UNIVERSITAS INDONESIA

RETENSI OPTIMAL UNTUK SUATU REASURANSI *STOP-LOSS*

SKRIPSI

EKA HANNA SIDABALOK
0806315332

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

RETENSI OPTIMAL UNTUK SUATU REASURANSI *STOP-LOSS*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

EKA HANNA SIDABALOK
0806315332

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Eka Hanna Sidabalok
NPM	: 0806315332
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 22 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh
Nama : Eka Hanna Sidabalok
NPM : 0806315332
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Retensi Optimal untuk Suatu Reasuransi *Stop-loss*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra. Netty Sunandi, M.Si	( )
Penguji	: Sarini Abdullah, S.Si, M.Stat	( )
Penguji	: Fevi Novkaniza, S.Si, M.Si	( )
Penguji	: Dr. Dian Lestari	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 22 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Ucapan syukur dan puji-pujian penulis haturkan kepada Allah Bapa, Tuhan Yesus Kristus, dan Roh Kudus, atas kasih dan penyertaanNya dalam hidup penulis dan yang telah mengaruniakan anugerah sehingga penulis beroleh kesempatan untuk menimba ilmu dan menyelesaikan studi di Universitas Indonesia.

Tugas akhir ini dibuat sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Dengan penuh kerendahan hati, penulis menyadari bahwa tugas akhir ini dapat dikerjakan dan terselesaikan dengan baik berkat bimbingan, doa, dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu pada kesempatan ini, penulis hendak menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dra. Netty Sunandi, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu, membagikan ilmu, memotivasi, memberikan saran dan masukan, serta membimbing penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Mohon maaf jikalau selama bimbingan penulis melakukan hal-hal yang tidak sesuai dengan perkenaan Ibu.
2. Orang tua (papa (alm) dan mama) atas cinta kasih yang diberikan. Bahwa penulis boleh tumbuh dan berkembang di bawah asuhan mama dan papa merupakan berkat Tuhan yang paling luar biasa dalam hidup ini. Kalianlah orang tua terhebat bagi pribadi penulis.
3. Dr. Sri Mardiyati, selaku dosen pembimbing akademis yang telah banyak membantu penulis, khususnya dalam bimbingan akademis selama masa perkuliahan ini. Terima kasih juga atas dukungan, saran, dan masukan yang Ibu berikan selama proses pengerjaan tugas akhir ini.
4. Dr. Yudi Satria, M.T. selaku ketua jurusan Matematika FMIPA UI dan Mbak Rahmi Rusin, S.Si, M.ScTech selaku sekretaris jurusan Matematika FMIPA UI atas segala bantuan dan dukungan yang telah diberikan.
5. Seluruh dosen Matematika FMIPA UI atas ilmu yang telah diberikan, terutama Ibu Rianti dan Ibu Fevi yang telah banyak memberikan motivasi dan semangat.

6. Seluruh staf TU dan staf Perpustakaan Matematika atas bantuan yang telah diberikan, terutama buat Mbak Santi yang telah banyak membantu penulis dalam mengurus administrasi (maaf ya mbak sering ngerepotin mbak…).
7. Kedua adik penulis, Intan dan Samuel. Terima kasih buat doa, dukungan, dan semangat yang kalian berikan. *I love both of you so much…*
8. Keluarga besar (mamatua, Bang Johan dan Kak Ellya, Bang Toni, dan Bang Daniel) atas kebersamaan dan kasih sayang kalian.
9. Sahabat-sahabat penulis (Gaby, Emy, Lidia, Melda, Chrisna, Susi, dan May) atas kasih persahabatan yang terjalin di antara kita. Terima kasih juga atas doa, motivasi, dan kebersamaan kalian selama penulis menyelesaikan tugas akhir ini, *Our friendship will never end…*
10. PKK (Kak Tika), TKK (Agnes, Citra), AKK (Chacha, Citra, Meta), terima kasih buat sukacita pelayanan KK kita selama ini.
11. Teman-teman angkatan 2008, terima kasih atas kebersamaan, suka dan duka yang boleh dialami bersama selama menuntut ilmu di Matematika UI. Khususnya buat Icha, Numa, dan Cindy yang mengambil peminatan aktuaria. Juga buat teman-teman seperjuangan dalam pengerjaan tugas akhir (Ega, Icha, Numa, Sita, Cindy, Luthfa, Hindun, Emy, Ines, Mei, Hendry, Andy, Tuti, Umbu, dan yang lainnya), terima kasih buat semua hal yang sudah dilewati bersama. *Wish u all the best…*
12. Teman-teman angkatan 2009 dan 2010, juga Kak Ajat yang telah banyak membantu penulis selama kuliah dan pengerjaan tugas akhir.
13. Teman-teman PO FMIPA UI atas sukacita dan dukungan doa yang diberikan, juga buat kesempatan melayani bersama.
14. Pihak-pihak lain yang telah banyak membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini namun tidak disebutkan satu per satu karena keterbatasan tempat.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, segala kritik dan saran yang membangun senantiasa penulis harapkan. Akhir kata, kiranya tugas akhir ini bermanfaat bagi dunia ilmu pengetahuan.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Eka Hanna Sidabalok
NPM	: 0806315332
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Retensi Optimal untuk Suatu Reasuransi *Stop-loss*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 22 Juni 2012
Yang menyatakan

(Eka Hanna Sidabalok)

ABSTRAK

Nama : Eka Hanna Sidabalok
Program Studi : Matematika
Judul : Retensi Optimal untuk Suatu Reasuransi *Stop-loss*

Dalam menanggung risiko-risiko dari tertanggung (nasabah/pemegang polis), adakalanya tidak semua bagian risiko tersebut ditanggung sendiri oleh perusahaan asuransi, terutama untuk risiko-risiko yang besar. Perusahaan asuransi menggunakan jasa reasuransi untuk mengasuransikan kembali sebagian risiko yang ditanggungnya. Salah satu jenis reasuransi yang paling dikenal yaitu reasuransi *stop-loss*. Dalam praktik reasuransi *stop-loss*, perusahaan asuransi menentukan terlebih dahulu besar retensi yang ditahannya dan sisanya akan dibayarkan oleh perusahaan reasuransi. Retensi adalah batas maksimum dari uang pertanggungan yang dapat ditanggung oleh perusahaan asuransi atas suatu risiko tertentu. Penentuan retensi yang optimal sangat penting bagi perusahaan asuransi. Tiga kriteria penentuan retensi optimal untuk suatu reasuransi *stop-loss* yang akan dibahas di sini adalah retensi optimal untuk suatu modal tertentu, retensi optimal berdasarkan optimisasi *Value at Risk* (VaR), dan retensi optimal berdasarkan optimisasi *Conditional Tail Expectation* (CTE). Kriteria pertama didasarkan pada besar modal awal yang *fixed*. Adapun kedua kriteria lainnya didasarkan pada optimisasi ukuran risiko VaR dan CTE dari biaya total (total risiko) yang ditanggung oleh perusahaan asuransi. Jika solusi untuk kedua optimisasi VaR dan CTE ada, maka kedua optimisasi tersebut memberikan nilai retensi optimal yang sama.

Kata Kunci : reasuransi *stop-loss*, prinsip nilai ekpektasi, retensi, *loading factor*, *Value at Risk* (VaR), *Conditional Tail Expectation* (CTE)
xii+77 halaman : 21 gambar
Daftar Pustaka : 10 (1995-2008)

ABSTRACT

Name : Eka Hanna Sidabalok
Program Study : Mathematics
Title : Optimal Retention for A Stop-loss Reinsurance

In covering the risks of the insured (policy holder), occasionally not all of the risks are insured by the insurer itself, especially for the large ones. To cover the top part of the risk, the insurer purchases reinsurance coverage from another company (called reinsurer). One of reinsurance designs is a stop-loss contract. In the stop-loss reinsurance practice, the insurer determines a retention limit to be retained and the reinsurer will pay for the remainder. The retention equals the maximum amount to be paid out for every single claim by the insurer. Determining an optimal level of retention is important for the insurer. Three criteria of determining the optimal retention for a stop-loss reinsurance which will be discussed here are the optimal retention for a fixed capital, the optimal retention based on VaR-optimization, and the optimal retention based on CTE-optimization. The first criterion is based on an initial fixed capital of the insurer. The two others are based on optimization of VaR and CTE risk measures of the total risks of the insurer. If optimal solutions exist, then both VaR- and CTE-optimization criteria yield the same optimal retentions.

Key Words : stop-loss reinsurance, expected value principle, retention, loading factor, Value at Risk (VaR), Conditional Tail Expectation (CTE)
xii+ 77 pages : 21 pictures
Bibliography : 10 (1995-2008)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perusahaan asuransi adalah pihak yang memberi jaminan atas risiko yang ditanggung para nasabahnya sesuai dengan prosedur perasuransian. Reasuransi adalah suatu mekanisme pengalihan risiko dari pihak penanggung (perusahaan asuransi) kepada pihak penanggung yang lain (perusahaan reasuransi). Perusahaan reasuransi sama dengan perusahaan asuransi, namun nasabahnya berupa perusahaan-perusahaan asuransi. Biasanya perusahaan reasuransi adalah perusahaan asuransi yang besar dan profesional.

Reasuransi memberikan kesempatan kepada perusahaan asuransi untuk mengurangi risiko yang ditanggung dengan memberikan suatu manajemen risiko yang lebih efektif. *Stop-loss*, *excess-of-loss*, dan *quota-share* adalah beberapa contoh bentuk reasuransi. Reasuransi *stop-loss* adalah suatu kontrak asuransi *deductible* dari perusahaan reasuransi di mana perusahaan asuransi menetapkan besar klaim terendah yang diajukan kepada perusahaan reasuransi untuk memperoleh ganti rugi dari perusahaan reasuransi.

Misalkan X menyatakan *loss* untuk suatu perusahaan asuransi. Diasumsikan X adalah variabel random nonnegatif dengan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$, fungsi survival $S_X(x) = \Pr(X > x)$, dan mean $\mathrm{E}[X] > 0$. Misalkan X_I dan X_R berturut-turut adalah variabel random bagian *loss* yang ditanggung oleh perusahaan asuransi dan perusahaan reasuransi pada reasuransi *stop-loss*. Maka

$$X_I = \begin{cases} X, & X \leq d \\ d, & X > d \end{cases} = X \wedge d \qquad \text{dan} \qquad X_R = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X - d, & X > d \end{cases} = (X - d)_+$$

di mana parameter $d > 0$ dikenal sebagai retensi, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, dan $(a)_+ = \max\{a, 0\}$. Di bawah persetujuan *stop-loss*, perusahaan reasuransi membayar bagian *loss* yang melampaui batas retensi. Dengan kata lain, perusahaan reasuransi menyerap risiko yang nilainya melampaui batas retensi, sedangkan perusahaan asuransi secara efektif terlindungi dari kerugian (*loss*) yang mungkin bernilai besar dengan membatasi kecenderungan ke tingkat retensi.

Di dalam pengalihan penanggungan risiko, pihak perusahaan reasuransi membebankan premi reasuransi kepada pihak perusahaan asuransi. Salah satu prinsip umum yang digunakan untuk menentukan besarnya premi yang sesuai adalah prinsip nilai ekspektasi, yaitu premi reasuransi $\delta(d)$ ditentukan oleh $\delta(d) = (1+\rho)\pi(d)$, di mana $\rho > 0$ dikenal sebagai *relative safety loading* dan $\pi(d) = \mathrm{E}[X_R]$.

Dalam kaitannya dengan reasuransi *stop-loss*, T menyatakan biaya total yang akan dikeluarkan oleh perusahaan asuransi. Biaya total T terdiri dari dua komponen, yaitu *loss* yang ditanggung dan premi reasuransi, ditulis:

$$T = X_I + \delta(d)$$

Jika nilai retensi d kecil, maka perusahaan asuransi dikatakan memiliki kemampuan yang 'rendah' dalam menanggung risiko dan premi yang dibayarkan kepada perusahaan reasuransi nilainya lebih besar. Sebaliknya, jika perusahaan asuransi mengurangi besar premi reasuransinya dengan menaikkan nilai retensi d, maka perusahaan asuransi tersebut harus memiliki kemampuan yang 'tinggi' dalam menanggung risiko. Oleh karena itu, penentuan nilai retensi yang optimal sangat penting bagi perusahaan asuransi. Ada banyak cara menentukan retensi optimal berdasarkan kriteria yang dipilih. Di antaranya, dengan memaksimumkan probabilitas kesanggupan finansial perusahaan asuransi, mengoptimisasi ukuran risiko VaR, dan mengoptimisasi ukuran risiko CTE.

Kriteria yang pertama didasarkan pada besar modal awal yang *fixed*. Artinya, dengan menetapkan atau menyediakan modal awal yang besarnya *fixed*, perusahaan asuransi akan mencari nilai retensi optimal yang memaksimumkan probabilitas kesanggupan membayar biaya total T.

Kriteria yang kedua dan ketiga masing-masing disebut dengan optimisasi VaR dan optimisasi CTE. *Value at Risk* (VaR) dan *Conditional Tail Expectation* (CTE) adalah ukuran risiko yang banyak digunakan secara luas dalam sektor perasuransian. VaR dari variabel random X pada tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$ didefinisikan oleh

$$\mathrm{VaR}_X(\alpha) = \inf\{x : \Pr(X > x) \le \alpha\}$$

dan CTE dari variabel random X pada tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$ didefinisikan oleh

$$\mathrm{CTE}_X(\alpha) = \mathrm{E}[X|X \ge \mathrm{VaR}_X(\alpha)].$$

Dari sudut pandang perusahaan asuransi, manajemen risiko yang bijaksana adalah yang menjamin bahwa ukuran risiko dari T adalah seoptimal mungkin. Hal inilah yang menjadi motivasi untuk mempertimbangkan dua kriteria optimisasi berikut untuk mencari nilai retensi yang optimal:

Optimisasi VaR: $\mathrm{VaR}_T(d^*, \alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)\}$

yaitu menentukan retensi optimal d^* dengan meminimumkan VaR dari T, dan

Optimisasi CTE: $\mathrm{CTE}_T(\tilde{d}, \alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)\}$

yaitu menentukan retensi optimal $\tilde{d}$ dengan meminimumkan CTE dari T.

Pada tugas akhir ini, penulis akan membahas mengenai penentuan retensi optimal dari reasuransi *stop-loss* berdasarkan suatu modal tertentu, optimisasi *Value at Risk* (VaR) dan optimisasi *Conditional Tail Expectation* (CTE).

1.2 Perumusan Masalah

1. Bagaimana mencari nilai retensi optimal dari reasuransi *stop-loss* untuk suatu modal tertentu?
2. Bagaimana mencari nilai retensi optimal dari reasuransi *stop-loss* dengan optimisasi ukuran risiko *Value at Risk* (VaR)?
3. Bagaimana mencari nilai retensi optimal dari reasuransi *stop-loss* dengan optimisasi ukuran risiko *Conditional Tail Expectation* (CTE)?

1.3 Tujuan Penulisan

1. Mencari nilai retensi optimal dari reasuransi *stop-loss* untuk suatu modal tertentu.
2. Mencari nilai retensi optimal dari reasuransi *stop-loss* dengan mengoptimisasi ukuran risiko *Value at Risk* (VaR).
3. Mencari nilai retensi optimal dari reasuransi *stop-loss* dengan mengoptimisasi ukuran risiko *Conditional Tail Expectation* (CTE).

1.4 Pembatasan Masalah

1. Perhitungan premi reasuransi menggunakan prinsip nilai ekpektasi.

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Infimum

Definisi 2.1.1

Andaikan S adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah. Maka, suatu bilangan w disebut infimum (batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kedua syarat berikut:

a) w adalah batas bawah dari S, dan
b) jika t adalah sebarang batas bawah yang lain dari S, maka $t \leq w$.

(Bartle & Sherbert, 2000)

Teorema 2.1.1

Andaikan S adalah himpunan bagian tak kosong dari himpunan bilangan real yang terbatas di bawah, dan misalkan a adalah sebarang bilangan real. Didefinisikan himpunan $a + S = \{a + s : s \in S\}$, maka

$$\inf(a + S) = a + \inf S$$

Bukti

Misalkan $u = \inf S$, maka $x \geq u$ untuk semua $x \in S$, sehingga $a + x \geq a + u$. Oleh karena itu, $a + u$ adalah batas bawah dari himpunan $a + S$; akibatnya, diperoleh $\inf(a + S) \geq a + u$.

Dimisalkan pula v adalah sebarang batas bawah dari himpunan $a + S$, maka $a + x \geq v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \geq v - a$ untuk semua $x \in S$, sehingga $v - a$ adalah batas bawah dari S. Oleh karena itu, $u = \inf S \geq v - a$ yang mengimplikasikan $a + u \geq v$. Karena v adalah sebarang batas bawah dari $a + S$, maka v dapat digantikan oleh $\inf(a + S)$ untuk mendapatkan $a + u \geq \inf(a + S)$.

Dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan ini, diperoleh

$$\inf(a+S) = a+u = a+\inf S$$

(Bartle & Sherbert, 2000)

∎

Teorema 2.1.2

Andaikan S adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah, dan misalkan $a > 0$. Didefinisikan himpunan $aS = \{as : s \in S\}$, maka

$$\inf(aS) = a \inf S$$

Bukti

Misalkan $u = \inf S$, maka $x \geq u$ untuk semua $x \in S$, sehingga $ax \geq au$. Oleh karena itu, au adalah batas bawah dari himpunan aS; akibatnya, diperoleh $\inf(aS) \geq au$.

Dimisalkan pula v adalah sebarang batas bawah dari himpunan aS, maka $ax \geq v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \geq \frac{v}{a}$ untuk semua $x \in S$, sehingga $\frac{v}{a}$ adalah batas bawah dari S. Oleh karena itu, $u = \inf S \geq \frac{v}{a}$ yang mengimplikasikan $au \geq v$. Karena v adalah sebarang batas bawah dari aS, maka v dapat digantikan oleh $\inf(aS)$ untuk mendapatkan $au \geq \inf(aS)$.

Dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan:

$$\inf(aS) \geq au \text{ dan } au \geq \inf(aS)$$

diperoleh

$$\inf(aS) = au = a \inf S$$

(Bartle & Sherbert, 2000)

∎

2.2 Prinsip Perhitungan Premi

Aktivitas perasuransian dapat dijelaskan sebagai sistem *input-output*. *Input* berasal dari premi dan aset-aset perusahaan, sedangkan *output* berasal dari klaim dan biaya-biaya lainnya (biaya operasional, pajak, gaji karyawan, dan lain-lain). Premi adalah sejumlah uang yang dibayarkan oleh tertanggung (nasabah atau pemegang polis) kepada penanggung sebagai imbalan jasa atas pengalihan risiko dari tertanggung kepada penanggung. Dengan demikian, premi merupakan

1. Imbalan jasa atas jaminan yang diberikan oleh penanggung kepada tertanggung untuk mengganti kerugian yang mungkin diderita oleh tertanggung (pada asuransi kerugian).
2. Imbalan jasa atas jaminan perlindungan yang diberikan oleh penanggung kepada tertanggung dengan menyediakan sejumlah uang (*benefit*) terhadap risiko hari tua atau kematian.

Besarnya premi yang harus dibayarkan oleh tertanggung ditetapkan oleh penanggung dengan mengaplikasikan prinsip perhitungan premi. Berbagai jenis prinsip perhitungan premi telah banyak diperkenalkan (Kaas, et al., 2001). Notasi $\vartheta(X)$ menyatakan premi yang dibebankan kepada tertanggung untuk mendapatkan jaminan perlindungan terhadap risiko X. Yang dimaksud dengan risiko X yaitu klaim dari suatu risiko terdistribusi sebagai variabel random X. Berikut diberikan beberapa prinsip perhitungan premi.

a. Prinsip premi bersih: $\vartheta(X) = \mathrm{E}[X]$
   Juga dikenal dengan prinsip ekuivalen; premi ini hanya sesuai untuk penanggung risiko netral.
b. Prinsip nilai ekspektasi: $\vartheta(X) = (1+\rho)\mathrm{E}[X]$
   Di sini, nilai *loading* dalam premi sama dengan $\rho\mathrm{E}[X]$, di mana $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*.
c. Prinsip variansi: $\vartheta(X) = \mathrm{E}[X] + \rho\mathrm{Var}[X]$
   Di sini, nilai *loading* dalam premi proporsional terhadap $\mathrm{Var}[X]$ dan $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*.
d. Prinsip standar deviasi: $\vartheta(X) = \mathrm{E}[X] + \rho\sigma[X]$

Di sini, nilai *loading* dalam premi proporsional terhadap standar deviasi dari X dan $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*.

e. Prinsip eksponensial: $\vartheta(X) = \frac{1}{\alpha}\log\big(m_X(\alpha)\big)$

Di sini, parameter $\alpha > 0$ disebut *risk aversion coefficient*.

2.3 Retensi dan Reasuransi *Stop-loss*

Risiko yang ditanggung perusahaan asuransi dapat dikurangi dengan memanfaatkan jasa reasuransi, di mana perusahaan reasuransi bertindak sebagai pihak penanggung (*insurer*) bagi perusahaan asuransi yang pada awalnya menanggung sendiri risikonya. Kontrak reasuransi hanya melindungi sebagian tertentu dari risiko. Reasuransi *stop-loss* merupakan jenis reasuransi yang melindungi bagian risiko yang melebihi suatu batas retensi. Misalkan X menyatakan *loss* untuk suatu perusahaan asuransi. Diasumsikan X adalah variabel random nonnegatif dengan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x) = \Pr(X \le x)$, fungsi survival $S_X(x) = \Pr(X > x)$, dan mean $\mathrm{E}[X] > 0$. Misalkan X_I dan X_R berturut-turut adalah variabel random bagian *loss* yang ditanggung oleh perusahaan asuransi dan perusahaan reasuransi pada reasuransi *stop-loss*. Maka di bawah kontrak *stop-loss*:

$$X_I = \begin{cases} X, & X \le d \\ d, & X > d \end{cases} = X \wedge d \tag{2.3.1}$$

dan

$$X_R = \begin{cases} 0, & X \le d \\ X - d, & X > d \end{cases} = (X - d)_+ \tag{2.3.2}$$

di mana parameter $d > 0$ dikenal sebagai retensi, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, dan $(a)_+ = \max\{a, 0\}$. Perusahaan asuransi menahan risiko sampai batas d dan membiarkan perusahaan reasuransi membayar sisanya (bagian risiko yang melebihi d). Sebagai contoh, jika ditetapkan retensi sebesar 1,6 dan seorang nasabah (tertanggung) mengajukan klaim asuransi sebesar 2, maka perusahaan asuransi akan membayar sebesar 1,6 dan sisanya sebesar 0,4 akan dibayar oleh perusahaan reasuransi. Jadi, retensi adalah batas maksimum dari uang pertanggungan yang bisa ditanggung oleh perusahaan asuransi atas suatu risiko tertentu. Dengan kata lain, retensi sama dengan besar pembayaran maksimum oleh perusahaan asuransi untuk setiap klaim nasabah. Mengapa jenis reasuransi ini disebut *stop-loss*? Adalah jelas untuk dilihat bahwa dari sudut pandang perusahaan asuransi, *loss* yang ditanggung berhenti di d.

Dalam teorema berikut, akan dibuktikan bahwa kontrak *stop-loss* meminimumkan variansi dari risiko yang ditanggung oleh perusahaan asuransi.

Teorema 2.3.1

Diasumsikan X adalah variabel random *loss* untuk suatu perusahaan asuransi. Misalkan $I(X)$ menyatakan bagian *loss* yang dibayarkan oleh perusahaan reasuransi pada kontrak reasuransi bukan *stop-loss*. Diasumsikan bahwa $0 \leq I(x) \leq x$ berlaku untuk semua $x \geq 0$. Maka,
Jika $\mathrm{E}[I(X)] = \mathrm{E}[(X-d)_+]$, maka $\mathrm{Var}[X - I(X)] \geq \mathrm{Var}[X - (X-d)_+]$.

Bukti

Misalkan

$$V(X) = X - I(X)$$

dan

$$W(X) = X - (X-d)_+,$$

maka

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X - I(X)] &= \mathrm{E}[\{X - I(X)\}^2] - \{\mathrm{E}[X - I(X)]\}^2 \\ &= \mathrm{E}[\{V(X)\}^2] - \{\mathrm{E}[V(X)]\}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X - (X-d)_+] &= \mathrm{E}[\{X - (X-d)_+\}^2] - \{\mathrm{E}[X - (X-d)_+]\}^2 \\ &= \mathrm{E}[\{W(X)\}^2] - \{\mathrm{E}[W(X)]\}^2,\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X - I(X)] &= \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[I(X)] \\ &= \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[(X-d)_+]\end{aligned}$$

$$= \mathrm{E}[X - (X - d)_+]$$

Dari persamaan terakhir dapat ditulis $\mathrm{E}[V(X)] = \mathrm{E}[W(X)]$. Sekarang tinggal dibuktikan bahwa $\mathrm{E}[\{V(X)\}^2] \geq \mathrm{E}[\{W(X)\}^2]$.

a) Untuk $X \leq d$, $(X - d)_+ = 0$ sehingga $W(X) = X - (X - d)_+ = X$. Dari penjabaran berikut,

$$V(X) - d = X - d - I(X) \leq X - d = W(X) - d \leq 0$$
$$V(X) - d \leq W(X) - d \leq 0 \Longrightarrow |V(X) - d| \geq |W(X) - d|$$
$$\Longrightarrow \{V(X) - d\}^2 \geq \{W(X) - d\}^2$$
$$\Longrightarrow \mathrm{E}[\{V(X) - d\}^2] \geq \mathrm{E}[\{W(X) - d\}^2]$$
$$\Longrightarrow \mathrm{E}[\{V(X)\}^2 - 2V(X)d + d^2]$$
$$\geq \mathrm{E}[\{W(X)\}^2 - 2W(X)d + d^2]$$
$$\Longrightarrow \mathrm{E}[\{V(X)\}^2] \geq \mathrm{E}[\{W(X)\}^2]$$

diperoleh $\mathrm{E}[\{V(X)\}^2] \geq \mathrm{E}[\{W(X)\}^2]$.

b) Untuk $X > d$, $(X - d)_+ = X - d$ sehingga $W(X) = X - (X - d)_+ = d$. Dari penjabaran berikut,

$$W(X) - d = 0 \Longrightarrow |W(X) - d| = 0$$
$$|V(X) - d| \geq 0 = |W(X) - d| \Longrightarrow \{V(X) - d\}^2 \geq \{W(X) - d\}^2$$
$$\Longrightarrow \mathrm{E}[\{V(X) - d\}^2] \geq \mathrm{E}[\{W(X) - d\}^2]$$
$$\Longrightarrow \mathrm{E}[\{V(X)\}^2 - 2V(X)d + d^2]$$
$$\geq \mathrm{E}[\{W(X)\}^2 - 2W(X)d + d^2]$$
$$\Longrightarrow \mathrm{E}[\{V(X)\}^2] \geq \mathrm{E}[\{W(X)\}^2]$$

diperoleh $\mathrm{E}[\{V(X)\}^2] \geq \mathrm{E}[\{W(X)\}^2]$.

Jadi, terbukti bahwa jika $\mathrm{E}[I(X)] = \mathrm{E}[(X - d)_+]$, makaVar$[X - I(X)] \geq$ Var$[X - (X - d)_+]$.

(Kaas, et al., 2001)

∎

Dari Teorema 2.3.1 di atas, didapat suatu penjelasan bahwa jika premi bersih reasuransi besarnya sama untuk semua jenis reasuransi, maka kontrak *stop-loss* merupakan pilihan terbaik di antara berbagai jenis reasuransi dikarenakan pada kontrak ini variansi dari bagian *loss* yang dibayarkan oleh perusahaan asuransi bernilai minimum.

2.4 Prinsip Nilai Ekspektasi

Salah satu prinsip perhitungan premi yang umum digunakan yaitu prinsip nilai ekpektasi yang dinyatakan oleh

$$\vartheta(X) = (1+\rho)\mathrm{E}[X]$$

di mana $\rho > 0$ dikenal sebagai *relative safety loading*. Berdasarkan prinsip ini, untuk kontrak *stop-loss* premi reasuransi ditentukan oleh

$$\delta(d) = (1+\rho)\pi(d) \tag{2.4.1}$$

di mana $\pi(d) = \mathrm{E}[X_R]$. Dengan menulis kembali persamaan (2.3.2):

$$X_R = (X-d)_+ = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X-d, & X > d \end{cases} = \max\{0, X-d\}$$

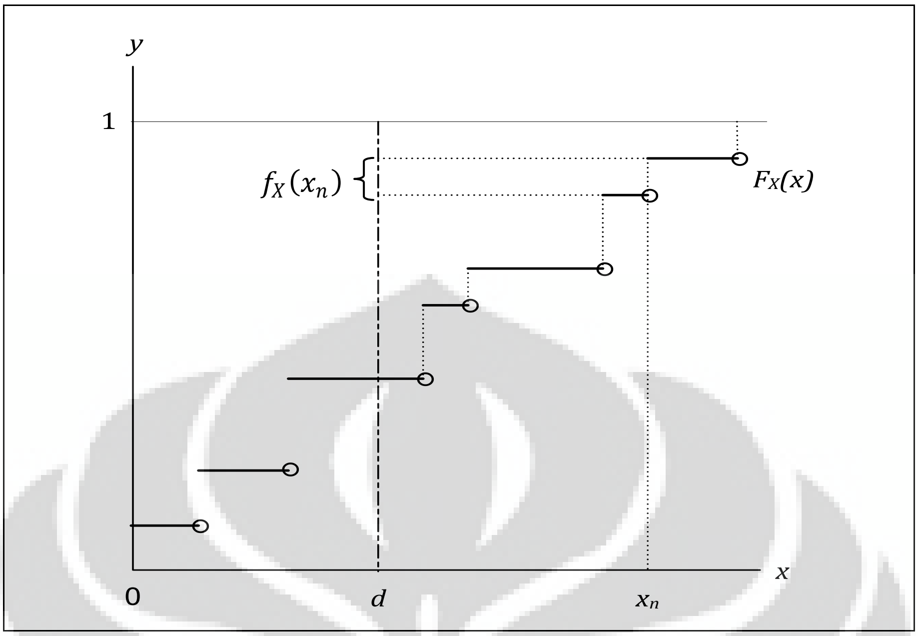
maka diperoleh

$$\begin{aligned}\pi(d) &= \mathrm{E}[X_R] = \mathrm{E}[(X-d)_+] \\ &= \begin{cases} \sum_{x>d} (x-d) f_X(x) & (X \text{ diskrit}) \\ \int_d^\infty (x-d) f_X(x)dx & (X \text{ kontinu}) \end{cases} \\ &= \int_d^\infty \big(1-F_X(x)\big)dx = \int_d^\infty S_X(x)dx\end{aligned}$$

Gambar 2.1 memberikan bukti grafis untuk dapat menulis persamaan

$$\sum_{x>d} (x-d) f_X(x) = \int_d^\infty \big(1-F_X(x)\big)dx$$

ketika X adalah variabel random diskrit.



Gambar 2.1. Bukti Grafis Persamaan $\sum_{x>d}(x-d)f_X(x) = \int_d^\infty \left(1-F_X(x)\right)dx$

Sedangkan ketika X adalah variabel random kontinu,

$$\pi(d) = \mathrm{E}[X_R] = \mathrm{E}[(X-d)_+] = \int_d^\infty (x-d)f_X(x)dx$$

$$= \int_d^\infty (x-d)d(F_X(x)+C)$$

$$= (x-d)(F_X(x)+C)\Big|_d^\infty - \int_d^\infty (F_X(x)+C)dx$$

di mana C adalah suatu konstanta, dan nilai konstanta C yang memenuhi agar nilai $\mathrm{E}[(X-d)_+]$ ada adalah $C=-1$, sehingga

$$\mathrm{E}[(X-d)_+] = (x-d)(F_X(x)-1)\Big|_d^\infty - \int_d^\infty (F_X(x)-1)dx$$

$$= \int_d^\infty \left(1-F_X(x)\right)dx = \int_d^\infty S_X(x)dx$$

Jadi, terbukti untuk X adalah variabel random diskrit maupun kontinu dapat ditulis

$$\pi(d) = \int_d^\infty S_X(x)dx$$

Dengan demikian, persamaan (2.4.1) dapat ditulis

$$\delta(d) = (1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx$$

2.5 Ukuran Risiko dan Koherensi

Suatu ukuran risiko adalah pemetaan dari variabel random yang menyatakan *loss* yang berhubungan dengan risiko ke himpunan bilangan real. Suatu ukuran risiko memberikan sebuah bilangan tunggal yang dimaksudkan untuk mengukur risiko. Sebagai contoh, standar deviasi, atau perkalian/penggandaan standar deviasi dari suatu distribusi, merupakan suatu ukuran risiko karena standar deviasi memberikan ukuran ketidakpastian.

Misalkan ukuran risiko dinyatakan oleh fungsi $\gamma(X)$. Pandang himpunan variabel random *loss* sedemikian sehingga jika X dan Y adalah dua anggota dari himpunan tersebut, maka untuk suatu konstanta positif c, cX dan $X+Y$ juga anggota dari himpunan tersebut.

Definisi 2.5.1

Suatu ukuran risiko yang koheren adalah suatu ukuran risiko $\gamma(X)$ yang memiliki keempat sifat berikut untuk variabel random *loss* X dan Y:

1. Subadditivitas: $\gamma(X+Y) \leq \gamma(X) + \gamma(Y)$.
2. Monotonisitas: Jika $X \leq Y$ untuk semua hasil yang mungkin, maka $\gamma(X) \leq \gamma(Y)$.
3. Homogenitas positif: Untuk sebarang konstanta positif c, $\gamma(cX) = c\gamma(X)$.
4. Translasi invarian: Untuk sebarang konstanta positif c, $\gamma(X+c) = \gamma(X) + c$.

(Klugman, Panjer, & Wilmot, 2008)

Subadditivitas menjelaskan bahwa ukuran risiko dari dua risiko yang digabungkan tidak lebih besar dari jumlah ukuran risiko dari masing-masing risiko. Subadditivitas menggambarkan fakta bahwa seharusnya terdapat manfaat diversifikasi dari menggabungkan risiko. Monotonisitas menjelaskan bahwa jika sebuah risiko memiliki *loss* yang selalu lebih besar daripada risiko lainnya, maka ukuran risikonya juga selalu demikian. Homogenitas positif menjelaskan bahwa jika risiko dilipatgandakan, maka ukuran risikonya juga demikian. Translasi invarian menjelaskan bahwa tidak ada risiko tambahan untuk penambahan risiko yang pasti. Ukuran risiko yang memenuhi keempat sifat pada Definisi 2.5.1 dikatakan koheren.

Ukuran risiko yang akan digunakan pada tugas akhir ini adalah *Value at Risk* (VaR) dan *Conditional Tail Expectation* (CTE).

2.6 *Value at Risk*

Definisi 2.6.1

Misalkan X menyatakan suatu variabel random *loss*. *Value at Risk* dari X pada tingkat keamanan $(1-\alpha)$, dinyatakan oleh $\mathrm{VaR}_X(\alpha)$, $0<\alpha<1$, adalah persentil (atau kuantil) ke-$100(1-\alpha)$ dari distribusi X.
(Klugman, Panjer, & Wilmot, 2008)

Secara matematis,

$$\mathrm{VaR}_X(\alpha)=\inf\{x:\Pr(X>x)\leq\alpha\} \tag{2.6.1}$$

Jika X memiliki fungsi distribusi kontinu satu-satu di $[0,\infty)$, maka $\mathrm{VaR}_X(\alpha)$ adalah solusi unik untuk persamaan

$$\Pr\big(X>\mathrm{VaR}_X(\alpha)\big)=\alpha$$

atau dapat juga ditulis sebagai $\mathrm{VaR}_X(\alpha)=S_X^{-1}(\alpha)$, di mana S_X^{-1} adalah fungsi invers dari fungsi survival S_X.

Sayangnya, VaR hanya memenuhi tiga dari empat sifat koherensi yang harus dipenuhi, yaitu monotonisitas, homogenitas positif, dan translasi invarian.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa VaR memenuhi monotonisitas, yaitu: Jika $X \leq Y$ untuk semua hasil yang mungkin, maka $\mathrm{VaR}_X(\alpha) \leq \mathrm{VaR}_Y(\alpha)$.

Misalkan X dan Y adalah variabel random *loss* nonnegatif. Maka dengan mengambil tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$, VaR untuk variabel random X diberikan oleh

$$\mathrm{VaR}_X(\alpha) = \inf\{x : \Pr(X > x) \leq \alpha\}$$

dan VaR untuk variabel random Y diberikan oleh

$$\mathrm{VaR}_Y(\alpha) = \inf\{y : \Pr(Y > y) \leq \alpha\}$$

Ambil $Y = cX$, di mana $c \geq 1$, maka dari

$$\mathrm{VaR}_Y(\alpha) = \inf\{y : \Pr(Y > y) \leq \alpha\}$$
$$\mathrm{VaR}_{cX}(\alpha) = \inf\{y : \Pr(cX > y) \leq \alpha\}$$
$$\mathrm{VaR}_{cX}(\alpha) = \inf\left\{y : \Pr\left(X > \frac{y}{c}\right) \leq \alpha\right\}$$
$$\mathrm{VaR}_{cX}(\alpha) = \inf\{cx : \Pr(X > x) \leq \alpha\} \qquad \text{(misalkan } y = cx\text{)}$$
$$\mathrm{VaR}_{cX}(\alpha) = c\inf\{x : \Pr(X > x) \leq \alpha\} \qquad \text{(Teorema 2.1.2)}$$
$$\mathrm{VaR}_{cX}(\alpha) = c\mathrm{VaR}_X(\alpha)$$

dan karena $c \geq 1$, diperoleh

$$\mathrm{VaR}_X(\alpha) \leq \mathrm{VaR}_Y(\alpha)$$

Terbukti bahwa ukuran risiko VaR memenuhi monotonisitas.

Akan dibuktikan bahwa VaR memenuhi homogenitas positif, yaitu: Untuk sebarang konstanta positif c, $\mathrm{VaR}_{cX}(\alpha) = c\mathrm{VaR}_X(\alpha)$.

Misalkan X dan Y adalah variabel random *loss* nonnegatif. Ambil $Y = cX$, di mana $c > 0$. Dengan mengambil tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$, maka, sama seperti penurunan di atas, diperoleh

$$\text{VaR}_{cX}(\alpha) = c\text{VaR}_X(\alpha)$$

Terbukti bahwa ukuran risiko VaR memenuhi homogenitas positif.

Akan dibuktikan bahwa VaR memenuhi translasi invarian, yaitu: Untuk sebarang konstanta positif c, $\text{VaR}_{X+c}(\alpha) = \text{VaR}_X(\alpha) + c$.

Misalkan X dan Y adalah variabel random *loss* nonnegatif. Maka dengan mengambil tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$, VaR untuk variabel random X diberikan oleh

$$\text{VaR}_X(\alpha) = \inf\{x : \Pr(X > x) \leq \alpha\}$$

dan VaR untuk variabel random Y diberikan oleh

$$\text{VaR}_Y(\alpha) = \inf\{y : \Pr(Y > y) \leq \alpha\}$$

Ambil $Y = X + c$ di mana $c > 0$, maka dari

$$\begin{aligned}
\text{VaR}_Y(\alpha) &= \inf\{y : \Pr(Y > y) \leq \alpha\} \\
\text{VaR}_{X+c}(\alpha) &= \inf\{y : \Pr(X + c > y) \leq \alpha\} \\
\text{VaR}_{X+c}(\alpha) &= \inf\{y : \Pr(X > y - c) \leq \alpha\} \\
\text{VaR}_{X+c}(\alpha) &= \inf\{x + c : \Pr(X > x) \leq \alpha\} && \text{(misalkan } y = x + c\text{)} \\
\text{VaR}_{X+c}(\alpha) &= \inf\{x : \Pr(X > x) \leq \alpha\} + c && \text{(Teorema 2.1.1)} \\
\text{VaR}_{X+c}(\alpha) &= \text{VaR}_X(\alpha) + c
\end{aligned}$$

diperoleh

$$\text{VaR}_{X+c}(\alpha) = \text{VaR}_X(\alpha) + c$$

Terbukti bahwa ukuran risiko VaR memenuhi translasi invarian.

VaR tidak memenuhi subadditivitas. Pembuktian mengenai hal ini tidak akan dibahas di sini, melainkan dapat merujuk pada contoh yang dijelaskan pada jurnal *Raising Value at Risk* yang ditulis oleh Julia Wirch (1999).

Jadi, terbukti bahwa VaR adalah ukuran risiko yang tidak koheren.

$\square$

Ukuran risiko VaR sering digunakan karena mudah dipahami. Jika nilai VaR yang berhubungan dengan suatu risiko diketahui (dengan tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$), maka dijamin bahwa probabilitas risiko melampaui nilai VaR tersebut tidak lebih dari α. Dalam hal ini, α dapat diinterpretasikan sebagai probabilitas toleransi risiko. Dalam praktiknya, seringkali nilai α yang dipilih lebih kecil dari 5%. Kekurangan dari VaR adalah bahwa VaR gagal memenuhi sifat-sifat ukuran risiko yang koheren.

2.7 *Conditional Tail Expectation* (CTE)

Definisi 2.7.1

Misalkan X adalah suatu variabel random *loss*. *Conditional Tail Expectation* dari X pada tingkat keamanan $(1-\alpha)$, dinyatakan oleh $\mathrm{CTE}_X(\alpha)$, adalah ekspektasi *loss* diberikan bahwa *loss* melampaui persentil (atau kuantil) ke-$100(1-\alpha)$ dari distribusi X.
(Klugman, Panjer, & Wilmot, 2008)

Secara matematis,

$$\mathrm{CTE}_X(\alpha) = \mathrm{E}[X|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)] \qquad (2.7.1)$$

Jika X adalah variabel random *loss* kontinu, persamaan (2.7.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\mathrm{CTE}_X(\alpha) &= \mathrm{E}[X|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)] \\ &= \frac{\int_{\mathrm{VaR}_X(\alpha)}^{\infty} x f_X(x)dx}{1 - F_X\big(\mathrm{VaR}_X(\alpha)\big)} \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_X(\alpha)}^{\infty} x f_X(x)dx\end{aligned}$$

Lebih jauh, jika nilai integral di atas adalah berhingga, dengan menggunakan substitusi $x = \mathrm{VaR}_X(u)$ didapat persamaan

$$\mathrm{CTE}_X(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \mathrm{VaR}_X(u)du$$

Oleh karena itu, CTE dapat dilihat sebagai rata-rata semua nilai VaR pada tingkat keamanan di atas $(1-\alpha)$. Artinya, CTE memberikan lebih banyak informasi mengenai *tail of distribution* dari suatu risiko.

CTE juga dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
\mathrm{CTE}_X(\alpha) &= \mathrm{E}[X|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)] \\
&= \mathrm{E}\big[\mathrm{VaR}_X(\alpha) + \big(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha)\big)|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)\big] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{VaR}_X(\alpha)|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)] \\
&\qquad + \mathrm{E}\big[\big(X - \mathrm{VaR}_X(\alpha)\big)|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)\big] \\
&= \mathrm{VaR}_X(\alpha) + \frac{\int_{\mathrm{VaR}_X(\alpha)}^{\infty}\big(x - \mathrm{VaR}_X(\alpha)\big)f_X(x)dx}{1 - F_X\big(\mathrm{VaR}_X(\alpha)\big)} \\
&= \mathrm{VaR}_X(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_X(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx
\end{aligned}$$

Jelas bahwa suku kedua pada ruas kanan persamaan di atas bernilai nonnegatif. Oleh karena itu, $\mathrm{CTE}_X(\alpha) \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)$.

CTE adalah ukuran risiko yang koheren apabila diaplikasikan pada risiko (*loss*) yang berdistribusi kontinu.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa CTE memenuhi monotonisitas, yaitu: Jika $X \leq Y$ untuk semua hasil yang mungkin, maka $\mathrm{CTE}_X(\alpha) \leq \mathrm{CTE}_Y(\alpha)$.

Misalkan X dan Y adalah variabel random *loss* nonnegatif dari suatu distribusi kontinu. Maka dengan mengambil tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$, CTE untuk variabel random X diberikan oleh

$$\mathrm{CTE}_X(\alpha) = \mathrm{E}[X|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)]$$

dan CTE untuk variabel random Y diberikan oleh

$$\text{CTE}_Y(\alpha) = \text{E}[Y|Y \geq \text{VaR}_Y(\alpha)]$$

Ambil $Y = cX$, di mana $c \geq 1$, maka dari

$\text{CTE}_Y(\alpha) = \text{E}[Y|Y \geq \text{VaR}_Y(\alpha)]$

$\text{CTE}_{cX}(\alpha) = \text{E}[cX|cX \geq \text{VaR}_{cX}(\alpha)]$

$\text{CTE}_{cX}(\alpha) = \text{E}[cX|cX \geq c\text{VaR}_X(\alpha)]$ (VaR memenuhi homogenitas positif)

$\text{CTE}_{cX}(\alpha) = \text{E}[cX|X \geq \text{VaR}_X(\alpha)]$

$\text{CTE}_{cX}(\alpha) = c\text{E}[X|X \geq \text{VaR}_X(\alpha)]$

$\text{CTE}_{cX}(\alpha) = c\text{CTE}_X(\alpha)$

dan karena $c \geq 1$, diperoleh

$$\text{CTE}_X(\alpha) \leq \text{CTE}_Y(\alpha)$$

Terbukti bahwa ukuran risiko CTE memenuhi monotonisitas.

Akan dibuktikan bahwa CTE memenuhi homogenitas positif, yaitu: Untuk sebarang konstanta positif c, $\text{CTE}_{cX}(\alpha) = c\text{CTE}_X(\alpha)$.

Misalkan X dan Y adalah variabel random *loss* nonnegatif dari suatu distribusi kontinu. Ambil $Y = cX$, di mana $c > 0$. Dengan mengambil tingkat keamanan sebesar $(1 - \alpha)$, maka sama seperti penurunan di atas, diperoleh

$$\text{CTE}_{cX}(\alpha) = c\text{CTE}_X(\alpha)$$

Terbukti bahwa ukuran risiko VaR memenuhi homogenitas positif.

Akan dibuktikan bahwa CTE memenuhi translasi invarian, yaitu: Untuk sebarang konstanta positif c, $\text{CTE}_{X+c}(\alpha) = \text{CTE}_X(\alpha) + c$.

Misalkan X dan Y adalah variabel random *loss* nonnegatif dari suatu distribusi kontinu. Maka dengan mengambil tingkat keamanan sebesar $(1 - \alpha)$, CTE untuk variabel random X diberikan oleh

$$\text{CTE}_X(\alpha) = \text{E}[X|X \geq \text{VaR}_X(\alpha)]$$

dan CTE untuk variabel random Y diberikan oleh

$$\text{CTE}_Y(\alpha) = \text{E}[Y|Y \geq \text{VaR}_Y(\alpha)]$$

Ambil $Y = X + c$ di mana $c > 0$, maka dari

$$\mathrm{CTE}_Y(\alpha) = \mathrm{E}[Y|Y \geq \mathrm{VaR}_Y(\alpha)]$$
$$\mathrm{CTE}_{X+c}(\alpha) = \mathrm{E}[(X+c)|X+c \geq \mathrm{VaR}_{X+c}(\alpha)]$$
$$\mathrm{CTE}_{X+c}(\alpha) = \mathrm{E}[(X+c)|X+c \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)+c] \text{ (VaR memenuhi translasi invarian)}$$
$$\mathrm{CTE}_{X+c}(\alpha) = \mathrm{E}[(X+c)|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)]$$
$$\mathrm{CTE}_{X+c}(\alpha) = \mathrm{E}[X|X \geq \mathrm{VaR}_X(\alpha)] + c$$
$$\mathrm{CTE}_{X+c}(\alpha) = \mathrm{CTE}_X(\alpha) + c$$

diperoleh

$$\mathrm{CTE}_{X+c}(\alpha) = \mathrm{CTE}_X(\alpha) + c$$

Terbukti bahwa ukuran risiko CTE memenuhi translasi invarian.

CTE memenuhi subadditivitas. Pembuktian mengenai hal ini tidak akan dibahas di sini, melainkan dapat merujuk pada pembuktian yang dijelaskan pada jurnal *On The Coherence of Expected Shortfall* yang ditulis oleh Carlo Acerbi dan Dirk Tasche (2002).

Jadi, terbukti bahwa CTE adalah ukuran risiko yang koheren.

□

BAB 3

RETENSI OPTIMAL UNTUK SUATU REASURANSI *STOP-LOSS*

Dengan memanfaatkan jasa reasuransi, perusahaan asuransi berusaha mengurangi risiko yang ditanggungnya dengan mengalihkan sebagian tertentu risiko tersebut kepada pihak perusahaan reasuransi. Penentuan retensi optimal adalah hal yang sangat penting bagi perusahaan asuransi ketika menggunakan jasa reasuransi. Dalam bab ini akan dibahas mengenai penentuan retensi optimal untuk suatu reasuransi *stop-loss* berdasarkan suatu modal tertentu yang telah ditetapkan (*fixed*), optimisasi ukuran risiko VaR, dan optimisasi ukuran risiko CTE.

3.1 Retensi Optimal untuk Suatu Modal Tertentu

Dalam menggunakan jasa reasuransi, selain membayar total klaim, perusahaan asuransi harus membayar premi reasuransi kepada perusahaan reasuransi. Perusahaan asuransi harus menyediakan modal sebesar B di awal yang antara lain berasal dari aset-aset yang dimilikinya dan premi yang dikumpulkan dari para nasabah. Modal B inilah yang akan digunakan untuk membayar klaim nasabah dan premi reasuransi. Di dalam memenuhi kewajibannya membayar klaim, perusahaan asuransi ingin mengoptimisasi probabilitas kesanggupan finansialnya (kesanggupan membayar total klaim dan premi reasuransi) dengan cara memilih retensi terbaik. Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan ilustrasi bagaimana menentukan retensi optimal untuk suatu modal tertentu.

Andaikan sebuah perusahaan asuransi memiliki suatu portofolio yang terdiri dari 20.000 polis asuransi jiwa satu-tahun yang dikelompokkan sebagai berikut:

Besar manfaat/klaim	Banyaknya polis
1	10.000
2	5.000
3	5.000

Probabilitas masing-masing nasabah meninggal dalam satu tahun masa berlakunya polis adalah sama yaitu $q = 0{,}01$, dan polis diasumsikan independen satu terhadap yang lain. Perusahaan asuransi tersebut akan menggunakan jasa reasuransi *stop-loss*. Di dalam menggunakan jasa reasuransi *stop-loss*, perusahaan asuransi menetapkan retensi yang merupakan pembayaran maksimum untuk masing-masing polis. Bagian sisa dari klaim dibayar oleh perusahaan reasuransi. Sebagai contoh, jika ditetapkan retensi sebesar 2,6 dan seorang nasabah (dengan besar klaim asuransi adalah 3) meninggal, maka perusahaan asuransi akan membayar sebesar 2,6 dan sisanya sebesar 0,4 akan dibayar oleh perusahaan reasuransi. Untuk itu, perusahaan asuransi akan mencari retensi optimal. Diasumsikan perusahaan asuransi memiliki modal sebesar 405 dan besarnya premi reasuransi ditentukan berdasarkan prinsip nilai ekspektasi dengan $\rho = 0{,}2$, di mana ρ adalah *safety loading factor*, sehingga dengan kata lain besarnya premi reasuransi adalah 120% dari premi bersih yang dibayarkan kepada perusahaan reasuransi.

Misalkan,

$\boldsymbol{i}$: variabel random indikator dengan nilai $\begin{cases} \boldsymbol{i} = 1, & \text{jika terjadi kematian} \\ \boldsymbol{i} = 0, & \text{jika tidak terjadi kematian} \end{cases}$,

di mana untuk semua polis diasumsikan

$$\Pr(\boldsymbol{i} = 1) = q = 0{,}01$$

dan

$$\Pr(\boldsymbol{i} = 0) = 1 - q = 0{,}99$$

d : retensi, di mana $0 < d < 3$

X_{Ij} : variabel random klaim untuk polis ke-j yang dibayar oleh perusahaan asuransi; $X_{Ij} = (b_j \wedge d)\boldsymbol{i}$, di mana $(b_j \wedge d) = \min\{b_j, d\}$, $b_j = 1{,}2{,}3$, dan $j = 1, 2, 3, \dots, 20.000$

X_I : variabel random total klaim yang dibayar oleh perusahaan asuransi;

$$X_I = \sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}$$

Y_j : variabel random klaim untuk polis ke-j yang ditujukan kepada perusahaan reasuransi; $Y_j = (b_j - d)_+ \boldsymbol{i}$, di mana $(b_j - d)_+ = \max\{(b_j - d), 0\}$, $b_j = 1,2,3$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, 20.000$

X_R : variabel random total klaim yang ditujukan kepada perusahaan reasuransi;

$$X_R = \sum_{j=1}^{20.000} Y_j$$

$\pi(d)$: premi bersih reasuransi, di mana $\pi(d) = \mathrm{E}[X_R]$

$\delta(d)$: premi reasuransi, dalam hal ini $\delta(d) = 1{,}2\pi(d) = 1{,}2\mathrm{E}[X_R]$

T : variabel random biaya total yang harus ditanggung perusahaan asuransi yang terdiri dari total klaim dan premi reasuransi, yaitu $T = X_I + \delta(d)$

Pertama-tama, tinjau kasus $d = 1{,}5$. Dari sudut pandang perusahaan reasuransi,

$$X_R = \sum_{j=1}^{20.000} Y_j$$

$$\mathrm{E}[X_R] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{20.000} Y_j\right] = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{E}[Y_j] = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{E}\left[(b_j - d)_+ \boldsymbol{i}\right]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[(1-d)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(2-d)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(3-d)_+\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[(1-1{,}5)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(2-1{,}5)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(3-1{,}5)_+\boldsymbol{i}]$$

$$= 0 + 5.000(0{,}5)\mathrm{E}[\boldsymbol{i}] + 5.000(1{,}5)\mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000[1(q) + 0(1-q)]$$

$$= 10.000[1(0,01) + 0(0,99)]$$

$$= 100$$

Perusahaan reasuransi akan membebankan premi kepada perusahaan asuransi sebesar

$$\delta(1,5) = 1,2\pi[X_R] = 1,2\mathrm{E}[X_R]$$

$$= 1,2(100) = 120$$

Dari sudut pandang perusahaan asuransi, penyebaran polis-polis ditampilkan sebagai berikut.

Besar manfaat/klaim	Banyaknya polis
1	10.000
1,5	10.000

Nilai ekspektasi dan variansi dari variabel random total klaim yang dibayar oleh perusahaan asuransi (X_I) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$X_I = \sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}$$

$$\mathrm{E}[X_I] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}\right] = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{E}[X_{Ij}] = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{E}[(b_j \wedge d)\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}] + 10.000\ \mathrm{E}[1,5\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}] + 15.000\ \mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= 25.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= 25.000[1(q) + 0(1-q)]$$

$$= 25.000[1(0,01) + 0(0,99)]$$

$$= 250$$

$$\mathrm{Var}(X_I) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}\right) = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{Var}(X_{Ij})$$

$$= 10.000\mathrm{Var}(\boldsymbol{i}) + 10.000\ \mathrm{Var}(1{,}5\boldsymbol{i})$$

$$= 10.000\mathrm{Var}(\boldsymbol{i}) + 22.500\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{i})$$

$$= 32.500\mathrm{Var}(\boldsymbol{i})$$

$$= 32.500[q(1-q)]$$

$$= 32.500[(0{,}01)(0{,}99)]$$

$$= 321{,}75$$

Adapun biaya total T yang harus dibayar oleh perusahaan asuransi adalah

$$T = X_I + \delta(1{,}5) = X_I + 120$$

Dengan modal sebesar B yang *fixed*, perusahaan asuransi tentunya ingin agar $\Pr(T < B) = p$ menghasilkan nilai p yang sangat besar. Telah diberikan $B = 405$, maka dengan menggunakan Teorema Limit Pusat diperoleh

$$\Pr(T < B) = \Pr(X_I + 120 < B)$$

$$= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}} < \frac{B - 120 - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}} < \frac{405 - 120 - 250}{\sqrt{321{,}75}}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}} < \frac{35}{\sqrt{321{,}75}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{35}{\sqrt{321{,}75}}\right) = 0{,}9744$$

Jadi, dengan mengambil retensi sebesar 1,5 dan modal sebesar 405, perusahaan asuransi akan sanggup membayar $X_I + 120$ dengan aproksimasi probabilitas sebesar 0,9744.

Sekarang tinjau kasus $d = 2$. Dari sudut pandang perusahaan reasuransi,

$$X_R = \sum_{j=1}^{20.000} Y_j$$

$$\mathrm{E}[X_R] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{20.000} Y_j\right] = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{E}[Y_j]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[(1-d)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(2-d)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(3-d)_+\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[(1-2)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(2-2)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(3-2)_+\boldsymbol{i}]$$

$$= 0 + 0 + 5.000\mathrm{E}[(3-2)_+\boldsymbol{i}]$$

$$= 5.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= 5.000[1(q) + 0(1-q)]$$

$$= 5.000[1(0{,}01) + 0(0{,}99)]$$

$$= 50$$

Perusahaan reasuransi akan membebankan premi kepada perusahaan asuransi sebesar

$$\delta(2) = 1{,}2\pi[X_R] = 1{,}2\mathrm{E}[X_R]$$

$$= 1{,}2(50) = 60$$

Dari sudut pandang perusahaan asuransi, penyebaran polis-polis ditampilkan sebagai berikut.

Besar manfaat/klaim	Banyaknya polis
1	10.000
2	10.000

Nilai ekspektasi dan variansi dari variabel random total klaim yang dibayar oleh perusahaan asuransi (X_I) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$X_I = \sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}$$

$$\mathrm{E}[X_I] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}\right] = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{E}[X_{Ij}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}] + 10.000\ \mathrm{E}[2\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}] + 20.000\ \mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= 30.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= 30.000[1(q) + 0(1-q)]$$

$$= 30.000[1(0{,}01) + 0(0{,}99)]$$

$$= 300$$

$$\mathrm{Var}(X_I) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}\right) = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{Var}(X_{Ij})$$

$$= 10.000\mathrm{Var}(\boldsymbol{i}) + 10.000\ \mathrm{Var}(2\boldsymbol{i})$$

$$= 10.000\mathrm{Var}(\boldsymbol{i}) + 40.000\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{i})$$

$$= 50.000\mathrm{Var}(\boldsymbol{i})$$

$$= 50.000[q(1-q)]$$

$$= 50.000[(0{,}01)(0{,}99)]$$

$$= 495$$

Adapun biaya total T yang harus dibayar oleh perusahaan asuransi adalah

$$T = X_I + \delta(2) = X_I + 60$$

Diberikan $B = 405$, maka dengan menggunakan Teorema Limit Pusat diperoleh

$$\begin{aligned}
\Pr(T < B) &= \Pr(X_I + 60 < B) \\
&= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}(X_I)}{\sigma_{X_I}} < \frac{B - 60 - \mathrm{E}(X_I)}{\sigma_{X_I}}\right) \\
&= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}(X_I)}{\sigma_{X_I}} < \frac{405 - 60 - 300}{\sqrt{495}}\right) \\
&= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}(X_I)}{\sigma_{X_I}} < \frac{45}{\sqrt{495}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{45}{\sqrt{495}}\right) = 0{,}9783
\end{aligned}$$

Jadi, dengan mengambil retensi sebesar 2 dan modal sebesar 405, perusahaan asuransi akan sanggup membayar $X_I + 60$ dengan aproksimasi probabilitas sebesar $0{,}9783$.

Selanjutnya tinjau kasus $d = 2{,}5$, maka dengan cara yang sama diperoleh

$$\delta(2{,}5) = 30$$

$$\mathrm{E}[X_I] = 325$$

$$\mathrm{Var}(X_I) = 606{,}375$$

sehingga dengan besar modal yang sama ($B = 405$) diperoleh

$$\begin{aligned}
\Pr(T < B) &= \Pr(X_I + \delta(2{,}5) < B) \\
&= \Pr(X_I + 30 < 405)
\end{aligned}$$

$$= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}} < \frac{405 - 30 - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}} < \frac{50}{\sqrt{606{,}375}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{606{,}375}}\right) = 0{,}9788$$

Ternyata nilai aproksimasi $\Pr(T < B)$ semakin meningkat seiring dengan bertambahnya nilai d. Dengan demikian, diduga terdapat $d \in (2\,,3)$ yang memaksimumkan $\Pr(T < B)$, di mana dalam kasus ini $B = 405$.

Untuk retensi $d \in (2\,,3)$, dari sudut pandang perusahaan reasuransi,

$$X_R = \sum_{j=1}^{20.000} Y_j$$

$$\mathrm{E}[X_R] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{20.000} Y_j\right] = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{E}[Y_j]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[(1-d)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(2-d)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(3-d)_+\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[(1-d)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(2-d)_+\boldsymbol{i}] + 5.000\mathrm{E}[(3-d)_+\boldsymbol{i}]$$

$$= 0 + 0 + 5.000(3-d)\mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= 5.000(3-d)[1(q) + 0(1-q)]$$

$$= 5.000(3-d)[1(0{,}01) + 0(0{,}99)]$$

$$= 50(3-d)$$

Perusahaan reasuransi akan membebankan premi kepada perusahaan asuransi sebesar

$$\delta(d) = 1{,}2\pi[X_R] = 1{,}2\mathrm{E}[X_R]$$

$$= 1{,}2(50)(3-d)$$

$$= 60(3 - d) = 180 - 60d$$

Sementara itu, dari sudut pandang perusahaan asuransi, penyebaran polis-polis ditampilkan sebagai berikut.

Besar manfaat/klaim	Banyaknya polis
1	10.000
2	5.000
d	5.000

Nilai ekspektasi dan variansi dari variabel random total klaim yang dibayar oleh perusahaan asuransi (X_I) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$X_I = \sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}$$

$$\mathrm{E}[X_I] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}\right] = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{E}[X_{Ij}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}] + 5.000\ \mathrm{E}[2\boldsymbol{i}] + 5.000\ \mathrm{E}[d\boldsymbol{i}]$$

$$= 10.000\mathrm{E}[\boldsymbol{i}] + 10.000\ \mathrm{E}[\boldsymbol{i}] + 5.000\ d\mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= (20.000 + 5.000d)\mathrm{E}[\boldsymbol{i}]$$

$$= (20.000 + 5.000d)[1(q) + 0(1 - q)]$$

$$= (20.000 + 5.000d)[1(0{,}01) + 0(0{,}99)]$$

$$= 200 + 50d$$

$$\mathrm{Var}(X_I) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{20.000} X_{Ij}\right) = \sum_{j=1}^{20.000} \mathrm{Var}(X_{Ij})$$

$$= 10.000\mathrm{Var}(\boldsymbol{i}) + 5.000\ \mathrm{Var}(2\boldsymbol{i}) + 5.000\ \mathrm{Var}(d\boldsymbol{i})$$

$$= 10.000\mathrm{Var}(\boldsymbol{i}) + 20.000\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{i}) + 5.000\ d^2\mathrm{Var}(\boldsymbol{i})$$

$$= (30.000 + 5.000d^2)\mathrm{Var}(\boldsymbol{i})$$

$$= (30.000 + 5.000d^2)[q(1-q)]$$

$$= (30.000 + 5.000d^2)[0{,}01(0{,}99)]$$

$$= 297 + 49{,}5d^2$$

Biaya total T yang harus dibayar perusahaan asuransi dinyatakan oleh

$$T = X_I + \delta(d) = X_I + 180 - 60d$$

Maka dengan menggunakan Teorema Limit Pusat, diperoleh

$$\Pr(T < B) = \Pr(X_I + 180 - 60d < B)$$

$$= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}} < \frac{B - 180 + 60d - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}} < \frac{405 - 180 + 60d - 200 - 50d}{\sqrt{297 + 49{,}5d^2}}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{X_I - \mathrm{E}[X_I]}{\sigma_{X_I}} < \frac{25 + 10d}{\sqrt{297 + 49{,}5d^2}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{25 + 10d}{\sqrt{297 + 49{,}5d^2}}\right)$$

Misalkan $g(d) = \frac{25+10d}{\sqrt{297+49{,}5d^2}}$. Nilai d yang memaksimumkan $\Phi\big(g(d)\big)$ adalah sama dengan nilai d yang memaksimumkan $g(d)$. Dengan menggunakan konsep turunan ($g'(d) = 0$), maka

$$g(d) = \frac{25 + 10d}{\sqrt{297 + 49{,}5d^2}}$$

$$g'(d) = \frac{10\sqrt{297 + 49{,}5d^2} - (25 + 10d)0{,}5(297 + 49{,}5d^2)^{-0{,}5}99d}{297 + 49{,}5d^2}$$

$$0 = \frac{10\sqrt{297 + 49{,}5d^2} - (25 + 10d)0{,}5(297 + 49{,}5d^2)^{-0{,}5}99d}{297 + 49{,}5d^2}$$

$$0 = 20(297 + 49{,}5d^2) - (25 + 10d)99d$$

$$0 = 5940 + 990d^2 - 2475d - 990d^2$$

$$2475d = 5940$$

$$d = 2{,}4$$

sehingga diperoleh retensi terbaik untuk kasus ini adalah $d = 2{,}4$. Adapun aproksimasi probabilitas perusahaan asuransi kuat membayar total klaim dan premi reasuransi pada $d = 2{,}4$ adalah

$$\Phi\big(g(2{,}4)\big) = \Phi\left(\frac{25 + 10(2{,}4)}{\sqrt{297 + 49{,}5(2{,}4)^2}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{49}{\sqrt{582{,}12}}\right) = 0{,}9789$$

Di masa depan, berbagai faktor eksternal (seperti inflasi atau tingkat suku bunga) akan sangat mempengaruhi aset-aset yang dimiliki oleh perusahaan asuransi sehingga besar modal perusahaan asuransi tidak dapat ditentukan dengan pasti. Dengan memilih tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$ yang *fixed*, retensi optimal dapat ditentukan berdasarkan ukuran risiko *Value at Risk* dan *Conditional Tail Expectation*. Retensi optimal dapat diperoleh dengan mengoptimisasi VaR dan CTE pada tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$. Untuk optimisasi VaR dan optimisasi CTE, diasumsikan variabel random *loss X* memiliki fungsi distribusi kontinu satu-satu di $(0,\infty)$ dengan kemungkinan terjadi loncatan di $x = 0$.

3.2 Retensi Optimal: Optimisasi VaR

Pada subbab ini, akan dibahas mengenai penentuan retensi optimal (d^*) untuk optimisasi VaR :

$$\mathrm{VaR}_T(d^*,\alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)\}$$

Pandang $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ sebagai suatu fungsi dua variabel di mana $d \in (0,\infty)$ dan $\alpha \in (0,1)$. Optimisasi VaR merupakan suatu kriteria mencari nilai d yang optimal yaitu nilai d yang meminimumkan fungsi $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ pada suatu nilai α yang *fixed*.

Pertama-tama, dicari dahulu fungsi survival dari bagian *loss* yang ditanggung oleh perusahaan asuransi (X_I), di mana

$$X_I = \begin{cases} X, & X \le d \\ d, & X > d \end{cases} = \min\{X,d\}$$

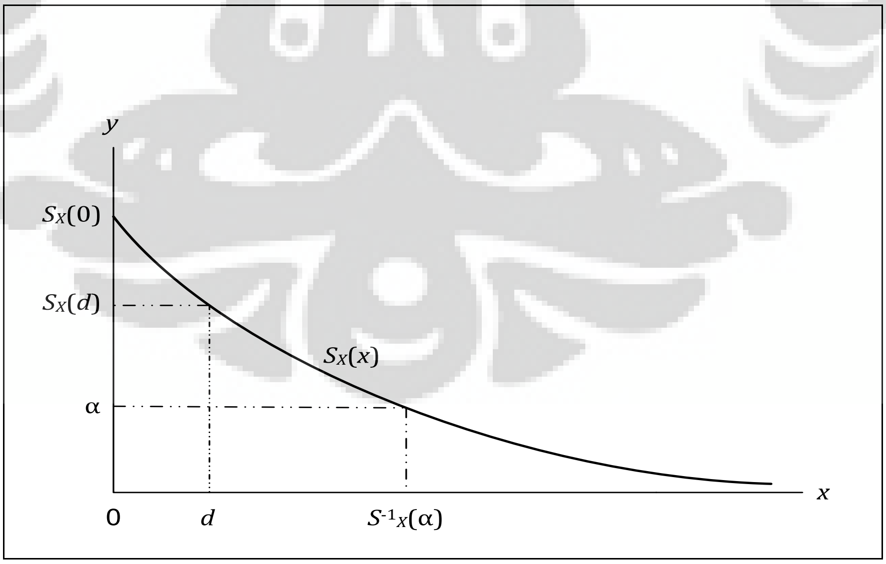
Fungsi survival dari variabel random X_I diberikan oleh

$$S_{X_I}(x) = \Pr(X_I > x) = \Pr(\min\{X,d\} > x)$$

$$= \begin{cases} S_X(x), & 0 \le x < d \\ 0, & x \ge d \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Dari hasil di atas diperoleh bahwa

1. Jika $0 < \alpha \le S_X(d) < S_X(0)$ atau ekuivalennya $0 < d \le S_X^{-1}(\alpha)$, (Gambar 3.1)

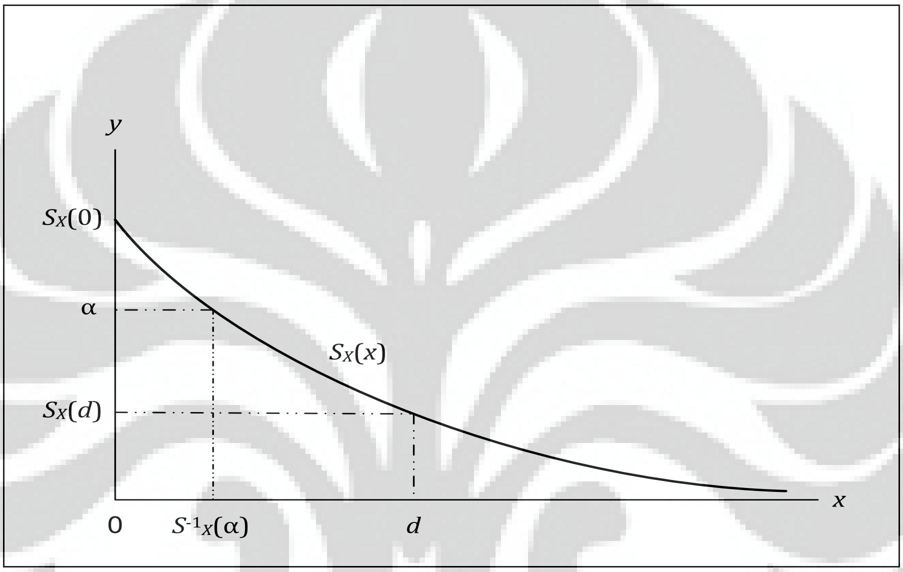


Gambar 3.1. Grafik Fungsi Survival S_X jika $0 < d \le S_X^{-1}(\alpha)$

maka

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) &= \inf\{x : \Pr(X_I > x) \le \alpha\} \\
&= \inf\left\{x : \begin{cases} S_X(x) \le \alpha, 0 \le x < d \\ 0 \le \alpha, \quad\quad x \ge d \end{cases}\right\} \\
&= \inf(\emptyset \cup \{x \ge d\}) \\
&= d
\end{aligned}
$$

2. Jika $0 < S_X(d) < \alpha < S_X(0)$ atau ekuivalennya $d > S_X^{-1}(\alpha)$, (Gambar 3.2)



Gambar 3.2. Grafik Fungsi Survival S_X jika $d > S_X^{-1}(\alpha)$

maka

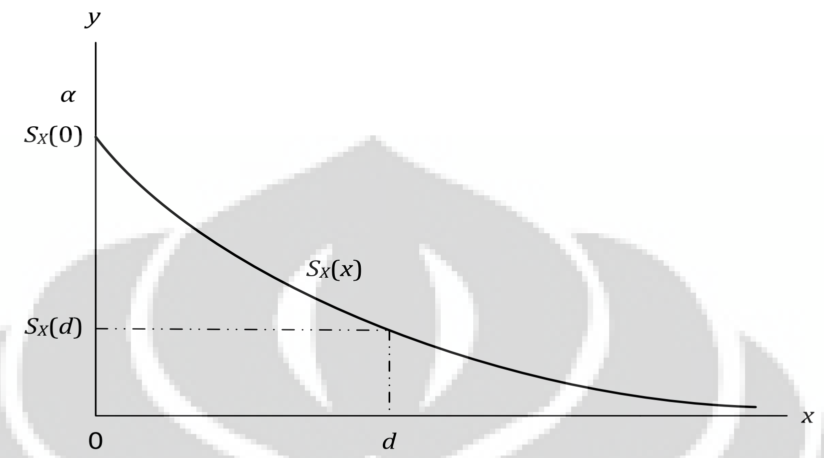
$$
\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) &= \inf\{x : \Pr(X_I > x) \le \alpha\} \\
&= \inf\left\{x : \begin{cases} S_X(x) \le \alpha, 0 \le x < d \\ 0 \le \alpha, \quad\quad x \ge d \end{cases}\right\} \\
&= \inf(\{S_X^{-1}(\alpha) \le x < d\} \cup \{x \ge d\}) \\
&= S_X^{-1}(\alpha)
\end{aligned}
$$

3. Jika $\alpha \ge S_X(0)$, (Gambar 3.3)

maka

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) &= \inf\{x : \Pr(X_I > x) \le \alpha\} \\
&= \inf\left\{x : \begin{cases} S_X(x) \le \alpha, 0 \le x < d \\ 0 \le \alpha, \quad\quad x \ge d \end{cases}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \inf(\{0 \leq x < d\} \cup \{x \geq d\})$$
$$= 0$$



Gambar 3.3. Grafik Fungsi Survival S_X jika $\alpha \geq S_X(0)$

Kasus di mana $\mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha) = 0$ tidak akan menjadi perhatian pada pembahasan tugas akhir ini. Jadi untuk selanjutnya, α harus memenuhi $0 < \alpha < S_X(0)$.

Dengan demikian, diperoleh VaR dari X_I pada tingkat keamanan sebesar $(1 - \alpha)$ adalah

$$\mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha) = \begin{cases} d, & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha), & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Perlu diperhatikan bahwa jika diberikan suatu $d > 0$, maka $\mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha) = d$ adalah sama untuk semua $\alpha \in (0, S_X(d)]$ sebab X_I adalah variabel random terbatas di mana $0 \leq X_I \leq d$.

Ditulis kembali persamaan

$$T = X_I + \delta(d) \tag{3.2.3}$$

di mana

T : variabel random biaya total yang harus dikeluarkan oleh perusahaan asuransi

X_I : variabel random bagian *loss* yang dibayar oleh perusahaan asuransi

$\delta(d)$: premi reasuransi yang ditentukan berdasarkan prinsip nilai ekspektasi

Dari persamaan (3.2.3) dan berdasarkan definisi VaR secara matematis, dapat ditunjukkan bahwa untuk d dan α tertentu (*fixed*), ada hubungan antara VaR dari T dan VaR dari X_I, yang dinyatakan oleh persamaan berikut:

$$\mathrm{VaR}_T(d,\alpha) = \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) + \delta(d) \tag{3.2.4}$$

Bukti

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_T(d,\alpha) &= \inf\{t : \Pr(T > t) \le \alpha\} && \text{(definisi } \mathrm{VaR}_T(d,\alpha)\text{)} \\
&= \inf\{t : \Pr(X_I + \delta(d) > t) \le \alpha\} && (T = X_I + \delta(d)) \\
&= \inf\{t : \Pr(X_I > t - \delta(d)) \le \alpha\} \\
&= \inf\{x + \delta(d) : \Pr(X_I > x) \le \alpha\} && \text{(misalkan } t = x + \delta(d)\text{)} \\
&= \inf\{x : \Pr(X_I > x) \le \alpha\} + \delta(d) && \text{(Teorema 2.1.1)} \\
&= \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) + \delta(d)
\end{aligned}$$

□

Dapat dibuktikan bahwa fungsi $\delta(d)$ merupakan fungsi turun dalam d untuk $d \in (0,\infty)$.

Bukti

$\delta(d) = (1+\rho)\pi(d)$, di mana dari Bab 2 diketahui $\pi(d) = \int_d^\infty S_X(x)dx$. Karena fungsi survival dari variabel random kontinu adalah fungsi tidak naik, maka untuk sebarang $0 < d_1 < d_2$ diperoleh

$$\int_{d_1}^\infty S_X(x)dx > \int_{d_2}^\infty S_X(x)dx$$

$\Leftrightarrow \; \pi(d_1) > \pi(d_2)$

Karena $\rho > 0$, maka

$(1+\rho)\pi(d_1) > (1+\rho)\pi(d_2)$

$\Leftrightarrow \; \delta(d_1) > \delta(d_2)$

Jadi, untuk sebarang $0 < d_1 < d_2$,

$$\delta(d_1) > \delta(d_2)$$

sehingga didapat $\delta(d)$ adalah fungsi turun dalam d untuk $d \in (0, \infty)$.

∎

Kemudian dapat dibuktikan bahwa fungsi $\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)$ merupakan fungsi tidak turun dalam d untuk $d \in (0, \infty)$ dan untuk suatu nilai α yang *fixed*.

Bukti

a) Ambil sebarang $0 < d_1 < d_2 < S_X^{-1}(\alpha)$, maka diperoleh

$$\mathrm{VaR}_{X_I}(d_1,\alpha) = d_1$$

dan

$$\mathrm{VaR}_{X_I}(d_2,\alpha) = d_2.$$

Karena $d_1 < d_2$, maka $\mathrm{VaR}_{X_I}(d_1,\alpha) < \mathrm{VaR}_{X_I}(d_2,\alpha)$.

b) Ambil sebarang $0 < d_1 < S_X^{-1}(\alpha) < d_2$, maka diperoleh

$$\mathrm{VaR}_{X_I}(d_1,\alpha) = d_1$$

dan

$$\mathrm{VaR}_{X_I}(d_2,\alpha) = S_X^{-1}(\alpha).$$

Karena $d_1 < S_X^{-1}(\alpha)$, maka $\mathrm{VaR}_{X_I}(d_1,\alpha) < \mathrm{VaR}_{X_I}(d_2,\alpha)$.

c) Ambil sebarang $0 < S_X^{-1}(\alpha) < d_1 < d_2$, maka diperoleh

$$\mathrm{VaR}_{X_I}(d_1,\alpha) = S_X^{-1}(\alpha)$$

dan

$$\mathrm{VaR}_{X_I}(d_2,\alpha) = S_X^{-1}(\alpha).$$

Sehingga untuk sebarang $0 < S_X^{-1}(\alpha) < d_1 < d_2$, $\mathrm{VaR}_{X_I}(d_1, \alpha) = \mathrm{VaR}_{X_I}(d_2, \alpha)$.

Jadi, karena $\mathrm{VaR}_{X_I}(d_1, \alpha) \leq \mathrm{VaR}_{X_I}(d_2, \alpha)$ berlaku untuk ketiga kondisi di atas, maka terbukti bahwa $\mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha)$ merupakan fungsi tidak turun dalam d untuk $d \in (0, \infty)$ dan untuk suatu nilai α yang *fixed*.

∎

Karena $\delta(d)$ adalah fungsi turun di $d \in (0, \infty)$ dan $\mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha)$ adalah fungsi tidak turun di $d \in (0, \infty)$, maka diduga fungsi $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha) = \mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha) + \delta(d)$ memiliki nilai optimal di $d \in (0, \infty)$.

Dari persamaan (3.2.2) dan (3.2.4), diperoleh proposisi berikut.

Proposisi 3.2.1

Untuk setiap $d > 0$ dan $0 < \alpha < S_X(0)$,

$$\mathrm{VaR}_T(d, \alpha) = \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d), & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}. \qquad (3.2.5)$$

Sama halnya dengan $\mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha)$, jika diberikan suatu $d > 0$, $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha) = d + \delta(d)$ adalah sama untuk semua $\alpha \in (0, S_X(d)]$.

Didefinisikan $\rho^* = \frac{1}{1+\rho}$, di mana $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*, yang akan memainkan peran penting dalam mencari solusi permasalahan optimisasi VaR. Berikut adalah teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup untuk keberadaan retensi optimal pada optimisasi VaR:

$$\mathrm{VaR}_T(d^*, \alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)\}.$$

Teorema 3.2.1

1. Retensi optimal $d^* > 0$ ada jika dan hanya jika

$$\alpha < \rho^* < S_X(0) \qquad (3.2.6)$$

dan

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right) \quad (3.2.7)$$

berlaku; $\rho^* = \frac{1}{1+\rho}$, di mana $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*.

2. Jika retensi optimal d^* ada, maka d^* diberikan oleh

$$d^* = S_X^{-1}(\rho^*) \quad (3.2.8)$$

dan VaR minimum dari T diberikan oleh

$$\mathrm{VaR}_T(d^*, \alpha) = d^* + \delta(d^*) \quad (3.2.9)$$

Bukti

1. Akan dibuktikan bahwa jika

$$\alpha < \rho^* < S_X(0)$$

dan

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$$

berlaku, maka retensi optimal $d^* > 0$ ada.

Terlebih dahulu, akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ adalah fungsi kontinu di $d \in (0, \infty)$. Ditulis kembali persamaan (3.2.4):

$$\mathrm{VaR}_T(d, \alpha) = \mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha) + \delta(d)$$

Dari persamaan (3.2.2), jelas bahwa $\mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha)$ merupakan fungsi kontinu di $d \in (0, \infty)$.

Turunan dari $\delta(d)$ yaitu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\delta(d) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left((1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right) = -(1+\rho)S_X(d).$$

Nilai ini ada untuk setiap $d \in (0, \infty)$. Jadi, $\delta(d)$ adalah fungsi kontinu di $d \in (0, \infty)$.
Jadi, $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha) = \mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha) + \delta(d)$ adalah fungsi kontinu di $d \in (0, \infty)$.

Berikutnya, akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ di $d \in (0, \infty)$.

Terlebih dahulu akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$.

Untuk $d > S_X^{-1}(\alpha)$,

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{VaR}_T(d,\alpha) = \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + (1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)$$
$$= -(1+\rho)S_X(d).$$

Karena $\rho > 0$ dan fungsi survival $S_X(d)$ bernilai positif, maka

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{VaR}_T(d,\alpha) < 0$$

sehingga $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi turun di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$ dengan

$$\lim_{d\to\infty} \mathrm{VaR}_T(d,\alpha) = \lim_{d\to\infty}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d)\right)$$
$$= S_X^{-1}(\alpha) + \lim_{d\to\infty} \delta(d)$$
$$= S_X^{-1}(\alpha) + \lim_{d\to\infty}\left((1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)$$
$$= S_X^{-1}(\alpha)$$

Selanjutnya akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$. Turunan dari $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$ adalah

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{VaR}_T(d,\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(d + \delta(d)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(d + (1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)$$
$$= 1 - (1+\rho)S_X(d)$$

Jika $\rho^* < S_X(0)$, maka $S_X^{-1}(\rho^*) > 0$. Misalkan $d_0 = S_X^{-1}(\rho^*)$. Akan ditentukan di mana fungsi $d + \delta(d)$ turun.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(d + \delta(d)\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1-(1+\rho)S_X(d)<0$$

$$\Leftrightarrow S_X(d)>\frac{1}{1+\rho}$$

$\Leftrightarrow S_X(d)>\rho^*\ ;\rho^*=\frac{1}{1+\rho}$ di mana $\rho>0$ adalah *safety loading factor*

$$\Leftrightarrow d<S_X^{-1}(\rho^*)$$

$$\Leftrightarrow d<d_0$$

sehingga diperoleh untuk $d<d_0$, fungsi $d+\delta(d)$ adalah fungsi turun sebab $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d+\delta(d)\big)<0$.

Sekarang akan ditentukan di mana fungsi $d+\delta(d)$ naik.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d+\delta(d)\big)>0$$

$$\Leftrightarrow 1-(1+\rho)S_X(d)>0$$

$$\Leftrightarrow S_X(d)<\frac{1}{1+\rho}$$

$$\Leftrightarrow S_X(d)<\rho^*$$

$$\Leftrightarrow d>S_X^{-1}(\rho^*)$$

$$\Leftrightarrow d>d_0$$

sehingga diperoleh untuk $d>d_0$, fungsi $d+\delta(d)$ adalah fungsi naik sebab $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d+\delta(d)\big)>0$.

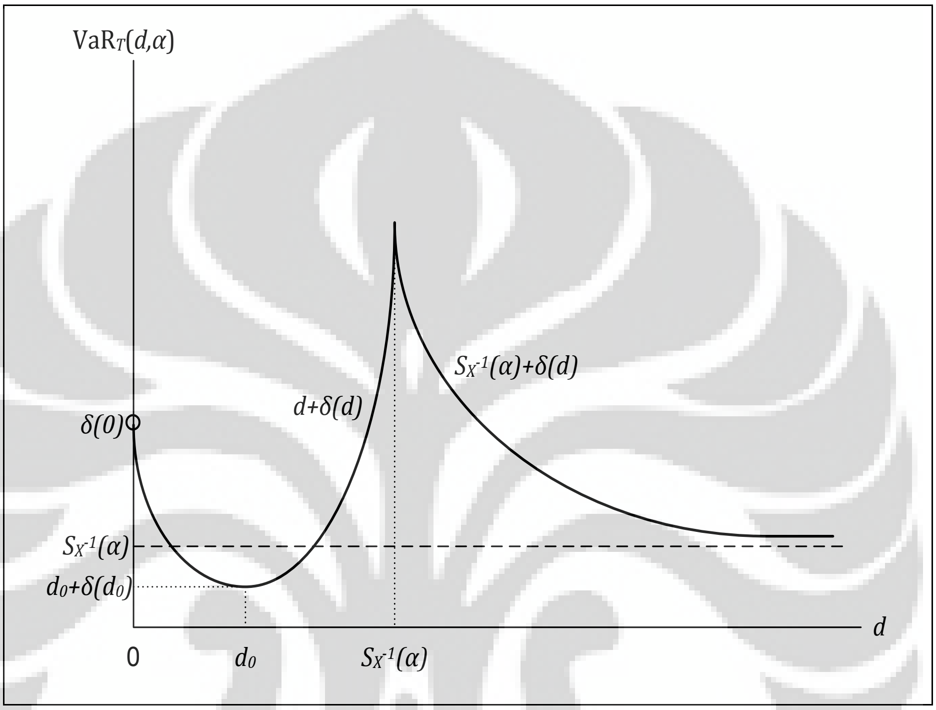
Di $d=d_0=S_X^{-1}(\rho^*)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d+\delta(d)\big)=1-(1+\rho)S_X\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)=1-(1+\rho)\rho^*$$

$$=1-(1+\rho)\frac{1}{1+\rho}=0.$$

Jika $\alpha<\rho^*$, maka $S_X^{-1}(\rho^*)<S_X^{-1}(\alpha)$ sehingga pada kondisi ini fungsi $d+\delta(d)$ turun di $d\in(0,d_0)$ dan naik di $d\in\big(d_0,S_X^{-1}(\alpha)\big)$ dan fungsi $d+\delta(d)$ mencapai nilai minimumnya di d_0 dengan nilai minimumnya adalah $d_0+\delta(d_0)$.

Karena $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ juga berlaku, maka nilai $\mathrm{VaR}_T(d_0, \alpha)$ (yaitu $d_0 + \delta(d_0) = S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$) selalu lebih kecil atau sama dengan $\lim_{d\to\infty} \mathrm{VaR}_T(d, \alpha) = S_X^{-1}(\alpha)$. Garis $y = S_X^{-1}(\alpha)$ merupakan asimtot mendatar dari grafik $y = \mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.4. Grafik Fungsi $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ jika Teorema 3.2.1 terpenuhi

Dari Gambar 3.4 di atas, terlihat bahwa $\mathrm{VaR}_T(d_0, \alpha) = d_0 + \delta(d_0)$ adalah nilai minimum global dari $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ di $d \in (0, \infty)$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $d^* = d_0$ adalah retensi optimal.

Sekarang akan dibuktikan bahwa jika retensi optimal $d^* > 0$ ada, maka $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ berlaku.

Pernyataan di atas ekuivalen dengan pernyataan
"jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ tidak berlaku atau jika
$S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ tidak berlaku, maka retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada".

Pernyataan “$\alpha < \rho^* < S_X(0)$ tidak berlaku” ekuivalen dengan pernyataan
“$\rho^* \leq \alpha < S_X(0)$ berlaku
atau $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$ berlaku
atau $S_X(0) \leq \alpha < \rho^*$ berlaku
atau $\rho^* < S_X(0) \leq \alpha$ berlaku
atau $S_X(0) \leq \rho^* \leq \alpha$ berlaku”.

Tinjau kasus $\alpha \geq S_X(0)$. Untuk $\alpha \geq S_X(0)$, $\mathrm{VaR}_{X_I}(d, \alpha) = 0$ sehingga berdasarkan persamaan (3.2.4), $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha) = \delta(d)$. Telah dibuktikan sebelumnya bahwa $\delta(d)$ adalah fungsi turun dalam d untuk $d \in (0, \infty)$, akibatnya $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ tidak memiliki nilai minimum di $d \in (0, \infty)$. Jadi, pada kondisi di mana $S_X(0) \leq \alpha < \rho^*$ atau $\rho^* < S_X(0) \leq \alpha$ atau $S_X(0) \leq \rho^* \leq \alpha$ berlaku, retensi optimal (d^*) tidak ada.

Selanjutnya tinggal membuktikan pernyataan
“jika $\rho^* \leq \alpha < S_X(0)$ atau $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$ atau
$S_X^{-1}(\alpha) < S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ berlaku, maka retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada”.

Akan dibuktikan jika $\rho^* \leq \alpha < S_X(0)$ berlaku, maka retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada.

Ditulis kembali persamaan (3.2.5),

$$\mathrm{VaR}_T(d, \alpha) = \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d), & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

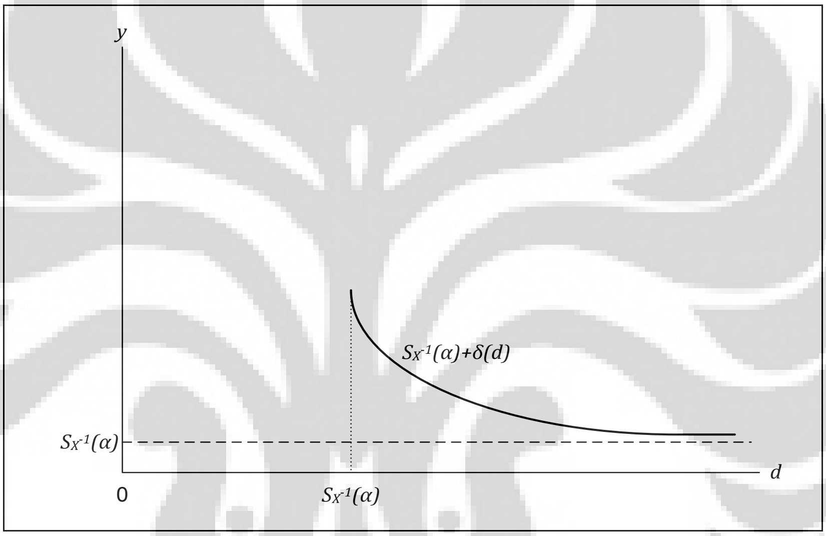
Akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ di $d \in (0, \infty)$.

Pertama, akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$.
Untuk $d > S_X^{-1}(\alpha)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d} \mathrm{VaR}_T(d, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + (1+\rho)\int_d^{\infty} S_X(x)dx\right) \\ &= -(1+\rho)S_X(d) < 0 \end{aligned}$$

sehingga $\text{VaR}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi turun di $d \in (S_X^{-1}(\alpha),\infty)$ dengan

$$\begin{aligned}\lim_{d\to\infty} \text{VaR}_T(d,\alpha) &= \lim_{d\to\infty}\left(S_X^{-1}(\alpha)+\delta(d)\right)\\ &= S_X^{-1}(\alpha)+\lim_{d\to\infty}\delta(d)\\ &= S_X^{-1}(\alpha)+\lim_{d\to\infty}\left((1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)\\ &= S_X^{-1}(\alpha)\end{aligned}$$



Gambar 3.5. Grafik Fungsi $\text{VaR}_T(d,\alpha)$ di $d \in (S_X^{-1}(\alpha),\infty)$ jika $\rho^* \le \alpha < S_X(0)$

Selanjutnya, akan diperiksa kemonotonan fungsi $\text{VaR}_T(d,\alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$. Perhatikan fungsi $d+\delta(d)$. Turunannya adalah

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(d+\delta(d)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(d+(1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)\\ &= 1-(1+\rho)S_X(d)\end{aligned}$$

$\rho^* < S_X(0)$ mengimplikasikan $S_X^{-1}(\rho^*) > 0$. Fungsi $d+\delta(d)$ adalah fungsi turun di $d \in \left(0, S_X^{-1}(\rho^*)\right)$, sebab dari

$$d < S_X^{-1}(\rho^*)$$

$$\Leftrightarrow S_X(d) > \rho^* \;\; ; \rho^* = \frac{1}{1+\rho}$$ di mana $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*

$$\Leftrightarrow S_X(d) > \frac{1}{1+\rho}$$

$$\Leftrightarrow 1-(1+\rho)S_X(d) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d+\delta(d)\big) < 0$$

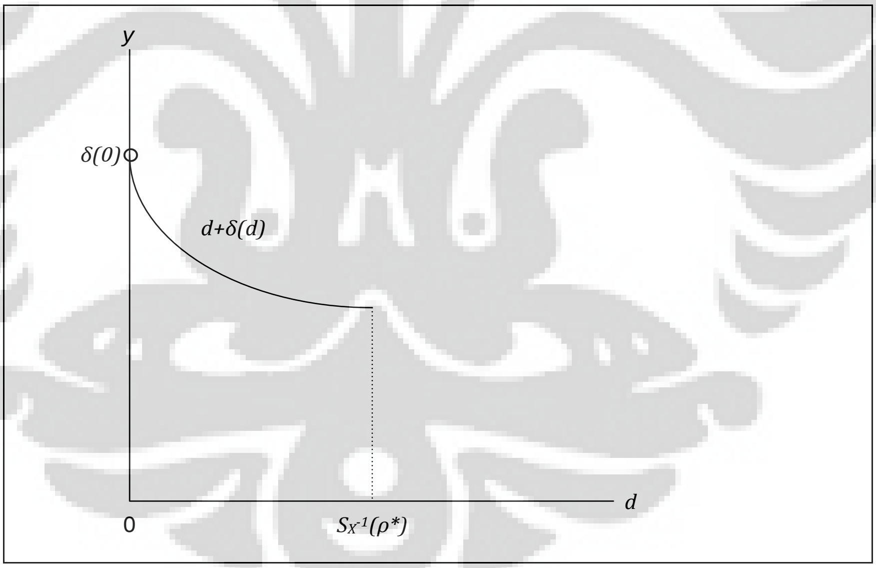
didapat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d+\delta(d)\big) < 0$ untuk $d < S_X^{-1}(\rho^*)$.

Turunan kedua dari fungsi $d+\delta(d)$ adalah

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}d^2}\big(d+\delta(d)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(1-(1+\rho)S_X(d)\big)$$

$$= (1+\rho)f_X(d) > 0$$

Gambar 3.6 menggambarkan hasil penjelasan fungsi $d+\delta(d)$ di atas.

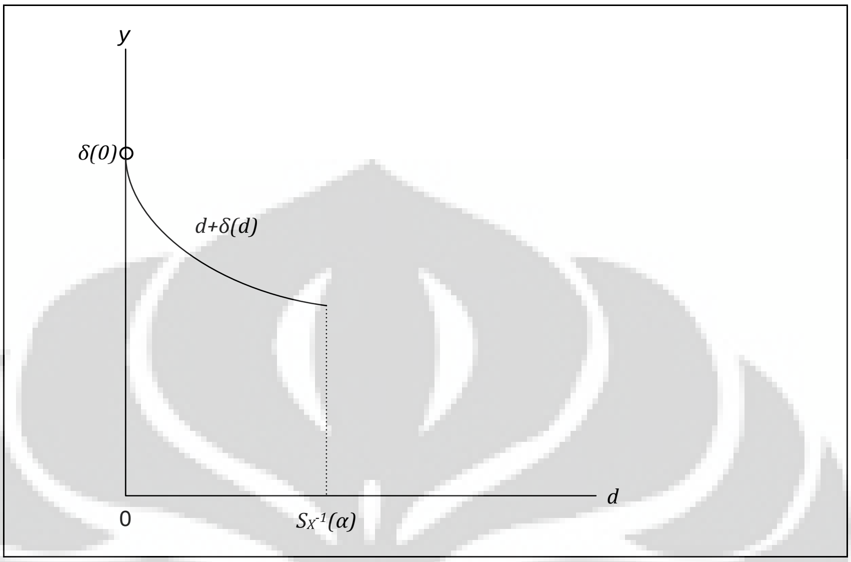


Gambar 3.6. Grafik Fungsi $d+\delta(d)$ di $d \in \big(0, S_X^{-1}(\rho^*)\big)$ jika $\rho^* \le \alpha < S_X(0)$

Berdasarkan persamaan (3.2.5):

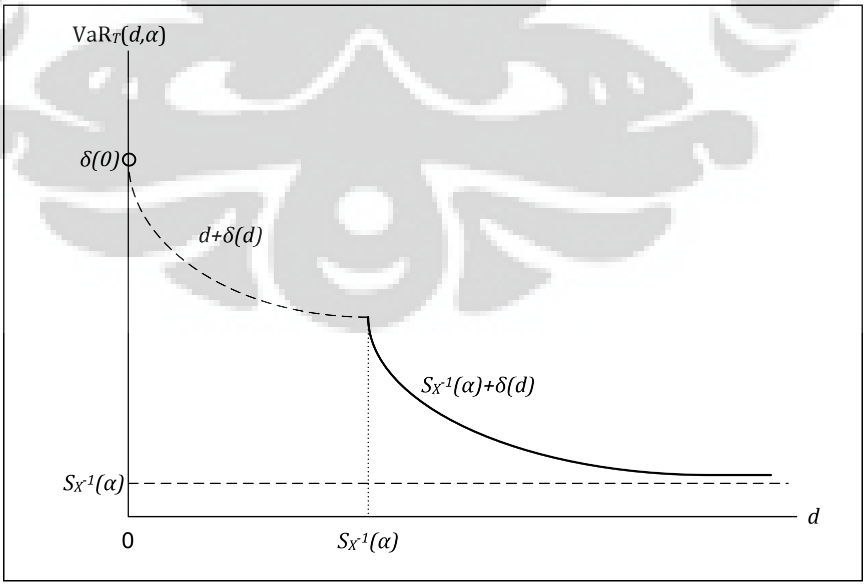
$$\mathrm{VaR}_T(d,\alpha) = \begin{cases} d+\delta(d), & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha)+\delta(d), & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$, $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha) = d + \delta(d)$. Jika $\rho^* \leq \alpha < S_X(0)$ berlaku, maka $0 < S_X^{-1}(\alpha) \leq S_X^{-1}(\rho^*)$. Akibatnya, pada kondisi ini $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi turun di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$ (Gambar 3.7).



Gambar 3.7. Grafik Fungsi $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$ jika $\rho^* \leq \alpha < S_X(0)$

Dengan demikian, diperoleh bahwa $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi turun di $d \in (0,\infty)$. Dari Gambar 3.8 di bawah, terlihat bahwa $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ tidak memiliki nilai minimum sehingga retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada.



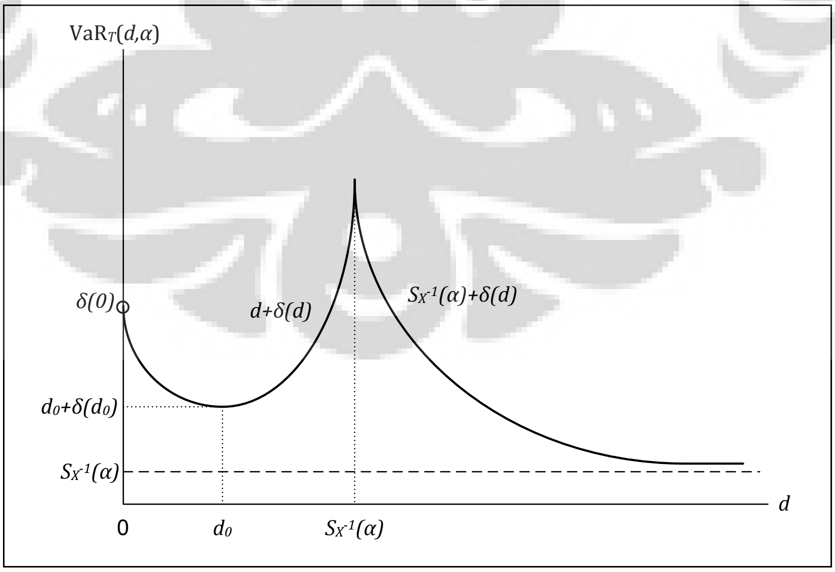
Gambar 3.8. Grafik Fungsi $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ jika $\rho^* \leq \alpha < S_X(0)$

Terbukti bahwa jika $\rho^* \leq \alpha < S_X(0)$ berlaku, maka retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada.

Akan dibuktikan bahwa jika $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$ berlaku, maka retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada.

$\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$ mengimplikasikan $S_X^{-1}(\rho^*) \leq 0 < S_X^{-1}(\alpha)$. Akibatnya $d^* = S_X^{-1}(\rho^*) \notin (0, \infty)$. Tidak ada nilai $d^* > 0$ sedemikian sehingga $\text{VaR}_T(d^*, \alpha)$ merupakan nilai minimum global dari $\text{VaR}_T(d, \alpha)$. Jadi, retensi optimalnya tidak ada. Terbukti bahwa jika $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$ berlaku, maka retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada.

Akan dibuktikan jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ berlaku tetapi $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$ tidak berlaku (atau ekuivalennya jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) < S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$ berlaku), maka retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada.
Jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) < S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$ berlaku, maka didapat $\inf_{d>0} \text{VaR}_T(d, \alpha) = S_X^{-1}(\alpha)$. Akan tetapi, tidak ada $d^* > 0$ sedemikian sehingga $\text{VaR}_T(d^*, \alpha) = S_X^{-1}(\alpha)$. (Gambar 3.9)



Gambar 3.9. Grafik Fungsi $\text{VaR}_T(d, \alpha)$ jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) < S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$

Jadi, retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada. Terbukti bahwa jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ berlaku tetapi $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$ tidak berlaku, maka retensi optimal $d^* > 0$ tidak ada.

Dengan demikian, kedua syarat

$$\alpha < \rho^* < S_X(0)$$

dan

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$$

adalah syarat perlu agar retensi optimal d^* ada.

Jadi, terbukti bahwa retensi optimal $d^* > 0$ ada jika dan hanya jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$ berlaku.

2. Apabila retensi optimal $d^* > 0$ ada, maka dari penjelasan pembuktian Teorema 3.2.1 poin 1 di atas diperoleh retensi optimalnya adalah

$$d^* = S_X^{-1}(\rho^*)$$

dan nilai minimum dari $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ adalah

$$\mathrm{VaR}_T(d^*, \alpha) = d^* + \delta(d^*) = S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big).$$

$\square$

Berikut ini adalah Akibat yang memberikan syarat cukup agar retensi optimal d^* ada. Akibat ini menyederhanakan dalam memeriksa apakah retensi optimal (d^*) pada optimisasi VaR : $\mathrm{VaR}_T(d^*, \alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)\}$ ada.

Akibat 3.2.1

Retensi optimal $d^* > 0$ ada jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq (1 + \rho)\mathrm{E}[X] \qquad (3.2.10)$$

berlaku; retensi optimal d^* dan nilai minimum dari $\mathrm{VaR}_T(d, \alpha)$ masing-masing diberikan oleh

$$d^* = S_X^{-1}(\rho^*)$$

dan

$$\text{VaR}_T(d^*, \alpha) = d^* + \delta(d^*) = S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big).$$

Bukti

Karena kedua syarat $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$ adalah syarat cukup agar retensi optimal d^* ada (berdasarkan Teorema 3.2.1), maka cukup diperiksa apakah $S_X^{-1}(\alpha) \geq (1+\rho)\mathrm{E}[X]$ mengimplikasikan $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$.

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x f_X(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} xd(F_X(x) + C) = x(F_X(x) + C)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (F_X(x) + C)dx$$

di mana C adalah suatu konstanta. Nilai konstanta C yang memenuhi agar nilai $\mathrm{E}[X]$ ada adalah $C = -1$, sehingga

$$\mathrm{E}[X] = x(F_X(x) - 1)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(F_X(x) - 1)dx$$

$$= \int_0^{\infty} \big(1 - F_X(x)\big)dx = \int_0^{\infty} S_X(x)dx$$

Karena $\rho^* < S_X(0)$ berlaku, maka $d_0 = S_X^{-1}(\rho^*) > 0$, sehingga dapat ditulis

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^{d_0} S_X(x)dx + \int_{d_0}^{\infty} S_X(x)dx$$

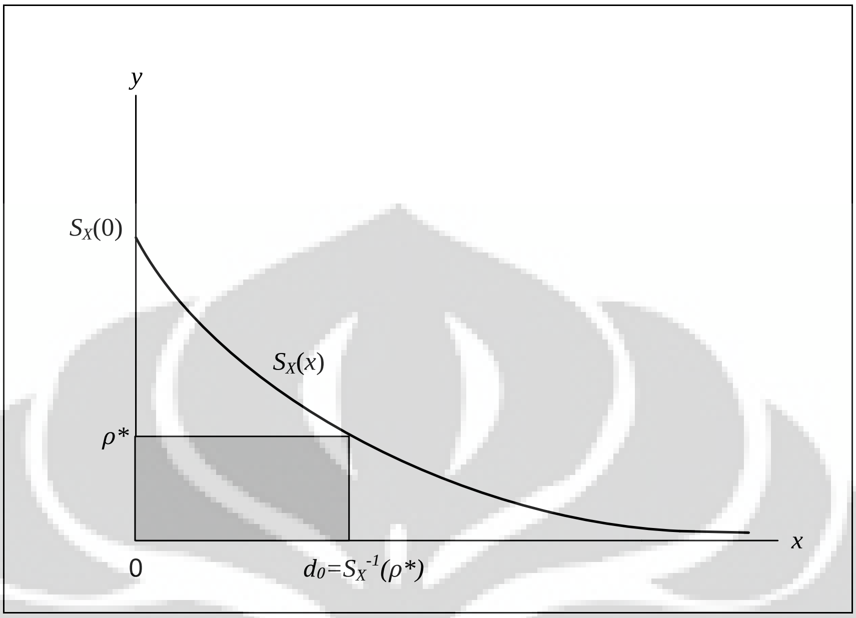
$$= \int_0^{d_0} S_X(x)dx + \pi(d_0)$$

Mengalikan kedua ruas persamaan di atas dengan $(1+\rho)$ menghasilkan

$$(1+\rho)\mathrm{E}[X] = (1+\rho)\int_0^{d_0} S_X(x)dx + (1+\rho)\pi(d_0)$$

$$= (1+\rho)\int_0^{d_0} S_X(x)dx + \delta(d_0)$$

$\int_0^{d_0} S_X(x)dx$ menyatakan luas daerah yang terkurung di antara kurva fungsi survival $S_X(x)$, sumbu- x, garis $x = 0$, dan $x = d_0$.



Gambar 3.10. Daerah yang terkurung di antara kurva Fungsi Survival $S_X(x)$, sumbu- x, garis $x = 0$, dan $x = d_0$

Dari gambar 3.10 terlihat bahwa $\int_0^{d_0} S_X(x)dx \geq d_0\rho^*$ sehingga mengikuti pertidaksamaan (3.2.10) diperoleh

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq (1+\rho)\mathrm{E}[X] = (1+\rho)\int_0^{d_0} S_X(x)dx + \delta(d_0)$$

$$\geq (1+\rho)(d_0\rho^*) + \delta(d_0) = d_0 + \delta(d_0) = S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$$

Jadi, benar bahwa $S_X^{-1}(\alpha) \geq (1+\rho)\mathrm{E}[X]$ mengimplikasikan $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$.

Selanjutnya, karena $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ berlaku, maka berdasarkan Teorema 3.2.1, retensi optimal $d^* > 0$ ada dan nilai retensi optimalnya diberikan oleh $d^* = S_X^{-1}(\rho^*)$ serta nilai minimum dari $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$ diberikan oleh $\mathrm{VaR}_T(d^*,\alpha) = d^* + \delta(d^*) = S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$.

∎

Dua contoh berikut mengilustrasikan bagaimana menentukan retensi optimal berdasarkan optimisasi VaR : $\mathrm{VaR}_T(d^*,\alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)\}$.

Contoh 3.2.1

Misalkan X adalah suatu variabel random *loss* dari distribusi eksponensial dengan mean $\mathrm{E}[X] = 1.000$. Diasumsikan $\alpha = 0{,}1$ dan $\rho = 0{,}2$. Akan diperiksa apakah retensi optimalnya (d^*) ada dan jika ada akan dicari berapa nilainya.
Pdf dari distribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$ yaitu

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \qquad x \geq 0.$$

Ekspektasi dari X yaitu

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)dx = \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} x\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)dx.$$

Dengan memisalkan $t = \frac{x}{\theta}$ dan dengan menggunakan integral parsial diperoleh

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} t\theta\exp(-t)\theta dt = \theta\int_0^{\infty} t\exp(-t)dt = \theta.$$

Karena $\mathrm{E}[X] = 1.000$, maka pada contoh ini didapat $\theta = 1.000$. Jadi, X adalah suatu variabel random *loss* dari distribusi eksponensial dengan parameter $\theta = 1.000$. Fungsi survivalnya dinyatakan oleh

$$S_X(x) = \int_x^{\infty} f_X(t)dt = \int_x^{\infty}\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)dt = e^{-0{,}001x},\ x \geq 0. \qquad (3.2.11)$$

Fungsi survival (3.2.11) adalah fungsi kontinu satu-satu di $x \in [0,\infty)$ sehingga dapat dicari inversnya. Fungsi inversnya adalah

$$S_X^{-1}(y) = -1.000\ln y, \qquad 0 < y < 1.$$

Selanjutnya, akan dihitung nilai ρ^* nad $S_X^{-1}(\alpha)$.

$$\rho^* = \frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1+0{,}2} = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}83$$

$$S_X^{-1}(\alpha) = S_X^{-1}(0{,}1) = -1.000\ln 0{,}1 = 2.302{,}59$$

Dari persamaan (3.2.11) didapat bahwa $S_X(0) = 1$. Sementara itu, $(1+\rho)\mathrm{E}[X] = 1.200$. Dengan demikian, pada kasus ini memenuhi $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) = 2.302,59 > (1+\rho)\mathrm{E}[X] = 1.200$. Berdasarkan Akibat 3.2.1, retensi optimal (d^*) ada dan nilainya adalah

$$d^* = S_X^{-1}(\rho^*) = S_X^{-1}\left(\frac{1}{1,2}\right) = -1.000 \ln \frac{1}{1,2} = 182,32.$$

Contoh 3.2.2

Misalkan X adalah suatu variabel random *loss* dari distribusi Pareto dengan fungsi survivalnya dinyatakan oleh

$$S_X(x) = \left(\frac{2.000}{x+2.000}\right)^3, \qquad x \geq 0. \tag{3.2.12}$$

Diasumsikan $\alpha = 0,1$ dan $\rho = 0,2$. Akan diperiksa apakah retensi optimalnya (d^*) ada dan jika ada akan dicari berapa nilainya.

Dari persamaan (3.2.12) didapat bahwa X adalah suatu variabel random *loss* dari distribusi Pareto dengan parameter $\beta = 3$ dan $\theta = 2.000$. Ekspektasi dari X adalah

$$\mathrm{E}[X] = \frac{\theta\Gamma(2)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{2.000(1)(1)}{2} = 1.000.$$

Fungsi survival (3.2.12) adalah fungsi kontinu satu-satu di $x \in [0,\infty)$ sehingga dapat dicari inversnya. Fungsi inversnya adalah

$$S_X^{-1}(y) = 2.000y^{-1/3} - 2.000, \qquad 0 < y < 1.$$

Selanjutnya, akan dihitung nilai ρ^* dan $S_X^{-1}(\alpha)$.

$$\rho^* = \frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1+0,2} = \frac{1}{1,2} = 0,83$$

$$S_X^{-1}(\alpha) = S_X^{-1}(0,1) = 2.000(0,1)^{-1/3} - 2.000 = 2.308,87$$

Dari persamaan (3.2.12) didapat bahwa $S_X(0) = 1$. Sementara itu,

$(1+\rho)\mathrm{E}[X] = 1.200$. Dengan demikian, kedua kondisi $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ dan $S_X^{-1}(\alpha) > (1+\rho)\mathrm{E}[X]$ terpenuhi. Berdasarkan Akibat 3.2.1, retensi optimal (d^*) ada dan nilainya adalah

$$d^* = S_X^{-1}(\rho^*) = S_X^{-1}\left(\frac{1}{1{,}2}\right) = 2.000\left(\frac{1}{1{,}2}\right)^{-1/3} - 2.000 = 123{,}32.$$

Perlu diperhatikan bahwa nilai parameter pada kedua distribusi dari contoh di atas sengaja dipilih agar risiko untuk kedua kasus memiliki nilai mean yang sama. Distribusi Pareto lebih *heavy-tailed* dibandingkan distribusi eksponensial, artinya distribusi Pareto memiliki probabilitas yang lebih besar pada nilai-nilai *loss* yang besar dibandingkan distribusi eksponensial. Akibatnya, untuk nilai mean yang sama, retensi optimal untuk distribusi Pareto lebih kecil nilainya dibandingkan retensi optimal untuk distribusi eksponensial.

3.3 Retensi Optimal: Optimisasi CTE

Pada subbab ini akan dibahas mengenai penentuan retensi optimal $(\tilde{d})$ berdasarkan optimisasi CTE :

$$\mathrm{CTE}_T(\tilde{d},\alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)\}.$$

Pandang $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ sebagai suatu fungsi dua variabel di mana $d \in (0,\infty)$ dan $\alpha \in (0,1)$. Optimisasi CTE merupakan suatu kriteria mencari nilai d yang optimal yaitu nilai d yang meminimumkan fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ pada suatu nilai α yang *fixed*.

Diingat kembali bahwa

$$T = X_I + \delta(d) \qquad (3.3.1)$$

di mana T menyatakan biaya total yang harus dikeluarkan oleh perusahaan asuransi, X_I menyatakan bagian *loss* yang dibayar oleh perusahaan asuransi dan $\delta(d)$ adalah premi reasuransi yang ditentukan berdasarkan prinsip nilai ekspektasi. Secara matematis, CTE dari T pada tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$ adalah

$$\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \mathrm{E}[T|T \geq \mathrm{VaR}_T(d,\alpha)] \tag{3.3.2}$$

dan CTE dari X_I pada tingkat keamanan sebesar $(1-\alpha)$ adalah

$$\mathrm{CTE}_{X_I}(d,\alpha) = \mathrm{E}\left[X_I|X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right] \tag{3.3.3}$$

Dari persamaan (3.3.2) dan (3.3.1),

$$\begin{aligned}
\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) &= \mathrm{E}[T|T \geq \mathrm{VaR}_T(d,\alpha)] \\
&= \mathrm{E}[X_I + \delta(d)|X_I + \delta(d) \geq \mathrm{VaR}_T(d,\alpha)] \\
&= \mathrm{E}[X_I|X_I + \delta(d) \geq \mathrm{VaR}_T(d,\alpha)] + \delta(d) \\
&= \mathrm{E}[X_I|X_I \geq \mathrm{VaR}_T(d,\alpha) - \delta(d)] + \delta(d) \\
&= \mathrm{E}\left[X_I|X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right] + \delta(d) \\
&= \mathrm{CTE}_{X_I}(d,\alpha) + \delta(d)
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \mathrm{CTE}_{X_I}(d,\alpha) + \delta(d) \tag{3.3.4}$$

Dengan sedikit modifikasi pada definisi matematis $\mathrm{CTE}_{X_I}(d,\alpha)$, maka

$$\begin{aligned}
\mathrm{CTE}_{X_I}(d,\alpha) &= \mathrm{E}\left[X_I|X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) + X_I - \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)|X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right] \\
&= \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) + \mathrm{E}\left[X_I - \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)|X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right] \\
&= \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) + \frac{\int_{\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty}\left(x - \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right) f_{X_I}(x)dx}{\Pr\left\{X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right\}} \\
&= \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) \\
&\quad + \frac{\int_{\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty}\left(x - \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right) d(F_X(x) + C)}{\Pr\left\{X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right\}}
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) + \frac{\left(x - \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right)\left((F_X(x)+C)\right)\Big|_{\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty} - \int_{\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty}\left((F_X(x)+C)\right)dx}{\Pr\{X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\}}$$

di mana C adalah suatu konstanta. Nilai konstanta C yang memenuhi agar nilai $\mathrm{E}\left[X_I - \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) | X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right]$ ada adalah $C = -1$, sehingga

$$\mathrm{CTE}_{X_I}(d,\alpha) = \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) + \frac{\int_{\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty} S_{X_I}(x)dx}{\Pr\{X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\}} \qquad (3.3.5)$$

Bagian pecahan pada persamaan (3.3.5) akan disederhanakan. Dari Subbab 3.2 diperoleh bahwa

$$\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) = \begin{cases} d, & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha), & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

Dengan mengingat kembali bahwa

$$S_{X_I}(x) = \begin{cases} S_X(x), & 0 \leq x < d \\ 0, & x \geq d \end{cases},$$

maka pembilang dari bagian pecahan pada persamaan (3.3.5) dapat ditulis menjadi

$$\int_{\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty} S_{X_I}(x)\,dx = \int_{\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)}^{d} S_X(x)dx$$

$$= \begin{cases} \int_d^d S_X(x)dx, & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x)dx, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x)dx, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

dan penyebut dari bagian pecahan pada persamaan (3.3.5) dapat ditulis menjadi

$$\Pr\{X_I \geq \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\} = \Pr\{X_I = \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\} + \Pr\{X_I > \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\}$$

$$= \Pr\left\{X_I = \mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right\} + S_{X_I}\left(\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha)\right)$$

$$= \begin{cases} \Pr\{X_I = d\} + S_{X_I}(d), & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ \Pr\{X_I = S_X^{-1}(\alpha)\} + S_{X_I}(S_X^{-1}(\alpha)), & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Pr\{X_I = d\} + 0, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ \Pr\{X_I = S_X^{-1}(\alpha)\} + \Pr\{X_I > S_X^{-1}(\alpha)\}, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Pr\{X_I = d\}, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ \Pr\{X_I \ge S_X^{-1}(\alpha)\}, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Pr\{X > d\}, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ \Pr\{X \ge S_X^{-1}(\alpha)\}, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Pr\{X > d\}, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ \Pr\{X = S_X^{-1}(\alpha)\} + \Pr\{X > S_X^{-1}(\alpha)\}, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Pr\{X > d\}, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ 0 + \Pr\{X > S_X^{-1}(\alpha)\}, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Pr\{X > d\}, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X(S_X^{-1}(\alpha)) = \alpha, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

Oleh karena itu, persamaan (3.3.5) dapat ditulis menjadi

$$\mathrm{CTE}_{X_I}(d,\alpha) = \begin{cases} d + \dfrac{0}{\Pr\{X > d\}}, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \dfrac{\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx}{\alpha}, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} d, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\,, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \qquad (3.3.6)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.3.6) ke persamaan (3.3.4) diperoleh

$$\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \delta(d) + \begin{cases} d + \dfrac{0}{\Pr\{X > d\}}, & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \dfrac{\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx}{\alpha}, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\,, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

Dari hasil pembahasan di atas, diperoleh proposisi berikut.

Proposisi 3.3.1

Untuk setiap $d > 0$ dan $0 < \alpha < S_X(0)$,

$$\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\,, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \tag{3.3.7}$$

Sama halnya dengan $\mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$, jika diberikan suatu $d > 0$, $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ adalah sama nilainya untuk semua $\alpha \in (0, S_X(d)]$, yaitu $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = d + \delta(d)$. Yang menarik untuk diperhatikan adalah bahwa untuk $0 < d \le S_X^{-1}(\alpha)$, $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$, sedangkan untuk $d > S_X^{-1}(\alpha)$, $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) > \mathrm{VaR}_T(d,\alpha)$.

Berikut adalah teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup untuk keberadaan retensi optimal pada optimisasi CTE: $\mathrm{CTE}_T(\tilde{d},\alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)\}$. Didefinisikan $\rho^* = \frac{1}{1+\rho}$, di mana $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*, yang akan memainkan peran penting dalam mencari solusi permasalahan optimisasi CTE.

Teorema 3.3.1

1. Retensi optimal $\tilde{d} > 0$ ada jika dan hanya jika

$$\alpha \le \rho^* < S_X(0) \tag{3.3.8}$$

   berlaku; $\rho^* = \frac{1}{1+\rho}$, di mana $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*.

2. Jika retensi optimal $\tilde{d} > 0$ ada, maka nilainya diberikan oleh

$$\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*) \text{ jika } \alpha < \rho^* \tag{3.3.9}$$

   dan

$$\tilde{d} \geq S_X^{-1}(\rho^*) \text{ jika } \alpha = \rho^*. \qquad (3.3.10)$$

Bukti

1. Akan dibuktikan bahwa jika $\alpha \leq \rho^* < S_X(0)$ berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ ada.

   Terlebih dahulu, akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi kontinu di $d \in (0,\infty)$. Berdasarkan persamaan (3.3.7), di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$,
   $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = d + \delta(d)$.

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d + \delta(d)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(d + (1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)$$

$$= 1 - (1+\rho)S_X(d)$$

   Nilai ini ada untuk setiap $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$. Jadi, fungsi $d + \delta(d)$ kontinu di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$.

   Di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$, $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x)dx$.

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x)dx\right)$$

$$= -(1+\rho)S_X(d) + \frac{1}{\alpha}S_X(d)$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d)$$

   Nilai ini ada untuk setiap $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$.

   Jadi, fungsi $S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x)dx$ kontinu di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$.

   Sementara itu,

   a. $\lim_{d \to S_X^{-1^+}(\alpha)} \mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$

$$= \lim_{d \to S_X^{-1^+}(\alpha)} \left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x)dx\right)$$

$$= S_X^{-1}(\alpha) + \delta\big(S_X^{-1}(\alpha)\big)$$

   b. $\lim_{d \to S_X^{-1^-}(\alpha)} \mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \lim_{d \to S_X^{-1^-}(\alpha)}(d + \delta(d))$

$$= S_X^{-1}(\alpha) + \delta\big(S_X^{-1}(\alpha)\big)$$

c. $\mathrm{CTE}_T(S_X^{-1}(\alpha), \alpha) = S_X^{-1}(\alpha) + \delta\big(S_X^{-1}(\alpha)\big)$

Jadi, $\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)$ kontinu di $d = S_X^{-1}(\alpha)$.
Dengan demikian, terbukti bahwa $\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)$ adalah fungsi kontinu di $d \in (0, \infty)$.

Sekarang, akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)$ di $d \in (0, \infty)$.

Pertama, akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$.

Turunan dari $\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$ adalah

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{CTE}_T(d, \alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d + \delta(d)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(d + (1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)$$

$$= 1 - (1+\rho)S_X(d)$$

Jika $\rho^* < S_X(0)$, maka $S_X^{-1}(\rho^*) > 0$. Misalkan $d_0 = S_X^{-1}(\rho^*)$. Akan ditentukan di mana fungsi $d + \delta(d)$ turun.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d + \delta(d)\big) < 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - (1+\rho)S_X(d) < 0$$
$$\Leftrightarrow S_X(d) > \frac{1}{1+\rho}$$
$\Leftrightarrow S_X(d) > \rho^*; \rho^* = \frac{1}{1+\rho}$ di mana $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*
$$\Leftrightarrow d < S_X^{-1}(\rho^*)$$
$$\Leftrightarrow d < d_0$$

sehingga diperoleh untuk_$d < d_0$, fungsi $d + \delta(d)$ adalah fungsi turun sebab $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d + \delta(d)\big) < 0$.

Sekarang akan ditentukan di mana fungsi $d + \delta(d)$ naik.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d + \delta(d)\big) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-(1+\rho)S_X(d)>0$$

$$\Leftrightarrow S_X(d)<\frac{1}{1+\rho}$$

$$\Leftrightarrow S_X(d)<\rho^*$$

$$\Leftrightarrow d>S_X^{-1}(\rho^*)$$

$$\Leftrightarrow d>d_0$$

sehingga diperoleh untuk $d>d_0$, fungsi $d+\delta(d)$ adalah fungsi naik sebab $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d+\delta(d)\big)>0$.

Di $d=d_0=S_X^{-1}(\rho^*)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d+\delta(d)\big)=1-(1+\rho)S_X\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)=1-(1+\rho)\rho^*$$

$$=1-(1+\rho)\frac{1}{1+\rho}=0$$

Jika $\alpha<\rho^*$, maka $S_X^{-1}(\rho^*)<S_X^{-1}(\alpha)$ atau $d_0<S_X^{-1}(\alpha)$ sehingga pada kondisi ini fungsi $d+\delta(d)$ turun di $d\in(0,d_0)$ dan naik di $d\in\big(d_0,S_X^{-1}(\alpha)\big)$.

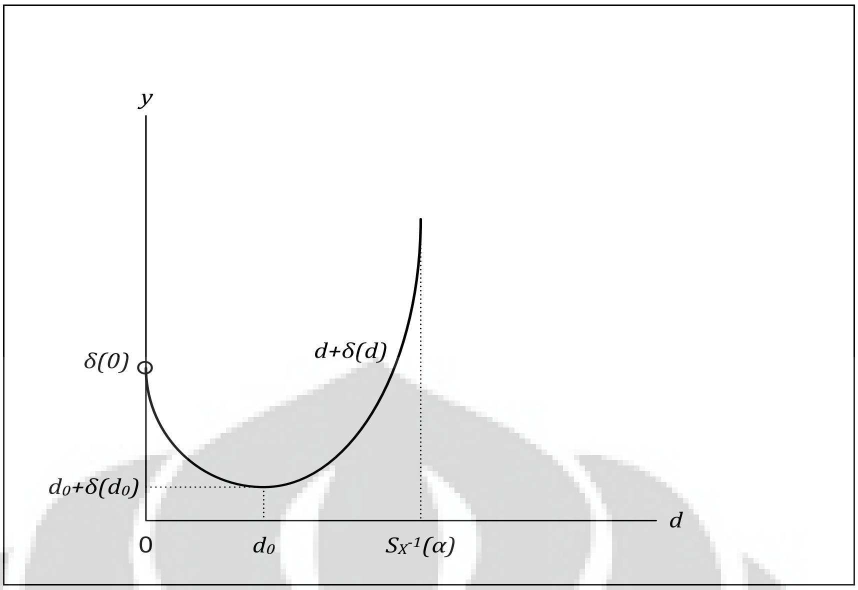
Jika $\alpha=\rho^*$, maka $S_X^{-1}(\rho^*)=S_X^{-1}(\alpha)$ sehingga pada kondisi ini fungsi $d+\delta(d)$ turun di $d\in(0,S_X^{-1}(\alpha)]$.

Turunan kedua dari fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d\in\big(0,\ S_X^{-1}(\alpha)\big)$ adalah

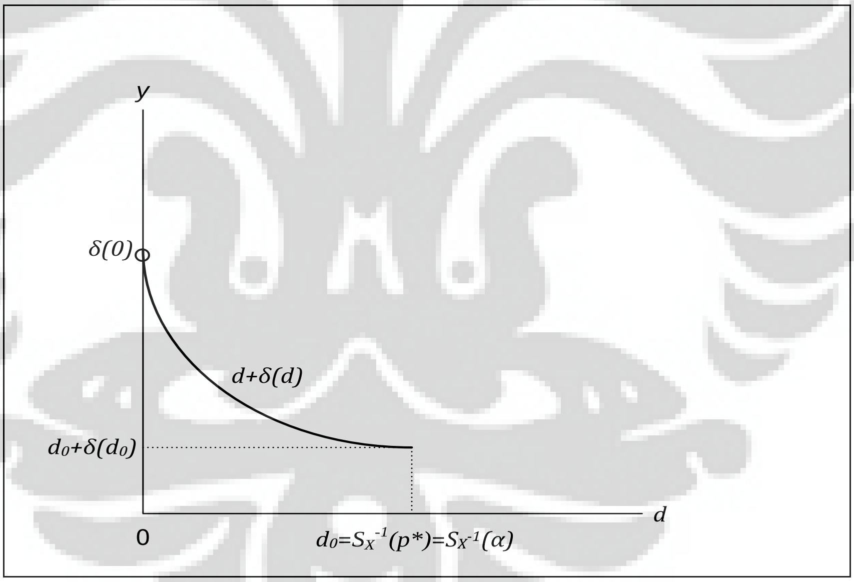
$$\frac{\partial^2}{\partial d^2}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}d^2}\big(d+\delta(d)\big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(1-(1+\rho)S_X(d)\big)$$

$$=(1+\rho)f_X(d)>0$$

Maka fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ cekung ke atas pada interval $\big(0,\ S_X^{-1}(\alpha)\big)$.



Gambar 3.11. Grafik Fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$ jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$



Gambar 3.12. Grafik Fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$ jika $\alpha = \rho^* < S_X(0)$

Selanjutnya, akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$.

Untuk $d > S_X^{-1}(\alpha)$,

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\right)$$

$$= -(1+\rho)S_X(d) + \frac{1}{\alpha}S_X(d)$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d)$$

dan

$$\frac{\partial^2}{\partial d^2}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \frac{\partial}{\partial d}\left(\left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d)\right)$$

$$= \left((1+\rho) - \frac{1}{\alpha}\right)f_X(d)$$

Jika $\rho^* < S_X(0)$, maka $S_X^{-1}(\rho^*) > 0$.

Jika $\alpha < \rho^*$, maka $S_X^{-1}(\rho^*) < S_X^{-1}(\alpha)$ dan dari penjabaran berikut

$$\alpha < \rho^*$$

$$\Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{1+\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > (1+\rho)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - (1+\rho) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d) > 0 \qquad \text{(sebab } S_X(d) > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\right) > 0$$

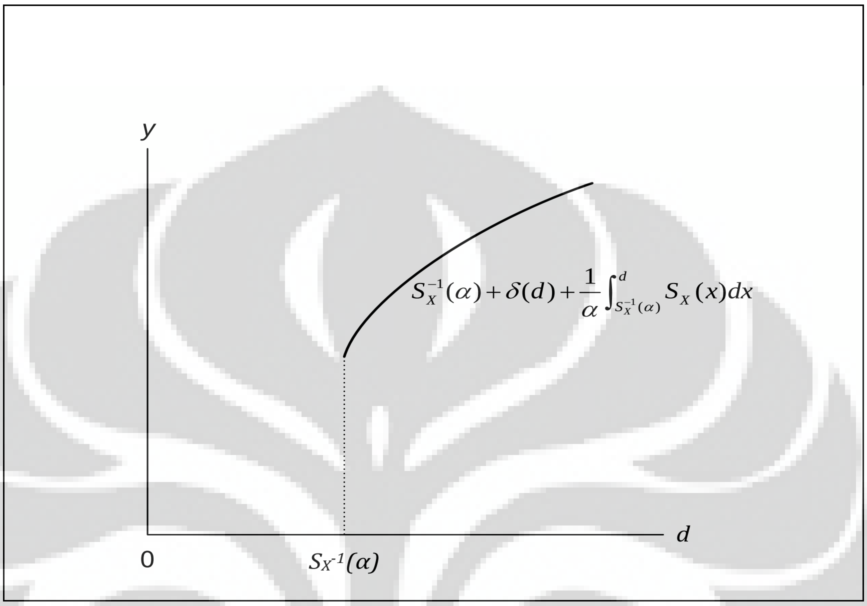
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial d}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) > 0$$

dan

$$\frac{\partial^2}{\partial d^2}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \frac{\partial}{\partial d}\left(\left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d)\right)$$

$$= \left((1+\rho) - \frac{1}{\alpha}\right) f_X(d) < 0$$

diperoleh bahwa fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ naik dan cekung ke bawah pada interval $(S_X^{-1}(\alpha), \infty)$.



Gambar 3.13. Grafik Fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$ jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$

Jika $\alpha = \rho^*$, maka $S_X^{-1}(\rho^*) = S_X^{-1}(\alpha)$ dan dari penjabaran berikut

$$\alpha = \rho^*$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{1+\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = (1+\rho)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - (1+\rho) = 0$$

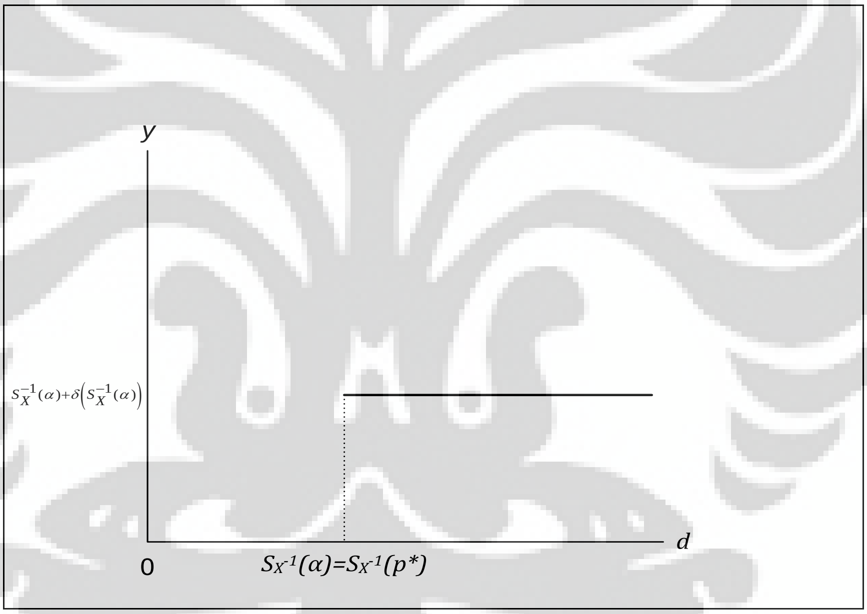
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right) S_X(d) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial d}\text{CTE}_T(d,\alpha) = 0$$

diperoleh bahwa fungsi $\text{CTE}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi konstan di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$ yaitu

$$\begin{aligned}
\text{CTE}_T(d, \alpha = \rho^*) &= S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \tfrac{1}{\alpha}\textstyle\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx \\
&= S_X^{-1}(\alpha) + (1+\rho)\int_d^{\infty} S_X(x)dx + (1+\rho)\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx \\
&= S_X^{-1}(\alpha) + (1+\rho)\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx \\
&= S_X^{-1}(\alpha) + \delta\big(S_X^{-1}(\alpha)\big)
\end{aligned}$$

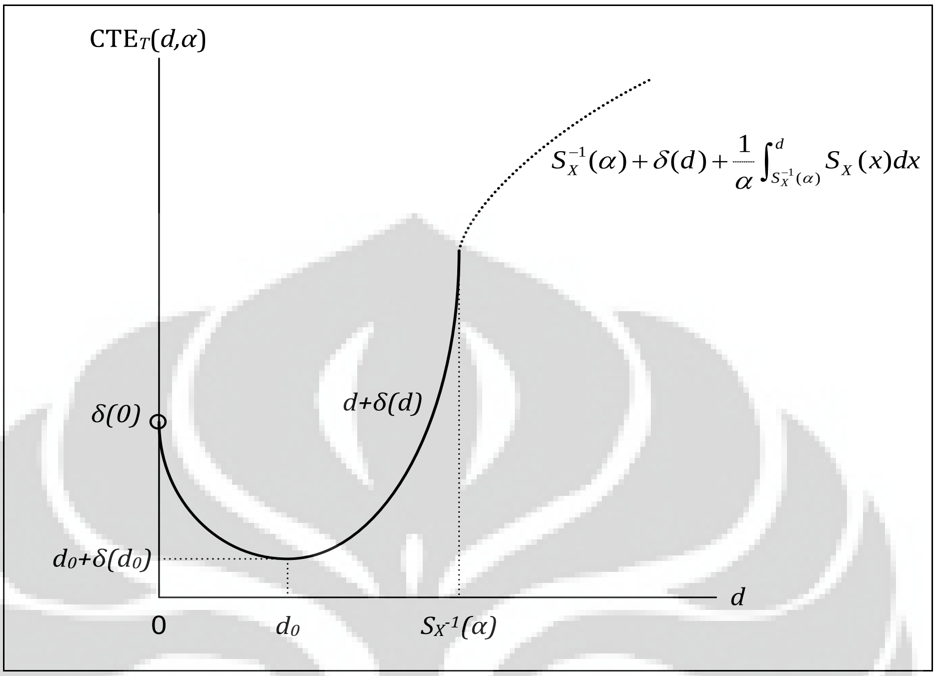


Gambar 3.14. Grafik Fungsi $\text{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$ jika $\alpha = \rho^* < S_X(0)$

Dengan demikian, dari pembahasan di atas diperoleh bahwa

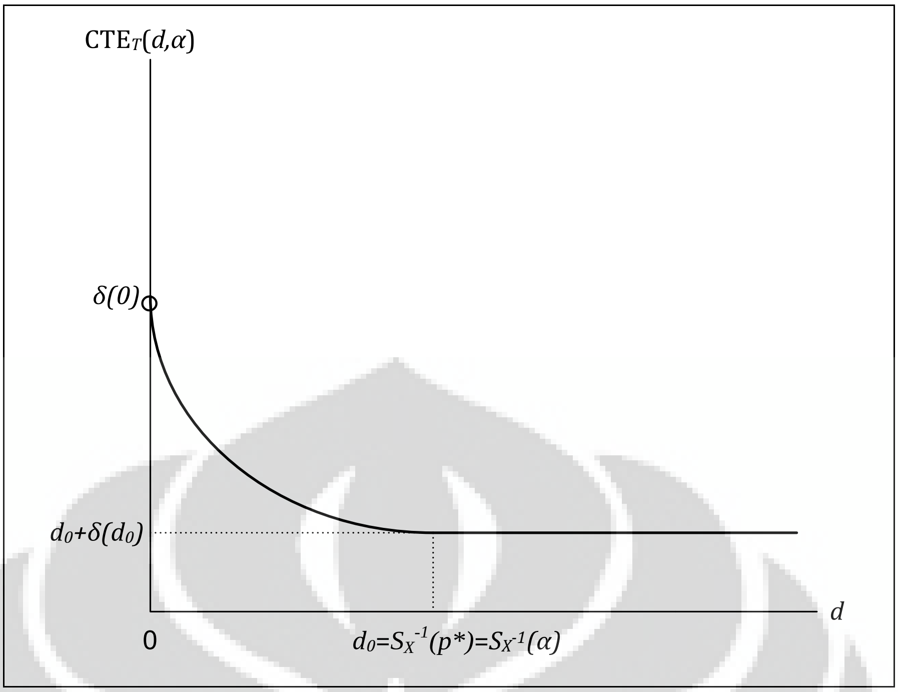
1. Jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ berlaku, maka $0 < S_X^{-1}(\rho^*) < S_X^{-1}(\alpha)$ sehingga fungsi $\text{CTE}_T(d,\alpha)$ turun di $d \in (0, d_0)$ dan naik di $d \in (d_0, \infty)$, di mana $d_0 = S_X^{-1}(\rho^*)$; nilai minimumnya dicapai di $d = d_0 = S_X^{-1}(\rho^*)$ dan nilai minimumnya adalah $d_0 + \delta(d_0) = S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\big(S_X^{-1}(\rho^*)\big)$. Oleh karena

itu, pada kasus ini $d_0 = S_X^{-1}(\rho^*)$ adalah retensi optimal $(\tilde{d})$ (Gambar 3.15).



Gambar 3.15. Grafik Fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ jika $\alpha < \rho^* < S_X(0)$

2. Jika $\alpha = \rho^* < S_X(0)$ berlaku, maka $0 < S_X^{-1}(\rho^*) = S_X^{-1}(\alpha)$ sehingga fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ turun di $d \in (0, d_0]$ dan konstan di $d \in (d_0, \infty)$, di mana $d_0 = S_X^{-1}(\rho^*) = S_X^{-1}(\alpha)$; nilai minimumnya dicapai di sebarang d yang memenuhi $d \geq d_0$ dan nilai minimumnya adalah $d_0 + \delta(d_0) = S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right) = S_X^{-1}(\alpha) + \delta\left(S_X^{-1}(\alpha)\right)$. Oleh karena itu, pada kasus ini retensi optimalnya $(\tilde{d})$ adalah sebarang d yang memenuhi $d \geq d_0 = S_X^{-1}(\rho^*) = S_X^{-1}(\alpha)$ (Gambar 3.16).



Gambar 3.16. Grafik Fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ jika $\alpha = \rho^* < S_X(0)$

Jadi, terbukti bahwa jika $\alpha \leq \rho^* < S_X(0)$ berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ ada.

Sekarang akan dibuktikan bahwa jika retensi optimal $\tilde{d} > 0$ ada, maka $\alpha \leq \rho^* < S_X(0)$ berlaku.

Pernyataan di atas ekuivalen dengan
"jika $\alpha \leq \rho^* < S_X(0)$ tidak berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ tidak ada".

Pernyataan "$\alpha \leq \rho^* < S_X(0)$ tidak berlaku" ekuivalen dengan pernyataan
"$\rho^* < \alpha < S_X(0)$ berlaku
atau $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$ berlaku
atau $S_X(0) \leq \alpha \leq \rho^*$ berlaku
atau $\rho^* < S_X(0) \leq \alpha$ berlaku
atau $S_X(0) \leq \rho^* \leq \alpha$ berlaku".

Jadi, membuktikan kontraposisinya sama saja dengan membuktikan pernyataan "jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$ berlaku
atau $\alpha < S_X(0) \leq \rho^*$ berlaku

atau $S_X(0) \leq \alpha \leq \rho^*$ berlaku
atau $\rho^* < S_X(0) \leq \alpha$ berlaku
atau $S_X(0) \leq \rho^* \leq \alpha$ berlaku,
maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ tidak ada".

Pertama, akan dibuktikan bahwa jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$ berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ tidak ada. Pembuktian diawali dengan memeriksa kemonotonan fungsi $\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)$ di $d \in (0, \infty)$.

Akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)$ di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$. Sebelumnya, perhatikan fungsi $d + \delta(d)$. Turunannya adalah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d + \delta(d)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(d + (1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx\right)$$

$$= 1 - (1+\rho)S_X(d)$$

$\rho^* < S_X(0)$ mengimplikasikan $S_X^{-1}(\rho^*) > 0$. Fungsi $d + \delta(d)$ adalah fungsi turun di $d \in \big(0, S_X^{-1}(\rho^*)\big)$, sebab dari

$$d < S_X^{-1}(\rho^*)$$

$\Leftrightarrow S_X(d) > \rho^*$; $\rho^* = \frac{1}{1+\rho}$ di mana $\rho > 0$ adalah *safety loading factor*

$$\Leftrightarrow S_X(d) > \frac{1}{1+\rho}$$

$$\Leftrightarrow 1 - (1+\rho)S_X(d) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d + \delta(d)\big) < 0$$

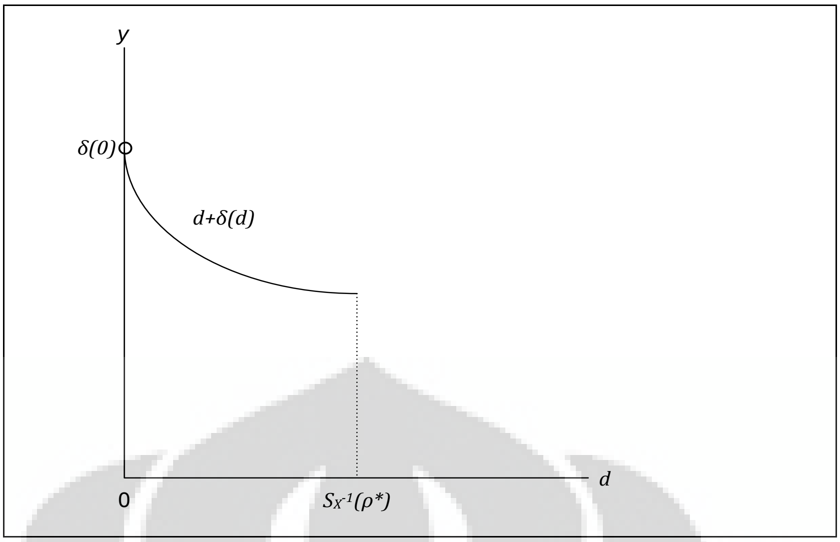
didapat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(d + \delta(d)\big) < 0$ untuk $d < S_X^{-1}(\rho^*)$.

Turunan kedua dari fungsi $d + \delta(d)$ adalah

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}d^2}\big(d + \delta(d)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\big(1 - (1+\rho)S_X(d)\big)$$

$$= (1+\rho)f_X(d) > 0$$

Gambar 3.17 menggambarkan hasil penjelasan fungsi $d + \delta(d)$ di atas.

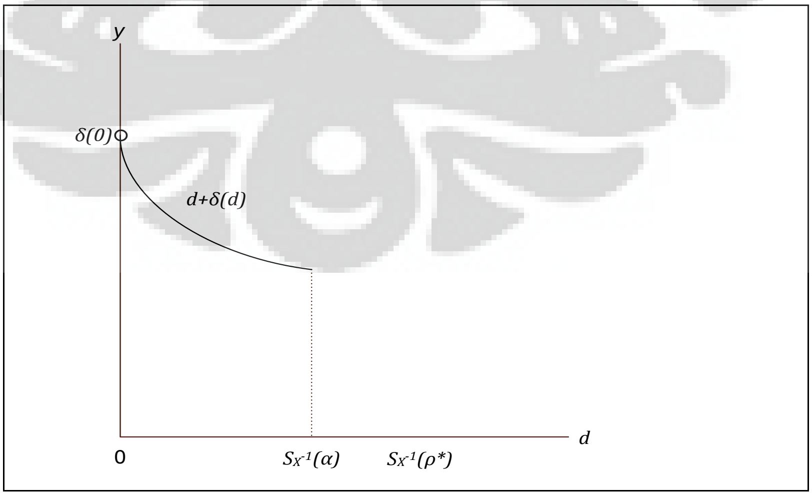


Gambar 3.17. Grafik Fungsi $d + \delta(d)$ di $d \in \left(0, S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$

Berdasarkan persamaan (3.3.7):

$$\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \begin{cases} d + \delta(d), & 0 < d \leq S_X^{-1}(\alpha) \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx, & d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

Di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$, $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = d + \delta(d)$. Jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$ berlaku, maka $0 < S_X^{-1}(\alpha) < S_X^{-1}(\rho^*)$. Akibatnya, pada kondisi ini $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi turun di $d \in (0, S_X^{-1}(\alpha)]$ (Gambar 3.18).



Gambar 3.18. Grafik Fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d \in \left(0, S_X^{-1}(\alpha)\right)$ jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$

Selanjutnya, akan diperiksa kemonotonan fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$.

Untuk $d > S_X^{-1}(\alpha)$,

$$\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\right)$$

$$= -(1+\rho)S_X(d) + \frac{1}{\alpha}S_X(d)$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d)$$

dan

$$\frac{\partial^2}{\partial d^2}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial d^2}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial d}\left(\left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d)\right)$$

$$= \left((1+\rho) - \frac{1}{\alpha}\right)f_X(d)$$

Jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$, maka $0 < S_X^{-1}(\alpha) < S_X^{-1}(\rho^*)$ dan dari penjabaran berikut

$$\rho^* < \alpha < S_X(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\rho} < \alpha < S_X(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(1+\rho)} < 1 < \frac{1}{\alpha}S_X(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < (1+\rho) < \frac{1}{\alpha}(1+\rho)S_X(0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right) < 0 < (1+\rho)\left(\frac{1}{\alpha}S_X(0) - 1\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d) < 0 \qquad \text{(sebab } S_X(d) > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)dx\right) < 0$$

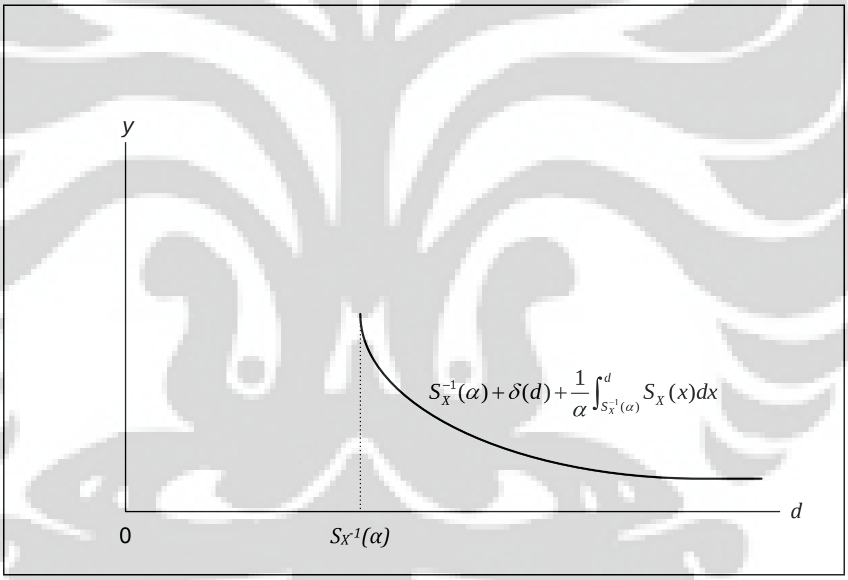
$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial d}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) < 0$$

dan

$$\frac{\partial^2}{\partial d^2}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \frac{\partial}{\partial d}\left(\left(\frac{1}{\alpha} - (1+\rho)\right)S_X(d)\right)$$

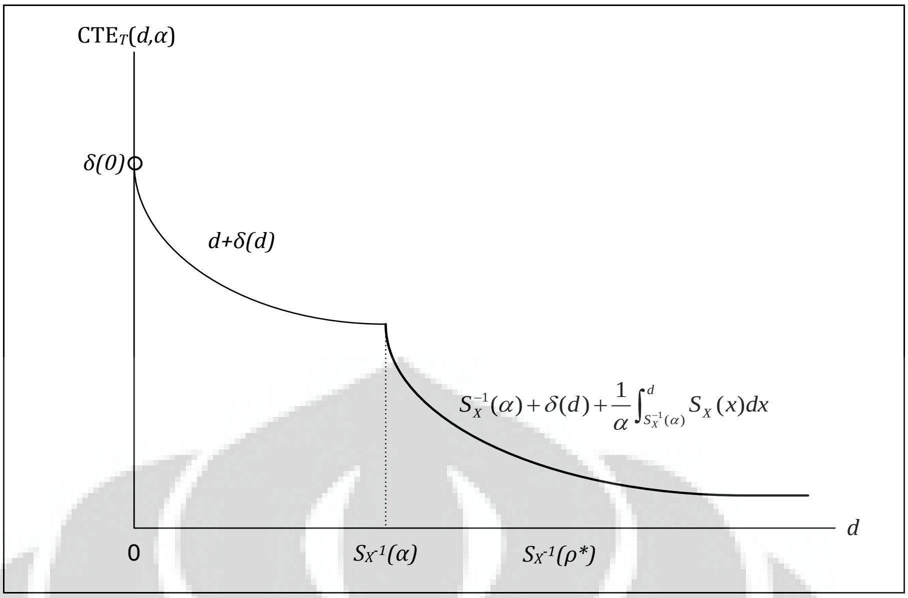
$$= \left((1+\rho) - \frac{1}{\alpha}\right)f_X(d) > 0$$

diperoleh bahwa fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ turun dan cekung ke atas pada interval $(S_X^{-1}(\alpha), \infty)$. (Gambar 3.19)



Gambar 3.19. Grafik Fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di $d \in (S_X^{-1}(\alpha), \infty)$ jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$

Dengan demikian, diperoleh bahwa $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi turun di $d \in (0,\infty)$. Dari Gambar 3.20 di bawah, terlihat bahwa $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ tidak memiliki nilai minimum sehingga retensi optimal $\tilde{d}$ tidak ada.



Gambar 3.20. Grafik Fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$

Terbukti bahwa jika $\rho^* < \alpha < S_X(0)$ berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ tidak ada.

Kedua, akan dibuktikan bahwa jika $\alpha < S_X(0) \le \rho^*$ berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ tidak ada.

$\alpha < S_X(0) \le \rho^*$ mengimplikasikan $S_X^{-1}(\rho^*) \le 0 < S_X^{-1}(\alpha)$. Akibatnya $\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*) \notin (0,\infty)$. Tidak ada nilai $\tilde{d} > 0$ sedemikian sehingga $\mathrm{CTE}_T(\tilde{d},\alpha)$ merupakan nilai minimum global dari $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$. Jadi, retensi optimalnya tidak ada. Terbukti bahwa jika $\alpha < S_X(0) \le \rho^*$ berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ tidak ada.

Ketiga, akan dibuktikan bahwa jika $S_X(0) \le \alpha \le \rho^*$ berlaku atau $\rho^* < S_X(0) \le \alpha$ berlaku atau $S_X(0) \le \rho^* \le \alpha$ berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ tidak ada.

Dari pembahasan di subbab 3.2 didapat bahwa jika $\alpha \ge S_X(0)$, maka $\mathrm{VaR}_{X_I}(d,\alpha) = 0$. Akibatnya berdasarkan persamaan (3.3.3) dan (3.3.4),

$$\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) = \mathrm{E}[X_I] + \delta(d) \qquad (3.3.11)$$

Definisi matematis X_I yaitu

$$X_I = \begin{cases} X, & X \le d \\ d, & X > d \end{cases}$$

di mana variabel random X memiliki fungsi distribusi kontinu satu-satu di $(0,\infty)$ dengan kemungkinan terjadi loncatan di $x = 0$. Maka ekspektasi dari X_I adalah

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_I] &= \int_0^d x f_X(x)dx + \int_d^\infty d f_X(x)dx \\
&= \int_0^d x d(F_X(x) + C) + d\int_d^\infty f_X(x)dx \\
&= x(F_X(x) + C)\Big|_0^d - \int_0^d (F_X(x) + C)dx + dS_X(d) \\
&= d(F_X(d) + C) - \int_0^d (F_X(x) + C)dx + dS_X(d) \\
&= d + dC - \int_0^d (F_X(x) + C)dx
\end{aligned}$$

di mana C adalah suatu konstanta.

Mensubstitusikan hasil di atas ke persamaan (3.3.11) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) &= d + dC - \int_0^d (F_X(x) + C)dx + \delta(d) \\
&= d + dC - \int_0^d (F_X(x) + C)dx + (1+\rho)\int_d^\infty S_X(x)dx
\end{aligned}$$

Turunan parsial terhadap d dari fungsi $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ di atas yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial d}\mathrm{CTE}_T(d,\alpha) &= 1 + C - F_X(d) - C - (1+\rho)S_X(d) \\
&= -\rho S_X(d) < 0
\end{aligned}$$

Maka, pada kondisi $\alpha \ge S_X(0)$ ini, $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ adalah fungsi turun di $d \in (0,\infty)$. Akibatnya, $\mathrm{CTE}_T(d,\alpha)$ tidak memiliki nilai minimum. Jadi, retensi optimalnya $(\tilde{d})$ tidak ada. Terbukti bahwa jika $S_X(0) \le \alpha \le \rho^*$ berlaku atau $\rho^* < S_X(0) \leq \alpha$ berlaku atau $S_X(0) \leq \rho^* \leq \alpha$ berlaku, maka retensi optimal $\tilde{d} > 0$ tidak ada.

Dengan demikian, kontraposisinya terbukti.
Jadi, terbukti bahwa retensi optimal $\tilde{d} > 0$ ada jika dan hanya jika $\alpha \leq \rho^* < S_X(0)$ berlaku.

2. Jika retensi optimal $\tilde{d} > 0$ ada, maka dari pembahasan teorema 3.3.1 poin 1 di atas, diperoleh retensi optimalnya adalah
   a. $\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*)$ jika $\alpha < \rho^*$
   b. $\tilde{d} \geq S_X^{-1}(\rho^*)$ jika $\alpha = \rho^*$

∎

Syarat optimalitas untuk optimisasi berdasarkan CTE kurang terbatas bila dibandingkan dengan syarat optimalitas untuk optimisasi VaR. Akan tetapi, adalah menarik untuk diperhatikan bahwa jika solusi optimalnya ada, maka kedua kriteria optimisasi tersebut menghasilkan nilai retensi optimal yang sama. Hal ini memberikan suatu keuntungan bagi pihak perusahaan asuransi untuk menggunakan ukuran CTE ketimbang VaR dalam menentukan retensi optimal. Perlu diperhatikan juga bahwa ketika perusahaan reasuransi mulai terlalu banyak menaikkan besar *loading factor* ρ, perusahaan asuransi akan merasa lebih mahal untuk mengalihkan risikonya kepada perusahaan reasuransi. Akibatnya, perusahaan asuransi dipaksa untuk menanggung lebih banyak risiko dengan menaiknya tingkat retensi. Bila diberikan $\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*)$, maka nilai limitnya ketika $\rho \to \infty$ adalah

$$\lim_{\rho\to\infty} \tilde{d} = \lim_{\rho\to\infty} S_X^{-1}(\rho^*) = \lim_{\rho\to\infty} S_X^{-1}\left(\frac{1}{1+\rho}\right) = \infty$$

sehingga perusahaan asuransi tidak akan mereasuransikan risikonya kepada perusahaan reasuransi.

Dua contoh berikut mengilustrasikan bagaimana menentukan retensi optimal $(\tilde{d})$ berdasarkan optimisasi CTE : $\mathrm{CTE}_T(\tilde{d}, \alpha) = \min_{d>0}\{\mathrm{CTE}_T(d, \alpha)\}$.

Contoh 3.3.1

Seperti pada Contoh 3.2.1, misalkan X adalah suatu variabel random dari distribusi eksponensial dengan parameter $\theta = 1.000$. Diasumsikan $\alpha = 0{,}1$ dan $\rho = 2{,}7$. Akan diperiksa apakah retensi optimalnya $\left(\tilde{d}\right)$ ada dan jika ada akan dicari berapa nilainya.

Pdf dari X yaitu

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) = 0{,}001e^{-0{,}001x}, \qquad x \geq 0.$$

Fungsi survivalnya dinyatakan oleh

$$S_X(x) = \int_x^\infty f_X(t)dt = \int_x^\infty 0{,}001e^{-0{,}001t}dt \; = e^{-0{,}001x},\; x \geq 0 \qquad (3.3.12)$$

Fungsi survival (3.3.12) adalah fungsi kontinu satu-satu di $x \in [0, \infty)$ sehingga dapat dicari inversnya. Fungsi inversnya adalah

$$S_X^{-1}(y) = -1.000\ln y, \qquad 0 < y < 1.$$

Dari persamaan (3.3.12) didapat $S_X(0) = 1$. Dengan $\alpha = 0{,}1$, $\rho = 2{,}7$, dan $S_X(0) = 1$, maka kondisi $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ terpenuhi, di mana

$$\rho^* = \frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{3{,}7} = 0{,}27.$$

Berdasarkan Teorema 3.3.1, retensi optimal $\left(\tilde{d}\right)$ ada dan karena $\alpha < \rho^*$, nilainya adalah

$$\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*) = S_X^{-1}\left(\frac{1}{3{,}7}\right) = -1.000\ln\frac{1}{3{,}7} = 1.308{,}33.$$

Pada contoh ini,

$$S_X^{-1}(\alpha) - \left(S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)\right)$$

$$= S_X^{-1}(\alpha) - \left(S_X^{-1}(\rho^*) + (1+\rho)\int_{S_X^{-1}(p^*)}^{\infty} S_X(x)dx\right)$$

$$= S_X^{-1}(0{,}1) - \left(S_X^{-1}\left(\frac{1}{3{,}7}\right) + (1+2{,}7)\int_{S_X^{-1}\left(\frac{1}{3{,}7}\right)}^{\infty} S_X(x)dx\right)$$

$$= -5{,}75 < 0$$

Hal ini mengimplikasikan $S_X^{-1}(\alpha) < \left(S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)\right)$. Akibatnya kondisi (3.2.7): $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ tidak terpenuhi. Berdasarkan Teorema 3.2.1, retensi optimalnya berdasarkan optimisasi VaR (d^*) tidak ada.

Contoh 3.3.2

Seperti pada Contoh 3.2.2, misalkan X adalah suatu variabel random dari distribusi Pareto dengan fungsi survivalnya dinyatakan oleh

$$S_X(x) = \left(\frac{2.000}{x+2.000}\right)^3, \qquad x \geq 0. \tag{3.3.13}$$

Diasumsikan $\alpha = 0{,}1$ dan $\rho = 2{,}7$. Akan diperiksa apakah retensi optimalnya $(\tilde{d})$ ada dan jika ada akan dicari berapa nilainya.

Fungsi survival (3.3.13) adalah fungsi kontinu satu-satu di $x \in [0, \infty)$ sehingga dapat dicari inversnya. Fungsi inversnya adalah

$$S_X^{-1}(y) = 2.000y^{-1/3} - 2.000, \qquad 0 < y < 1.$$

Dari persamaan (3.3.13) didapat $S_X(0) = 1$. Dengan $\alpha = 0{,}1$, $\rho = 2{,}7$, dan $S_X(0) = 1$, maka pada contoh ini kondisi $\alpha < \rho^* < S_X(0)$ terpenuhi, di mana

$$\rho^* = \frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{3{,}7} = 0{,}27.$$

Berdasarkan Teorema 3.3.1, retensi optimal $(\tilde{d})$ ada dan karena $\alpha < \rho^*$, nilainya adalah

$$\tilde{d} = S_X^{-1}(\rho^*) = S_X^{-1}\left(\frac{1}{3{,}7}\right) = 2.000\left(\frac{1}{3{,}7}\right)^{-1/3} - 2.000 = 1.093{,}36.$$

Pada contoh ini pun, retensi optimalnya berdasarkan optimisasi VaR (d^*) tidak ada sebab kondisi (3.2.7): $S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\rho^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\rho^*)\right)$ tidak terpenuhi.

BAB 4
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Skripsi ini membahas pertanyaan penting mengenai penentuan retensi optimal untuk suatu reasuransi *stop-loss.* Tiga kriteria penentuan retensi optimal yang dibahas di sini adalah retensi optimal untuk suatu modal tertentu (*fixed*), retensi optimal berdasarkan optimisasi VaR, dan retensi optimal berdasarkan optimisasi CTE. Retensi optimal dari ketiga kriteria tersebut adalah eksplisit dan dapat dengan mudah dihitung.

Retensi optimal untuk suatu modal tertentu didasarkan pada besar modal awal yang *fixed*. Retensi optimal diperoleh dengan cara mencari nilai retensi (d) yang memberikan probabilitas biaya total (T) lebih kecil dari besar modal awal bernilai maksimum.

Relative safety loading (ρ) dan distribusi *loss* perusahaan asuransi adalah dua faktor penting dalam penentuan retensi optimal berdasarkan optimisasi VaR dan CTE. Jika solusi dari kedua optimisasi VaR dan CTE ada, maka kedua optimisasi tersebut menghasilkan nilai retensi optimal yang sama. Juga diperoleh bahwa optimisasi CTE memiliki kelebihan dalam hal syarat optimalitas yang kurang terbatas dibandingkan dengan syarat optimalitas pada optimisasi VaR.

4.2 Saran

Saran yang diberikan untuk pengembangan skripsi ini adalah

1. Hasil yang diperoleh dari ketiga kriteria penentuan retensi optimal di atas dapat diperluas dengan mengaplikasikannya ke dalam model-model risiko, yakni model risiko individual dan model risiko kolektif.
2. Retensi optimal juga dapat dicari dengan kriteria lainnya, seperti optimisasi probabilitas ruin dari perusahaan asuransi atau optimisasi utilitas dari perusahaan asuransi.

DAFTAR PUSTAKA

Acerbi, C., dan Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance,* 26, 1487-1503.

Bartle, R. G., dan Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis*, (3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Bowers, N. J., et al. (1997). *Actuarial Mathematics*, (2nd ed.). Illinois: The Society of Actuaries.

Cai, J., dan Tan, K. S. (2007). Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *Astin Bulletin*, 37 (1), 93-112.

Hogg, R. V., dan Craig, A. T. (1995). *Introduction to Mathematical Statistic*, (5th ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Kaas, R., et al. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Klugman, S. A., Panjer, H. H., dan Wilmot, G. E. (2008). *Loss Models: From Data to Decisions*, (3rd ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.

McNeil, A. J., Frey, R., dan Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.

Salim, A. (1998). *Asuransi dan Manajemen Risiko*. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.

Wirch, J. (1999). Raising Value at Risk. *North American Actuarial Journal*, 3, 106-115.