR	3 IPA 6	4	3	4	4	3	4	4	4	4	3	2	5	2	4	2	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	WIRDASHARI K	3 IPA 6	4	5	5	5	2	5	2	5	5	4	2	3	1	4	2	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	ALMARETA. H. N	3 IPA 6	3	4	3	4	2	4	3	3	5	3	3	5	4	5	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	NI KOMANG A F	3 IPA 6	5	5	4	3	5	5	4	5	5	3	4	5	3	3	4	4

SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	NISRINA A	3 IPA 6	4	5	3	4	3	5	5	5	4	2	2	4	3	5	3	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	M. FAKHRI. R	3 IPA 6	3	4	4	4	4	5	2	3	4	4	2	4	2	5	4	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	DWINDA L I	3 IPA 6	4	5	5	5	2	5	3	5	5	3	3	5	2	4	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	JULIANUS M. D	3 IPA 6	4	5	4	4	4	2	4	4	5	3	1	2	1	5	5	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT		3 IPA 6	5	4	4	5	4	5	5	5	5	4	3	5	3	4	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	RAHAYU E	3 IPA 1	5	5	5	5	5	5	3	5	5	1	1	5	1	5	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	NABILA L	3 IPA 1	3	4	4	2	3	5	2	5	4	4	2	5	2	3	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	EDGAR	3 IPA 1	5	4	3	3	3	5	3	4	5	4	3	4	2	3	3	4
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	HARUMI K	3 IPA 1	5	3	3	4	4	5	3	4	5	4	2	5	2	3	2	4
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	QONITA AIZATI	3 IPA 1	5	5	4	2	4	4	2	4	3	3	2	5	3	4	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	STEPHEN. C. N	3 IPA 1	4	4	3	5	5	3	3	5	5	3	1	5	1	4	2	3
SALEMBA GROUP	SMAN 48 JKT	CLARISSA	3 IPA 1	4	4	4	4	3	4	4	5	3	5	5	5	4	3	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	SILVIA D. W	3 IPA 1	4	5	5	2	5	4	5	4	4	4	2	3	3	3	2	4
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	ANANDA M B	3 IPA 1	4	4	5	5	5	4	5	5	5	4	5	5	4	5	5	4

SALEMBA GROUP	MA DA'ARUS SA ADAH	IYUS R	3 IPS	5	5	4	4	5	3	5	5	5	5	4	5	1	3	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 1 DEPOK	DINA N A	3 IPS	4	4	3	4	4	5	2	4	2	4	4	5	2	2	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 6 DEPOK	EKO G S	3 IPS	5	4	5	5	3	5	5	5	2	5	1	3	2	3	5	4
SALEMBA GROUP	SMAN 6 DEPOK	MEGA VIDYA	3 IPS	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	2	5	2	5	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 5 DEPOK	HANNA K	3 IPS	2	2	4	5	5	5	3	4	4	5	4	5	3	5	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 58 JKT	ADITIAS S	2 IPA	4	5	5	5	5	5	2	5	5	5	2	5	3	5	5	5
SALEMBA GROUP	SMAN 105 JKT	IRNAWATI W	2 IPS	4	5	5	5	5	5	4	5	5	1	3	5	1	5	5	5
SALEMBA GROUP	SMAN 99 JKT	ADMIRA P	2 IPS	5	5	4	3	3	4	5	4	3	3	3	5	3	4	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 105 JKT	CHRISTINA.O	2 IPS	4	5	3	1	3	4	4	4	4	3	4	5	1	3	3	4
SALEMBA GROUP	SMAN 58 JKT	ASTIKA R	2 IPS	5	5	5	4	4	5	4	3	4	3	3	4	3	5	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 105 JKT	MELYA.H	2 IPA	4	4	3	4	3	4	2	4	3	4	4	3	4	4	4	4
SALEMBA GROUP	SMAN 105 JKT	SITI ALFIAH	2 IPA B	2	5	5	5	4	5	5	5	5	1	2	5	1	3	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 105 JKT	ULFA K.M	2 IPA	3	4	3	4	3	5	4	5	4	4	4	4	2	3	3	4
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	CHANDRA M	2 IPA	4	4	3	4	2	4	4	4	5	4	2	3	2	4	3	4

SALEMBA GROUP	SMAN 99 JKT	WILDAN	2 IPA	1	4	4	3	2	5	3	4	2	3	5	3	4	2	4	3
SALEMBA GROUP	MAN 2 JKT	ASRI ANI.N	2 IPA	4	4	4	4	4	4	5	4	5	4	4	4	4	5	4	4
SALEMBA GROUP	MAN 2 JKT	RAMONA F	2 IPA	5	5	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2	3	3	4
SALEMBA GROUP	SMA 64 JKT	YULIANA VITA	2 IPA	4	4	4	4	3	5	2	4	2	1	2	5	1	3	2	4
SALEMBA GROUP		EXCELLENCE.C	2 IPA	5	5	3	2	5	5	3	5	5	1	3	5	2	3	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 105 JKT	IRENE S M	2 IPS	4	4	4	3	3	4	2	4	4	3	3	5	1	3	4	5
SALEMBA GROUP	SMA 68 JKT	VELOVE V	2 IPA	2	4	4	3	4	5	2	4	4	3	4	5	3	5	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 14 JKT	RENIE	2 IPS	3	5	4	3	2	5	2	3	4	4	3	5	1	4	3	3
SALEMBA GROUP	SMAN 64 JKT	INDRI S	2 IPS	2	5	3	3	4	4	3	4	5	3	3	4	3	3	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 30 JKT	FANNISA S	2 IPA	3	4	4	4	4	4	5	5	5	2	3	5	3	5	3	4
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT	YURITSA S P	2 IPA 6	3	4	4	4	4	5	3	4	4	4	2	4	2	4	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 39 JKT		2 IPA	2	4	3	5	4	3	2	2	5	2	1	4	2	5	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 99 JKT	GANDHY	2 IPS	3	4	5	5	5	5	4	4	4	4	4	5	5	3	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 104 JKT	RISYA AISA	2 IPS	4	5	3	4	3	4	3	4	4	4	4	4	3	4	3	4

SALEMBA GROUP	SMAN 104 JKT	NADIRA	2 IPS	1	5	3	5	5	5	2	4	5	2	2	5	3	2	2	4
SALEMBA GROUP	SMAN 104 JKT	NINDITA D I.P	2 IPS 2	3	4	3	3	3	5	5	4	5	4	3	5	2	3	3	5
SALEMBA GROUP	SMA ANGKASA 1	SWASTINING T	2 IPA	3	3	4	4	3	4	5	4	4	4	1	5	1	5	4	4
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	NUKI D	2 IPS 1	4	5	5	5	5	4	3	4	5	3	3	5	2	3	4	4
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	INDRI N	2 IPS 1	5	4	4	2	5	4	2	4	2	4	5	4	2	2	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	ACHMAD B	2 IPS 1	4	5	5	4	4	4	3	5	5	4	4	4	1	5	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	ANGGI R Q	2 IPS 1	3	3	5	5	2	5	1	3	3	3	3	5	2	3	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	IRHAS A P	2 IPS 1	5	5	5	4	3	5	5	5	5	3	3	5	3	5	1	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	VERDY	2 IPS 3	5	5	5	5	3	4	4	5	5	4	4	1	2	2	3	3
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	PATRICIA. P	2 IPS 3	3	4	4	3	3	5	3	3	4	4	2	3	1	4	4	4
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	MURTI F	2 IPS 1	4	5	5	5	5	5	5	5	4	3	5	5	5	3	5	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	KIKI Z	2 IPS 1	4	5	5	4	5	5	4	4	4	4	4	5	4	4	2	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	HENRY D	2 IPS 1	4	5	4	3	3	5	3	5	3	4	4	5	4	3	3	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	SOFYAN H	2 IPS 1	5	4	4	3	4	5	4	4	4	4	3	3	3	4	4	4

SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	PUTRO R	2 IPS 1	4	5	5	5	2	4	3	5	5	1	2	4	3	4	4	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	NOVIANTI	2 IPS 1	5	5	5	3	3	5	1	5	5	4	4	5	4	3	5	5
SALEMBA GROUP	SMAN 83 JKT	KHAIRUL U	2 IPS 1	4	5	3	3	2	4	2	4	4	5	4	4	2	5	3	4