UNIVERSITAS INDONESIA

PENURUNAN FUNGSI PEMBANGKIT DARI POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS PERTAMA DAN KEDUA BERDASARKAN KUANTITAS KOMPLEKS

SKRIPSI

MEI INDAH SUSANTI
0806325623

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PENURUNAN FUNGSI PEMBANGKIT DARI POLINOMIAL CHEBYSHEV JENIS PERTAMA DAN KEDUA BERDASARKAN KUANTITAS KOMPLEKS

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

MEI INDAH SUSANTI
0806325623

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Mei Indah Susanti
NPM	: 0806325623
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 26 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh		
Nama	:	Mei Indah Susanti
NPM	:	0806325623
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Penurunan Fungsi Pembangkit dari Polinomial Chebyshev Jenis Pertama dan Kedua Berdasarkan Kuantitas Kompleks

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dra. Suarsih Utama, M.Si	( )
Penguji I	:	Drs. Frederik M.P., M.Kom	( )
Penguji II	:	Dr. Hengki Tasman	( )
Penguji III	:	Helen Burhan, S.Si, M.Si	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	26 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah swt. atas segala limpahan rahmat dan karunia yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih penulis haturkan kepada:

1. Dra. Suarsih Utama, M.Si selaku pembimbing skripsi yang telah banyak meluangkan waktu dan pikiran serta memberikan masukan-masukan untuk penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Dr.Yudi Satria, M.T selaku ketua departemen, Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku sekretaris departemen, dan Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah banyak membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.
3. Seluruh dosen Matematika UI atas segala ilmu pengetahuan dan dukungan yang telah diberikan selama penulis kuliah.
4. Dra. Netty Sunandi, M.Si selaku pembimbing akademik yang telah memberikan saran selama penulis menjalani kuliah.
5. Seluruh karyawan (Mba Santi, Pak Saliman, Mba Rusmi, Pak Salman, Pak Wawan, Mbak Via) di departemen Matematika UI atas bantuan yang telah diberikan selama penulis kuliah sampai penulis menyelesaikan tugas akhir.
6. Ibu dan adik-adik (Noviana & Novianti, Dimas) tercinta yang menjadi motivasi penulis untuk cepat menyelesaikan tugas akhir ini dan selalu memberikan doa, nasihat, semangat, dan dukungan, serta almarhum ayah tersayang.
7. Seluruh keluarga besar penulis yang juga telah memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.
8. Teman-teman seperjuangan peminatan murni (Hendry dan Maimun) atas kerjasama dan dukungannya.
9. Teman-teman seperjuangan skripsi: Murni (Ines, Hendry, Citra), Aktuaria

(Eka dan Ica), OR (Ade, AW, Uci L), Komputasi (Maul, Nisah, Dila, Hindun, Umbu, Andi, Adi, Bowo, Kak Ayat , Kak Fauzan, Kak Hanif), OR-Komputasi (Dian, Risya, Tuti, Kiki, Nita), Murni-OR (Fani, Arif, Wulan), Statistika (Cindy, Numa, Ega, Dea, Sita, Lutfah, Janu, Kak Putri, Kak Anis) dan teman-teman yang masih berjuang untuk menyelesaikan skripsi, terimakasih atas segala dukungan dan semangat yang diberikan.

10. Seluruh teman-teman angkatan 2008 : Yulial, Siwi, Uci D, Resti, Agnes, Olin, Fani, Citra, Nita, Ega, Emi, Eka, May, Nisah, Ifah, Maul,Wulan, Ade, Sita, Risya, Dila, Kiki, Tuti, Numa, Cindy, Adi, Arif, Hindun, Andi, Deni, Asri, Dewe, Dian, Janu, Nora, Uci L, Vika, Dea, Lutfah, Nadia,Yulian, Bowo, Umbu, Arman, AW, Arkis, Maimun, Hendry, Danis, Puput, Dede terimakasih atas segala kebersamaannya selama masa kuliah sampai saat ini. *We Will Still be Friends Forever*.
11. Semua teman-teman di Matematika UI, kakak-kakak senior angkatan 2004 (Kak Ajat) yang telah memberikan pencerahan untuk skripsi ini, 2005, 2006 (Kak Rita sebagai kakak asuh yang selalu meminjamkan buku kuliah, Kak Stephany, Kak Oza, dkk) dan 2007 (Stefi, Wiwi, Kak Arif, Kak Adit, Kak Syaf, Kak Hikmah, dkk) dan adik-adik junior angkatan 2009 (Azki, Eja, Sofi, Soleman, dkk) , 2010 (Aid, Yuza, Choliq, dkk) dan 2011, terima kasih atas semangat dan dukungannya.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Penulis sadar bahwa tiada kesempurnaan di dalam penulisan skripsi ini karena penulis hanyalah manusia biasa.Untuk itu, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Mei Indah Susanti
NPM	: 0806325623
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Penurunan Fungsi Pembangkit dari Polinomial Chebyshev Jenis Pertama dan Kedua Berdasarkan Kuantitas Kompleks.

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 26 Juni 2012

Yang menyatakan

(Mei Indah Susanti)

ABSTRAK

Nama : Mei Indah Susanti
Program Studi : Matematika
Judul : Penurunan Fungsi Pembangkit dari Polinomial Chebyshev Jenis Pertama dan Kedua Berdasarkan Kuantitas Kompleks

Polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dapat direpresentasikan di dalam kuantitas kompleks yang didefinisikan oleh formula Moivre. Polinomial Chebyshev jenis pertama merupakan bagian real dari kuantitas kompleks sedangkan polinomial Chebyshev jenis kedua merupakan bagian imajiner dari kuantitas kompleks. Karena sifat keterhubungan polinomial Chebyshev di dalam kuantitas kompleks, fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dapat diturunkan berdasarkan bagian real dan imajiner dari fungsi pembangkit kuantitas kompleks. Dalam skripsi ini fungsi pembangkit yang akan diturunkan adalah fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua, hasil kali dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua, serta fungsi pembangkit dari generalisasi polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Fungsi pembangkit yang akan diturunkan adalah fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial.

Kata Kunci : Fungsi pembangkit, polinomial Chebyshev, kuantitas kompleks
xi+72 halaman ; -
Daftar Pustaka : 7 (1989-2010)

ABSTRACT

Name : Mei Indah Susanti
Major : Mathematics
Title : Generating Functions of Chebyshev Polynomials of the First and Second Kind Derived from a Complex Quantity

Chebyshev polynomials of the first and the second kind can be represented by a complex quantity that is defined as the Moivre formula. Chebyshev Polynomial of the first kind is related to the real part of the complex quantity whereas Chebyshev polynomial of the second kind is related to its imaginary part. In as much the existence of the relation, the generating functions of Chebyshev polynomials of the first and the second kind can be derived from the real and the imaginary part of the generating functions of the complex quantity. The generating functions derived in this mini thesis are the generating functions of Chebyshev polynomials of the first and the second kind, product of Chebyshev polynomials and the generalization of Chebyshev polynomials.The generating functions which will be derived are ordinary and exponential generating functions.

Keywords : Generating function, Chebyshev polynomials, complex quantity
xi+72 pages ; -
Bibliography : 7 (1989-2010)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN iv
KATA PENGANTAR v
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH vii
ABSTRAK viii
DAFTAR ISI x

1. PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah dan Ruang Lingkup 2
1.3 Metode Penelitian 3
1.4 Tujuan Penelitian 3

2. LANDASAN TEORI **4**
2.1 Definisi Fungsi Pembangkit 4
2.2 Definisi Polinomial Chebyshev 5
2.3 Persamaan-Persamaan pada Kuantitas Kompleks 7
2.4 Persamaan-Persamaan dari Perkalian Kuantitas Kompleks 8
2.5 Definisi Deret Fourier 12
2.6 Formula Poisson 13
2.7 Fungsi Delta Dirac 15
2.8 *Residue* dan *Pole* 17

3. PENURUNAN FUNGSI PEMBANGKIT DARI POLINOMIAL CHEBYSHEV BERDASARKAN KUANTITAS KOMPLEKS **23**
3.1 Fungsi Pembangkit dari Polinomial Chebyshev Jenis Pertama dan Kedua 23
3.2 Fungsi Pembangkit dari Hasil Kali Polinomial Chebyshev Jenis Pertama dan kedua 38
3.3 Fungsi Pembangkit dari Generalisasi Polinomial Chebyshev Jenis Pertama dan Kedua 45

3.3.1 Fungsi Pembangkit dari generalisasi polinomial Chebyshev 45
3.3.2 Fungsi Pembangkit dari kuadrat polinomial Chebyshev 53
3.3.3 Fungsi Pembangkit dari generalisasi perkalian polinomial Chebyshev 58

4. KESIMPULAN 71

DAFTAR PUSTAKA 72

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam menyelesaikan permasalahan matematika, ada beberapa metode atau pendekatan yang dapat digunakan. Misalnya metode untuk membuktikan suatu proposisi. Metode-metode pembuktian yang dapat digunakan antara lain pembuktian dengan kontradiksi, kontraposisi, induksi matematika dan sebagainya. Di dalam matematika diskrit, metode yang dikenal dengan nama fungsi pembangkit atau *generating function* sangatlah menguntungkan untuk membantu memecahkan permasalahan. Berbagai permasalahanyang dapat diselesaikan dengan fungsi pembangkit ini antara lain untuk menyelesaikan masalah perhitungan atau *counting*, menyelesaikan permasalahan relasi rekurensi, membuktikan identitas kombinatorika, dan sebagainya.

Polinomial Chebyshev memegang peranan penting di dalam analisis numerik. Aplikasi penggunaan polinomial Chebyshev digunakan di dalam teori aproksimasi, interpolasi, integrasi numerik, dan sebagainya. Polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dapat direpresentasikan di dalam kuantitas kompleks yang didefinisikan oleh formula Moivre. Polinomial berderajat n di dalam trigonometri sinus dan cosinus termuat di dalam formula Moivre dimana polinomial berderajat n di dalam trigonometri cosinus merupakan bagian real dari kuantitas kompleks, sedangkan polinomial berderajat n di dalam trigonometri sinus merupakan bagian imajiner dari kuantitas kompleks. Polinomial Chebyshev jenis pertama didefinisikan sebagai bagian real dari kuantitas kompleks dan polinomial Chebyshev jenis kedua berkaitan dengan bagian imajiner dari kuantitas kompleks.

Fungsi pembangkit merupakan bentuk ekspresi aljabar dari suatu deret pangkat. Pada dasarnya untuk mengekspresikan formula dari suatu deret pangkat menjadi ekspresi aljabar yang sangat sederhana adalah sulit, perlu diperhatikan konvergensi dari deret tersebut. Untuk mencari konvergensi deret dari polinomial tidaklah mudah apalagi konvergensi deret dari hasil kali dua jenis polinomial. Oleh karena itu, di dalam penurunan fungsi pembangkit dari polinomial

Chebyshev ini digunakan fungsi pembangkit dari kuantitas kompleks dengan mengambil bagian real atau imajiner dari fungsi pembangkit kuantitas kompleks.

Ada beberapa cara untuk membuktikan konvergensi deret Fourier. Salah satu cara yang digunakan untuk membuktikan konvergensi deret Fourier adalah dengan menggunakan fungsi pembangkit. Polinomial berderajat n di dalam trigonometri sinus dan cosinus termuat di dalam deret Fourier. Oleh karena itu, pada pembahasan tugas akhir ini akandiberikan contoh penerapan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier.

Pada tugas akhir ini akan ditunjukkan beberapa formula fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua, hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua, serta generalisasi polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua mulai dari bentuk ekspresi aljabar yang sederhana sampai bentuk ekspresi aljabar yang lebih rumit.

1.2 Rumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Berdasarkan latar belakang di atas, yang menjadi permasalahan di dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

a) Bagaimana menurunkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua serta fungsi pembangkit dari generalisasi kedua polinomial Chebyshev tersebut dalam bentuk ekspresi aljabar yang sederhana?
b) Bagaimana penerapan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier?

Adapun ruang lingkup dari permasalahan ini antara lain:

a) Penurunan fungsi pembangkit menggunakan bagian real dan imajiner dari kuantitas kompleks yang didefinisikan oleh formula Moivre.
b) Jenis fungsi pembangkit yang akan diturunkan hanya fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial.

1.3 Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan studi literatur.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a) Mempelajari penurunan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua, hasil kali dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua, serta penurunan fungsi pembangkit dari generalisasi polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

b) Mempelajari contoh penerapan bentuk umum fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan teori dasar yang akan digunakan pada pembahasan bab 3, yaitu definisi fungsi pembangkit, kuantitas kompleks, dan polinomial Chebyshev, persamaan-persamaan yang berlaku pada kuantitas kompleks serta perkalian kuantitas kompleks. Selanjutnya diberikan teori dasar yang digunakan di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier, yaitu definisi deret Fourier, formula Poisson dan Teorema Poisson, fungsi Delta Dirac, serta *Residue* dan *Pole*.

2.1 Definisi Fungsi Pembangkit

Adapun definisi dari fungsi pembangkit adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1

Diberikan suatu barisan tak berhingga $\{a_n(x)\}$, fungsi pembangkit $G(\xi)$ didefinisikan sebagai bentuk deret pangkat

$$G(\xi) = a_0(x) + a_1(x)\xi + a_2(x)\xi^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\,\xi^n \tag{2.1}$$

dimana barisan $\{a_n(x)\}$ merupakan koefisien dari fungsi pembangkit $G(\xi)$ dan ξ merupakan bilangan real. $G(\xi)$ disebut sebagai fungsi pembangkit biasa dari barisan $\{a_n(x)\}$.

(Herbert S. Wilf,1989)

Ekspansi deret dari $G(\xi)$ dapat diturunkan menjadi deret geometri tak hingga dimana rasio dari deret tersebut berada pada interval $(-1,1)$. Selain fungsi pembangkit biasa, ada beberapa jenis fungsi pembangkit lainnya, yaitu fungsi pembangkit eksponensial, fungsi pembangkit Poisson, fungsi pembangkit deret Dirichlet, dan sebagainya. Namun, hanya fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial yang akan ditunjukkan pada pembahasan tugas akhir ini. Berikut ini merupakan definisi dari fungsi pembangkit eksponensial.

Definisi 2.2

Diberikan suatu barisan tak berhingga $\{a_n(x)\}$, fungsi pembangkit $F(\xi)$ didefinisikan sebagai bentuk deret pangkat

$$F(\xi) = a_0(x) + a_1(x)\xi + a_2(x)\frac{\xi^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\frac{\xi^n}{n!} \qquad (2.2)$$

dimana barisan $\{a_n(x)\}$ merupakan koefisien dari fungsi pembangkit $F(\xi)$ dan ξ merupakan bilangan real. Dengan kata lain dapat dikatakan bahwa $F(\xi)$ adalah fungsi pembangkit eksponensial dari barisan $\{a_n(x)\}$.

(Herbert S. Wilf, 1989)

2.2 Definisi Polinomial Chebyshev

Berikut ini adalah definisi dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

Definisi 2.3 (Clamente C., 2010)

Misal x adalah suatu variabel real dimana $x \epsilon [-1,1]$, polinomial Chebyshev jenis pertama berderajat n adalah polinomial berbentuk :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) , \qquad n = 0,1,2, \ldots \qquad (2.3)$$

Definisi 2.4 (Clamente C., 2010)

Misal x adalah suatu variabel real dimana $x \epsilon [-1,1]$, polinomial Chebyshev jenis kedua berderajat n adalah polinomial berbentuk :

$$U_n(x) = \frac{\sin\left((n+1)\arccos(x)\right)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad n = 0,1,2, \ldots \qquad (2.4)$$

Polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dapat direpresentasikan di dalam kuantitas kompleks yang didefinisikan oleh formula Moivre, yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n(x) &= \exp\,(i\, n \arccos(x)) \\ &= \cos(n \arccos(x)) + i \sin(n \arccos(x)) \qquad (2.5) \end{aligned}$$

dimana

$$\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\big) = \cos(n \arccos(x))$$
$$\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\big) = \sin(n \arccos(x)). \tag{2.6}$$

Berdasarkan pesamaan (2.6), polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua saling berelasi di dalam kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ dimana bagian real dari $\mathbf{T}_n(x)$ merupakan polinomial Chebyshev jenis pertama dan bagian imajiner dari $\mathbf{T}_n(x)$ berkaitan dengan polinomial Chebyshev jenis kedua. Polinomial Chebyshev jenis kedua dengan derajat $n-1$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin\,(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}\ . \tag{2.7}$$

Dapat disimpulkan bahwa:

$$T_n(x) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\big)$$
$$U_{n-1}(x) = \frac{\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\big)}{\sqrt{1-x^2}}\ . \tag{2.8}$$

Kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ dapat juga digunakan untuk menurunkan fungsi pembangkit dari generalisasi polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Berdasarkan definisi polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua pada persamaan (2.3) dan (2.4), polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ dapat digeneralisasi menjadi:

$$T_{n+l}(x) = \cos\big((n+l)\arccos\,(x)\big)$$
$$U_{n-1+l}(x) = \frac{\sin\big((n+l)\arccos\,(x)\big)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.9}$$

dan $\mathbf{T}_n(x)$ pada persamaan (2.5), dapat digeneralisasi menjadi :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{n+l}(x) &= e^{i\,(n+l)\arccos(x)} \\ &= \cos\big((n+l)\arccos\,(x)\big) + i\sin\big((n+l)\arccos\,(x)\big).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Berdasarkan persamaan (2.9) dan (2.10) dapat disimpulkan bahwa bentuk generalisasi dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua berdasarkan $\mathbf{T}_{n+\imath}(x)$ adalah

$$\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_{n+\imath}(x)\big) = T_{n+\imath}(x)$$
$$\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_{n+\imath}(x)\big) = U_{n-1+\imath}(x)\sqrt{1-x^2}\,. \qquad (2.11)$$

2.3 Persamaan-Persamaan pada Kuantitas Kompleks

Berikut ini adalah persamaan-persamaan yang berlaku pada kuantitas kompleks yang dinyatakan dalam Teorema 2.5.

Teorema 2.5 (Clamente C, 2010)
Untuk polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ dan untuk kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ yang memuat $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$, berlaku persamaan-persamaan sebagai berikut:

(i) $|\mathbf{T}_n(x)|^2 = T_n^2(x) + (1-x^2)U_{n-1}^2(x) = 1$

(ii) $\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) = T_n^2(x) - (1-x^2)U_{n-1}^2(x)$

(iii) $\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) = 2\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_{n-1}(x)$. (2.12)

Bukti (i)
Berdasarkan sifat modulus bilangan kompleks bahwa

$$|\mathbf{T}_n(x)| = \sqrt{\cos^2(n\arccos(x)) + \sin^2\big(n\arccos(x)\big)}, \qquad (2.13)$$

maka kuadarat dari persamaan (2.13) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|\mathbf{T}_n(x)|^2 = \Big(\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\big)\Big)^2 + \Big(\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\big)\Big)^2$$

sehingga
$$\begin{aligned}|\mathbf{T}_n(x)|^2 &= \cos^2(n\arccos(x)) + \sin^2\big(n\arccos(x)\big)\\ &= T_n^2(x) + (1-x^2)U_{n-1}^2(x)\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$|\mathbf{T}_n(x)|^2 = T_n^2(x) + (1-x^2)U_{n-1}^2(x) = 1 .$ ∎

Bukti (ii) dan (iii)

Berdasarkan definisi $\mathbf{T}_n(x)$ bahwa

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_n(x) &= e^{i\, n\, \arccos(x)} = \cos\big(n \arccos(x)\big) + i \sin\big(n \arccos(x)\big)\\ &= T_n(x) + i\sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x) ,\end{aligned}$$

maka hasil kuadrat dari $\mathbf{T}_n(x)$ dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_n^2(x) &= \left(T_n(x) + i\sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)\right)^2\\ &= T_n^2(x) + 2\, i\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_{n-1}(x) + i^2(1-x^2)U_{n-1}^2(x)\\ &= T_n^2(x) + 2\, i\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_{n-1}(x) - (1-x^2)U_{n-1}^2(x).\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil kuadrat dari $\mathbf{T}_n(x)$ dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) &= \mathrm{Re}\left(T_n^2(x) + 2\, i\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_{n-1}(x) - (1-x^2)U_{n-1}^2(x)\right)\\ &= T_n^2(x) - (1-x^2)U_{n-1}^2(x)\\ \mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) &= \mathrm{Im}\left(T_n^2(x) + 2\, i\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_{n-1}(x) - (1-x^2)U_{n-1}^2(x)\right)\\ &= 2\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) &= T_n^2(x) - (1-x^2)U_{n-1}^2(x)\\ \mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) &= 2\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_{n-1}(x) .\end{aligned}$$ ∎

2.4 Persamaan-Persamaan dari Perkalian Kuantitas Kompleks

Berikut ini akan dibuktikan persamaan-persamaan dari perkalian kuantitas kompleks. Untuk membuktikan persamaan-persamaan tersebut, dibutuhkan lemma berikut ini.

Lemma 2.6

Untuk kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ serta konjugat kompleks $\overline{\mathbf{T}}_n(y)$ dimana $\psi = \arccos(x)$ dan $\omega = \arccos(y)$, x dan y bilangan real, maka berlaku persamaan berikut:

(i) $\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y) = \cos(n\psi)\cos(n\omega) - i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\cos(n\omega)\sin(n\psi) + \sin(n\psi)\sin(n\omega)$

(ii) $\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y) = \cos(n\psi)\cos(n\omega) + i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\sin(n\psi)\cos(n\omega) - \sin(n\psi)\sin(n\omega)$,

$$-1 \le x \le 1 \quad , \quad -1 \le y \le 1 \,. \qquad (2.14)$$

Bukti (i)

Jika $\mathbf{T}_n(y)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{T}_n(y) = e^{i\,n\,\arccos(y)} = \cos(n\arccos(y)) + i\sin(n\arccos(y)),$$

maka konjugat kompleks dari $\mathbf{T}_n(y)$ didefinisikan sebagai

$$\overline{\mathbf{T}}_n(y) = e^{-i\,n\,\arccos(y)} = \cos(n\arccos(y)) - i\sin(n\arccos(y))$$

sehingga

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y) &= e^{i\,n\,\arccos(x)}e^{-i\,n\,\arccos(y)} = e^{i\,n\,\psi}e^{-i\,n\,\omega}\\ &= (\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))(\cos(n\omega) - i\sin(n\omega))\\ &= \cos(n\psi)\cos(n\omega) - i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\cos(n\omega)\sin(n\psi)\\ &\quad + \sin(n\psi)\sin(n\omega)\,.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y) = \cos(n\psi)\cos(n\omega) - i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\cos(n\omega)\sin(n\psi) + \sin(n\psi)\sin(n\omega).$$

■

Bukti (ii)

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y) &= e^{i\,n\,\arccos(x)}e^{i\,n\,\arccos(y)} = e^{i\,n\,\psi}e^{i\,n\,\omega}\\ &= (\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))(\cos(n\omega) + i\sin(n\omega))\\ &= \cos(n\psi)\cos(n\omega) + i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\cos(n\omega)\sin(n\psi)\\ &\quad - \sin(n\psi)\sin(n\omega).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y) = \cos(n\psi)\cos(n\omega) + i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\sin(n\psi)\cos(n\omega) \\ - \sin(n\psi)\sin(n\omega).$$

■

Berdasarkan Lemma 2.6 akan ditunjukkan persamaan-persamaan dari perkalian kuantitas kompleks yang dinyatakan di dalam Teorema 2.7.

Teorema 2.7 (Clamente, 2010)
Untuk polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dan untuk kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ serta konjugat kompleks $\overline{\mathbf{T}}_n(y)$, berlaku persamaan-persamaan berikut :

(i) $\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) = T_n(x)T_n(y) + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$

(ii) $\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) = \sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)T_n(y) - \sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)T_n(x)$

(iii) $\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right) = T_n(x)T_n(y) - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$

(iv) $\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right) = \sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)T_n(y) + \sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)T_n(x),$

$$-1 \le x \le 1 \quad , \quad -1 \le y \le 1 \; . \tag{2.15}$$

Bukti (i)
Berdasarkan persamaan pertama pada Lemma 2.6, maka

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) &= \mathrm{Re}\left(e^{in\psi}e^{-in\omega}\right)\\ &= \mathrm{Re}(\cos(n\psi)\cos(n\omega) - i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\cos(n\omega)\sin(n\psi)\\ &\qquad + \sin(n\psi)\sin(n\omega))\\ &= \cos(n\psi)\cos(n\omega) + \sin(n\psi)\sin(n\omega)\\ &= T_n(x)T_n(y) + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) = T_n(x)T_n(y) + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y).$$ ■

Bukti (ii)

Berdasarkan persamaan pertama pada Lemma 2.6, maka

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) &= \mathrm{Im}\big(e^{in\psi}e^{-in\omega}\big)\\ &= \mathrm{Im}\big(\cos(n\psi)\cos(n\omega) - i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\cos(n\omega)\sin(n\psi)\\ &\qquad + \sin(n\psi)\sin(n\omega)\big)\\ &= -\cos(n\psi)\sin(n\omega) + \cos(n\omega)\sin(n\psi)\\ &= \sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)T_n(y) - \sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)T_n(x).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) = \sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)T_n(y) - \sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)T_n(x). \qquad \blacksquare$$

Bukti (iii)

Berdasarkan persamaan kedua pada Lemma 2.6, maka

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) &= \mathrm{Re}\big(e^{in\psi}e^{in\omega}\big)\\ &= \mathrm{Re}\big(\cos(n\psi)\cos(n\omega) + i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\cos(n\omega)\sin(n\psi)\\ &\qquad - \sin(n\psi)\sin(n\omega)\big)\\ &= \cos(n\psi)\cos(n\omega) - \sin(n\psi)\sin(n\omega)\\ &= T_n(x)T_n(y) - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) = T_n(x)T_n(y) - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y). \qquad \blacksquare$$

Bukti (iv)

Berdasarkan persamaan kedua pada Lemma 2.6, maka

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) &= \mathrm{Im}\big(e^{in\psi}e^{in\omega}\big)\\ &= \mathrm{Im}\big(\cos(n\psi)\cos(n\omega) + i\cos(n\psi)\sin(n\omega) + i\cos(n\omega)\sin(n\psi)\\ &\qquad - \sin(n\psi)\sin(n\omega)\big)\\ &= \cos(n\psi)\sin(n\omega) + \cos(n\omega)\sin(n\psi)\\ &= \sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)T_n(y) + \sqrt{1-y^2}U_{n-1}(y)T_n(x).\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right) = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)T_n(y) + \sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)T_n(x). \quad \blacksquare$$

Berikut ini adalah teori-teori dasar yang digunakan di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier.

2.5 Definisi Deret Fourier

Sebelum diberikan definisi deret Fourier, akan diberikan definisi dari fungsi periodik. Adapun definisi dari fungsi periodik adalah sebagai berikut :

Definisi 2.8 (Spiegel dan Liu John, 2002)

Suatu fungsi $f(g)$ disebut sebagai fungsi periodik dengan periode $2L$ jika

$$f(g+2L) = f(g). \tag{2.16}$$

Berikut ini adalah definisi dari deret Fourier.

Definisi 2.9

Fungsi periodik $f(g)$ yang terdefinisi pada selang $[-L, L]$ dengan periode $2L$ dapat direpresentasikan dengan persamaan

$$f(g) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi g}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi g}{L}\right)\right),$$

dimana koefisien a_n dan b_n adalah

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(g)\cos\left(\frac{n\pi g}{L}\right)dg \quad, n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(g)\sin\left(\frac{n\pi g}{L}\right)dg \quad, n = 0,1,2,3,\ldots \tag{2.17}$$

Formula

$$e^{ig} = \cos g + i\sin g \; e^{-ig} = \cos g - i\sin g$$

dapat digunakan untuk menyatakan ekspansi deret Fourier kompleks dengan bentuk persamaan eksponensial berikut:

$$f(g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi g}{L} i}, \tag{2.18}$$

dimana koefisien deret Fourier $c_n$adalah

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(g) e^{-\frac{n\pi g}{L} i} dg, \quad n \in Z,$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \qquad n = 1,2,\dots \tag{2.19}$$

(Spiegel dan Liu John, 2002)

2.6 Formula Poisson

Formula Poisson $u(\xi, t)$ dapat dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema 2.10

Misal $u(\xi, t)$ adalah suatu fungsi dengan domain $D = \{|\xi| < 1, -\pi < t < \pi\}$ dan $f(t)$ adalah limit dari $u(\xi, t)$ pada batas D, dimana

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n t}$$

$$u(\xi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi^{|n|} e^{i n t}, \tag{2.20}$$

formula dari $u(\xi, t)$ berlaku sebagai berikut:

$$u(\xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(g) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \cos\left(n(g - t)\right) \right) dg. \tag{2.21}$$

Bukti:

$$u(\xi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi^{|n|} e^{int} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \xi^n$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)\, \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \xi^n. \tag{2.22}$$

Dengan mensubstitusikan koefisien Fourier a_n dan b_n ke persamaan (2.22) dan merubah $L = \pi$, maka $u(\xi, t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
u(\xi, t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\cos(0g)\,dg + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\cos(ng)\,dg\right)\cos(nt) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\sin(ng)\,dg\right)\sin(nt) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)dg + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \int_{-\pi}^{\pi} f(g)\cos(ng)\cos(nt)\,dg \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \int_{-\pi}^{\pi} f(g)\sin(ng)\sin(nt)\,dg \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n(\cos(ng)\cos(nt) + \sin(ng)\sin(nt))\right)dg \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \cos(ng - nt)\right)dg \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \cos\big(n(g - t)\big)\right)dg \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \cos\big(n(g - t)\big)\right)dg\,.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$u(\xi, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \cos\big(n(g - t)\big)\right)dg\,. \qquad \blacksquare$$

Berikut ini adalah definisi dari kernel Poisson dan kernel Dirichlet yang digunakan di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier.

Definisi 2.11 (Kenneth R.Davidson & Allan P.Donsig, 2009)

Formula $D_\xi(g-t) = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \cos\left(n(g-t)\right)\right)$ disebut sebagai kernel Poisson dan $D(g-t) = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n(g-t)\right)\right)$ disebut sebagai kernel Dirichlet.

Berikut ini diberikan Teorema Poisson yang menyatakan bahwa formula Poisson $u(\xi, t)$ konvergen seragam ke suatu fungsi periodik $f(t)$ ketika ξ mendekati 1.

Teorema 2.12 (Teorema Poisson)

Jika $f(t)$ fungsi periodik 2π dan kontinu pada interval $[-\pi, \pi]$ maka $u(\xi, t)$ konvergen seragam ke fungsi $f(t)$ ketika $\xi \to 1^-$ atau dapat dinyatakan bahwa

$$\lim_{\xi \to 1^-} u(\xi, t) = f(t)$$

$$\lim_{\xi \to 1^-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi^{|n|} e^{int} = f(t)$$

secara seragam di dalam $t \in [-\pi, \pi]$.

(Kenneth R.Davidson & Allan P.Donsig, 2009)

2.7 Fungsi Delta Dirac

Fungsi Delta Dirac seringkali digunakan di dalam konsep deret Fourier. Di dalam pembahasan tugas akhir ini, fungsi Delta Dirac digunakan pada pembuktian konvergensi deret Fourier. Pada pembuktian konvergensi deret Fourier, fungsi Delta Dirac digunakan untuk membuktikan secara eksplisit bahwa deret Fourier konvergen ke suatu fungsi periodik f saat f kontinu. Adapun definisi dari fungsi Delta Dirac adalah sebagai berikut :

$$\delta(g) = \begin{cases} 0, & g \neq 0 \\ \infty, & g = 0 \end{cases} . \tag{2.23}$$

(M.Wirianto dan W.S.Budhi, 2005)

Fungsi Delta Dirac memiliki nilai integral yang dinyatakan oleh teorema berikut ini.

Teorema 2.13 (M.Wirianto dan W.S. Budhi, 2005)

Untuk fungsi $\delta(g)$ yang didefinisikan oleh persamaan (2.23) dimana g adalah bilangan real, berlaku persamaan berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g)dg = 1 \,. \tag{2.24}$$

Bukti

Misalkan didefinisikan suatu fungsi $d_\tau(g)$ dimana $\tau > 0$ adalah sembarang bilangan sedemikian sehingga

$$d_\tau(g) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau}, & -\tau < g < \tau \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}.$$

Integral dari fungsi $d_\tau(g)$ adalah sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(g)\,dg = \int_{-\tau}^{\tau} d_\tau(g)\,dg = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{2\tau}dg = \frac{g}{2\tau}\bigg|_{-\tau}^{\tau} = \frac{\tau}{2\tau} + \frac{\tau}{2\tau} = 1 \,.$$

Jika pada fungsi $d_\tau(g)$, nilai $\tau > 0$ diperkecil, maka nilai fungsi $d_\tau(g)$ akan membesar, sebaliknya jika $\tau > 0$ diperbesar, maka nilai fungsi $d_\tau(g)$ akan mengecil. Akan tetapi, tetap diperoleh nilai integral yang sama dengan 1 untuk berapapun nilai τ. Ketika $\tau \to 0$, fungsi $d_\tau(g)$ merupakan fungsi Delta Dirac sehingga

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(g) = \delta(g)$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\tau \to 0} d_\tau(g) = 1.$$

Karena $\lim_{\tau \to 0} d_\tau(g) = \delta(g)$, maka $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g)dg = 1$.

Jadi, terbukti bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g)dg = 1. \qquad \blacksquare$$

Fungsi Delta Dirac memiliki sifat berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(g)\delta(g)dg = f(0), \tag{2.25}$$

dimana $f(g)$ merupakan suatu fungsi yang kontinu.

(M.Wirianto dan W.S. Budhi, 2005)

Ketika $g = \boldsymbol{t}$ dimana $-\pi < \boldsymbol{t} < \pi$ dan $\boldsymbol{t}$ adalah bilangan tetap, fungsi Delta Dirac dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.14

Untuk sembarang bilangan real g dan bilangan tetap $\boldsymbol{t}$, fungsi delta $\delta(g - \boldsymbol{t})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta(g - \boldsymbol{t}) = \begin{cases} 0\ , & g \neq \boldsymbol{t} \\ \infty, & g = \boldsymbol{t} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(g - \boldsymbol{t})dg = 1, \qquad -\pi < \boldsymbol{t} < \pi,$$

dan memiliki sifat sebagai berikut:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\delta(g - \boldsymbol{t})\,dg = f(\boldsymbol{t}), \quad -\pi < \boldsymbol{t} < \pi\ . \tag{2.26}$$

(K.T.Tang, 2007)

2.8 Residue dan Pole

Suatu fungsi dikatakan analitik jika fungsi tersebut memiliki turunan pada setiap titik di domain yang merupakan himpunan buka dan terhubung. Teorema Cauchy-Gousart menyatakan bahwa jika suatu fungsi analitik di semua titik interior pada kurva mulus tertutup sederhana C, maka nilai dari integral fungsi pada kurva mulus C adalah nol. Namun, jika suatu fungsi tidak analitik di berhingga titik pada kurva mulus C, terdapat bilangan kompleks khusus yang disebut sebagai *residue*, yang mana titik-titik yang membuat fungsi tidak analitik memberikan peranan untuk nilai integral fungsi tersebut. Untuk mencari *residue* dari suatu fungsi f diberikan pada pembahasan selanjutnya setelah dibahas deret Laurent.

Titik z_0 adalah titik singular dari fungsi f jika f tidak analitik di titik z_0 tetapi analitik di beberapa titik di setiap lingkungan z_0. Suatu titik singular z_0 dikatakan terisolasi pada fungsi f, jika terdapat bilangan positif R sedemikian sehingga f analitik pada setiap titik z dimana $0 < |z - z_0| < R$, terkecuali di titik z_0. Akibatnya, $f(z)$ dapat direpresentasikan sebagai deret Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots$$

$$(0 < |z - z_0| < R) \qquad (2.27)$$

dimana koefisien a_n dan b_n didefinisikan dengan persamaan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \ , \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \ , \qquad n = 0,1,2, \ldots \qquad (2.28)$$

Titik singular yang terisolasi z_0 disebut sebagai *pole berorder* m. *Pole* dengan order $m = 1$ disebut sebagai *pole sederhana*.

C merupakan kurva mulus tertutup sederhana yang berorientasi positif (berlawanan arah jarum jam) yang terletak di dalam cakram $0 < |z - z_0| < R$. Ketika $n = 1$, nilai b_n menjadi

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-1+1}} dz$$

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1. \qquad (2.29)$$

b_1 merupakan koefisien dari $1/(z - z_0)$ pada deret Laurent. Bilangan kompleks b_1 disebut sebagai *residue* dari fungsi f pada titik singular terisolasi z_0. b_1 dapat ditulis dengan

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \, . \qquad (2.30)$$

Ketika fungsi f mempunyai titik singular yang terisolasi pada titik z_0, metode dasar untuk mengidentifikasikan z_0 sebagai *pole* dan mencari *residue* yaitu dengan mencari koefisien dari $1/(z-z_0)$ dari deret Laurent. Berikut ini diberikan teorema sebagai cara alternatif untuk mencari *residue* yang bersesuaian dari suatu *pole*.

Teorema 2.15

Titik singular terisolasi z_0 pada fungsi f dikatakan *pole* berorder m jika dan hanya jika $f(z)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$$

dimana $\phi(z)$ analitik dan tidak bernilai nol pada titik z_0.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0), \quad m = 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}, \quad m \geq 2\ . \tag{2.31}$$

(J.W Brown & R.V Churchill, 2004)

Teori *residue* dapat digunakan di dalam mencari nilai integral yang memuat trigonometri cosinus maupun sinus. Contoh aplikasi teori *residue* untuk mencari nilai integral yang memuat trigonometri cosinus dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema2.16

Untuk sembarang bilangan real θ, a dan b, berlaku persamaan sebagai berikut:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a - b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad , \qquad a > b\ . \tag{2.32}$$

Bukti

Jika nilai $b = 0$ maka persamaan (2.32) jelas terpenuhi. Pada pembuktian ini akan ditunjukkan bahwa persamaan (2.32) berlaku ketika $b \neq 0$. Diketahui bahwa

$$z = e^{i\,\theta}, \qquad \frac{dz}{d\theta} = i\ e^{i\,\theta}, \qquad \frac{dz}{d\theta} = i\,z, \qquad d\theta = \frac{dz}{i\,z},$$

Dan formula Euler dinyatakan oleh persamaan berikut:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta. \qquad (2.33)$$

Dengan menjumlahkan dan mengurangi kedua persamaan (2.33) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2\,i\sin\theta. \qquad (2.34)$$

Persamaan (2.34) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$z + z^{-1} = 2\cos\theta, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$
$$z - z^{-1} = 2\,i\,\sin\theta, \quad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2\,i}.$$

Jika $\cos\theta$ dan $d\theta$ disubstitusi ke persamaan (2.32) maka integral di dalam persamaan (2.32) dapat dinyatakan dalam kurva mulus C yang diuraikan menjadi sebagai berikut:

$$\int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{a - b\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} = \int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{2a-b\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}} = \int_C \frac{\frac{2dz}{iz}}{2a - b\left(z + \frac{1}{z}\right)}$$
$$= \int_C \frac{\frac{2dz}{iz}}{\frac{2az-bz^2-b}{z}} = \int_C \frac{\frac{2}{i}dz}{-bz^2 + 2az - b}$$
$$= \int_C \frac{\frac{2}{i}dz}{-bz^2 + 2az - b}\,\frac{-\frac{1}{b}}{-\frac{1}{b}} = \int_C \frac{-\frac{2}{ib}}{z^2 - \frac{2a}{b}z + 1}\,dz$$
$$= \int_C f(z)\,dz,$$

dimana kurva mulus C berupa lingkaran dengan arah sudut positif yang mengelilingi z berjari-jari 1. Misal

$$z_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad z_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

sehingga $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(z) = \frac{-\frac{2}{ib}}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Karena $a > b, |z_1 z_2| = 1$ maka $|z_1| > 1,\ |z_2| < 1$, artinya hanya ada satu titik interior di C, yaitu z_2. Fungsi $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_2}$$

dimana

$$\phi(z) = \frac{-\frac{2}{ib}}{z - z_1}.$$

Berdasarkan Teorema 2.15, z_2 adalah *pole* sederhana (berorder 1) dan *residue* yang bersesuaian yaitu B_2 (karena titik singular yang terisolasi z_2) dapat ditemukan berdasarkan persamaan berikut:

$$B_2 = \phi(z_2) = \frac{-\frac{2}{ib}}{z_2 - z_1} = \frac{-\frac{2}{ib}}{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2} - a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}$$

$$= \frac{-\frac{2}{ib}}{\frac{-2\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa

$$\int_C \frac{-\frac{2}{ib}}{z^2 - \frac{2a}{b}z + 1} dz = 2\pi i B_2 = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Jadi, dapat dibuktikan bahwa

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a - b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad , \quad a > b \ . \qquad \blacksquare$$

Di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier, Teorema 2.16 digunakan untuk membuktikan bahwa kernel Dirichlet pada Definisi 2.11 merupakan fungsi Delta Dirac yang termuat di dalam Definisi 2.14.

BAB 3
PENURUNAN FUNGSI PEMBANGKIT DARI POLINOMIAL CHEBYSHEV BERDASARKAN KUANTITAS KOMPLEKS

Ada berbagai macam bentuk fungsi pembangkit. Fungsi pembangkit yang telah dikenal antara lain fungsi pembangkit biasa, fungsi pembangkit eksponensial, fungsi pembangkit Poisson, dan fungsi pembangkit deret Dirichlet. Namun, pada bab ini hanya dibahas fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit ekponensial. Pada Subbab 3.1 dijelaskan penurunan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua disertakan dengan contoh penerapan fungsi pembangkit di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier, pada Subbab 3.2 dijelaskan penurunan fungsi pembangkit dari hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua, dan pembahasan terakhir pada Subbab 3.3 dijelaskan penurunan fungsi pembangkit dari generalisasi polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Di dalam penurunan fungsi pembangkit tersebut, sifat relasi polinomial Chebyshev di dalam kuantitas kompleks akan selalu digunakan pada proses pembuktian. Pada penurunan fungsi pembangkit nanti akan digunakan bagian real dan imajiner dari fungsi pembangkit kuantitas kompleks.

3.1 Fungsi Pembangkit dari Polinomial Chebyshev Jenis Pertama dan Kedua

Polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua saling berelasi di dalam kuantitas kompleks. Sifat keterhubungan kedua polinomial Chebyshev terhadap kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$, seperti pada persamaan (2.8) akan selalu digunakan di dalam penurunan fungsi pembangkit. Oleh karena itu, sebelum menurunkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua akan diturunkanfungsi pembangkit dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$. Untuk menurunkan fungsi pembangkit dari $\mathbf{T}_n(x)$ dibutuhkan lemma berikut ini.

Lemma 3.1

Untuk suatu bilangan real x dimana $-1 \leq x \leq 1$ dengan $\psi = \arccos(x)$, berlaku persamaan berikut:

$$\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{1-\xi x + i\,\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2}. \tag{3.1}$$

Bukti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} &= \frac{1}{1-\xi(\cos\psi + i\sin\psi)} \\
&= \frac{1}{(1-\xi\cos\psi) - i\,\xi\sin\psi}\,\frac{(1-\xi\cos\psi)+i\,\xi\sin\psi}{(1-\xi\cos\psi)+i\,\xi\sin\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi)+i\,\xi\sin\psi}{(1-\xi\cos\psi)^2 - i^2\xi^2\sin^2\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi)+i\,\xi\sin\psi}{1-2\,\xi\cos\psi+\xi^2\cos^2\psi+\xi^2\sin^2\psi} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi)+i\,\xi\sin\psi}{1-2\,\xi\cos\psi+\xi^2(\cos^2\psi+\sin^2\psi)} \\
&= \frac{(1-\xi\cos\psi)+i\,\xi\sin\psi}{1-2\,\xi\cos\psi+\xi^2} \\
&= \frac{(1-\xi\cos(\arccos(x)))+i\,\xi\sin(\arccos(x))}{1-2\,\xi\cos(\arccos(x))+\xi^2} \\
&= \frac{1-\xi x+i\,\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa

$$\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{1-\xi x + i\,\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2}. \qquad \blacksquare$$

Berdasarkan Lemma 3.1 dapat ditunjukkan fungsi pembangkit biasa dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ yang dinyatakan pada Teorema 3.2.

Teorema 3.2 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, \mathbf{T}_n(x) = \frac{1 - \xi x + i\,\xi\,\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2}, \qquad -1 \leq x \leq 1 \,. \tag{3.2}$$

Bukti

Berdasarkan definisi dari $\mathbf{T}_n(x)$ pada persamaan (2.5), fungsi pembangkit dari $\mathbf{T}_n(x)$ dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, \mathbf{T}_n(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi^n e^{i\,n\,\mathrm{arccos}(x)}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}\right)^n \\ &= 1 + \xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)} + \xi^2 e^{i\,2\,\mathrm{arccos}(x)} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Agar deret pada persamaan (3.3) konvergen, maka rasio dari deret geometri tak hingga adalah $\left|\xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}\right| < 1$. Berdasarkan Lemma 3.1 dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{1}{1 - \xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}} = \frac{1}{1 - \xi e^{i\,\psi}} = \frac{1 - \xi x + i\,\xi\,\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2}.$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi pembangkit dari $\mathbf{T}_n(x)$ adalah

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, \mathbf{T}_n(x) = \frac{1 - \xi x + i\,\xi\,\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2}. \qquad \blacksquare$$

Pada Teorema 3.3 akan ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua yang merupakan akibat dari Teorema 3.2.

Teorema 3.3 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

(i) $$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, T_n(x) = \frac{1 - \xi x}{1 - 2\xi x + \xi^2}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, U_{n-1}(x) = \frac{\xi}{1 - 2\xi x + \xi^2}, \qquad -1 \le x \le 1 . \tag{3.4}$$

Bukti (i)

Akan ditunjukkan bahwa fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dapat dinyatakan sebagai

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, T_n(x) = \frac{1 - \xi x}{1 - 2\xi x + \xi^2} .$$

Berdasarkan sifat keterhubungan polinomial Chebyshev $T_n(x)$ terhadap $\mathbf{T}_n(x)$ pada persamaan (2.8) dan Lemma 3.2, maka fungsi pembangkit dari $T_n(x)$ dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, T_n(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, \mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\big) = 1 + \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, \mathbf{T}_n(x) \\ &= \mathrm{Re}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, \big(\mathbf{T}_n(x)\big) \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1 - \xi x + i\,\xi\,\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2} \right) \\ &= \frac{1 - \xi x}{1 - 2\xi + \xi^2} . \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, T_n(x) = \frac{1 - \xi x}{1 - 2\xi x + \xi^2} . \qquad \blacksquare$$

Langkah-langkah pembuktian yang sama dapat dilakukan pada penurunan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev $U_{n-1}(x)$.

Bukti (ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, U_{n-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \frac{\operatorname{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \operatorname{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, \mathbf{T}_n(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - \xi x + i\,\xi\sqrt{1-x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\xi\sqrt{1-x^2}}{1 - 2\xi x + \xi^2} = \frac{\xi}{1 - 2\xi x + \xi^2}.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, U_{n-1}(x) = \frac{\xi}{1 - 2\xi x + \xi^2} \, . \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya akan ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Seperti halnya pada penurunan fungsi pembangkit sebelumnya, sifat keterhubungan polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ terhadap kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ digunakan di dalam penurunan fungsi pembangkit eksponensial. Oleh karena itu, sebelum menurunkan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ dibutuhkan lemma berikut ini.

Lemma 3.4

Untuk suatu bilangan real x dimana $-1 \leq x \leq 1$ dengan $\psi = \arccos(x)$, berlaku persamaan berikut:

$$\exp\left(\xi e^{i\psi}\right) = e^{\xi x} \left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i \sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) \right). \qquad (3.5)$$

Bukti

$$\exp\left(\xi e^{i\psi}\right) = e^{\xi(\cos\psi + i\sin\psi)} = e^{\xi\cos\psi} e^{i\xi\sin\psi}$$
$$= e^{\xi\cos\psi}\left(\cos\left(\xi\sin\psi\right) + i\sin(\xi\sin\psi)\right)$$
$$= e^{\xi\cos(\arccos(x))}\left(\cos\left(\xi\sin(\arccos(x))\right) + i\sin\left(\xi\sin\left(\mathrm{arrcos}(x)\right)\right)\right)$$
$$= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa

$$\exp\left(\xi e^{i\psi}\right) = e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

■

Berdasarkan Lemma 3.4 dapat ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari $\mathbf{T}_n(x)$ yang dinyatakan di dalamTeorema 3.5.

Teorema 3.5 (Clamente C., 2010)

Untuk suatubilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit eksponensial dari $\mathbf{T}_n(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_n(x) = \exp\left(\xi e^{i\arccos(x)}\right)$$
$$= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right),$$
$$-1 \le x \le 1 . \tag{3.6}$$

Bukti

Berdasarkan definisi $\mathbf{T}_n(x)$ pada persamaan (2.5), fungsi pembangkit eksponensial $\mathbf{T}_n(x)$ dapat diturunkan menjadi sebagai berikut:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\xi e^{i\arccos(x)}\right)^n$$
$$= 1 + \xi e^{i\arccos(x)} + \frac{1}{2!}\left(\xi e^{i\arccos(x)}\right)^2 + \cdots \tag{3.7}$$

Misal $\xi e^{i\arccos(x)} = y$, maka persamaan (3.7) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$1 + \xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)} + \frac{1}{2!}\left(\xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}\right)^2 + \cdots = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \cdots$$

$$= e^0 + e^0 y + \frac{e^0}{2!}y^2 + \cdots \qquad (3.8)$$

Karena bagian kanan dari persamaan (3.8) merupakan ekspansi fungsi e^y dalam deret MacLaurin, maka diperoleh

$$1 + \xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)} + \frac{1}{2!}\left(\xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}\right)^2 + \cdots = \exp\left(\xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}\right). \qquad (3.9)$$

Berdasarkan persamaan (3.7), (3.8), (3.9) dan Lemma 3.4, dapat disimpulkan bahwa

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_n(x) = \exp\left(\xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}\right)$$

$$= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\,\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_n(x) = \exp\left(\xi e^{i\,\mathrm{arccos}(x)}\right)$$

$$= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\,\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right). \qquad \blacksquare$$

Berdasarkan Lemma 3.4 dan Teorema 3.5 akan dibuktikan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$. Teorema 3.6 ini merupakan akibat dari Teorema 3.5.

Teorema 3.6 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\text{(i)}\ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}T_n(x) = e^{\xi x}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x) = e^{\xi x}\frac{\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 \le x \le 1\,. \qquad (3.10)$$

Bukti (i)

Berdasarkan Teorema 3.5 diperoleh penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$, yaitu

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(\mathbf{x})\big)=\mathrm{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_n(x)\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)+i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)\right)$$

$$=e^{\xi x}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x)=e^{\xi x}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right).$$ ■

Bukti (ii)

Berdasarkan Teorema 3.5 diperoleh penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $U_{n-1}(x)$, yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\frac{\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\big)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_n(x)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Im}\left(\left(e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)+i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)-1\right)\right)$$

$$=\frac{e^{\xi x}}{\sqrt{1-x^2}}\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=e^{\xi x}\frac{\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)=e^{\xi x}\frac{\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}.$$ ■

Contoh Penerapan Fungsi Pembangkit Biasa dari $\boldsymbol{T_n(x)}$

Berikut ini dijelaskan contoh penerapan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev $T_n(x)$ pada pembuktian konvergensi deret Fourier. Kekonvergenan yang akan dibahas pada contoh ini, khususnya kekonvergenan titik demi titik saat suatu fungsi $f(t)$ kontinu. Barisan fungsi $f_n(t)$ dikatakan konvergen titik demi titik ke fungsi $f(t)$ pada himpunan A apabila $f_n(t)$ konvergen ke fungsi $f(t)$ untuk setiap $t \in A$.

Polinomial Chebyshev $T_n(x)$ terdefinisi di dalam deret Fourier karena polinomial berderajat n dari trigonometri cosinus merupakan fungsi periodik, dimana nilai-nilai $\cos(n(\arccos(x))$ pada interval $[-\pi, 0]$ dan $[0, \pi]$ adalah sama, yaitu berada pada interval $[-1,1]$.

Berikut ini adalah teorema penurunan fungsi pembangkit dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ yang akan digunakan pada pembuktian konvergensi deret Fourier. Untuk menurunkan fungsi pembangkit biasa dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ dibutuhkan lemma berikut ini.

Lemma 3.7

Untuk suatu bilangan real t, g dan ξ dimana $\theta = g - t = \arccos(x)$, $\theta \epsilon [-\pi, \pi]$, dan $|\xi| < 1$, berlaku persamaan sebagai berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, e^{i\,n\,(g-t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, e^{i\,n\,\theta} = \frac{\xi e^{i\,\theta}}{1 - \xi e^{i\,\theta}}. \tag{3.11}$$

Bukti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, e^{i\,n\,\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi e^{i\,\theta}\right)^n$$

$$= \xi e^{i\theta} + \left(\xi e^{i\theta}\right)^2 + \left(\xi e^{i\theta}\right)^3 + \cdots \tag{3.12}$$

Agar deret pada persamaan (3.12) konvergen, maka rasio dari deret geometri tak hingga adalah $\left|\xi e^{i\,\theta}\right| < 1$. Persamaan (3.12) dapat diturunkan menjadi sebagai berikut:

$$\xi e^{i\theta} + \left(\xi e^{i\theta}\right)^2 + \left(\xi e^{i\theta}\right)^3 + \cdots = \frac{\xi e^{i\theta}}{1-\xi e^{i\theta}}.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, e^{in\theta} = \frac{\xi e^{i\theta}}{1-\xi e^{i\theta}} \; . \qquad \blacksquare$$

Berdasarkan Lemma 3.7 akan dibuktikan penurunan fungsi pembangkit dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$.

Teorema 3.8

Untuk bilangan real $\boldsymbol{t}$, g dan ξ dimana $\theta = g - \boldsymbol{t} = \arccos(x)$, $\theta \epsilon [-\pi, \pi]$, dan $|\xi| < 1$, berlaku persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, e^{i\,n\,(g-t)} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, e^{i\,n\,\theta} \\ &= \frac{1-\xi^2 + i\,2\,\xi \sin\,\theta}{2(1-2\,\xi\,\cos\,\theta + \xi^2)} \, . \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Bukti

Berdasarkan Lemma 3.7, maka persamaan $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, e^{i\,n\,\theta}$ dapat diturunkan menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, e^{i\,n\theta} &= \frac{1}{2} + \frac{\xi e^{i\theta}}{1-\xi e^{i\theta}} = \frac{1-\xi e^{i\,\theta} + 2\,\xi e^{i\,\theta}}{2(1-\xi e^{i\,\theta})} \\ &= \frac{1+\xi e^{i\theta}}{2(1-\xi e^{i\,\theta})} \frac{1-\xi e^{-i\theta}}{1-\xi e^{-i\theta}} \\ &= \frac{1-\xi^2 e^{i\,\theta} e^{-i\,\theta} + \xi e^{i\,\theta} - \xi e^{-i\,\theta}}{2(1-\xi e^{i\,\theta} - \xi e^{-i\,\theta} + \xi^2 e^{i\,\theta} e^{-i\,\theta})} \\ &= \frac{1-\xi^2 + \xi e^{i\,\theta} - \xi e^{-i\,\theta}}{2(1-\xi e^{i\,\theta} - \xi e^{-i\,\theta} + \xi^2)} \\ &= \frac{1-\xi^2 + \xi\left(e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}\right)}{2(1-\xi(e^{i\theta} + e^{-i\,\theta}) + \xi^2)} \, . \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.34) bahwa $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2\,i \sin\theta$, dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{1-\xi^2+\xi\left(e^{i\,\theta}-e^{-i\,\theta}\right)}{2\left(1-\xi\left(e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}\right)+\xi^2\right)}=\frac{1-\xi^2+i\;2\;\xi\sin\theta}{2(1-2\;\xi\;\cos\;\theta+\xi^2)}\,.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\;e^{i\;n\;(g-t)}=\frac{1-\xi^2+i\;2\;\xi\sin\theta}{2(1-2\;\xi\;\cos\;\theta+\xi^2)}\,. \qquad \blacksquare$$

Berikut ini adalah Teorema konvergensi deret Fourier dimana hanya dibuktikan untuk kekonvergenan saat fungsi $f(t)$ kontinu.

Teorema 3.9 (Konvergensi Deret Fourier)

Jika fungsi $f(t)$ merupakan fungsi periodik dengan periode 2π dimana $f(t)$ adalah fungsi yang terbatas dan kontinu bagian demi bagian dan mempunyai nilai maksimum dan minimum yang berhingga di dalam setiap periode, maka deret trigonometri

$$S_\infty(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin\,(nt)\right) \tag{3.14}$$

konvergen ke $f(t)$ saat $f(t)$ kontinu.

(K.T.Tang, 2007)

Bukti

Dengan mensubstitusikan koefisien Fourier a_n dan b_n pada persamaan (2.17) ke dalam deret trigonometri $S_\infty(t)$ dan merubah $L=\pi$, maka $S_\infty(t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}S_\infty(t)&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)\\&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt)\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(g)\cos(0g)\,dg+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(g)\cos(ng)\,dg\right)\cos(nt)\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\sin(ng)\,dg\right)\sin(n\boldsymbol{t})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)dg+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\cos(ng)\cos(n\boldsymbol{t})\,dg$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\sin(ng)\sin(n\boldsymbol{t})\,dg$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos(ng)\cos(n\boldsymbol{t})+\sin(ng)\sin(n\boldsymbol{t})\right)\right)dg$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(ng-n\boldsymbol{t})\right)dg$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n(g-\boldsymbol{t})\right)\right)dg$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n(g-\boldsymbol{t})\right)\right)dg\,.$$

Berdasarkan Definisi 2.11, deret cosinus

$$D(g-\boldsymbol{t})=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n(g-\boldsymbol{t})\right)$$

disebut sebagai kernel Dirichlet.

Pada pembuktian teorema ini akan digunakan fungsi delta $\delta(g-\boldsymbol{t})$ untuk menunjukkan secara eksplisit bahwa deret Fourier konvergen ke suatu fungsi kontinu $f(\boldsymbol{t})$. Berdasarkan sifat-sifat fungsi delta $\delta(g-\boldsymbol{t})$ pada Definisi 2.14, untuk membuktikan bahwa deret Fourier konvergen ke suatu fungsi kontinu $f(\boldsymbol{t})$ akan ditunjukkan bahwa deret cosinus $D(g-\boldsymbol{t})$ merupakan fungsi delta $\delta(g-\boldsymbol{t})$. Terdapat tiga pembuktian untuk menunjukkan bahwa deret Fourier konvergen ke suatu fungsi kontinu $f(\boldsymbol{t})$, antara lain:

1. Akan ditunjukkan bahwa

$$D(g-\boldsymbol{t})=\begin{cases}0\,, & g\neq\boldsymbol{t}\\ \infty, & g=\boldsymbol{t}\end{cases}. \tag{3.15}$$

Untuk menunjukkan persamaan (3.15) akan dijelaskan beberapa sifat dari deret cosinus $D(g-\boldsymbol{t})$. Adapun sifat-sifat deret cosinus $D(g-\boldsymbol{t})$ adalah sebagai berikut:

a) Berdasarkan Teorema Poisson, karena

$$\lim_{\xi\to 1^-} u(\xi,\boldsymbol{t}) = f(\boldsymbol{t})$$

dimana

$$u(\xi,\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(g)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n \cos\left(n(g-\boldsymbol{t})\right)\right)dg,$$

maka untuk memastikan konvergensi $S_\infty(\boldsymbol{t})$ ke fungsi periodik $f(\boldsymbol{t})$, deret cosinus $D(g-\boldsymbol{t})$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$D_\xi(g-\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n \cos\left(n(g-\boldsymbol{t})\right)\right)$$

atau yang dikenal sebagai kernel Poisson dimana

$$D(g-\boldsymbol{t}) = \lim_{\xi\to 1^-} D_\xi(g-\boldsymbol{t})$$

$$D(g-\boldsymbol{t}) = \lim_{\xi\to 1^-}\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n \cos\left(n(g-\boldsymbol{t})\right)\right).$$

b) Karena deret cosinus $D_\xi(g-\boldsymbol{t})$ memuat fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama, berdasarkan sifat relasi polinomial Chebyshev terhadap kuantitas kompleks, maka $D_\xi(g-\boldsymbol{t})$ dapat didefinisikan sebagai bagian real dari deret kompleks $e^{i\,n\,(g-t))}$.

Untuk menentukan bentuk umum dari deret cosinus $D_\xi(g-\boldsymbol{t})$ dapat digunakan fungsi pembangkit dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ seperti pada Teorema 3.8. Berdasarkan Teorema 3.8, deret cosinus $D_\xi(g-\boldsymbol{t})$ dapat diturunkan menjadi sebagai berikut:

$$D_\xi(g-\boldsymbol{t}) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n e^{i\,n\,(g-t)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{1-\xi^2+i\,2\xi\sin(g-\boldsymbol{t})}{2(1-2\xi\cos(g-\boldsymbol{t})+\xi^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\xi^2}{2(1-2\xi\,\cos(g-\boldsymbol{t})+\xi^2)}\right)$$

$$= \frac{1-\xi^2}{2\pi(1-2\xi\,\cos(g-\boldsymbol{t})+\xi^2)}\,. \tag{3.16}$$

Oleh karena itu, $D(g-\boldsymbol{t})$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D(g-\boldsymbol{t}) = \lim_{\xi\to 1^-}\frac{1-\xi^2}{2\pi(1-2\xi\,\cos(g-\boldsymbol{t})+\xi^2)}\,.$$

Untuk nilai $g \neq \boldsymbol{t}$, maka

$$D(g-\boldsymbol{t}) = \lim_{\xi\to 1^-}\frac{1-\xi^2}{2\pi(1-2\xi\,\cos(g-\boldsymbol{t})+\xi^2)} = 0.$$

Untuk nilai $g = \boldsymbol{t}$, maka

$$\begin{aligned} D(g-\boldsymbol{t}) &= \lim_{\xi\to 1^-}\frac{1-\xi^2}{2\pi(1-2\xi\cos(g-\boldsymbol{t})+\xi^2)} \\ &= \lim_{\xi\to 1^-}\frac{1-\xi^2}{2\pi(1-2\xi+\xi^2)} \\ &= \lim_{\xi\to 1^-}\frac{(1+\xi)(1-\xi)}{2\pi(1-\xi)^2} \to \infty. \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$D(g-\boldsymbol{t}) = \begin{cases} 0\,, & g \neq \boldsymbol{t} \\ \infty, & g = \boldsymbol{t} \end{cases}.$$

2. Akan ditunjukkan bahwa

$$\int_{-\pi}^{\pi} D(g-\boldsymbol{t})\,dg = 1, \qquad -\pi < \boldsymbol{t} < \pi\,. \tag{3.17}$$

Karena nilai-nilai $\cos\big(n(g-\boldsymbol{t})\big)$ pada interval $[-\pi, 0]$ dan $[0, \pi]$ sama, maka fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dapat diterapkan di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier. Berdasarkan persamaan (3.25), integral dari $D_\xi(g-\boldsymbol{t})$ adalah sebagai berikut:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_\xi(g-\boldsymbol{t})\,dg = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\xi^2}{2\pi(1-2\xi\cos(g-\boldsymbol{t})+\xi^2)}\,dg$$

$$= \frac{1-\xi^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dg}{(1+\xi^2)-2\xi\cos(g-\boldsymbol{t})}. \quad (3.18)$$

Misal $\theta = g - \boldsymbol{t}$, maka $\frac{d\theta}{dg} = 1$. Jika θ dan $d\theta$ disubstitusikan ke persamaan (3.18), maka diperoleh

$$\frac{1-\xi^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dg}{(1+\xi^2)-2\xi\cos(g-\boldsymbol{t})}$$

$$= \frac{1-\xi^2}{2\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} \frac{d\theta}{(1+\xi^2)-2\xi\cos\theta}.$$

Karena $D_\xi(g-\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\cos\left(n(g-\boldsymbol{t})\right)\right)$ adalah fungsi periodik , maka

$$\frac{1-\xi^2}{2\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} \frac{d\theta}{(1+\xi^2)-2\xi\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\xi^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1+\xi^2)-2\xi\cos\theta}. \quad (3.19)$$

Karena ξ tidak tepat bernilai 1 dan nilai $1+\xi^2 > 2\xi$, berdasarkan aplikasi teori *residue* yang termuat di dalam Teorema 2.16, persamaan (3.19) dapat diuraikan menjadi sebagai berikut:

$$\frac{1-\xi^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1+\xi^2)-2\xi\cos\theta} = \frac{1-\xi^2}{2\pi}\frac{2\pi}{\sqrt{(1+\xi^2)^2-(2\xi)^2}}$$

$$= \frac{1-\xi^2}{\sqrt{1+2\xi^2+\xi^4-4\xi^2}} = \frac{1-\xi^2}{\sqrt{1-2\xi^2+\xi^4}} = \frac{1-\xi^2}{\sqrt{(1-\xi)^2}}$$

$$= \frac{1-\xi^2}{1-\xi^2} = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_\xi(g-\boldsymbol{t})\,dg = 1\,.$$

Seperti pembuktian Teorema 2.13 pada fungsi Delta Dirac, jika nilai ξ semakin kecil maka nilai fungsi $D_\xi(g - \boldsymbol{t})$ akan membesar dan berlaku sebaliknya. Akan tetapi, tetap diperoleh nilai integral yang sama dengan 1 untuk berapapun nilai ξ. Ketika $\xi \to 1^-$, maka dipeoleh $\lim_{\xi \to 1^-} D_\xi(g - \boldsymbol{t}) = D(g - \boldsymbol{t})$ dan $\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{\xi \to 1^-} D_\xi(g - \boldsymbol{t})\, dg = 1$.

Karena $\lim_{\xi \to 1^-} D_\xi(g - \boldsymbol{t}) = D(g - \boldsymbol{t})$ maka $\int_{-\pi}^{\pi} D(g - \boldsymbol{t})\, dg = 1$.

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\int_{-\pi}^{\pi} D(g - \boldsymbol{t})\, dg = 1 , \qquad -\pi < \boldsymbol{t} < \pi.$$

3. Berdasarkan uraian pembuktian di atas, dapat disimpulkan bahwa deret cosinus $D(g - \boldsymbol{t})$ merupakan fungsi delta $\delta(g - \boldsymbol{t})$. Oleh karena itu, jika $f(\boldsymbol{t})$ kontinu maka

$$S_\infty(\boldsymbol{t}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(g) D(g - \boldsymbol{t})\, dg = f(\boldsymbol{t}), \qquad -\pi < \boldsymbol{t} < \pi,$$

sehingga $S_\infty(\boldsymbol{t})$ konvergen ke fungsi kontinu $f(\boldsymbol{t})$.

■

3.2 Fungsi Pembangkit dari Hasil Kali Polinomial Chebyshev $\boldsymbol{T_n(x)}$ dan $\boldsymbol{U_{n-1}(x)}$

Untuk membuktikan penurunan fungsi pembangkit dari hasil kali polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ digunakan persamaan-persamaan yang berlaku pada kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ yang termuat di dalam Teorema 2.5. Persamaan-persamaan yang berlaku pada kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ ini memegang peranan penting di dalam penurunan fungsi pembangkit dari hasil kali polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$. Seperti pada pembuktian fungsi pembangkit sebelumnya, sifat keterhubungan polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ terhadap kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ juga digunakan pada penurunan fungsi pembangkit ini.

Berdasarkan persamaan (2.12) dapat dinyatakan bahwa fungsi pembangkit dari hasil kali polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ termuat di dalam bagian imajiner dari fungsi pembangkit $\mathbf{T}_n^2(x)$. Berikut ini adalah penurunan fungsi pembangkit biasa dan fungsi pembangkit eksponensial dari hasil kali polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$**.** Untuk menurunkan fungsi pembangkit ini diperlukan lemma berikut.

Lemma 3.10

Untuk suatu bilangan real x dengan $\psi = \arccos(x)$, berlaku persamaan berikut:

$$\frac{1}{1-\xi e^{2i\psi}} = \frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi ix\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}, \qquad -1 \le x \le 1\,. \tag{3.20}$$

Bukti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\xi e^{2i\psi}} &= \frac{1}{1-\xi\big(\cos(2\psi)+i\sin(2\psi)\big)} \\
&= \frac{1}{1-\xi(\cos^2\psi-\sin^2\psi+2\,i\sin\psi\cos\psi)} \\
&= \frac{1}{1-\xi\left(x^2-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2+2\,i\sqrt{1-x^2}\,x\right)} \\
&= \frac{1}{1-\xi\left((2x^2-1)+2\,i\,x\sqrt{1-x^2}\right)} \\
&= \frac{1}{1-2\xi x^2-\xi-2\xi ix\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1-2\xi x^2-\xi+2\xi ix\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x^2-\xi+2\xi ix\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi ix\sqrt{1-x^2}}{\big(1-\xi(2x^2-1)\big)^2+4\xi^2x^2(1-x^2)} \\
&= \frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi ix\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2(4x^4-4x^2+1)+4\xi^2x^2-4\xi^2x^4} \\
&= \frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi ix\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+4\xi^2x^4-4\xi^2x^2+\xi^2+4\xi^2x^2-4\xi^2x^4} \\
&= \frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi ix\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\,.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa

$$\frac{1}{1-\xi e^{2i\psi}} = \frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi ix\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\,. \qquad \blacksquare$$

Pada Teorema 3.11 ditunjukkan fungsi pembangkit biasa dari $|\mathbf{T}_n(x)|^2$ dan $\mathbf{T}_n^2(x)$.

Teorema 3.11 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, berlaku persamaan berikut:

(i) $$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n |\mathbf{T}_n(x)|^2 = \frac{1}{1-\xi}$$

(ii) $$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \mathbf{T}_n^2(x) = \frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi i x\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}, \quad -1 \le x \le 1 . \tag{3.21}$$

Bukti (i)

Berdasarkan persamaan pertama pada Teorema 2.5, maka

$$\xi|\mathbf{T}_n(x)|^2 < |\xi||\mathbf{T}_n(x)|^2 < 1.1 = 1$$

sehingga

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n |\mathbf{T}_n(x)|^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n$$

$$= 1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots = \frac{1}{1-\xi}.$$

■

Bukti (ii)

Karena $|\mathbf{T}_n^2(x)| = \left|\left(e^{i\arccos(x)}\right)^{2n}\right| \le 1$ dan $|\xi| < 1$, maka

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \mathbf{T}_n^2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \left(e^{2i\arccos(x)}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi e^{2i\arccos(x)}\right)^n$$

$$= 1 + \xi e^{2i\arccos(x)} + \left(\xi e^{2i\arccos(x)}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-\xi e^{2i\arccos(x)}} .$$

Berdasarkan Lemma 3.10dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{1}{1-\xi e^{2i\arccos(x)}} = \frac{1}{1-\xi e^{2i\psi}} = \frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi i x\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2} .$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,\mathbf{T}_n^2(x)=\frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi ix\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\,.$$

■

Berikut ini merupakan penurunan fungsi pembangkit biasa dari hasil kali $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ yang merupakan akibat dari Teorema 3.11.

Teorema 3.12 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi|<1$, fungsi pembangkit biasa dari hasil kali $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,T_n(x)U_{n-1}(x)=\frac{\xi x}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\,,\qquad -1\le x\le 1\,. \tag{3.22}$$

Bukti

Berdasarkan persamaan ketiga pada Teorema 2.5 bahwa

$$2\sqrt{1-x^2}\,T_n(x)U_{n-1}(x)=\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)$$

$$T_n(x)U_{n-1}(x)=\frac{\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)}{2\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{3.23}$$

Jika pada persamaan (3.23) kedua sisi dikalikan dengan ξ^n dan dijumlahkan dari $n=1$ sampai ∞, maka diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,T_n(x)U_{n-1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,\frac{\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)\right)$$

$$=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)\right). \tag{3.24}$$

Berdasarkan Teorema 3.11 (ii), persamaan (3.24) dapat diuraikan menjadi sebagai berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n T_n(x) U_{n-1}(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1-\xi(2x^2-1)+2\xi i x\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}-1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{2\xi x\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}$$

$$= \frac{\xi x}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\,.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n T_n(x) U_{n-1}(x) = \frac{\xi x}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\,.$$

■

Selanjutnya akan ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari hasil kali $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$. Untuk menurunkannya, dibutuhkan lemma berikut ini.

Lemma 3.13

Untuk suatu bilangan real x dimana $-1 \leq x \leq 1$ dengan $\psi = \arccos(x)$, berlaku persamaan berikut:

$$e^{\xi e^{2 i\psi}} = e^{\xi(2x^2-1)}\left(\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right). \qquad (3.25)$$

Bukti

$$e^{\xi e^{2 i\psi}} = e^{\xi}\left(e^{i\psi}\right)^2$$

$$= e^{\xi(\cos\psi + i\sin\psi)^2}$$

$$= e^{\xi\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^2} = e^{\xi\left(x^2+2ix\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)\right)}$$

$$= e^{\xi(2x^2-1)} e^{\xi 2 i x\sqrt{1-x^2}}$$

$$= e^{\xi(2x^2-1)}\left(\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa

$$e^{\xi e^{2 i\psi}} = e^{\xi(2x^2-1)}\left(\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

■

Pada Teorema 3.14 ditunjukkan fungsi pembangkit eksponensial dari $|\mathbf{T}_n(x)|^2$ dan $\mathbf{T}_n^2(x)$.

Teorema 3.14 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit eksponensial dari $|\mathbf{T}_n(x)|^2$ dan $\mathbf{T}_n^2(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

(i) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} |\mathbf{T}_n(x)|^2 = e^{\xi}$

(ii) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathbf{T}_n^2(x) = e^{\xi(2x^2-1)} \left(\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) + i \sin\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) \right)$

dimana

$$-1 \leq x \leq 1 . \tag{3.26}$$

Bukti (i)

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} |\mathbf{T}_n(x)|^2 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \\ &= \frac{\xi^0}{0!} + \frac{\xi^1}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} + \cdots \\ &= 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \cdots \\ &= 1.e^0 + \xi.e^0 + \frac{\xi^2}{2!} e^0 + \cdots \end{aligned} \tag{3.27}$$

Persamaan (3.27) merupakan ekspansi fungsi e^{ξ} dalam deret MacLaurin. Jadi, terbukti bahwa

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} |\mathbf{T}_n(x)|^2 = e^{\xi} .$$

■

Bukti (ii)

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathbf{T}_n^2(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left(e^{i\,n \arccos(x)}\right)^2 \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\xi^n e^{2\,i\,n \arccos(x)}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\xi e^{2\,i \arccos(x)}\right)^n \end{aligned}$$

$$= \exp\left(\xi e^{2i \arccos(x)}\right). \tag{3.28}$$

Berdasarkan Lemma 3.13, persamaan (3.28) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathbf{T}_n^2(x) = \exp\left(\xi e^{2i \arccos(x)}\right)$$
$$= e^{\xi(2x^2-1)} \left(\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) + i \sin\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathbf{T}_n^2(x) = e^{\xi(2x^2-1)} \left(\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) + i \sin\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

■

Berdasarkan Lemma 3.13 dan Teorema 3.14 akan ditunjukkan fungsi pembangkit eksponensial dari hasil kali $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$. Teorema 3.15 ini merupakan akibat dari Teorema 3.14.

Teorema 3.15 (Clamente C., 2010)

Untuk bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit eksponensial dari hasil kali $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x) U_{n-1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-\mathrm{x}^2}} e^{\xi(2x^2-1)} \sin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right),$$
$$-1 \le x \le 1. \tag{3.29}$$

Bukti

Berdasarkan persamaan ketiga pada Teorema 2.5, seperti halnya pada persamaan (3.23), jika pada persamaan (3.23) kedua sisi dikalikan dengan $\frac{\xi^n}{n!}$ dan dijumlahkan dari $n = 1$ sampai ∞, fungsi pembangkit ekponensial dari hasil kali $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$ dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n(x) U_{n-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)}{2\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.30}$$

BerdasarkanTeorema 3.14 (ii), persamaan (3.30) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(e^{\xi(2x^2-1)}\left(\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) + i\,\sin\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right) - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}e^{\xi(2x^2-1)}\,\sin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x)U_{n-1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}e^{\xi(2x^2-1)}\,\sin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

■

3.3 Fungsi Pembangkit dari Generalisasi Polinomial Chebyshev $T_n(x)$ dan $U_{n-1}(x)$

Pada pembahasan selanjutnya akan ditunjukkan formula yang lebih rumit hasil penurunan fungsi pembangkit dari generalisasi polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Adapun fungsi pembangkit yang akan diturunkan adalah fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dan $U_{n-1+l}(x)$, $T_n^2(x)$ dan $U_{n-1}^2(x)$, $T_n(x)T_n(y)$ dan $U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$, serta $U_{n-1}(x)T_n(y)$ dan $U_{n-1}(y)T_n(x)$. Seperti pada pembahasan sebelumnya, bagian real dan imajiner dari fungsi pembangkit kuantitas kompleks digunakan di setiap penurunan fungsi pembangkit ini.

3.3.1 Fungsi Pembangkit dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dan $U_{n-1+l}(x)$

Sebelum menurunkan fungsi pembangkit biasa dari $T_{n+l}(x)$ dan $U_{n-1+l}(x)$ akan diturunkan fungsi pembangkit biasa dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_{n+l}(x)$. Untuk menurunkan fungsi pembangkit biasa dari $\mathbf{T}_{n+l}(x)$ dibutuhkan lemma berikut ini.

Lemma 3.16

Untuk suatu bilangan real x dimana $-1 \leq x \leq 1$ dengan $\psi = \arccos(x)$, berlaku persamaan berikut:

$$\frac{e^{il\psi}}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{(1-\xi x)e^{il\psi} + \xi\sqrt{1-x^2}(i\cos(l\psi) - \sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2} \quad . \qquad (3.31)$$

Bukti

Dari Lemma 3.1 diperoleh

$$\frac{1}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2} \, .$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
\frac{e^{il\psi}}{1-\xi e^{i\psi}} &= (\cos(l\psi) + i\sin(l\psi))\frac{1-\xi x + i\xi\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2} \\
&= \frac{(1-\xi x)(\cos(l\psi) + i\sin(l\psi)) + i\xi\sqrt{1-x^2}(\cos(l\psi) + i\sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2} \\
&= \frac{(1-\xi x)e^{il\psi} + i\xi\sqrt{1-x^2}\cos(l\psi) - \xi\sqrt{1-x^2}\sin(l\psi)}{1-2\xi x+\xi^2} \\
&= \frac{(1-\xi x)e^{il\psi} + \xi\sqrt{1-x^2}(i\cos(l\psi) - \sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2} \, .
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa

$$\frac{e^{il\psi}}{1-\xi e^{i\psi}} = \frac{(1-\xi x)e^{il\psi} + \xi\sqrt{1-x^2}(i\cos(l\psi) - \sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2} \, .$$

■

Pada Teorema 3.17 ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit biasa dari kuantias kompleks $\mathbf{T}_{n+l}(x)$.

Teorema 3.17 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$ dan $\psi = \arccos(x)$, berlaku persamaan berikut:

$$e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, \mathbf{T}_{n+l}(x) = \frac{(1-\xi x)e^{il\psi} + \xi\sqrt{1-x^2}(i\cos(l\psi) - \sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2},$$

$$-1 \leq x \leq 1 \, . \qquad (3.32)$$

Bukti

$$e^{i\,l\,\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathrm{T}_{n+l}(x) = e^{i\,l\,\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, e^{i(n+l)\psi} = e^{i\,l\,\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, e^{i\,n\,\psi} e^{i\,l\,\psi}$$

$$= e^{i\,l\,\psi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, e^{i\,n\,\psi}\right) = e^{i\,l\,\psi}\,\frac{1}{1-\xi e^{i\,\psi}}\,.$$

Berdasarkan Lemma 3.16 dapat disimpulkan bahwa

$$e^{i\,l\,\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathrm{T}_{n+l}(x) = e^{i\,l\,\psi}\,\frac{1}{1-\xi e^{i\,\psi}}$$

$$= \frac{(1-\xi x)e^{i\,l\,\psi} + \xi\sqrt{1-x^2}(i\cos(l\psi) - \sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2}\,.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$e^{i\,l\,\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathrm{T}_{n+l}(x) = \frac{(1-\xi x)e^{i\,l\,\psi} + \xi\sqrt{1-x^2}(i\cos(l\psi) - \sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2}\,.$$

■

Pada Teorema 3.18 ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dan $U_{n-1+l}(x)$ yang merupakan akibat dari Teorema 3.17.

Teorema 3.18 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dan $U_{n-1+l}(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

(i) $$\cos(l \arccos(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, T_{n+l}(x) = \frac{(1-\xi x)T_l(x) - \xi(1-x^2)U_{l-1}(x)}{1-2\xi x+\xi^2}$$

(ii) $$\frac{\sin(l \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, U_{n-1+l}(x) = \frac{\xi T_l(x) + (1-\xi x)U_{l-1}(x)}{1-2\xi x+\xi^2},$$

$$-1 \le x \le 1\,. \tag{3.33}$$

Bukti (i)

Berdasarkan Teorema 3.17 dan sifat keterhubungan polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ terhadap kuantitas kompleks $\mathbf{T}_{n+l}(x)$ pada persamaan (2.11), fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dapat diturunkan menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\cos(l\arccos(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, T_{n+l}(x) &= \cos(l\arccos(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_{n+l}(x)\big) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathbf{T}_{n+l}(x)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(1-\xi x)e^{il\psi} + \xi\sqrt{1-x^2}(i\cos(l\psi) - \sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2}\right) \\
&= \frac{(1-\xi x)\cos(l\psi) - \xi\sqrt{1-x^2}\sin(l\psi)}{1-2\xi x+\xi^2} \\
&= \frac{(1-\xi x)T_l(x) - \xi\sqrt{1-x^2}U_{l-1}(x)\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi x+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\cos(l\arccos(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, T_{n+l}(x) = \frac{(1-\xi x)T_l(x) - \xi(1-x^2)U_{l-1}(x)}{1-2\xi x+\xi^2}.$$

■

Langkah-langkah pembuktian yang sama juga dapat dilakukan di dalam penurunan fungsi pembangkit biasa dari polinomial Chebyshev $U_{n-1+l}(x)$.

Bukti (ii)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(l\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, U_{n-1+l}(x) &= \frac{\sin(l\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \frac{\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_{n+l}(x)\big)}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sin(l\arccos(x)) + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathbf{T}_{n+l}(x)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Im}\left(e^{i\,l\,\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathbf{T}_{n+l}(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Im}\left(\frac{(1-\xi x)e^{i\,l\,\psi} + \xi\sqrt{1-x^2}(i\cos(l\psi) - \sin(l\psi))}{1-2\xi x+\xi^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{(1-\xi x)\sin(l\psi) + \xi\sqrt{1-x^2}\cos(l\psi)}{1-2\xi x+\xi^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{(1-\xi x)\sqrt{1-x^2}U_{l-1}(x) + \xi\sqrt{1-x^2}T_l(x)}{1-2\xi x+\xi^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\left(\frac{(1-\xi x)U_{l-1}(x) + \xi T_l(x)}{1-2\xi x+\xi^2} \right).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\frac{\sin(l\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, U_{n-1+l}(x) = \frac{\xi T_l(x) + (1-\xi x)U_{l-1}(x)}{1-2\xi x+\xi^2}.$$

■

Selanjutnya akan ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dan $U_{n-1+l}(x)$ dimana di dalam penurunan fungsi pembangkit tersebut juga digunakan sifat keterhubungan polinomial Chebyshev terhadap kuantitas kompleks $\mathbf{T}_{n+l}(x)$. Untuk menurunkan fungsi pembangkit dari $\mathbf{T}_{n+l}(x)$ dibutuhkan lemma berikut.

Lemma 3.19

Untuk suatu bilangan real x dimana $-1 \le x \le 1$ dengan $\psi = \arccos(x)$, berlaku persamaan berikut:

$$e^{i\,l\,\psi}\exp(\xi e^{i\psi}) = \cos(l\psi)e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$
$$+ i\sin(l\psi)\, e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right) \qquad (3.34)$$

Bukti

$$e^{i\,l\,\psi}\exp(\xi e^{i\psi}) = (\cos(l\psi) + i\sin(l\psi))e^{\xi(\cos\psi + i\sin\psi)}$$
$$= (\cos(l\psi) + i\sin(l\psi))\left(e^{\xi\cos\psi} e^{\xi\, i\sin\psi}\right)$$

$$= (\cos(l\psi) + i\sin(l\psi))\left(e^{\xi\cos\psi}(\cos(\xi\sin\psi) + i\sin(\xi\sin\psi))\right)$$

$$= (\cos(l\psi) + i\sin(l\psi))\left(e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)\right)$$

$$= \cos(l\psi)e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

$$+ i\sin(l\psi)\, e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa

$$e^{il\psi}\exp\left(\xi e^{i\psi}\right) = \cos(l\psi)e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

$$+ i\,\sin(l\psi)\, e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

■

Pada Teorema 3.20 ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari kuantitas kompleks $\mathbf{T}_{n+l}(x)$.

Teorema 3.20 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$ dan $\psi = \arccos(x)$, berlaku persamaan berikut:

$$e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_{n+l}(x) = \cos(l\psi)e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

$$+ i\sin(l\psi)\, e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right),$$

$$-1 \le x \le 1\,. \qquad (3.35)$$

Bukti

$$e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_{n+l}(x) = e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}e^{i(n+l)\psi}$$

$$= e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\left(e^{in\psi}e^{il\psi}\right)$$

$$= e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\xi e^{i\psi}\right)^n}{n!}e^{il\psi}$$

$$= e^{il\psi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\xi e^{i\psi}\right)^n}{n!}\right).$$

Berdasarkan Lemma 3.19 dapat disimpulkan bahwa

$$e^{i\,l\,\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathbf{T}_{n+l}(x) = e^{i\,l\,\psi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\xi e^{i\psi}\right)^n}{n!}\right) = e^{i\,l\,\psi} \exp\left(\xi e^{i\,\psi}\right)$$

$$= \cos(l\psi) e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right) +$$

$$i\sin(l\psi)\, e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$e^{i\,l\,\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathbf{T}_{n+l}(x) = \cos(l\psi) e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

$$+ i\sin(l\psi)\, e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

■

Berdasarkan Lemma 3.19 dan Teorema 3.20 akan ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dan $U_{n-1+l}(x)$. Teorema 3.21 ini merupakan akibat dari Teorema 3.25.

Teorema 3.21 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$ dan $\psi = \arccos(x)$, fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dan $U_{n-1+l}(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

(i) $\cos(l \arccos(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_{n+l}(x)$

$$= e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) T_l(x) - \sqrt{1-x^2}\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) U_{l-1}(x)\right)$$

(ii) $\frac{\sin(l \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1+l}(x)$

$$= \frac{e^{\xi x}}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) U_{l-1}(x) + \sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) T_l(x)\right),$$

$$-1 \le x \le 1\,. \qquad (3.36)$$

Bukti (i)

Berdasarkan Teorema 3.20 dan sifat keterhubungan polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ terhadap $\mathbf{T}_{n+l}(x)$ pada persamaan (2.11), fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_{n+l}(x)$ dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\cos(l\ \arccos(x)) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_{n+l}(x) = \cos(l\ \arccos(x)) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_{n+l}(x)\big)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_{n+l}(x)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\Big(\cos(l\psi)e^{\xi x}\Big(\cos\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big) + i\sin\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big)\Big)$$

$$+ i\sin(l\psi)\,e^{\xi x}\Big(\cos\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big) + i\sin\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big)\Big)\Big)$$

$$= \cos(l\psi)\,e^{\xi x}\cos\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big) + i^2\sin(l\psi)e^{\xi x}\sin\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big)$$

$$= \cos(l\psi)\,e^{\xi x}\cos\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big) - \sin(l\psi)e^{\xi x}\sin\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big)$$

$$= T_l(x)e^{\xi x}\cos\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big) - \sqrt{1-x^2}\,U_{l-1}(x)e^{\xi x}\sin\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big).$$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa

$$\cos(l\ \arccos(x)) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_{n+l}(x)$$

$$= e^{\xi x}\Big(\cos\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big)T_l(x) - \sqrt{1-x^2}\sin\Big(\xi\sqrt{1-x^2}\Big)U_{l-1}(x)\Big).$$

■

Langkah-langkah pembuktian yang sama dapat dilakukan pada penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $U_{n-1+l}(x)$.

Bukti (ii)

$$\frac{\sin(l\ \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1+l}(x) = \frac{\sin(l\ \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\frac{\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_{n+l}(x)\big)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sin(l\ \arccos(x)) + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_{n+l}(x)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Im}\left(e^{il\psi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathbf{T}_{n+l}(x)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Im}\left(\cos(l\psi) e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)\right.$$
$$\left. + i\sin(l\psi)\, e^{\xi x}\left(\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + i\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\cos(l\psi)\, e^{\xi x}\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + \sin(l\psi) e^{\xi x}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(T_l(x) e^{\xi x}\sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right) + \sqrt{1-x^2}\,U_{l-1}(x) e^{\xi x}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\frac{\sin(l \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1+l}(x)$$
$$= \frac{e^{\xi x}}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\cos\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)U_{l-1}(x) + \sin\left(\xi\sqrt{1-x^2}\right)T_l(x)\right).$$

■

3.3.2 Fungsi Pembangkit dari $\boldsymbol{T_n^2(x)}$ dan $\boldsymbol{U_{n-1}^2(x)}$

Untuk menurunkan fungsi pembangkit $T_n^2(x)$ dan $U_{n-1}^2(x)$ digunakan persamaan-persamaan yang berlaku pada kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ yang termuat di dalam Teorema 2.5. Seperti pada pembuktian-pembuktian sebelumnya, sifat keterhubungan polinomial Chebyshev $T_n(x)$dan $U_{n-1}(x)$ terhadap kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ juga digunakan pada penurunan fungsi pembangkit ini. Berikut ini adalah teorema yang menunjukkan bentuk umum fungsi pembangkit biasa dari $T_n^2(x)$ dan $U_{n-1}^2(x)$ yang merupakan akibat dari Teorema 3.11.

Teorema 3.22 (Clamente C., 2010)
Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit biasa dari $T_n^2(x)$ dan $U_{n-1}^2(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

(i) $$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n T_n^2(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\left(1 + \frac{(1-\xi)(1-\xi(2x^2-1))}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\right)$$

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n U_{n-1}^2(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\frac{1}{1-\xi}\left(1 - \frac{(1-\xi)(1-\xi(2x^2-1))}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\right),$$

$$-1 \le x \le 1\,. \qquad (3.37)$$

Bukti (i)

Dengan menjumlahkan persamaan pertama dan kedua pada Teorema 2.5 diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} |\mathbf{T}_n(x)|^2 = T_n^2(x) + (1-x^2)U_{n-1}^2(x) \\ \mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) = T_n^2(x) - (1-x^2)U_{n-1}^2(x) \\ \hline |\mathbf{T}_n(x)|^2 + \mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) = 2T_n^2(x) \end{array} + \qquad (3.38)$$

Jika pada persamaan (3.38) kedua sisi dikalikan dengan ξ^n dan dijumlahkan dari $n = 1$ sampai ∞, kemudian kedua ruas dijumlahkan dengan 2, maka diperoleh

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\xi^n T_n^2(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, |\mathbf{T}_n(x)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big)$$

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\xi^n T_n^2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, |\mathbf{T}_n(x)|^2 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\, \mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big). \qquad (3.39)$$

Berdasarkan Teorema 3.11 (i) dan (ii), persamaan (3.48) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\xi^n T_n^2(x) = \frac{1}{1-\xi} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\xi e^{2\,i\,\mathrm{arccos}(x)}}\right)$$

$$2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n T_n^2(x)\right) = \frac{1}{1-\xi} + \mathrm{Re}\left(\frac{1-\xi(2x^2-1) + 2\xi i x\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\xi} + \frac{1-\xi(2x^2-1)}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n T_n^2(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\left(1 + \frac{(1-\xi)(1-\xi(2x^2-1))}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n T_n^2(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\left(1 + \frac{(1-\xi)(1-\xi(2x^2-1))}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\right).$$

■

Bukti (ii)

Langkah–langkah pembuktian yang sama dapat dilakukan pada pembuktian (ii). Dengan mengurangi persamaan pertama dan kedua pada Teorema 2.5 diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{array}{c} |\mathbf{T}_n(x)|^2 = T_n^2(x) + (1-x^2)U_{n-1}^2(x) \\ \underline{\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) = T_n^2(x) - (1-x^2)U_{n-1}^2(x)} \; - \\ |\mathbf{T}_n(x)|^2 - \mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big) = 2(1-x^2)U_{n-1}^2(x) \end{array} \tag{3.40}$$

Jika pada persamaan (3.40) kedua sisi dikalikan dengan ξ^n dan dijumlahkan dari $n = 1$ sampai ∞, kemudian kedua ruas dijumlahkan dengan 2, maka diperoleh

$$2(1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\, U_{n-1}^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,|\mathbf{T}_n(x)|^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big)$$

$$2(1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\, U_{n-1}^2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,|\mathbf{T}_n(x)|^2 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big)$$

$$2(1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\, U_{n-1}^2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,|\mathbf{T}_n(x)|^2 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\,\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n^2(x)\big)\right) \tag{3.41}$$

Berdasarkan Teorema 3.11 (i) dan (ii), fungsi pembangkit pada persamaan (3.41) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2(1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\, U_{n-1}^2(x) &= \frac{1}{1-\xi} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\xi e^{2i\arccos(x)}}\right) \\ &= \frac{1}{1-\xi} - \mathrm{Re}\left(\frac{1-\xi(2x^2-1) + 2\xi i x\sqrt{1-x^2}}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\right) \\ &= \frac{1}{1-\xi} - \frac{1-\xi(2x^2-1)}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n\, U_{n-1}^2(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\frac{1}{1-\xi}\left(1 - \frac{(1-\xi)(1-\xi(2x^2-1))}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n U_{n-1}^2(x) = \frac{1}{2(1-x^2)} \frac{1}{1-\xi}\left(1 - \frac{(1-\xi)(1-\xi(2x^2-1))}{1-2\xi(2x^2-1)+\xi^2}\right).$$

■

Selanjutnya ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari polinomial Chebyshev $T_n^2(x)$ dan $U_{n-1}^2(x)$ yang merupakan akibat dari Teorema 3.14.

Teorema 3.23 (Clamente C., 2010)

Untuk bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit eksponensial dari $T_n^2(x)$ dan $U_{n-1}(x)^2$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

(i) $$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n^2(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\xi} + e^{\xi(2x^2-1)} \cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}^2(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left(e^{\xi} - e^{\xi(2x^2-1)} \cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right),$$

$$-1 \leq x \leq 1 . \tag{3.42}$$

Bukti (i)

Berdasarkan persamaan (3.38) bahwa $2\, T_n^2(x) = |\mathbf{T}_n(x)|^2 + \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)$, jika pada persamaan (3.38) kedua sisi dikalikan dengan ξ^n dan dijumlahkan dari $n = 1$ sampai ∞, kemudian kedua ruas dijumlahkan dengan 2, maka diperoleh

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\xi^n}{n!} T_n^2(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} |\mathbf{T}_n(x)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)$$

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\xi^n}{n!} T_n^{\mathbf{2}}(x)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} |\mathbf{T}_n(x)|^2 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right) \tag{3.43}$$

Berdasarkan Teorema 3.14 (i) dan (ii), persamaan (3.52) dapat diuraikan menjadi sebagai berikut:

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\xi^n}{n!} T_n^2(x) = e^{\xi} + \mathrm{Re}\left(e^{\xi e^{1\, i \arccos(x)}}\right)$$

$$2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n^2(x)\right)$$

$$= e^{\xi} + e^{\xi(2x^2-1)}\,\mathrm{Re}\left(\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right) + i\,\sin\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

$$= e^{\xi} + e^{\xi(2x^2-1)}\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n^2(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\xi} + e^{\xi(2x^2-1)}\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} T_n^2(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\xi} + e^{\xi(2x^2-1)}\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

∎

Bukti (ii)

Langkah–langkah pembuktian yang sama dapat dilakukan pada pembuktian (ii). Berdasarkan persamaan (3.40) bahwa

$2(1-x^2)U_{n-1}^2(x) = |\mathbf{T}_n(x)|^2 - \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)$, jika pada persamaan (3.40) kedua sisi dikalikan dengan ξ^n dan dijumlahkan dari $n = 1$ sampai ∞, kemudian kedua ruas dijumlahkan dengan 2, maka diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} 2(1-x^2)U_{n-1}^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} |\mathbf{T}_n(x)|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} 2(1-x^2)U_{n-1}^2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} |\mathbf{T}_n(x)|^2 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} 2(1-x^2)U_{n-1}^2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} |\mathbf{T}_n(x)|^2 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n^2(x)\right)\right) \tag{3.44}$$

Berdasarkan Teorema 3.14 (i) dan (ii), persamaan (3.51) dapat diuraikan menjadi sebagai berikut:

$$2(1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}^2(x) = \left(e^{\xi} - \mathrm{Re}\left(e^{\xi e^{1\, i\arccos(x)}}\right)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}^2(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left(e^{\xi} - \mathrm{Re}\left(e^{\xi e^{1\, i\arccos(x)}}\right)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}^2(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left(e^{\xi} - e^{\xi(2x^2-1)}\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}^2(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left(e^{\xi} - e^{\xi(2x^2-1)}\cos\left(2\xi x\sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

■

3.3.3 Fungsi Pembangkit dari $\boldsymbol{T_n(x)T_n(y)}$ dan $\boldsymbol{U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)}$ serta $\boldsymbol{U_{n-1}(x)T_n(y)}$ dan $\boldsymbol{U_{n-1}(y)T_n(x)}$

Pada pembahasan ini akan ditunjukkan formula fungsi pembangkit yang lebih rumit dari generalisasi hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Untuk menurunkan fungsi pembangkit ini digunakan persamaan-persamaan yang berlaku pada Teorema 2.7. Seperti pada pembahasan sebelumnya, kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ digunakan di dalam penurunan fungsi pembangkit ini. Sebelum menurunkan fungsi pembangkit selanjutnya dibutuhkan lemma-lemma berikut.

Lemma 3.24

Untuk suatu bilangan real $x, y,$ dan ξ dimana $\alpha = \xi x\sqrt{1-y^2}$, $\beta = \xi\sqrt{1-x^2}\,y$, dan $|\xi|<1$, berlaku persamaan berikut:

$$\text{(i)}\, e^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}\,y}e^{-i\,\xi x\sqrt{1-y^2}} = \cos(\beta-\alpha) - i\sin(\alpha-\beta)$$

$$\text{(ii)}\, e^{i\,\xi x\sqrt{1-y^2}}e^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}\,y} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

$$-1 \le x \le 1 \quad , \quad -1 \le y \le 1 . \qquad (3.45)$$

Bukti (i)

$$\begin{aligned}
e^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}y}e^{-i\,\xi x\sqrt{1-y^2}} &= e^{i\,\beta}e^{-i\,\alpha}\\
&= (\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\alpha - i\sin\alpha)\\
&= \cos\beta\,\cos\alpha\; - i\sin\alpha\,\cos\beta + i\,\cos\alpha\,\sin\beta + \sin\beta\,\sin\alpha\\
&= \cos\beta\,\cos\alpha\; + \sin\beta\,\sin\alpha\; - i\,(\sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta)\\
&= \cos(\beta-\alpha) - i\sin(\alpha-\beta).
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa

$$e^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}y}e^{-i\,\xi x\sqrt{1-y^2}} = \cos(\beta-\alpha) - i\sin(\alpha-\beta)\ .$$

Bukti (ii)

$$\begin{aligned}
e^{i\,\xi x\sqrt{1-y^2}}e^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}y} &= e^{i\,\alpha}e^{i\,\beta}\\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\
&= \cos\alpha\,\cos\beta + i\,\sin\alpha\,\cos\beta + i\,\cos\alpha\,\sin\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\\
&= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta + i\,(\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta)\\
&= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa

$$e^{i\,\xi x\sqrt{1-y^2}}e^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}y} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\ .$$

■

Lemma 3.25

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi|<1$ dengan $\psi = \arccos(x)$, $\omega = \arccos(y)$, berlaku persamaan berikut:

(i) $\exp\left(\xi e^{i\,\psi}e^{-i\,\omega}\right) = e^{\xi F_+}(\cos(\beta-\alpha) - i\sin(\alpha-\beta))$

(ii) $\exp\left(\xi e^{i\,\psi}e^{i\,\omega}\right) = e^{\xi F_-}(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$

dimana $\alpha = \xi x\sqrt{1-y^2}$ dan $\beta = \xi\sqrt{1-x^2}\,y$,

$$F_{\pm} = xy \pm \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},$$

$$-1 \le x \le 1 \quad , \quad -1 \le y \le 1 \quad . \tag{3.46}$$

Bukti (i)

Diketahui bahwa

$$e^{i\psi}e^{-i\omega} = \cos\psi\cos\omega - i\cos\psi\sin\omega + i\cos\omega\sin\psi + \sin\psi\sin\omega$$
$$= \cos(\arccos(x))\cos(\arccos(y)) - i\cos(\arccos(x))\sin(\arccos(y)) + i\cos(\arccos(y))\sin(\arccos(x)) + \sin(\arccos(x))\sin(\arccos(y))$$
$$= xy - i\,x\sqrt{1-y^2} + i\sqrt{1-x^2}y + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,,$$

maka

$$\exp\left(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\right)$$
$$= \exp\left(\xi\left(xy - i\,x\sqrt{1-y^2} + i\sqrt{1-x^2}y + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)\right)$$
$$= \exp\left(\xi\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)\right)\exp\left(\xi\left(-i\,x\sqrt{1-y^2} + i\sqrt{1-x^2}y\right)\right)$$
$$= e^{\xi F_+}\left(\mathrm{e}^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}y}\,\mathrm{e}^{-i\,\xi x\sqrt{1-y^2}}\right).$$

Berdasarkan Lemma 3.24 (i), dapat disimpulkan bahwa

$$e^{\xi F_+}\left(\mathrm{e}^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}y}\,\mathrm{e}^{-i\,\xi x\sqrt{1-y^2}}\right) = e^{\xi F_+}(\cos(\beta-\alpha) - i\sin(\alpha-\beta))\,.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\exp\left(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\right) = e^{\xi F_+}(\cos(\beta-\alpha) - i\sin(\alpha-\beta))\,.$$

■

Bukti (ii)

Langkah pembuktian yang sama dapat dilakukan untuk pembuktian kedua pada persamaan (3.46) .

$$e^{i\psi}e^{i\omega} = \cos\psi\cos\omega + i\cos\psi\sin\omega + i\cos\omega\sin\psi - \sin\psi\sin\omega$$
$$= \cos(\arccos(x))\cos(\arccos(y)) + i\cos(\arccos(x))\sin(\arccos(y)) + i\cos(\arccos(y))\sin(\arccos(x)) - \sin(\arccos(x))\sin(\arccos(y))$$
$$= xy + i\,x\sqrt{1-y^2} + i\sqrt{1-x^2}y - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

maka

$$\exp\left(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\right) = \exp\left(\xi\left(xy + i\,x\sqrt{1-y^2} + i\sqrt{1-x^2}y - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)\right)$$
$$= \exp\left(\xi\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)\right)\exp\left(\xi\left(i\,x\sqrt{1-y^2} + i\sqrt{1-x^2}y\right)\right)$$

$$= e^{\xi F_-}\left(e^{i\,\xi x\sqrt{1-y^2}}\,e^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}y}\right).$$

Berdasarkan Lemma 3.24 (ii), dapat disimpulkan bahwa

$$e^{\xi F_-}\left(e^{i\,\xi x\sqrt{1-y^2}}\,e^{i\,\xi\sqrt{1-x^2}y}\right) = e^{\xi F_-}(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\exp\left(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\right) = e^{\xi F_-}(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

■

Pada Teorema 3.26 ditunjukkan bentuk umum fungsi pembangkit dari perkalian kuantitas kompleks.

Teorema 3.26

Untuk kuantitas kompleks $\mathbf{T}_n(x)$ serta konjugat kompleks $\overline{\mathbf{T}}_n(y)$, dan $\psi = \arccos(x)$, $\omega = \arccos(y)$, $\alpha = \xi x\sqrt{1-y^2}$, $\beta = \xi\sqrt{1-x^2}\,y$ dan $|\xi|<1$, berlaku persamaan berikut:

(i) $$2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right) = e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-) + e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+)$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right) = e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-) - e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+)$$

(iii) $$2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right) = e^{\xi F_+}\sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-}\sin(\xi G_+)$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right) = e^{\xi F_+}\sin(\xi G_-) - e^{\xi F_-}\sin(\xi G_+)$$

dimana $G_{\mp} = y\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{1-y^2}$,

$$F_{\mp} = xy \pm \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},$$

$$-1 \le x \le 1 \quad , \quad -1 \le y \le 1 \,. \tag{3.47}$$

Bukti (i)

$$2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)$$

$$=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big)\right)+\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)\right)$$

$$=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(e^{in\psi}e^{-in\omega}\big)\right)+\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(e^{in\psi}e^{in\omega}\big)\right)$$

$$=\left(1+\sum_{n=}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Re}\big(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\big)^n\right)+\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Re}\big(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\big)^n\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\big)^n}{n!}\right)+\mathrm{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\big)^n}{n!}\right).$$

Berdasarkan Teorema 3.5 dan Lemma 3.25 (i) dan (ii), dapat disimpulkan bahwa

$$\mathrm{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\big)^n}{n!}\right)+\mathrm{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\big)^n}{n!}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\exp\big(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\big)\right)+\mathrm{Re}\left(\exp\big(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\big)\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(e^{\xi F_+}(\cos(\boldsymbol{\beta}-\alpha)-\boldsymbol{i}\sin(\alpha-\boldsymbol{\beta}))\right)$$

$$+\mathrm{Re}\left(e^{\xi F_-}(\cos(\alpha+\boldsymbol{\beta})+\ i\sin(\alpha+\boldsymbol{\beta}))\right) \tag{3.48}$$

$$=e^{\xi F_+}\cos(\boldsymbol{\beta}-\alpha)+e^{\xi F_-}\cos(\alpha+\boldsymbol{\beta})$$

$$=e^{\xi F_+}\cos\big(\xi\sqrt{1-x^2}\,y-\xi x\sqrt{1-y^2}\big)+\ e^{\xi F_-}\cos\big(\xi x\sqrt{1-y^2}+\xi\sqrt{1-x^2}\,y\big)$$

$$=e^{\xi F_+}\cos\left(\xi\big(\sqrt{1-x^2}\,y-x\sqrt{1-y^2}\big)\right)+\ e^{\xi F_-}\cos\left(\xi\big(x\sqrt{1-y^2}+\right.$$

$1{-}x2\,y$

$$=e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-)+e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+)\ .$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)$$

$$=e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-)+e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+)\ . \qquad \blacksquare$$

Bukti (ii)

Untuk membuktikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)$$
$$=e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-)-e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+),$$

dapat dilakukan dengan proses pembuktian yang sama dengan pembuktian pertama pada persamaan (3.47).

Bukti (iii)

Seperti pembuktian pertama pada pesamaan (3.47), dengan mengganti bagian real menjadi imajiner, diperoleh

$$2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big)+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)$$
$$=\mathrm{Im}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\right)^n}{n!}\right)+\mathrm{Im}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\right)^n}{n!}\right)$$
$$=\mathrm{Im}\left(\exp\big(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\big)\right)+\mathrm{Im}\left(\exp\big(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\big)\right). \qquad (3.49)$$

Berdasarkan persamaan (3.48) dengan mengganti bagian real menjadi imajiner, persamaan (3.49) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\mathrm{Im}\left(\exp\big(\xi e^{i\psi}e^{-i\omega}\big)\right)+\mathrm{Im}\left(\exp\big(\xi e^{i\psi}e^{i\omega}\big)\right)$$
$$=\mathrm{Im}\left(e^{\xi F_+}(\cos(\beta-\alpha)-i\sin(\alpha-\beta))\right)$$
$$+\mathrm{Im}\left(e^{\xi F_-}(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))\right)$$
$$=e^{\xi F_+}(-\sin(\alpha-\beta))+e^{\xi F_-}\sin(\alpha+\beta)$$
$$=e^{\xi F_+}\left(-\sin\left(\xi x\sqrt{1-y^2}-\xi\sqrt{1-x^2}\,y\right)\right)$$
$$+e^{\xi F_-}\sin\left(\xi x\sqrt{1-y^2}+\xi\sqrt{1-x^2}\,y\right)$$
$$=e^{\xi F_+}\left(-\sin\left(\xi\left(x\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1-x^2}\,y\right)\right)\right)$$
$$+e^{\xi F_-}\sin\left(\xi\left(x\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}\,y\right)\right)$$

$$= e^{\xi F_+} \sin\left(-\xi\left(\sqrt{1-x^2}\, y - x\sqrt{1-y^2}\right)\right)$$
$$+\ e^{\xi F_-} \sin\left(\xi\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}\, y\right)\right)$$
$$= e^{\xi F_+} \sin\left(\xi\left(-\sqrt{1-x^2}\, y + x\sqrt{1-y^2}\right)\right)$$
$$+ e^{\xi F_-} \sin\left(\xi\left(x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}\, y\right)\right)$$
$$= e^{\xi F_+} \sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-} \sin(\xi G_+).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)$$
$$= e^{\xi F_+} \sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-} \sin(\xi G_+)\ .$$

■

Bukti (iv)

Untuk membuktikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \mathrm{Im}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)$$
$$= e^{\xi F_+} \sin(\xi G_-) - e^{\xi F_-} \sin(\xi G_+)$$

dapat dilakukan dengan proses pembuktian yang sama dengan pembuktian ketiga pada persamaan (3.47).

Berdasarkan Lemma 3.24, 3.25 dan Teorema 3.26 akan ditunjukkan bentuk umum fungsi pembangkit dari generalisasi hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua yang termuat di dalam Teorema 3.27 dan Teorema 3.28. Teorema 3.27 maupun Teorema 3.28 ini merupakan akibat dari Teorema 3.26.

Teorema 3.27 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit dari hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan hasil kali polinomial Chebyshev jenis kedua dapat dinyatakan sebagai berikut:

(i) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x)T_n(y)=\frac{1}{2}\left(e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-)+e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+)\right)$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\left(e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-)-e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+)\right)$$

dimana $F_{\pm}=xy\pm\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$,

$$G_{\pm}=y\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{1-y^2},$$

$$-1\le x\le 1 \quad , \quad -1\le y\le 1\,. \tag{3.50}$$

Bukti (i)

Dengan menjumlahkan persamaan pertama dan ketiga pada Teorema 2.7 diperoleh

$$\begin{array}{l}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)=T_n(x)T_n(y)+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)\\ \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)=T_n(x)T_n(y)-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)\quad +\\ \hline \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)+\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)=2\,T_n(x)T_n(y)\end{array} \tag{3.51}$$

Jika pada persamaan (3.51) kedua sisi dikalikan dengan $\frac{\xi^n}{n!}$ dan dijumlahkan dari $n=1$ sampai ∞, kemudian kedua ruas dijumlahkan dengan 2, maka diperoleh

$$2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x)T_n(y)$$

$$=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)$$

$$2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x)T_n(y)\right)=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)\right)$$

$$+\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)\right).$$

Berdasarkan Teorema 3.26 (i), diperoleh

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x)T_n(y)=\frac{1}{2}\left(e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-)+e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+)\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}T_n(x)T_n(y)=\frac{1}{2}\left(e^{\xi F_+}\cos(\xi G_-)+e^{\xi F_-}\cos(\xi G_+)\right).$$

■

Bukti (ii)

Langkah pembuktian yang sama dapat dilakukan untuk persamaan kedua. Dengan mengurangi persamaan pertama dan ketiga pada Teorema 2.7, diperoleh

$$\begin{array}{r}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)=T_n(x)T_n(y)+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)\\ \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)=T_n(x)T_n(y)-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)\\ \hline \mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)-\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)=2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)\end{array}-$$

(3.52)

Jika pada persamaan (3.52) kedua sisi dikalikan dengan $\frac{\xi^n}{n!}$ dan dijumlahkan dari $n=1$ sampai ∞, kemudian kedua ruas dijumlahkan dengan 2, maka diperoleh

$$2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)$$

$$2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)$$

$$2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$$
$$=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\right)\right)-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Re}\left(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\right)\right)$$

Berdasarkan Teorema 3.26 (ii) diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}(x) U_{n-1}(y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \left(e^{\xi F_+} \cos(\xi G_-) - e^{\xi F_-} \cos(\xi G_+)\right).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}(x) U_{n-1}(y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \left(e^{\xi F_+} \cos(\xi G_-) - e^{\xi F_-} \cos(\xi G_+)\right) .$$

■

Pada teorema selanjutnya akan ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit dari hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua.

Teorema 3.28 (Clamente C., 2010)

Untuk suatu bilangan real ξ sedemikian sehingga $|\xi| < 1$, fungsi pembangkit dari hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dapat dinyatakan sebagai berikut :

(i) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}(x) T_n(y) = \frac{1}{2} \frac{\left(e^{\xi F_+} \sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-} \sin(\xi G_+)\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} U_{n-1}(y) T_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\left(-e^{\xi F_+} \sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-} \sin(\xi G_+)\right)}{\sqrt{1-y^2}}$$

dimana $F_{\mp} = xy \pm \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$,

$G_{\mp} = y\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{1-y^2}$,

$-1 \leq x \leq 1 \quad , \quad -1 \leq y \leq 1 .$ (3.53)

Bukti (i)

Dengan menjumlahkan persamaan kedua dan keempat pada Teorema 2.7 diperoleh

$$\frac{\begin{array}{c}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)T_n(y) - \sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)T_n(x)\\ \mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)T_n(y) + \sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)T_n(x)\end{array}}{\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) + \mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) = 2\sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)T_n(y)} +$$

$$U_{n-1}(x)T_n(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\Big(\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) + \mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)\Big). \qquad (3.54)$$

Jika pada persamaan (3.54) kedua sisi dikalikan dengan $\frac{\xi^n}{n!}$ dan dijumlahkan dari $n=1$ sampai ∞, kemudian kedua ruas dijumlahkan dengan $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, maka diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)T_n(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)\right)$$

Berdasarkan Teorema 3.26 (iii) diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)T_n(y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\mathrm{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\big(e^{\xi F_+}\sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-}\sin(\xi G_+)\big).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(x)T_n(y) = \frac{1}{2}\frac{\big(e^{\xi F_+}\sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-}\sin(\xi G_+)\big)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

Bukti (ii)

Langkah pembuktian yang sama dapat dilakukan pada persamaan kedua. Dengan mengurangi persamaan kedua dan keempat pada teorema 2.7 diperoleh

$$\begin{array}{l} \operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)T_n(y) - \sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)T_n(x) \\ \underline{\operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) \;= \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)T_n(y) + \sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)T_n(x)} \; - \\ \operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) - \operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) = -2\sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)T_n(x) \end{array} \qquad (3.55)$$

Jika pada persamaan (3.55) kedua sisi dikalikan dengan $\frac{\xi^n}{n!}$ dan dijumlahkan dari $n = 1$ sampai ∞, maka diperoleh

$$\begin{aligned} -2\sqrt{1-y^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(y)T_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big) - 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big) \\ &= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\overline{\mathbf{T}}_n(y)\big)\right) - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\operatorname{Im}\big(\mathbf{T}_n(x)\mathbf{T}_n(y)\big)\right). \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 3.26 (iv) diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(y)T_n(x) &= \frac{1}{-2\sqrt{1-y^2}}\big(e^{\xi F_+}\sin(\xi G_-) - e^{\xi F_-}\sin(\xi G_+)\big) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\big(-e^{\xi F_+}\sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-}\sin(\xi G_+)\big) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}U_{n-1}(y)T_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\big(-e^{\xi F_+}\sin(\xi G_-) + e^{\xi F_-}\sin(\xi G_+)\big)}{\sqrt{1-y^2}}.$$

■

Untuk subbab terakhir ini hanya ditunjukkan penurunan fungsi pembangkit eksponensial dari generalisasi hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Dengan prosedur yang sama di dalam pembuktian seperti pada subbab-subbab sebelumnya, dapat dicari penurunan fungsi pembangkit biasa dari generalisasi hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Karena di dalam penurunan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev ini menggunakan sifat relasi polinomial Chebyshev di dalam kuantitas kompleks, maka penurunan fungsi pembangkit biasa dari perkalian kuantitas kompleks dicari terlebih dahulu. Untuk selanjutnya, penurunan fungsi pembangkit biasa dari perkalian kuantitas kompleks ini akan digunakan pada penurunan fungsi pembangkit biasa dari generalisasi hasil kali polinomial Chebyshev tersebut.

BAB 4
KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya diperoleh kesimpulan berikut:

1. Karena keterhubungan polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua di dalam kuantitas kompleks, untuk menurunkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev tersebut dapat digunakan fungsi pembangkit dari kuantitas kompleks.
2. Fungsi pembangkit dari hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua diperoleh berdasarkan hasil operasi dari persamaan-persamaan yang berlaku pada kuantitas kompleks yang termuat pada Teorema 2.5.
3. Fungsi pembangkit dari generalisasi hasil kali polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua diperoleh berdasarkan hasil operasi dari persamaan-persamaan perkalian kuantitas kompleks yang termuat pada Teorema 2.7.
4. Penurunan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dapat digunakan di dalam pembuktian konvergensi deret Fourier.

DAFTAR PUSTAKA

Wilf, H.S. *Generatingfunctionology*. Department of Mathematics University of Pennsylvania. 1989.

Cesarano, C. *Identities and Generating Functions on Chebyshev Polynomials.* Faculty of Engineering, International Telematic University UNINETTUNO. Italy, 2010.

Tang, K.T. *Mathematical Methods for Engineers and Scientist 3*. Tacoma, Washington: Springer, 2006.

Brown, J.W. and Churchill, R.V. *Complex Variables and Applications*.7th ed. New York: McGraw-Hill, 2004.

Davidson, K.R. and Donsig, A. P. *Real Analysis and Applications*. Waterloo,ON & Lincoln, NE: Springer, 2009.

Wirianto, M. dan Budhi W.S. *Fungsi Delta Dirac.* Integral, Vol.10 No.1, Maret 2005.

Spiegel, M.R. dan Liu John. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables (Schaum's Outlines).* United States of America: McGraw-Hill, 2002.