



UNIVERSITAS INDONESIA

**MODEL WAKTU TUNGGU KENDARAAN PADA
PERSIMPANGAN DENGAN LAMPU LALU LINTAS SAAT
JAM SIBUK**

SKRIPSI

ADE PUTRI MAYSAROH

0806452085

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

JUNI 2012



UNIVERSITAS INDONESIA

**MODEL WAKTU TUNGGU KENDARAAN PADA
PERSIMPANGAN DENGAN LAMPU LALU LINTAS SAAT
JAM SIBUK**

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

**ADE PUTRI MAYSAROH
0806452085**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Ade Putri Maysaroh

NPM : 0806452085

Tanda Tangan : 

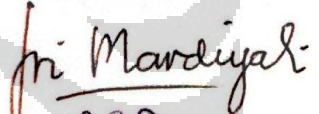


Tanggal : 11 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Ade Putri Maysaroh
NPM : 0806452085
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul Skripsi : Model Waktu Tunggu Kendaraan pada
Persimpangan dengan Lampu Lalu Lintas saat Jam
Sibuk

Telah diperiksa dan disetujui oleh Pembimbing dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Sarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Sri Mardiyati, M.Kom. ()
Penguji : Dra. Denny R Silaban, M.Kom. ()
Penguji : Arie Wibowo, S.Si, M.Si. ()

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 11 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Sri Mardiyati, M.Kom, selaku dosen pembimbing atas kesabaran, saran, dan bimbingannya selama ini sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. Ibu Dra. Saskya Mary Soemartojo M.Si, selaku pembimbing akademis penulis atas saran, bimbingan, dan dorongan semangat selama penulis menempuh perkuliahan.
3. Seluruh bapak ibu dosen di Departemen Matematika, terutama kepada bapak Dr. Yudi Satria, M.T. selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu Rahmi Rusin, S.Si., M.ScTech. selaku Sekretaris Departemen Matematika, Ibu Mila Novita M.Si., Dr. Dian Lestari, Dr. Kiki Ariyanti., Dra. Suarsih Utama, M.Si., Prof. Dr. Belawati HW, Dra. Denny Riama Silaban, M.Kom., Dra. Nora Hariadi, M.Si., Dra. Ida Fithriani, M.Si., Dhian Widya, S.Si, M.Kom., Helen Burhan, M.Si., Fevi Novkaniza, M.Si., Dra. Siti Aminah, M.Kom., Dra. Rustina, Dra. Siti Nurrohmah, Dra. Sri Harini, M.Kom., dan kepada bapak Alhaji Akbar, S.Si., M.Sc., Arie Wibowo, M.Si., Prof. Dr. Djati Kerami, Dr. Hengki Tasman, M.Si., Drs. Suryadi Slamet, M.Sc., Drs. Suryadi MT, M.T., Drs. Zuherman Rustam, DEA., dan semua dosen yang tanpa mengurangi rasa hormat tidak dapat disebutkan namanya satu per satu, terima kasih telah mengajar penulis dari tahun pertama hingga tahun

akhir serta banyak menyumbangkan ilmu pengetahuan baru yang menarik yang belum pernah penulis dapatkan sebelumnya.

4. Seluruh karyawan Departemen Matematika yang telah penulis reptokan selama ini Mba Santi, Pak Saliman, Pak Ansori, Mba Via, Mba, Pak Turino, Mas Iwan, Mas Tatang dan Mas Wawan yang telah banyak membantu seluruh kegiatan penulis selama perkuliahan dan dalam menyelesaikan penulisan skripsi penulis, baik dari administrasi maupun peminjaman buku di perpustakaan.
5. Mama, Mama, Mama, Ayah, Bang Rully, A'Alik, A'Ancha, Ka Mia, Mba Dina, Ci Uti, Mba Ratna, Tante Epon dan segenap keluarga besar penulis yang telah memberikan bantuan dukungan material, doa, dan kasih sayang.
6. Sahabat-sahabat penulis, Qq, Risyah, Dhila, Ines, Umbu, Cindy, Bang Andy, Arief, Dheni, Hindun, Tute, Numa, Adhi, Sita, Yulial, Agnes, Awe, Uni Acy, Ipah atas hari-hari yang menyenangkan selama ini yang bersedia mendengarkan curcol penulis, yang telah mengisi hari-hari penulis sehingga jadi lebih indah dan berwarna. Koh Hen, Maimun yang sering penulis tanya-tanya, Mei, May TA, Olin, Emy, Icha, Fani, Wulan, Resti, Arkies, Janu, Dian, Anisah, Maul, Arman, Ega, Nita, Joona Citra, Uchid, Ucil, Nora, Bowo, Danis, Dhea, Dewe, Eka, Lian, Luthfa, Masykur, Nadia, Puput, Purwo, Mba Siwi, Vika, Zee, dan segenap Keluarga 2008 insya Allah kita akan selalu jadi keluarga, "*One Math One Family!!!*"
7. Buat kakak-kakak, Ka Ajat, Ka Yanu, Ka Ayat, Ka Tino, Ka Zul, Ka Hanif Ka Anggi, Ka Cimah, Ka Wid, Ka Shaf, Ka Nedi, Ka Arif, Ka Farah, Ka Wiwi terima kasih untuk semua bantuannya. Buat kakak-kakak asdos dan aslab yang kasih ilmu lebih ke penulis Ka Toto, Ka Tepi, Ka Winda, Ka Mike, Ka Anggha, Ka Lois dan semua kakak-kakak yang telah banyak membantu penulis baik urusan kuliah maupun organisasi.
8. Temen-temen 2010, Elvin, Fikri, Rio, Ihsan, Aid, Barry, Mario yang selalu bilang ke penulis supaya 5 tahun aja justru jadi semangat

tersendiri untuk segera lulus semester ini, Chacha yang telah memberikan “tuyul” nya sehingga slide-slide penulis jadi meriah, Nurul, Fariz, Yumni, Yuza, Marsel, Oryza, Andion, Choliq, Pino, Cica, Pohan, Rahmi, Novi, Denny, Widya dan yang lainnya, terima kasih untuk doa dan semangatnya.

9. Temen-temen 2009 Eja, Harnoko, Sita, Cepi, Noe, Pak Rete, Ai, Tika, Agung, Faisal, Agnes, Wilsan, dan lainnya terima kasih buat semangatnya cepet nyusul kita yaa.. semangaattt!!
10. Temen-temen BEM FMIPA Aul, Karin, Etep, Akang Harits, Hafizh, Acan, Iwan, Fara, Hanna, Maya, Wahyu terima kasih atas doa, bantuan, dukungan, serta pengalaman-pengalaman yang begitu mengesankan.
11. Arnita, Milla, Endah, Yuna, Isti, Mba Mala, Mba Eva terima kasih atas bantuan dan doanya.
12. Agen-agen Running Man, Dhila, Ka Nora, Ega, Fani, Dhea, Ojan dan Bayu 2011. Agen-agen drama korea dan jepang Dhila, Citra, Nora, Uchid, Bang Andy, May TA terima kasih karena selama masa kuliah telah memfasilitasi hiburan-hiburan yang menarik.
13. Pak Uman dari Departemen Puslitbangjatan Bandung, yang bahkan penulis tidak kenal tapi beliau bersedia mengirimkan salah satu referensi yang sangat penulis butuhkan.

Akhir kata, penulis berharap Allah SWT berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu sains.

Penulis

2012

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ade Putri Maysaroh
NPM : 0806452085
Program Studi : Sarjana Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Skripsi

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Model Waktu Tunggu Kendaraan pada Persimpangan dengan Lampu Lalu Lintas
saat Jam Sibuk

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media / formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 11 Juni 2012

Yang menyatakan



(Ade Putri Maysaroh)

ABSTRAK

Nama : Ade Putri Maysaroh
Program Studi : Matematika
Judul : Model Waktu Tunggu Kendaraan pada Persimpangan dengan Lampu Lalu Lintas saat Jam Sibuk

Tugas akhir ini akan membahas model waktu tunggu kendaraan pada persimpangan dengan lampu lalu lintas saat jam sibuk. Model waktu tunggu kendaraan pada jam sibuk ini dibuat dengan cara memodifikasi kurva dari jumlah kendaraan dalam antrian pada kondisi *steady-state* dengan kurva jumlah kendaraan dalam antrian pada kondisi deterministik dengan menggunakan metode P. D. Whiting. Hasil modifikasi ini merupakan kurva dari jumlah kendaraan dalam antrian untuk kondisi *time-dependent*.

Kata Kunci : jam sibuk, laju kedatangan, laju keberangkatan, panjang antrian, waktu tunggu kendaraan, metode P.D. Whiting.

xiii + 47 halaman: 5 gambar

Daftar Pustaka : 14 (1967 – 2012)

ABSTRACT

Name : Ade Putri Maysaroh
Program Study : Mathematics
Title : Vehicle Delay Model at Signalized Intersection during Peak Hour

Vehicle delay model at signalized intersection during peak hour is discussed in this *skripsi*. This model can be used to approximate how long a vehicle has to queue up at the intersection during peak hour. P. D. Whiting method is used to obtain vehicle queue length of time-dependent curve base on modify vehicles queue length of steady-state curve and vehicles queue length of deterministic curve.

Key Words : peak hour, arrival rate, departure rate, queue length, delay, P. D. Whiting's method.

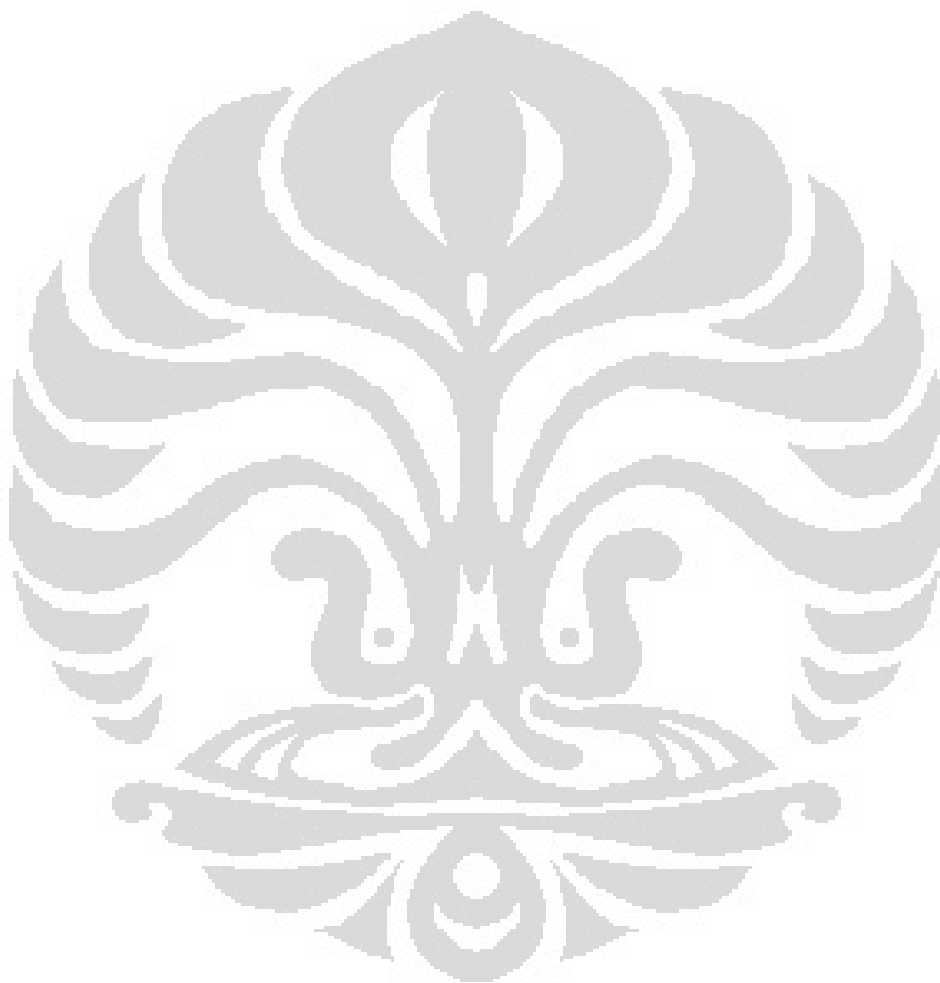
xiii + 47 pages : 5 pictures

Reference : 14 (1967 – 2012)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
KATA PENGANTAR	v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI.....	viii
ABSTRAK	ix
DAFTAR GAMBAR	xiii
1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup.....	2
1.3 Metode Penelitian.....	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
2 LANDASAN TEORI.....	4
2.1 Teori Antrian	4
2.1.1 Pola Kedatangan Pelanggan	4
2.1.2 Pola pelayanan.....	4
2.1.3 Disiplin Pelayanan Antrian	5
2.1.4 Model <i>Steady-state</i>	6
2.1.5 Model Antrian	9
2.2 Teori Lalu Lintas.....	10
2.2.1 Variabel-variabel pada Lalu Lintas	11
2.2.2 Tipe Arus Lalu Lintas	11
2.3 Integral Tentu	12
2.4 Integral Numerik	14
3 WAKTU TUNGGU KENDARAAN PADA PERSIMPANGAN DENGAN LAMPU LALU LINTAS SAAT JAM SIBUK.....	17
3.1 Model Waktu Tunggu Kendaraan.....	17
3.2 Model Waktu Tunggu Kendaraan saat Jam Sibuk.....	23
3.3 Contoh dan Implementasi	31
4 KESIMPULAN DAN SARAN	34
4.1 Kesimpulan	34

4.2	Saran.....	35
DAFTAR PUSTAKA		36
LAMPIRAN.....		38



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Jumlah Kedatangan dan Keberangkatan pada Sistem Antrian.....	7
Gambar 2. 2 Partisi Area dalam Bentuk Penjumlahan Riemann	13
Gambar 3. 1 Grafik Jumlah Kendaraan dalam Antrian.....	18
Gambar 3. 2 Modifikasi Kurva oleh P.D Whiting	25
Gambar 4. 1 Hasil Implementasi dengan MATLAB	33

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	W_2 dengan Metode <i>Composit Simpson's Rule</i>	38
Lampiran 2	Rata-rata Waktu Tunggu Kendaraan.....	43



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bicara mengenai lalu lintas perkotaan, khususnya kota-kota besar, tidak lepas dari pembicaraan mengenai kemacetan. Seiring dengan penambahan jumlah penduduk tingkat kebutuhan terhadap penggunaan transportasi pun kian meningkat, hal inilah yang menjadi cikal bakal dari terjadinya kemacetan di jalan raya kota-kota besar.

Permasalahan kemacetan ini tidak bisa dibiarkan dan diperlukan langkah-langkah untuk mengatasi permasalahan ini. Jika mengatasi permasalahan ini dengan cara melebarkan jalan raya, maka tentunya memerlukan dana yang besar.

Alternatif solusi dari permasalahan ini adalah membenahan sistem lalu lintasnya sendiri. Didalam suatu sistem jaringan jalan diperlukan pengaturan, berupa rambu yang berada pada ruas jalan dan persimpangan dimana persimpangan ini merupakan penghubung antara satu ruas jalan dengan ruas jalan yang lain. Permasalahan yang kerap kali terjadi pada suatu persimpangan adalah lamanya kendaraan berada pada persimpangan, khususnya pada saat-saat jam sibuk seperti pada saat jam berangkat kerja maupun pada saat pulang kerja. Untuk pengaturan pada persimpangan dapat digunakan lampu lalu lintas yang periode menyalanya untuk lampu merah dan hijau tergantung pada jumlah kendaraan yang mengantri pada persimpangan tersebut. Jumlah kendaraan yang mengantri di persimpangan sangat bergantung pada jumlah kendaraan yang ada pada saat awal terjadinya lampu merah dan kendaraan yang datang selama lampu merah.

Untuk itu, diperlukan pemodelan yang dapat menjadikan lampu lalu lintas, yang merupakan salah satu alat untuk mengatur lalu lintas, dapat menyelesaikan antrian di persimpangan lampu lalu lintas dan mengawali lampu merah selanjutnya tanpa ada antrian yang tersisa atau minimal tidak mengalami peningkatan jumlah antrian. (Ortuzar & Willumsen. 1990).

Pada jalan raya, hubungan pola kedatangan dari kendaraan terhadap waktu memiliki dua kemungkinan yakni pola kedatangan yang tidak bergantung pada waktu disebut *stationary* dan pola kedatangan yang bergantung pada waktu disebut *non-stationary*.

Pada Sutrisno (2011), telah dibuat model waktu tunggu kendaraan di persimpangan lampu lalu lintas dimana kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson* dengan pola kedatangan kendaraan yang masuk ke dalam antrian tidak bergantung dengan waktu. Akan tetapi, pada saat jam sibuk dimana aliran kedatangan kendaraan melebihi keberangkatan kendaraan, pola kedatangan kendaraan jarang sekali *stationary* sehingga dalam skripsi ini, akan dibahas mengenai model waktu tunggu antrian kendaraan pada persimpangan dengan lampu lalu lintas saat jam sibuk.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

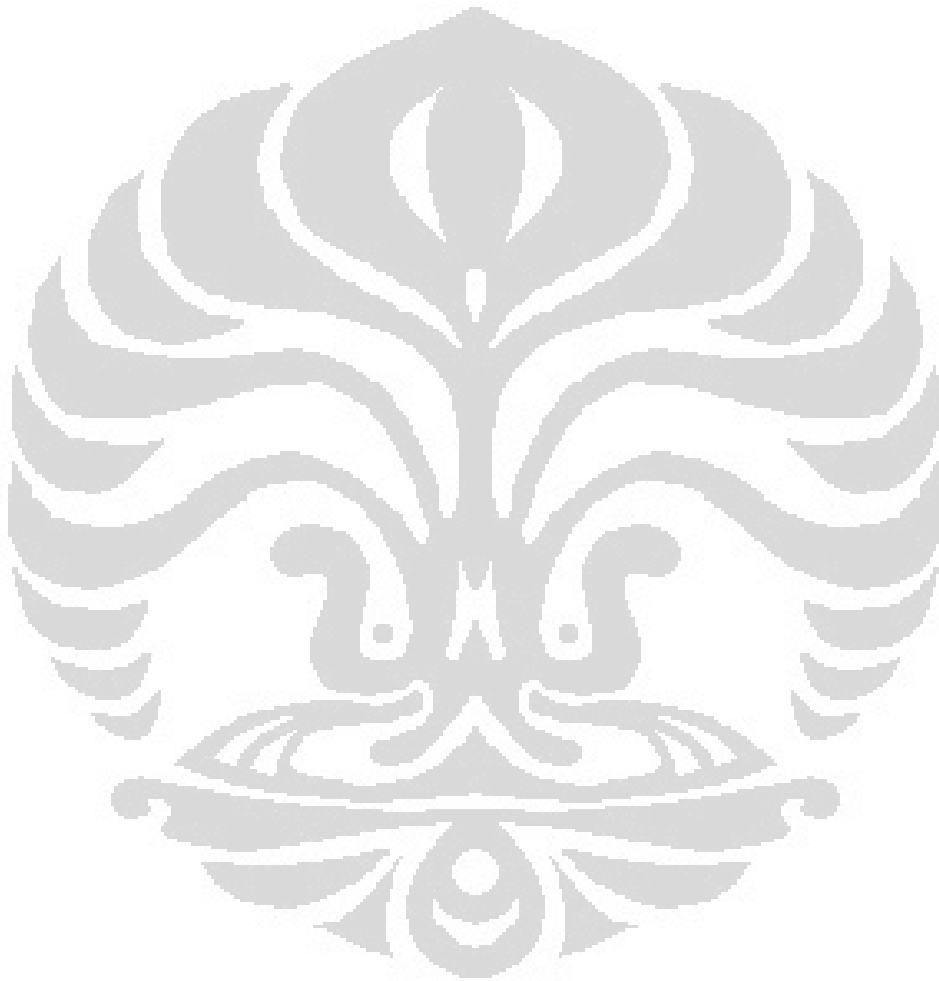
Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah mendapatkan model waktu tunggu antrian kendaraan pada persimpangan dengan lampu lalu lintas saat jam sibuk dengan cara memodifikasi model dengan metode P. D. Whiting. Ruang lingkup dari permasalahan ini hanya melihat satu persimpangan saja dengan tidak memperhatikan antrian pada persimpangan lain, lampu lalu lintas hanya terdiri dari merah dan hijau, mencakup model waktu tunggu antrian kendaraan pada persimpangan dengan lampu lalu lintas pada saat jam sibuk untuk satu jalur antrian, tidak ada kendaraan yang menyalip sehingga dapat digunakan disiplin antrian *first in first out*, tidak ada kendaraan yang berputar balik setelah memasuki persimpangan serta kedatangan kendaraan kurang dari dua kali keberangkatan kendaraan dari persimpangan.

1.3 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur, yaitu dengan cara mempelajari buku-buku referensi yang berhubungan dengan topik tugas akhir.

1.4 Tujuan Penelitian

Skripsi ini bertujuan untuk memodifikasi model waktu tunggu antrian kendaraan pada persimpangan dengan lampu lalu lintas saat jam sibuk dengan menggunakan metode P. D. Whiting.



BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai teori – teori dasar yang digunakan yaitu teori antrian, teori lalu lintas, integral tentu serta integral numerik.

2.1 Teori Antrian

Menurut Gross dan Harris (1985), sistem antrian dapat dideskripsikan sebagai kedatangan pelanggan ke dalam antrian, menunggu pelayanan, mendapatkan pelayanan, meninggalkan antrian setelah mendapatkan pelayanan.

2.1.1 Pola Kedatangan Pelanggan

Pola kedatangan atau input pada sistem antrian sering diukur dengan memperhatikan rata-rata jumlah kedatangan kendaraan dalam suatu waktu (*mean arrival rate*) atau dengan rata-rata waktu yang dibutuhkan antar kedatangan kendaraan yang satu dengan yang lainnya (*mean interarrival time*).

Pola kedatangan kendaraan dalam antrian dikatakan *deterministic arrival pattern* (deterministik) apabila pola kedatangannya tertentu.

Di sisi lain, jika terdapat ketidakpastian pada pola kedatangan seperti *random, probabilistic*, ataupun *stochastic*, maka nilai rata-rata tersebut hanya dapat mengukur pola untuk proses input, dan untuk karakteristik lainnya dipenuhi dalam bentuk distribusi probabilitas yang dihubungkan dengan proses randomnya.

Hubungan antara pola kedatangan terhadap waktu ada dua, yaitu *stationary arrival pattern* dan *nonstationary arrival pattern*. *Stationary arrival pattern* merupakan pola kedatangan yang tidak berubah mengikuti waktu sedangkan *non stationary arrival pattern* pola kedatangan bergantung pada waktu.

2.1.2 Pola pelayanan

Pelayanan pada antrian dapat berupa *single* atau *batch* (berkelompok). Secara umum, satu kendaraan dilayani pada suatu waktu oleh satu *server* yang telah ditentukan, tapi dalam antrian lampu lalu lintas dan beberapa situasi lainnya, beberapa pelanggan dilayani secara bersamaan oleh *server* yang sama.

Berdasarkan pola kedatangan para pelanggan, pelayanan *server* dapat dibagi menjadi *nonstationary* dan *stationary*. *Nonstationary* merupakan pelayanan dari *server* yang dapat mempercepat waktu yang dibutuhkan untuk melayani pelanggan pada saat jumlah pelanggan semakin meningkat, sedangkan *stationary* merupakan pelayanan dari *server* yang tidak memperhatikan jumlah pelanggan yang ada dalam antrian.

Walaupun tingkat pelayanannya tinggi, sangat mungkin bila beberapa pelanggan akan menunggu dalam antrian. Secara umum, pelanggan datang pada waktu yang tidak beraturan, sehingga panjang antrian akan tidak mengikuti pola tertentu kecuali pola kedatangan dan pola keberangkatan kendaraannya bersifat deterministik.

2.1.3 Disiplin Pelayanan Antrian

Penentuan disiplin pelayanan antrian dalam sebuah antrian mengacu pada kondisi pelanggan dalam antrian tersebut. Bentuk disiplin pelayanan antrian yang cukup dikenal dan mudah ditemui sehari-hari adalah *First Come First Served* (FCFS) atau biasa disebut juga dengan *First In First Out* (FIFO). Pola ini merupakan pola antrian dimana *server* melayani pelanggan yang datang ke dalam antrian terlebih dahulu.

Disiplin pelayanan antrian lainnya yang dapat digunakan adalah *Last Come First Served* (LCFS). Berlawanan dengan FCFS, pelayanan dalam disiplin antrian LCFS atau Last In First Out (LIFO) akan mendahulukan pelanggan yang terakhir datang ke dalam antrian.

Selain itu, ada pula pemilihan pelayanan dalam urutan acak yang tidak bergantung pada waktu masuk antrian. Dalam disiplin ini, tidak memperhatikan waktu kedatangan para pelanggan. Pelayanan diberikan kepada pelanggan secara acak.

Terakhir adalah disiplin antrian dengan skema prioritas. Dalam disiplin ini, pelayanan diberikan terlebih dahulu kepada pelanggan yang memiliki prioritas yang lebih tinggi tanpa memperhatikan waktu kedatangan mereka. Pelanggan yang memiliki prioritas lebih tinggi akan didahulukan mendapatkan pelayanan dibandingkan pelanggan lainnya walaupun terakhir masuk dalam antrian.

2.1.4 Model *Steady-state*

Menurut Medhi (2003), misalkan jumlah pelanggan yang memasuki sistem pada waktu t dinotasikan dengan $N(t)$ dan $p_n(t)$ merupakan probabilitas dari $N(t)$ diukur dari kejadian awal, saat $t = 0$, yang tetap sehingga probabilitasnya sebagai berikut

$$p_n(t) = P_r[N(t) = n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

maka

$$p_i(0) = 1, \quad (p_j(0) = 0, \quad j \neq i)$$

mengimplikasikan bahwa ada sejumlah i pelanggan yang datang pada kejadian awal ($i = 0, 1, 2, \dots$)

Jika nilai $p_n(t)$ saat $t \rightarrow \infty$,

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

memiliki suatu limit, maka p_n merupakan limit dari probabilitas yang ada di dalam sistem, untuk $t \neq 0$. Saat limit ini ada, maka sistem dikatakan dalam kondisi *steady-state*. Model yang berada pada kondisi *steady-state* disebut model *steady-state*.

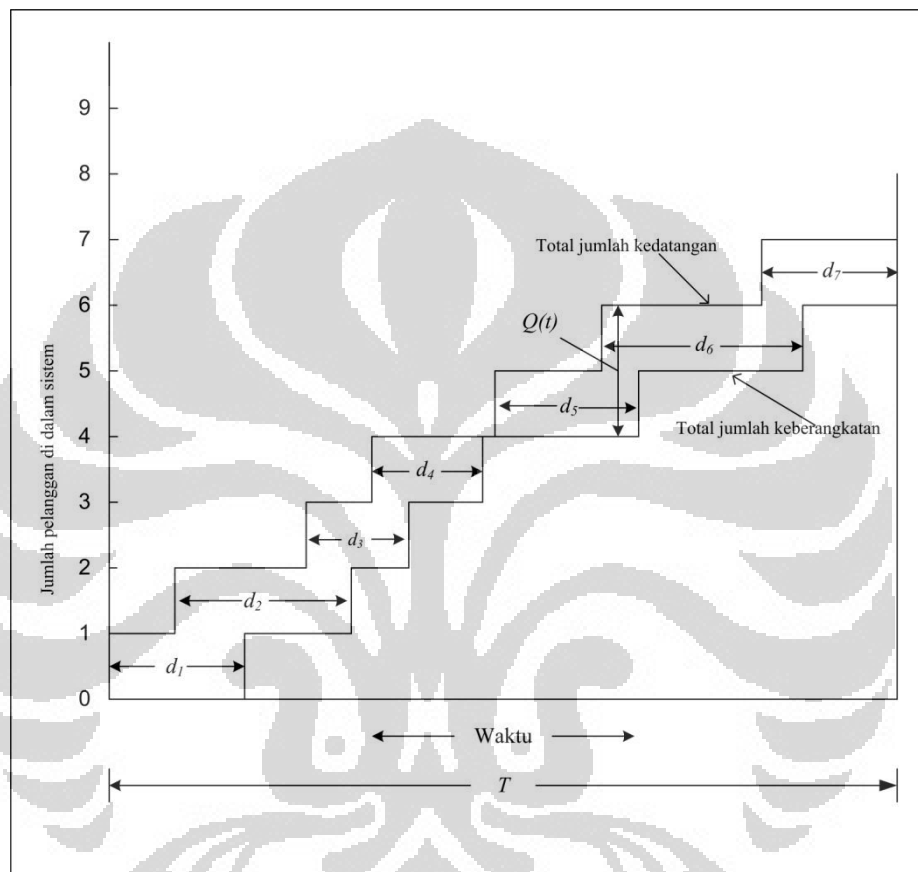
Pada sistem yang berada pada kondisi *steady-state* sistem dapat dikatakan stabil dan hubungan yang berlaku pada sistem antrian dalam kondisi *steady-state* sebagai berikut.

Teorema 2.1 Little's Formula jika Q merupakan rata-rata jumlah pelanggan di dalam sistem, λ merupakan rata-rata laju kedatangan pelanggan ke dalam sistem,

d merupakan rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem dan sistem berada dalam kondisi *steady-state*, maka

$$Q = \lambda d.$$

Bukti:



Gambar 2. 1 Jumlah Kedatangan dan Keberangkatan pada Sistem Antrian

[Sumber: Medhi, 2003]

Gambar 2.1 merupakan grafik hubungan antara jumlah pelanggan terhadap waktu. Diberikan dua grafik fungsi yaitu, grafik fungsi yang terletak pada posisi atas menunjukkan grafik fungsi dari jumlah kedatangan pelanggan di dalam sistem dan grafik fungsi yang terletak pada posisi bawah menunjukkan grafik fungsi dari jumlah pelanggan yang meninggalkan sistem. Jarak vertikal dari kedua garis menunjukkan total dari jumlah pelanggan yang berada pada saat t ,

sedangkan jarak horizontal menunjukkan waktu tunggu pelanggan di dalam sistem.

Misalkan sistem berada dalam kondisi *steady-state* dan T merupakan interval waktu observasi dan didefinisikan notasi-notasi sebagai berikut:

$N(t)$ = total jumlah kedatangan selama periode $(0, t]$, $0 < t \leq T$.

$W(t)$ = luas daerah diantara dua garis horizontal

= total waktu tunggu dari semua pelanggan yang tiba selama periode $(0, t]$,
 $0 < t \leq T$.

Anggap $N_i(t)$ merupakan kedatangan ke- i selama periode t , $0 \leq t \leq T$ dan d_i merupakan rata-rata waktu tunggu pelanggan ke- i selama periode $(0, t]$, $0 < t \leq T$, dimana luas daerah antara dua garis horizontal direpresentasikan sebagai,

$$W(t) = N_1(t) \cdot d_1 + N_2(t) \cdot d_2 + \dots$$

Pada grafik terlihat $N_i(t) = 1$ untuk setiap i , sehingga

$$\begin{aligned} W(t) &= 1 \cdot d_1 + 1 \cdot d_2 + \dots \\ &= d_1 + d_2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \text{rata-rata laju kedatangan pelanggan selama periode } (0, t], 0 < t \leq T, \\ &= \frac{N(t)}{t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(t) &= \text{rata-rata waktu tunggu pelanggan di dalam sistem selama periode } (0, t], \\ &0 < t \leq T. \\ &= \frac{W(t)}{N(t)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(t) &= \text{rata-rata jumlah pelanggan di dalam sistem selama periode } (0, t], 0 < t \leq \\ &T. \\ &= \frac{W(t)}{t}. \end{aligned}$$

Berdasarkan pendefinisian notasi di atas, maka diperoleh

$$Q(t) = \frac{W(t)}{t} = \frac{W(t) N(t)}{N(t) t} = d(t)\lambda(t).$$

Karena sistem berada pada kondisi *steady-state* maka untuk $t \rightarrow \infty$, diberikan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = d$$

sehingga untuk limit $Q(t)$ saat $t \rightarrow \infty$ juga ada dan diberikan sebagai berikut

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q.$$

Sehingga ketiga limit tersebut pun memenuhi

$$Q = \lambda d.$$

2.1.5 Model Antrian

Pada model dari proses antrian dideskripsikan dengan simbol-simbol dan garis miring seperti $A/B/X/Y/Z$ dimana A menyatakan distribusi dari waktu antar kedatangan, B menyatakan distribusi waktu pelayanan, X menyatakan jumlah *server*, Y menyatakan kapasitas sistem dan Z menyatakan disiplin antrian. Pada permasalahan antrian lalu lintas, waktu antar kedatangan dan waktu antar keberangkatan (pelayanan) yang berdistribusi eksponensial dinotasikan dengan M , sedangkan untuk deterministik dinotasikan dengan D . Pada permasalahan lalu lintas dianggap hanya memiliki satu *channel server* sehingga model dari proses antrian kendaraan dapat dideskripsikan sebagai $M/M/1$, $M/D/1$ atau $D/D/1$ (Mannering & Kilareski. 1990).

Model Antrian M/M/1

Model ini digunakan dengan asumsi, waktu antar kedatangan serta waktu antar keberangkatannya berdistribusi eksponensial dengan jumlah *channel* keberangkatannya satu. Dibawah asumsi ini, maka dapat diperoleh rata-rata panjang antrian,

$$Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad \dots(2.1)$$

dimana λ : rata-rata laju kedatangan kendaraan

μ : rata-rata laju keberangkatan kendaraan

dan rata-rata waktu tunggu kendaraan pada antrian

$$W = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}. \quad \dots(2.2)$$

Model *M/M/1* ini merupakan salah satu contoh dari model *steady-state*.

Model Antrian M/D/1

Model ini digunakan dengan asumsi, waktu antar kedatangannya eksponensial sedangkan waktu antar keberangkatannya berdistribusi deterministik dengan jumlah *channel* keberangkatannya satu. Dibawah asumsi ini, maka diperoleh rata-rata panjang antrian,

$$Q = \frac{2\rho - \rho^2}{2(1-\rho)}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad \dots(2.3)$$

dan rata-rata waktu tunggu kendaraan pada antrian

$$W = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}. \quad \dots(2.4)$$

Model Antrian D/D/1

Model ini digunakan untuk kasus dimana waktu antar kedatangan dan keberangkatannya berdistribusi deterministik dengan satu *channel* keberangkatan.

2.2 Teori Lalu Lintas

Menurut Saxena (1989), lalu lintas pada sebuah jalan pada dasarnya dipengaruhi oleh kecepatan, arus serta kerapatan. Dari ketiga komponen dasar ini saling berhubungan yakni, arus lalu lintas yang dipengaruhi oleh kecepatan kendaraan sedangkan kecepatan kendaraan sendiri dipengaruhi oleh kerapatan dari kendaraan yang ada pada ruas jalan. Oleh karena itu, untuk menggambarkan kondisi lalu lintas pada suatu ruas jalan, variabel-variabel yang telah disebutkan didefinisikan sebagai berikut.

2.2.1 Variabel-variabel pada Lalu Lintas

- Kecepatan : tingkat pergerakan aliran lalu lintas atau jarak yang ditempuh per satuan waktu.
- Arus : jumlah kendaraan yang melintasi suatu jalan per satuan waktu.
- Kerapatan : jumlah kendaraan yang berada pada suatu jalan dengan jarak tertentu pada waktu yang singkat.

Untuk menggambarkan model lalu lintas pada suatu ruas jalan, terdapat dua jenis yaitu:

- Makroskopik: menggambarkan model lalu lintas sebagai hubungan antara arus, kecepatan dan kerapatan.
- Mikroskopik: menggambarkan model lalu lintas berdasarkan karakteristik dari masing-masing kendaraan.

Pada skripsi ini akan digunakan kategori makroskopik karena lalu lintas cenderung dilihat dari arus lalu lintas.

2.2.2 Tipe Arus Lalu Lintas

Arus lalu lintas diklasifikasikan dalam dua tipe yaitu:

- Arus tanpa gangguan : pada kondisi ini kendaraan bebas bergerak dan tidak dihambat oleh penyebab gangguan dari luar. Kondisi

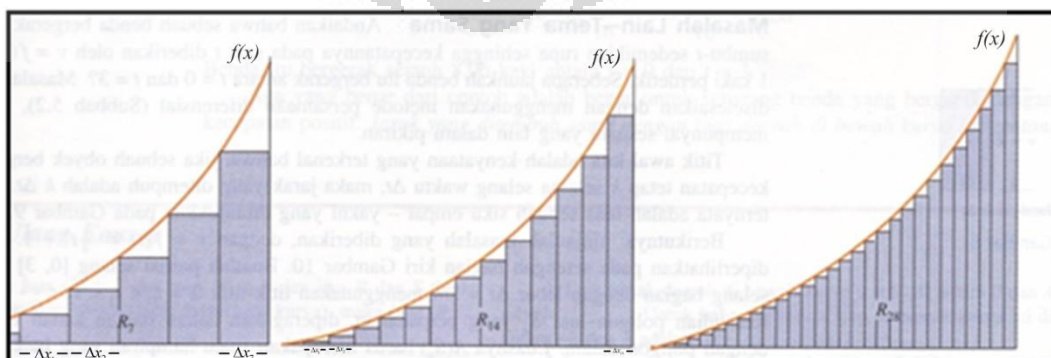
seperti ini umumnya terjadi pada jalan yang tidak memiliki persimpangan.

- Arus dengan gangguan : pada kondisi ini kendaraan dihambat dengan adanya gangguan luar seperti lampu lalu lintas maupun marka jalan. Dapat dikatakan arus akan mengalami gangguan pada persimpangan jalan dimana terdapat lampu lalu lintas pada persimpangan jalan tersebut.

Pada permasalahan yang dibahas tergolong dalam arus lalu lintas dengan gangguan.

2.3 Integral Tentu

Berdasarkan Purcell (2003), misalkan sebuah fungsi f yang didefinisikan pada selang tutup $[a, b]$. Fungsi itu boleh bernilai positif atau pun negatif pada selang tersebut bahkan tidak perlu kontinu. Grafik fungsi f tersebut dibagi menjadi beberapa partisi seperti grafik dibawah ini hingga terbentuk sejumlah persegi panjang. Dari Gambar 2.2, terlihat bahwa luas daerah dibawah suatu grafik dapat kita peroleh dengan menjumlahkan seluruh luas persegi panjang yang ada. Semakin panjang partisi mendekati 0, maka luas daerah dibawah grafik tersebut akan semakin akurat. Metode yang digunakan merupakan metode penjumlahan Rieman yang menjadi dasar penggunaan teori integral.



Gambar 2. 2 Partisi Area dalam Bentuk Penjumlahan Riemann

[Sumber: Purcell, 2003]

Misalkan sebuah fungsi f yang didefinisikan pada selang tutup $[a, b]$. Partisi selang $[a, b]$ menjadi n selang bagian (tidak perlu sama panjang), menggunakan titik-titik

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Andaikan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, ambillah titik sebarang \bar{x}_i (yang mungkin saja sebuah titik ujung), dinamakan titik tersebut sebagai titik sampel untuk selang bagian ke- i . Terbentuklah penjumlahan

$$R_p = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Namakan R_p sebagai jumlah Riemann untuk f yang berpadanan dengan Δx_i . Jika panjang selang bagian yang terpanjang dari partisi adalah Δx_i , dengan demikian, jika

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

ada, dapat dikatakan f adalah terintegralkan pada $[a, b]$, serta $\int_a^b f(x) dx$ dinamakan sebagai integral tentu (atau integral Riemann) f dari a ke b , dan ditulis

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Ada beberapa teorema integral tentu yakni:

Teorema 2.2 Jika f kontinu pada seluruh selang $[a, b]$, maka f terintegralkan pada $[a, b]$.

Teorema 2.3 Jika f terintegralkan pada sebuah selang yang mengandung titik-titik a, b , dan c , maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Teorema 2.4 Misalkan f kontinu (dan terintegralkan) pada selang $[a, b]$, dan F sebarang antiturunan f pada $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 2.5 Andaikan f dan g terintegralkan pada $[a, b]$ dan k konstanta. Maka kf dan $f + g$ terintegralkan dan :

- (i) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- (ii) $\int_a^b [f(x)dx + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$
- (iii) $\int_a^b [f(x)dx - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$

2.4 Integral Numerik

Berdasarkan Burden (2011), ketika suatu fungsi $f(x)$ tidak dapat ditemukan hasil integral tentu secara eksplisit, maka integral fungsi tersebut dapat diaproksimasi, yaitu dengan

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

untuk mengaproksimasi nilai dari $\int_a^b f(x) dx$. Metode ini dinamakan *numerical quadrature*. Metode ini berdasarkan pada interpolasi polinomial, dimana

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\varphi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\varphi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\varphi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i)\end{aligned}$$

dimana $\varphi(x)$ berada dalam $[a, b]$ untuk masing-masing x , dan

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

sehingga

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

dengan eror

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\varphi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Kemudian akan digunakan metode *Composite Simpson* untuk mengaproksimasi nilai dari $\int_a^b f(x) dx$.

Teorema 2.6 Misalkan $f \in C^4[a, b]$, n adalah bilangan genap, $h = (b - a)/n$, dan $x_j = a + jh$, untuk $j = 0, 1, \dots, n$. Ada suatu $\mu \in (a, b)$ dimana *Composite Simpson's Rule* untuk n subinterval beserta erornya dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] \\ &\quad - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu).\end{aligned}$$

Berikut algoritma *Composite Simpson's Rule* untuk n subinterval

Composite Simpson's Rule

Untuk mengaproksimasi integral $F = \int_a^b f(x) dx$

MASUKAN titik ujung a, b ; bilangan genap bulat positif n .

KELUARAN nilai F^* yang merupakan aproksimasi dari F .

Langkah 1 set $h = (b - a)/n$

Langkah 2 set $F_0^* = f(a) + f(b)$;

$$F_1^* = 0; \quad (\text{Sumasi dari } f(x_{2i-1}))$$

$$F_2^* = 0. \quad (\text{Sumasi dari } f(x_{2i}))$$

Langkah 3 untuk $i = 1, \dots, n - 1$ lakukan langkah 4 dan 5

Langkah 4 set $x = a + ih$

Langkah 5 jika i genap, maka set $F_2^* = F_2^* + f(x)$

$$\text{lainnya, maka set } F_1^* = F_1^* + f(x)$$

Langkah 6 set $F^* = h(F_0^* + 2.F_1^* + 4.F_2^*)/3$

Langkah 7 KELUARAN (F^*);

BERHENTI.

BAB 3

WAKTU TUNGGU KENDARAAN PADA PERSIMPANGAN DENGAN LAMPU LALU LINTAS SAAT JAM SIBUK

Pada bab ini akan dibahas mengenai model waktu tunggu kendaraan pada persimpangan dengan lampu lalu lintas saat jam sibuk serta contoh dari implementasi yang dibuat.

3.1 Model Waktu Tunggu Kendaraan

Dalam pengaturan lalu lintas, hal yang berpengaruh pada kelancaran arus lalu lintas adalah jumlah kedatangan kendaraan, jumlah kendaraan yang mengantri pada persimpangan serta lamanya kendaraan pada persimpangan. Sehingga pada persimpangan dengan lampu lalu lintas, diperlukannya pergantian lamanya pengaturan lampu lalu lintas untuk lampu merah dan hijau, sedangkan periode ketika lampu merah menyala sampai lampu hijau mati dikatakan sebagai satu siklus.

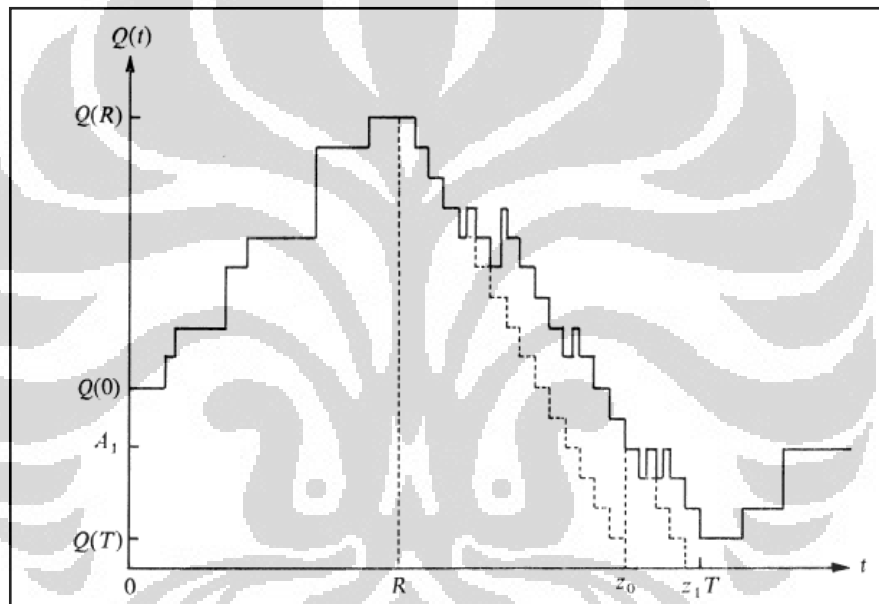
Untuk mengatur kondisi jalan pada persimpangan dengan lampu lalu lintas, diperlukan suatu pengaturan lampu lalu lintas agar antrian pada persimpangan dengan lampu lalu lintas diharapkan dapat berjalan optimal selama satu siklus. Kondisi optimal dapat dicapai dengan cara meminimalisir rata-rata waktu tunggu kendaraan, yakni waktu kendaraan berada dalam antrian pada persimpangan dengan lampu lalu lintas, sedemikian sehingga sisa kendaraan dalam antrian diharapkan tidak lebih banyak dibandingkan dengan jumlah kendaraan yang tersisa pada siklus sebelumnya.

Menurut McNeil (1968), terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi waktu tunggu kendaraan dalam antrian antara lain:

1. Lama waktu lampu merah menyala, yang dinotasikan dengan R

2. Lama durasi satu siklus, yakni waktu yang dibutuhkan untuk menyalanya lampu merah dan hijau dalam satu kali menyalanya secara bergantian, yang dinotasikan dengan T
3. Jumlah kendaraan yang masuk ke dalam antrian pada waktu t , yang dinotasikan dengan $N(t)$.
4. Jumlah kendaraan yang berada dalam antrian pada saat t dikatakan pula panjang antrian, yang dinotasikan dengan $Q(t)$.

Kondisi jumlah kendaraan dalam antrian lalu lintas diharapkan dapat memenuhi kondisi seperti Gambar 3.1.



Gambar 3. 1 Grafik Jumlah Kendaraan dalam Antrian

[Sumber: McNeil, 1968]

Dari gambar, terlihat kondisi dari jumlah kendaraan pada suatu antrian di persimpangan dalam satu siklus. Interval waktu $0 \leq t \leq T$ dibagi menjadi dua fase, yakni fase lampu merah yaitu pada interval $0 \leq t \leq R$ dan fase lampu hijau yaitu $R \leq t \leq T$.

Pada interval $0 \leq t \leq R$ saat $t = 0$, jumlah kendaraan dalam antrian yang merupakan sisa antrian dari siklus sebelumnya adalah $Q(0)$. Selanjutnya, jumlah

kendaraan dalam antrian, $Q(t)$, akan bertambah berdasarkan jumlah penambahan dari kendaraan yang datang, $N(t)$, sehingga jumlah kendaraan akan mencapai maksimum pada akhir fase lampu merah, $Q(R)$.

Pada interval $R \leq t \leq T$, saat $t = R$ seluruh kendaraan mulai bergerak meninggalkan antrian. Jumlah kendaraan pada persimpangan diharapkan makin lama makin berkurang hingga akhir fase lampu hijau. Pada akhir fase lampu hijau, $t = T$, diharapkan jumlah kendaraan yang tersisa di dalam antrian, tidak lebih banyak dari jumlah kendaraan sebelumnya, atau $Q(T) \leq Q(0)$. Pada fase lampu hijau, jumlah kendaraan yang ada pada antrian, $Q(t)$ dipengaruhi oleh jumlah kendaraan pada saat fase lampu merah, $Q(R)$, jumlah kendaraan yang datang memasuki persimpangan, $N(t)$, serta laju keberangkatan kendaraan yang meninggalkan antrian, dinotasikan dengan $\mu(t)$, dimana laju keberangkatan kendaraan merupakan jumlah kendaraan yang meninggalkan persimpangan per satuan waktu.

Pada satu siklus menyalanya lampu lalu lintas, total waktu tunggu yang dibutuhkan oleh kendaraan dipengaruhi oleh jumlah antrian yang mengantri pada persimpangan.

Berdasarkan Gambar 3.1, total waktu tunggu dapat diperoleh dengan cara mengintegrasikan kurva $Q(t)$. Sehingga untuk interval $0 \leq t \leq T$ waktu tunggu yang dinotasikan dengan W , dapat dihitung dengan menggunakan integral Riemann sebagai berikut.

$$W = \int_0^T Q(t) dt. \quad \dots(3.1)$$

Berdasarkan sifat integral yang ada dalam subbab 2.4, mengenai sifat penjumlahan pada selang, maka interval $0 \leq t \leq T$ dapat dibagi menjadi interval $0 \leq t \leq R$ dan $R \leq t \leq T$ sehingga persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$W = \int_0^R Q(t) dt + \int_R^T Q(t) dt. \quad \dots(3.2)$$

Jika pada fase lampu merah, total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat berada dalam antrian dinyatakan dengan $W_1 = \int_0^R Q(t) dt$, dan

pada waktu lampu hijau dinyatakan dengan $W_2 = \int_R^T Q(t)dt$, maka total waktu tunggu pada interval $0 \leq t \leq T$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$W = W_1 + W_2. \quad \dots(3.3)$$

Pada interval ($0 \leq t \leq R$), jumlah kendaraan dalam antrian dipengaruhi oleh:

1. $Q(0)$ yaitu panjang antrian kendaraan yang tersisa dari siklus sebelumnya.
2. $N(t)$ yaitu jumlah kedatangan kendaraan yang masuk ke dalam antrian pada waktu t .

Sehingga jumlah kendaraan pada waktu t , $Q(t)$, pada fase lampu merah adalah

$$Q(t) = Q(0) + N(t). \quad \dots(3.4)$$

Jika λ merupakan rata-rata laju kedatangan kendaraan (kendaraan/menit), maka jumlah kedatangan kendaraan $N(t) = \lambda t$. Sehingga persamaan (3.4) menjadi

$$Q(t) = Q(0) + \lambda t \quad \dots(3.5)$$

maka total waktu tunggu kendaraan pada fase merah, W_1 , yaitu

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^R Q(t) dt \\ &= \int_0^R Q(0) + N(t) dt \\ &= \int_0^R Q(0) + \lambda t dt \\ &= Q(0)t + \frac{1}{2}\lambda t^2 \Big|_0^R \end{aligned}$$

$$W_1 = Q(0)R + \frac{1}{2}\lambda R^2. \quad \dots(3.6)$$

Setelah melewati fase lampu merah, kendaraan-kendaraan yang sedang mengantri pada persimpangan mulai memasuki fase lampu hijau. Pada interval waktu $R \leq t \leq T$, kendaraan-kendaraan yang berada pada barisan depan mulai

bergerak meninggalkan persimpangan. Akan tetapi, selain kendaraan-kendaraan meninggalkan persimpangan, di sisi lain ada pula kendaraan yang memasuki persimpangan. Sehingga pada interval $R \leq t \leq T$, jumlah kendaraan yang berada dalam antrian dipengaruhi oleh:

1. $Q(R)$ yaitu jumlah kendaraan maksimum pada fase merah.
2. $N(t)$ yaitu jumlah kendaraan yang datang memasuki antrian.
3. $D(t)$ yaitu notasi dari jumlah kendaraan yang pergi meninggalkan antrian.

Jika jumlah kendaraan yang datang tidak melebihi jumlah kendaraan yang meninggalkan antrian pada fase hijau maka kondisi ini disebut sebagai kondisi “biasa“. Sedangkan pada saat dimana jumlah kendaraan yang datang melebihi jumlah kendaraan yang pergi disebut sebagai kondisi “jam sibuk“.

Permasalahan yang muncul ketika laju kendaraan yang datang memasuki persimpangan lebih besar dibandingkan laju keberangkatan kendaraan yang meninggalkan persimpangan adalah akan terjadi penumpukan antrian pada siklus-siklus berikutnya yang berakibat panjang antrian kendaraan akan terus bertambah.

Jika μ merupakan rata-rata laju kendaraan yang pergi meninggalkan antrian (kendaraan/menit) maka jumlah keberangkatan kendaraan adalah $D(t) = \mu t$. Jika rasio antara laju kedatangan kendaraan dengan laju keberangkatan kendaraan yang dinotasikan dengan ρ , dimana $\rho = \lambda/\mu$, maka ρ bernilai lebih besar dari satu untuk $\lambda > \mu$.

Menurut May dan Keller (1967), untuk memperoleh bentuk dari jumlah kendaraan dalam antrian, $Q(t)$, jumlah kendaraan diawal antrian ditambah dengan jumlah kedatangan kendaraan yang memasuki antrian kemudian dikurangi dengan jumlah kendaraan yang meninggalkan antrian, yaitu

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(0) + N(t) - D(t) \\ &= Q(0) + \lambda t - \mu t \\ &= Q(0) + (\lambda - \mu)t \end{aligned}$$

$$= Q(0) + (\rho - 1)\mu t \quad \text{dengan } \rho > 1 \quad \dots(3.7)$$

model seperti inilah yang disebut model deterministik.

Dengan diperolehnya $Q(t)$, maka waktu tunggu kendaraan untuk $R \leq t \leq T$ adalah $W_2 = \int_R^T Q(t) dt$, atau

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_R^T Q(R) + (\rho - 1)\mu t \, dt \\ &= Q(R)t + \frac{1}{2}(\rho - 1)\mu t^2 \Big|_R^T \\ &= Q(R)(T - R) + \frac{1}{2}(\rho - 1)\mu(T^2 - R^2) \end{aligned}$$

dimana W_2 yang diperoleh merupakan total waktu tunggu kendaraan pada fase hijau untuk model deterministik.

Salah satu contoh model *steady-state* adalah model dibahas oleh Sutrisno (2011). Pada model ini $\rho < (1 - r)$, dimana $r = \frac{R}{T}$, serta pada model ini asumsi distribusi kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson* dimana distribusi ini mendekati kondisi sesungguhnya di persimpangan dengan lampu lalu lintas (Rouphail. 2001). Pada model *steady-state* ini diketahui rata-rata waktu tunggu kendaraan dalam antrian saat $R \leq t \leq T$, yang dinotasikan dengan d_2 yaitu,

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{W_2}{N(T - R)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\mu^{-1}(1 - \rho)^{-2}((1 + \rho I - \rho)\lambda R + (1 - \rho)(2\lambda R Q(0) + \lambda^2 R^2 + \lambda R I))}{\lambda(T - R)} \end{aligned}$$

dimana I adalah rasio antara variansi kedatangan dan rata-rata kedatangan kendaraan pada satu siklus yang dapat diperoleh dari hasil observasi.

Karena dalam kondisi *steady-state*, berdasarkan Teorema 2.1 maka diperoleh rata-rata panjang antrian kendaraan yaitu

$$Q = \lambda d_2$$

$$\begin{aligned}
Q &= \lambda \frac{\frac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}((1+\rho I-\rho)\lambda R+(1-\rho)(2\lambda RQ(0)+\lambda^2 R^2+\lambda RI))}{\lambda(T-R)} \\
&= \frac{1}{2\mu(T-R)(1-\rho)^2} \{(1+\rho I-\rho)\lambda R + (1-\rho)(2\lambda RQ(0) + \lambda^2 R^2 \\
&\quad + \lambda RI)\} \\
&= \frac{\lambda R}{2\mu(T-R)(1-\rho)^2} \{(1+\rho I-\rho) + (1-\rho)(2Q(0) + \lambda R + I)\}. \quad \dots(3.8)
\end{aligned}$$

3.2 Model Waktu Tunggu Kendaraan saat Jam Sibuk

Pada saat-saat jam sibuk yang biasa terjadi pada jam berangkat dan pulang kerja, akan mengalami beberapa siklus menyalanya lampu lalu lintas. Pada interval $R \leq t \leq T$ di tiap siklusnya, berdasarkan Fu dan Hellinga (1999), laju kedatangan dari kendaraan tidak selamanya lebih kecil dari laju keberangkatan atau tidak selamanya lebih besar dari laju keberangkatan, hal ini dikarenakan adanya sifat acak dari laju kedatangan kendaraan itu sendiri. Kondisi seperti ini sering pula dikatakan *non-stationary* atau disebut juga *time-dependent*.

Untuk kondisi dimana laju kendaraan yang datang memasuki persimpangan lebih besar dibandingkan laju keberangkatan kendaraan yang meninggalkan persimpangan, $\lambda > \mu$, permasalahan ini dapat diselesaikan dengan model deterministik sedangkan untuk laju kedatangan kendaraan yang lebih sedikit dibandingkan dengan laju keberangkatan kendaraan yang pergi meninggalkan antrian, $\lambda < \mu$, maka model *steady-state* dapat digunakan (Akcelik. 2011). Namun, menurut Mathew (2012), banyak studi yang menunjukkan bahwa model *steady-state* berlaku untuk $\rho < 0.85$ sedangkan model deterministik berlaku untuk $\rho > 1.15$. Sehingga ketika fase hijau, tidak cukup apabila hanya menggunakan model deterministik saja atau model *steady-state* saja untuk memperoleh waktu tunggu kendaraan pada persimpangan saat jam sibuk.

Menurut Kimber dan Hollis (1979), salah satu cara untuk menyelesaikan permasalahan lalu lintas saat jam sibuk, dapat digunakan metode yang digunakan P. D. Whiting. Dari metode ini akan dihasilkan suatu model yang disebut model

time-dependent. Metode yang digunakan P. D. Whiting adalah dengan memodifikasi kurva dari model *steady-state* sehingga asimtot dari kurva ini menjadi kurva model deterministik yang kemudian terbentuklah kurva *time-dependent* yang lebih sesuai digunakan untuk menyelesaikan permasalahan antrian kendaraan saat jam sibuk.

Jika dilakukan permisalan sebagai berikut:

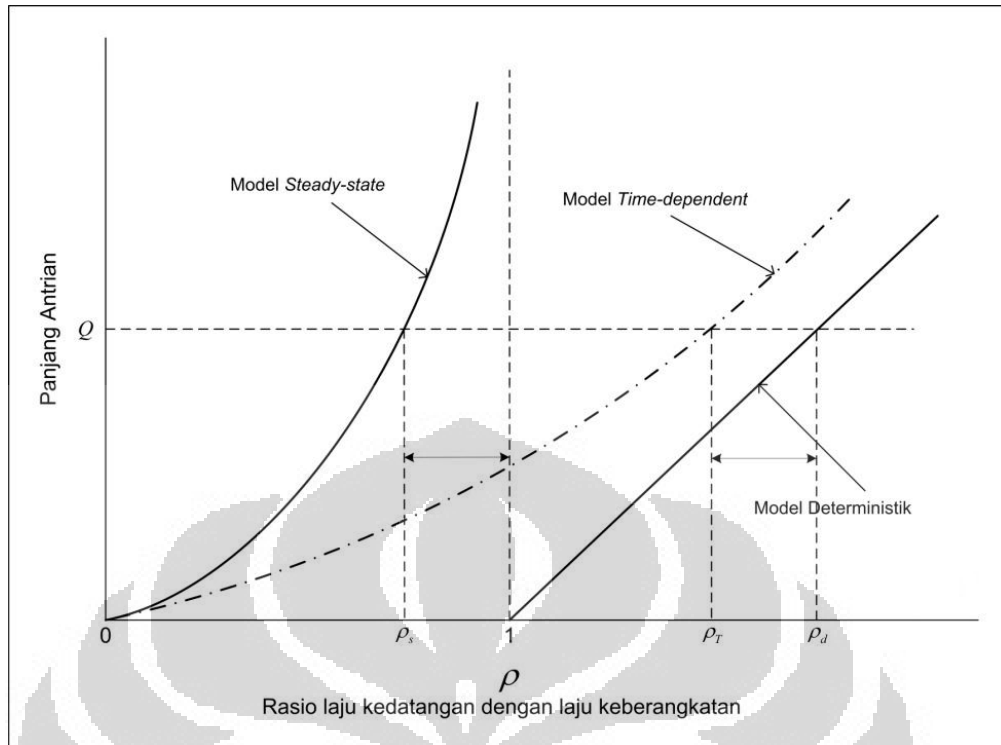
Q_s : Jumlah antrian untuk model *steady-state*

Q_d : Jumlah antrian untuk model deterministik

ρ_s : rasio laju kedatangan dan laju keberangkatan untuk kondisi *steady state*, untuk $0 < \rho < 1$

ρ_d : rasio laju kedatangan dan laju keberangkatan untuk model deterministik, untuk $\rho > 1$

maka akan dicari kurva *time-dependent* dengan modifikasi kurva yang dilakukan oleh P. D. Whiting, yaitu dengan mengubah asimtot dari kurva Q model *steady-state* yang semula asimtotnya adalah $\rho = 1$ menjadi kurva Q model *time-dependent* yang asimtotnya adalah kurva Q model deterministik dengan mempertahankan jarak yang sama antara kurva Q dengan asimtotnya untuk suatu Q , baik antara kurva Q model *steady-state* dengan $\rho = 1$ maupun antara kurva Q model *time-dependent* dengan kurva Q model deterministik. Hal ini dapat direpresentasikan pada Gambar 3.2 sebagai berikut,



Gambar 3. 2 Modifikasi Kurva oleh P.D Whiting

[Sumber: Kimber dan Hollis, 1979]

Dari gambar, dapat terlihat bahwa asimtot dari kurva Q_s yakni $\rho = 1$. Kemudian kurva Q_s ini dimodifikasi sehingga asimtotnya berubah menjadi Q_d . Kurva hasil modifikasi inilah yang disebut dengan kurva Q_t , yaitu jumlah antrian *time-dependent*. Sehingga untuk Q_s , Q_t , dan Q_d yang sama haruslah memenuhi,

$$1 - \rho_s = \rho_d - \rho_t \quad \dots(3.9)$$

sehingga

$$\rho_s = \rho_t - (\rho_d - 1) \quad \dots(3.10)$$

Berdasarkan model deterministik pada persamaan (3.7), diperoleh

$$Q_d = Q(R) + (\rho_d - 1)\mu t$$

atau

$$Q_d - Q(R) = (\rho_d - 1)\mu t$$

$$(\rho_d - 1) = \frac{Q_d - Q(R)}{\mu t}$$

$$\rho_d = \frac{Q_d - Q(R)}{\mu t} + 1. \quad \dots (3.11)$$

Berdasarkan model *steady-state* pada persamaan (3.8), diperoleh

$$Q_s = \frac{\lambda R}{2\mu(T - R)(1 - \rho_s)^2} \{(1 + \rho_s I - \rho_s) + (1 - \rho_s)(2Q(0) + \lambda R + I)\}$$

atau

$$2Q_s \mu (T - R) (1 - \rho_s)^2 = \lambda R \{(1 + \rho_s I - \rho_s) + (1 - \rho_s)(2Q(0) + \lambda R + I)\}$$

atau

$$2Q_s \mu (T - R) (1 - \rho_s + \rho_s^2) = \lambda R + 2\lambda R \rho_s I - \lambda R \rho_s + 2\lambda R Q(0) + \lambda^2 R^2 + \lambda R I - 2\lambda R Q(0) \rho_s - \lambda^2 R^2 \rho_s$$

atau

$$2Q_s \mu (T - R) \rho_s^2 - (2Q_s \mu (T - R) + 2\lambda R I - 2\lambda R Q(0) - \lambda^2 R^2 - \lambda R) \rho_s - (\lambda R + 2\lambda R Q(0) + \lambda^2 R^2 + \lambda R I - 2Q_s \mu (T - R)) = 0. \quad \dots (3.12)$$

Dari persamaan kuadrat (3.12), diperoleh bentuk ρ_s yang merupakan solusi dari persamaan tersebut, sebagai berikut

$$\rho_{s1} = \frac{1}{4Q_s \mu (R - T)} \left(4Q_s \mu R - 4Q_s \mu T + \lambda R + 2\lambda R Q(0) + \lambda^2 R^2 + (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda \mu R T I Q_s - 8\lambda \mu R^2 I Q_s + 4\lambda^2 R^2 Q(0) + 4\lambda^2 R^2 Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3 Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \right) \quad \dots (3.13)$$

dan

$$\begin{aligned} \rho_{s2} = \frac{1}{4Q_s\mu(R-T)} & \left(4Q_s\mu R - 4Q_s\mu T + \lambda R + 2\lambda RQ(0) + \lambda^2 R^2 \right. \\ & - (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_s - 8\lambda\mu R^2IQ_s + 4\lambda^2 R^2Q(0) \\ & \left. + 4\lambda^2 R^2Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad \dots (3.14)$$

Dengan mensubstitusi bentuk ρ_d yang diperoleh seperti persamaan (3.11) dan bentuk ρ_s yang diperoleh seperti persamaan (3.13) dan (3.14) ke persamaan (3.10), dimana $\rho_s = \rho_t - (\rho_d - 1)$, maka dapat ditulis

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4Q_s\mu(R-T)} \left(4Q_s\mu R - 4Q_s\mu T + \lambda R + 2\lambda RQ(0) + \lambda^2 R^2 \right. \\ & \quad \left. + (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_s - 8\lambda\mu R^2IQ_s + 4\lambda^2 R^2Q(0) \right. \\ & \quad \left. + 4\lambda^2 R^2Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & = \rho_t - \left(\left(\frac{Q_d - Q(R)}{\mu t} + 1 \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4Q_s\mu(R-T)} \left(4Q_s\mu R - 4Q_s\mu T + \lambda R + 2\lambda RQ(0) + \lambda^2 R^2 \right. \\ & \quad \left. - (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_s - 8\lambda\mu R^2IQ_s + 4\lambda^2 R^2Q(0) \right. \\ & \quad \left. + 4\lambda^2 R^2Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \right) \\ & = \rho_t - \left(\left(\frac{Q_d - Q(R)}{\mu t} + 1 \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4Q_s\mu(R-T)} \left(4Q_s\mu R - 4Q_s\mu T + \lambda R + 2\lambda RQ(0) + \lambda^2 R^2 \right. \\ & \quad \left. + (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_s - 8\lambda\mu R^2IQ_s + 4\lambda^2 R^2Q(0) \right. \\ & \quad \left. + 4\lambda^2 R^2Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\mu t \rho_t - Q_d + Q(R)}{\mu t} \end{aligned}$$

dan

$$\frac{1}{4Q_s\mu(R-T)} \left(4Q_s\mu R - 4Q_s\mu T + \lambda R + 2\lambda RQ(0) + \lambda^2 R^2 \right. \\ \left. - (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_s - 8\lambda\mu R^2 IQ_s + 4\lambda^2 R^2 Q(0) \right. \\ \left. + 4\lambda^2 R^2 Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3 Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\mu t \rho_t - Q_d + Q(R)}{\mu t}$$

atau

$$\mu t \left(4Q_s\mu R - 4Q_s\mu T + \lambda R + 2\lambda RQ(0) + \lambda^2 R^2 \right. \\ \left. + (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_s - 8\lambda\mu R^2 IQ_s + 4\lambda^2 R^2 Q(0) \right. \\ \left. + 4\lambda^2 R^2 Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3 Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \right) \\ = (4Q_s\mu(R-T))(\mu t \rho_t - Q_d + Q(R))$$

dan

$$\mu t \left(4Q_s\mu R - 4Q_s\mu T + \lambda R + 2\lambda RQ(0) + \lambda^2 R^2 \right. \\ \left. - (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_s - 8\lambda\mu R^2 IQ_s + 4\lambda^2 R^2 Q(0) \right. \\ \left. + 4\lambda^2 R^2 Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3 Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \right) \\ = (4Q_s\mu(R-T))(\mu t \rho_t - Q_d + Q(R)).$$

Untuk nilai Q_s dan Q_d yang sama dan menganggap Q_s dan Q_d sebagai Q_t , maka dua kesamaan diatas menjadi

$$4Q_t\mu^2 Rt - 4Q_t\mu^2 Tt + \lambda R\mu t + 2\lambda\mu t RQ(0) + \lambda^2 R^2 \mu t \\ + \mu t (2\lambda^3 R^3 + \lambda^4 R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_t - 8\lambda\mu R^2 IQ_t + 4\lambda^2 R^2 Q(0) \\ + 4\lambda^2 R^2 Q^2(0) + 4\lambda^3 R^3 Q(0) + \lambda^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \\ = 4Q_t\mu^2 \rho Rt - 4Q_t^2 \mu R + 4Q_t\mu Q(R)R - 4Q_t\mu^2 \rho Tt + 4Q_t^2 \mu T \\ - 4Q_t\mu Q(R)T$$

dan

$$\begin{aligned}
& 4Q_t\mu^2Rt - 4Q_t\mu^2Tt + \lambda R\mu t + 2\lambda\mu tRQ(0) + \lambda^2R^2\mu t \\
& - \mu t(2\lambda^3R^3 + \lambda^4R^4 + 8\lambda\mu RTIQ_t - 8\lambda\mu R^2IQ_t + 4\lambda^2R^2Q(0)) \\
& + 4\lambda^2R^2Q^2(0) + 4\lambda^3R^3Q(0) + \lambda^2R^2)^{\frac{1}{2}} \\
& = 4Q_t\mu^2\rho Rt - 4Q_t^2\mu R + 4Q_t\mu Q(R)R - 4Q_t\mu^2\rho Tt + 4Q_t^2\mu T \\
& - 4Q_t\mu Q(R)T.
\end{aligned}$$

Dengan mengkuadratkan ruas kanan dan ruas kiri pada dua kesamaan di atas, maka diperoleh bentuk persamaan polinomial berderajat empat dalam Q_t yang sama dari kedua kesamaan di atas, yaitu

$$\begin{aligned}
& 16\mu^2(R^2 + T^2 - 2RT)Q_t^4 \\
& + (32\mu^3Tt(2\rho_tR - 2R - \rho T + T) + 64\mu^2Q(R)RT - 32\mu^3\rho_t tR^2 \\
& + 32\mu^3tR^2 - 32\mu^2T^2Q(R))Q_t^3 \\
& + (32\mu^4t^2R(2\rho_tT - T - \rho_tR\rho_t^2T) \\
& + 32\mu^3R^2Q(R)t(\rho_t - 1 - 2\rho_tT) + 32\mu^3\rho_t tQ(R)T^2 \\
& + 16\mu^4\rho_t^2t^2T^2 - 32\mu^2Q^2(R)RT + 16\mu^2tR(\mu^2\rho_t^2tR - \lambda TQ(0)) \\
& - 8\lambda^2\mu^2tR^2(T - R) + 16\mu^4t^2(T^2 + R^2 - 2\rho_tT^2) \\
& - 32\mu^3tTQ(R)(T + 2R) - 8\lambda\mu^2tR(T - R + 2RQ(0)) \\
& + 16\mu^2Q^2(R)(R^2 + T^2))Q_t^2 \\
& + (8\lambda^2\mu^3t^2R^3 + 8\mu^2\lambda tRQ(R)(2TQ(0) - \lambda R^2 + \lambda RT) \\
& + 8\lambda^2\mu^3\rho_t t^2R^2(T - R) + 16\lambda\mu^3\rho_t t^2RTQ(0) \\
& - 8\lambda\mu^3t^2R(\lambda RT - 2RQ(0) + \rho_tR - \rho_tT + 2\rho_tRQ(0) + T - R) \\
& - 8\lambda\mu^2tRQ(R)(R - T + 2RQ(0)) - 8\lambda\mu^3t^2RI(T - R) \\
& - 16\lambda\mu^3t^2Q(0)RT)Q_t = 0. \quad \dots (3.15)
\end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan persamaan polinomial berderajat empat pada persamaan (3.15) dan menganggap ρ_t sebagai ρ , dimana pada permasalahan ini terbatas untuk kondisi dimana laju kedatangan kendaraan kurang dari dua kali laju keberangkatan kendaraan, sehingga ρ_t merupakan $0 < \rho < 2$, maka diperoleh paling banyak empat kemungkinan bentuk $Q_t(t)$ yang memenuhi persamaan (3.15).

Dari $Q_t(t)$ yang diperoleh, dapat diperoleh pula total waktu tunggu kendaraan, yakni $W_2 = \int_R^T Q_t(t) dt$. Akan tetapi, dari bentuk-bentuk $Q_t(t)$ yang diperoleh tidak dapat ditemukan hasil eksplisit dari integral $Q_t(t)$, maka integral $Q_t(t)$ diaproksimasi secara numerik dengan menggunakan algoritma *composite simpson's rule* yang dibahas pada subbab 2.5. Untuk *source code* pengintegralan dengan algoritma ini dari salah satu $Q_t(t)$ yang memenuhi, terdapat pada Lampiran 1, dan W_2 yang diperoleh merupakan total waktu tunggu kendaraan saat $R \leq t \leq T$. Sehingga diperoleh pula total waktu tunggu kendaraan pada satu siklus, yaitu

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 \\ &= Q(0)(T - R) + \frac{1}{2}\lambda(T^2 - R^2) + \int_R^T Q_t(t) dt. \end{aligned}$$

Maka dapat diperoleh pula rata-rata waktu tunggu kendaraan untuk satu siklus yang merupakan pembagian antara total waktu tunggu kendaraan dengan jumlah kendaraan yang datang selama satu siklus, yaitu

$$\begin{aligned} d &= \frac{W}{N(T)} \\ &= \frac{Q(0)(T-R) + \frac{1}{2}\lambda(T^2 - R^2) + \int_R^T Q_t(t) dt}{\lambda T} \end{aligned}$$

dimana :

d : rata-rata waktu tunggu kendaraan pada persimpangan selama satu siklus (menit)

W : total waktu tunggu kendaraan selama satu siklus (kendaraan.menit)

λ : rata-rata laju kedatangan kendaraan (kendaraan/menit)

$Q(0)$: jumlah kendaraan saat awal lampu merah menyala / sisa kendaraan dari siklus sebelumnya (kendaraan)

R : waktu yang dibutuhkan untuk lampu merah menyala dalam satu siklus (menit)

T : waktu yang dibutuhkan untuk lampu menyala selama satu siklus (menit)

3.3 Contoh dan Implementasi

Pada subbab ini akan dilakukan implementasi dari perkiraan rata-rata waktu tunggu kendaraan. Tujuan dari bab ini adalah untuk memberikan contoh perhitungan dari variabel-variabel yang diketahui dengan menggunakan implementasi yang telah dibuat.

Contoh permasalahan (Kimber dan Hollis, 1979)

Diketahui:

rata-rata laju kedatangan kendaraan (λ)	: 400 kendaraan/jam
	: 6.67 kendaraan/menit
rata-rata laju keberangkatan kendaraan (μ)	: 377 kendaraan/jam
	: 6.28 kendaraan/menit
Lama lampu merah menyala (R)	: 1.5 menit
Lama satu siklus (T)	: 2 menit
Jumlah kendaraan awal ($Q(0)$)	: 20 kendaraan

variansi jumlah kedatangan pada satu siklus : 1.67

rata-rata jumlah kedatangan pada satu siklus : 10 kendaraan

Dengan mensubstitusi nilai-nilai diatas ke persamaan (3.15), maka akan diperoleh nilai dari $Q_t(t)$ yang memenuhi, saat $t = 1.9$ menit, yaitu

$$Q_{t1}(1.9) = 0$$

$$Q_{t_2}(1.9) = 30.70695780$$

$$Q_{t_3}(1.9) = 50.12730836$$

$$Q_{t_4}(1.9) = -19.34231174$$

dari hasil $Q_t(t)$ yang diperoleh, lebih masuk akal saat memilih $Q_{t_2}(1.9) = 30.70695780$ hal ini dikarenakan jumlah maksimum saat akhir fase lampu merah, $Q(R) = 30.005$, dimana $R = 1.5$ menit. Saat $t = 1.9$ menit, waktu observasi telah memasuki fase lampu hijau dimana jumlah antrian dipengaruhi oleh kedatangan dan keberangkatan kendaraan. Pada permasalahan ini laju kedatangan kendaraan, λ , adalah 6.67 kendaraan/menit sedangkan laju keberangkatan kendaraan, μ , adalah 6.28 kendaraan/menit sehingga kurang masuk akal apabila jumlah kendaraan saat $t = 1.9$ menit adalah 50.12730836 kendaraan, dimana selisih waktu observasi dengan waktu saat akhir lampu merah hanyalah 0.4 menit. Maka pada permasalahan ini akan digunakan bentuk $Q_{t_2}(t)$ yang digunakan untuk memperoleh waktu tunggu kendaraan.

Berdasarkan penjelasan pada subab 3.1, untuk memperoleh rata-rata waktu tunggu kendaraan pada persimpangan adalah dengan mencari terlebih dahulu total waktu tunggu kendaraan pada satu siklus kemudian dibagi dengan jumlah kedatangan pada satu siklus.

Total waktu tunggu kendaraan pada satu siklus,

$$W = W_1 + W_2$$

dimana:

$$W_1 \quad : \text{ waktu tunggu saat fase merah } (0 \leq t \leq R)$$

$$W_2 \quad : \text{ waktu tunggu saat fase hijau } (R \leq t \leq T)$$

dengan

$$W_1 = Q(0)R + \frac{1}{2}\lambda R^2$$

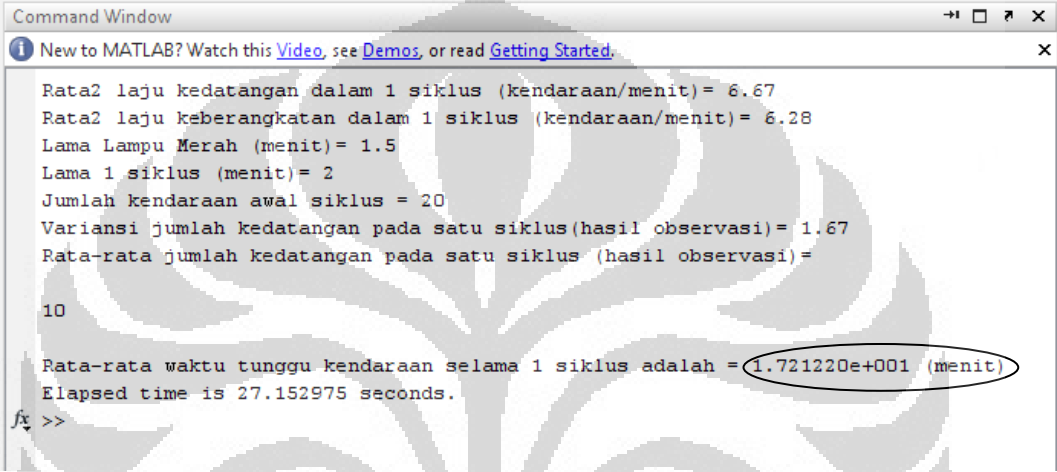
$$= 37.50375 \text{ kendaraan.menit}$$

$$W_2 = \int_R^T Q_t(t) dt$$

maka rata-rata waktu tunggu kendaraan pada satu siklus adalah

$$d = \frac{W}{N(T)}.$$

Hasil yang diperoleh dengan menggunakan MATLAB dengan implementasi pada Lampiran 2:



```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
Rata2 laju kedatangan dalam 1 siklus (kendaraan/menit)= 6.67
Rata2 laju keberangkatan dalam 1 siklus (kendaraan/menit)= 6.28
Lama Lampu Merah (menit)= 1.5
Lama 1 siklus (menit)= 2
Jumlah kendaraan awal siklus = 20
Variansi jumlah kedatangan pada satu siklus(hasil observasi)= 1.67
Rata-rata jumlah kedatangan pada satu siklus (hasil observasi)=
10
Rata-rata waktu tunggu kendaraan selama 1 siklus adalah = 1.721220e+001 (menit)
Elapsed time is 27.152975 seconds.
fx >>
  
```

Gambar 4. 1 Hasil Implementasi dengan MATLAB

Terlihat dengan nilai dari variabel-variabel yang diketahui, diperoleh hasil rata-rata waktu tunggu yang diperlukan ketika $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1.0621$, adalah sekitar 17 menit. Dimana *running time* yang diperlukan untuk memperoleh hasil rata-rata waktu tunggu kendaraan ini adalah sekitar 17 detik.

BAB 4

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Permasalahan waktu tunggu kendaraan pada persimpangan dengan lampu lalu lintas pada umumnya dapat dimodelkan secara matematis. Akan tetapi untuk permasalahan yang dibahas pada Bab 3, yakni ketika jam sibuk, dengan metode P. D. Whiting yang digunakan, ternyata rata-rata waktu tunggu kendaraan yang diperoleh, yaitu

$$d = \frac{W}{N(T)}$$
$$= \frac{Q(0)(T-R) + \frac{1}{2}\lambda(T^2 - R^2) + \int_R^T Q_t(t)dt}{\lambda T}$$

dimana :

d : rata-rata waktu tunggu kendaraan pada persimpangan selama satu siklus (menit)

W : total waktu tunggu kendaraan (kendaraan.menit)

λ : rata-rata laju kedatangan kendaraan (kendaraan/menit)

$Q(0)$: jumlah kendaraan saat awal lampu merah menyala / sisa kendaraan dari siklus sebelumnya (kendaraan)

$Q(t)$: jumlah kendaraan saat waktu ke t (kendaraan)

R : waktu yang dibutuhkan untuk lampu merah menyala dalam satu siklus (menit)

T : waktu yang dibutuhkan untuk lampu menyala selama satu siklus (menit)

membutuhkan suatu teknik integrasi numerik untuk memperoleh hasil $\int_R^T Q_t(t) dt$. Maka dari itu, dibuat implementasi sederhana dengan menggunakan perangkat lunak, sehingga dapat diperoleh rata-rata waktu tunggu kendaraan pada suatu persimpangan. Dari hasil $\int_R^T Q_t(t) dt$ yang diperoleh, variabel lain yang berpengaruh dalam perhitungan waktu tunggu ini adalah

μ : rata-rata laju keberangkatan kendaraan (kendaraan/menit)

I : rasio antara variansi kedatangan dan rata-rata kedatangan kendaraan pada satu siklus (diperoleh dari hasil observasi)

4.2 Saran

Diharapkan pada penelitian berikutnya ada yang membahas pembentukan model waktu tunggu kendaraan pada persimpangan saat jam sibuk dengan metode lain, kemudian bandingkan hasilnya dengan metode P. D. Whiting ini.

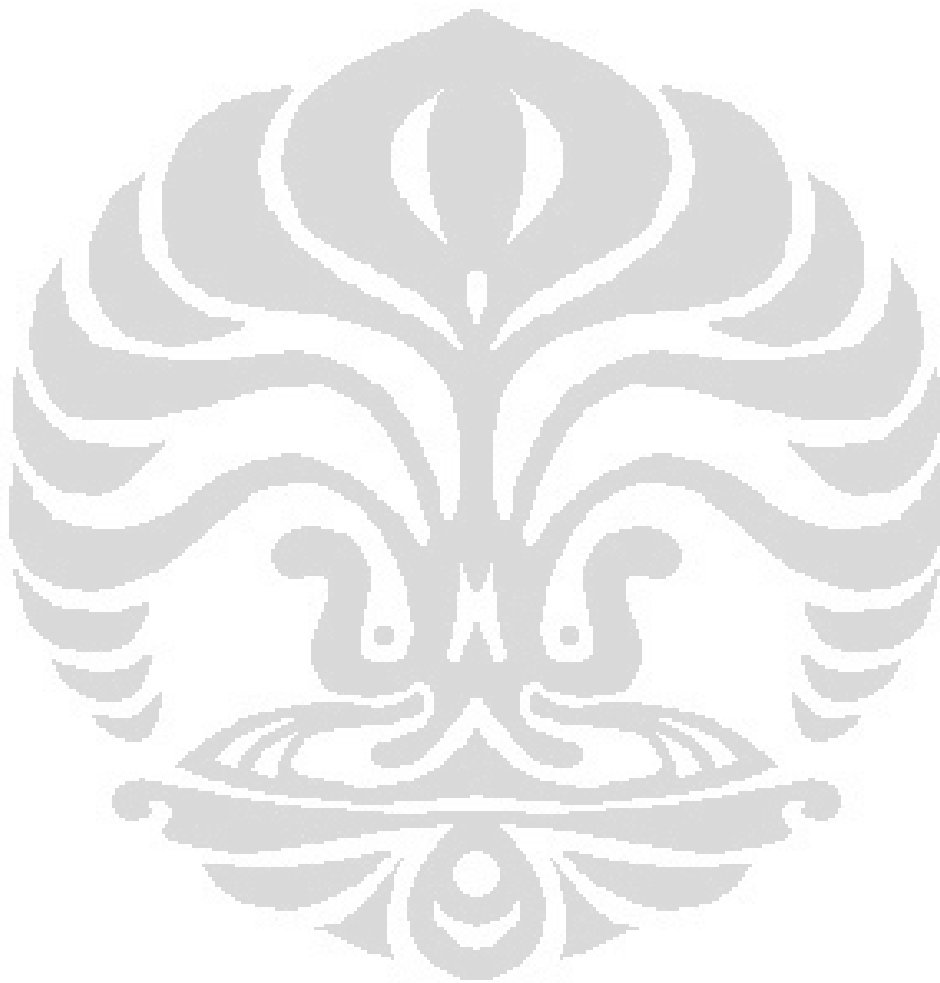
DAFTAR PUSTAKA

- Akcelik, R. 2011. *Reprint: Time-Dependent Expressions for Delay, Stop Rate and Queue Length at Traffic Signals*. Vermont South, Australia: Australian Road Research Board
- Burden, R. L., & Douglas, J. 2011. *Numerical Analysis (9th ed)*. USA: Brooks/Cole
- Gross D., & Harris C. M. 1985. *Fundamentals of Queuing Theory (2nd ed)*. USA: John Wiley & Sons, Inc
- Kimber R. M., & Hollis E. M. 1979. *Traffic Queues and Delays at Road Junction*. Transport and Road Research Laboratory Report, DoE, DTp, LR909.
- Liping Fu & Hellinga, B. 1999. *Prediction of Arrival Time Dependent Delay Variability at Signalized Intersections*. Washington D.C.: Transportation Research Board 78th Annual Meeting.
- Mannering, F. L., & Kilareski, W. P., 1990. *Principles of Highway Engineering and Traffic Analysis*. Canada: John Wiley & Sons, Inc
- Mathew, T. V. 2012. *Traffic Engineering and Management*. Bombay: IIT
- May, A. D., & Keller, H. M. 1967. *A Deterministic Queuing Model*. Transportation Research, 1(2), pp. 117-128.
- McNeil, D. R. 1968. A Solution to The Fixed-Cycle Traffic Light Problem for Compound Poisson Arrivals. Israel. Journal of Applied Probability. Vol. 5, No. 3 (Dec., 1968), pp. 624-635
- Medhi, J. 2003. *Stochastic Models in Queueing Theory (2nd ed)*. USA: Academic Press
- Ortuzar & Willumsen. 1990. *Modelling Transport*. Chicester: John Wiley & Sons Ltd.

Rouphail, Tarko, & Li. 2001. *Traffic Flow at Signalized Intersection*. Traffic Flow Theory Monograph, Chapter 9

Saxena, S. C. 1989. *A Course in Traffic Planning and Design*. Delhi: Dhanpat Rai & Sons

Sutrisno, M. T. 2011. *Skripsi: Model Waktu Tunggu pada Persimpangan Lalu Lintas*. Depok: Universitas Indonesia



LAMPIRAN

Lampiran 1 W_2 dengan algoritma *Composit Simpson's Rule*

$$\begin{aligned} Q_2 = & -(1/12) * ((24*Y*m^2*t^2*T- \\ & 24*Y*m^2*t^2*R+18*a^2*t^2*R^2*Y+18*a*t^2*Y*R-18*a*m*t^2*R- \\ & 36*a*m*t^2*E*R+36*a*t^2*E*Y*R-18*a^2*m*t^2*R^2+18*a^2*t^2*R^2*m*p- \\ & 24*m^3*t^3*p^2*R+8*m^3*t^3*p^3*T-8*m^3*t^3*p^3*R+24*m^3*t^3*p^2*R- \\ & 24*m^3*t^3*p^2*T-24*m*t^2*Y^2*T+24*m*t^2*Y^2*R+24*m^3*t^3*p^2*T- \\ & 8*Y^3*R+8*Y^3*T+36*a*t^2*E*m*p^2*R+18*a*t^2*m*p^2*R+24*m*t^2*p^2*Y^2*T- \\ & 24*m*t^2*p^2*Y^2*R+24*m^2*t^2*p^2*Y^2*T- \\ & 48*m^2*t^2*p^2*Y^2*T+48*m^2*t^2*p^2*Y^2*R-24*m^2*t^2*p^2*Y^2*R- \\ & 8*t^3*m^3*T+8*t^3*m^3*R+6*sqrt(3)*t*sqrt(a*R*((8*I)*Y^3*R^2*m+(18*I) \\ & I)*a*m^2*t^2*R^2+(18*I)*a*t^2*Y^2*R^2+(8*I)*Y^3*T^2*m- \\ & (48*I)*m^4*t^3*p^2*T^2+(24*I)*m^2*t^2*p^2*Y^2*T^2-(8*I)*t^3*m^4*T^2- \\ & (8*I)*t^3*m^4*R^2+(36*I)*a*t^2*E*Y^2*R^2-(24*I)*m^4*t^3*p^2*T^2- \\ & (24*I)*m^4*t^3*p^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3*p^3*R^2+(24*I)*Y^2*m^3*t^2*R^2+ \\ & (16*I)*t^3*m^4*R^2+(48*I)*m^2*t^2*Y^2*R^2+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y^2*R^2- \\ & (18*I)*a*t^2*Y^2*R^2+m^2*t^2*a^2*R^2*E*m*p^2*Y^2*T+2*m*t^2*Y^2*R^2*a- \\ & 4*t^2*a^2*R^2*E*m^2+8*m*t^2*Y^2*R^2*a^2*E+8*m*t^2*Y^2*R^2*a^2*E^2- \\ & 4*m^2*t^2*R^2*a^2*E^2-(48*I)*m^3*t^2*p^2*Y^2*T^2+(36*I)*a*m^2*t^2*E^2*R^2- \\ & (24*I)*m^2*t^2*Y^2*T^2-(48*I)*Y^2*m^3*t^2*T^2*R- \\ & (48*I)*m^3*t^2*p^2*Y^2*T^2-R- \\ & (18*I)*a*m^2*t^2*R^2*T+(96*I)*m^3*t^2*p^2*Y^2*T^2-R-(36*I)*a*t^2*E*Y^2*R^2*m- \\ & (24*I)*m^2*t^2*Y^2*R^2+(18*I)*a^2*t^2*R^2*m^2*p^2*T-2*m*t^2*p^2*Y^2*R^2*a- \\ & 4*Y^2*R^3*a^2*E-4*Y^2*R^2*a^2*E-4*Y^2*R^2*a^2*E^2-8*m*t^2*p^2*Y^2*R^2*a^2*E- \\ & 8*m*t^2*p^2*Y^2*R^2*a^2*E^2+Y^2*T^2*a^2*R^2+Y^2*T^2*a^3*R^3+2*Y^2*T^2*a^2*R^2+4*Y^2* \\ & T^2*a^2*R^2*E+4*Y^2*T^2*a^2*R^2*E+4*Y^2*T^2*a^2*R^2*E^2+m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2+m^2*t^2 \\ & p^2*T^2*a^3*R^3+2*m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2+2*t^2*a^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3* \\ & p^3*T^2+4*m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2* \\ & p^2*T^2*a^2*R^2*E^2-2*m*t^2*Y^2*T^2*a^2*R^2-2*m*t^2*Y^2*T^2*a^3*R^3-4*m*t^2*Y^2*T^2*a^2*R^2- \\ & 8*m*t^2*Y^2*T^2*a^2*R^2*E-8*m*t^2*Y^2*T^2*a^2*R^2*E- \\ & 8*m*t^2*Y^2*T^2*a^2*R^2*E^2+4*m^2*t^2*T^2*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*T^2*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2 \\ & T^2*a^2*R^2*E^2- \\ & 2*m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2+28*m^2*t^2*T^2*a^2*R^2+m^2*t^2*T^2*a^3*R^3+2*m^2*t^2*T^2*a \\ & ^2*R^2-2*m^2*t^2*p^2*T^2*a^3*R^3- \\ & 4*m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2+(24*I)*Y^2*m^3*t^2*T^2+(36*I)*a*t^2*E^2*m^2*p^2*R^2 \\ & T-(16*I)*m^4*t^3*p^3*T^2-R-Y^2*R^2*a- \\ & (48*I)*m^2*t^2*p^2*Y^2*T^2+6*t^2*a^4*R^4+2*t^2*a^5*R^5-Y^2*R^4*a^3- \\ & 2*Y^2*R^3*a^2-t^2*a^3*R^4*m^2+24*t^2*a^3*R^3*E- \\ & 2*t^2*a^2*R^3*m^2+24*t^2*a^3*R^3*E^2+12*t^2*a^2*R^2*E- \\ & 28*t^2*a^2*R^2*m^2-8*m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2*E-8*m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2*E- \\ & 8*m^2*t^2*p^2*T^2*a^2*R^2*E^2+24*t^2*a^2*R^2*E^2+16*t^2*a^2*R^2*E^3+12*t^2*a^4*R \\ & ^4*E-m^2*t^2*p^2*R^2*a- \\ & 4*m^2*t^2*p^2*R^2*a^2*E+2*t^2*a^3*R^4*m^2*p+2*t^2*a^3*R^3*m*p^2*Y^2*T+4*t^2 \\ & a^2*R^3*m^2*Y-4*t^2*a^2*R^3*m^2*Y- \\ & 2*t^2*a^2*R^3*m^2*p^2+4*t^2*a^2*R^3*m^2*p+4*t^2*a^2*R^2*m*p^2*Y^2*T+8*t^2 \\ & a^2*R^3*E*m^2*Y-4*t^2*a^2*R^3*E*m^2-8*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p^2*Y- \\ & 4*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p^2+8*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p+2*t^2*a^3*R^4*m^2*Y- \\ & 2*t^2*a^3*R^4*m^2*p^2-t^2*a^3*R^4*m^2*p^2+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y^2*T^2- \\ & (48*I)*m^3*t^2*p^2*Y^2*R^2-(18*I)*a^2*t^2*R^3*m^2*p+2*m^2*t^2*p^2*R^2*a- \\ & (16*I)*Y^3*R^2*m^2-T- \\ & 4*m^2*t^2*p^2*R^2*a^2*E^2+8*m^2*t^2*p^2*R^2*a^2*E+8*m^2*t^2*p^2*R^2*a^2*E^2+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8*m*t*p*Y*T*a*R*E- \\
& (36*I)*a*t^2*E*m^2*p*R^2+(18*I)*a*t^2*m^2*p*R*T+2*m*t*p*Y*T*a*R+8* \\
& m*t*p*Y*T*a*R*E^2+6*t*a^3*R^3+(18*I)*a^2*t*R^2*Y*m*T- \\
& (18*I)*a^2*m^2*t^2*R^2*T+(48*I)*m^4*t^3*p^2*R*T+(24*I)*m^4*t^3*p*R \\
& ^2- \\
& (18*I)*a^2*t*R^3*Y*m+(24*I)*m^2*t*p*Y^2*R^2+(18*I)*a^2*m^2*t^2*R^3 \\
& -(36*I)*a*m^2*t^2*E*R*T+(24*I)*m^4*t^3*p*T^2- \\
& (18*I)*a*t^2*m^2*p*R^2)/(-T+R))- (54*I)*a*m*t^2*R)*(- \\
& T+R)^2)^(1/3)/(-T+R)+(1/6)*(-2*Y^2*R+2*Y^2*T+2*m^2*t^2*p^2*T- \\
& 4*m*t*Y*T+2*m^2*t^2*T- \\
& 4*m^2*t^2*p*T+3*t*a^2*R^2+3*t*a*R+6*t*a*R*E+4*m*t*Y*R-2*m^2*t^2*R- \\
& 4*m*t*p*Y*R- \\
& 2*m^2*t^2*p^2*R+4*m^2*t^2*p*R+4*m*t*p*Y*T)/((24*Y*m^2*t^2*T- \\
& 24*Y*m^2*t^2*R+18*a^2*t*R^2*Y+18*a*t*Y*R-18*a*m*t^2*R- \\
& 36*a*m*t^2*E*R+36*a*t*E*Y*R-18*a^2*m*t^2*R^2+18*a^2*t^2*R^2*m*p- \\
& 24*m^3*t^3*p*R+8*m^3*t^3*p^3*T-8*m^3*t^3*p^3*R+24*m^3*t^3*p^2*R- \\
& 24*m^3*t^3*p^2*T-24*m*t*Y^2*T+24*m*t*Y^2*R+24*m^3*t^3*p*T- \\
& 8*Y^3*R+8*Y^3*T+36*a*t^2*E*m*p*R+18*a*t^2*m*p*R+24*m*t*p*Y^2*T- \\
& 24*m*t*p*Y^2*R+24*m^2*t^2*p^2*Y*T- \\
& 48*m^2*t^2*p*Y*T+48*m^2*t^2*p*Y*R-24*m^2*t^2*p^2*Y*R- \\
& 8*t^3*m^3*T+8*t^3*m^3*R+6*sqrt(3)*t*sqrt(a*R*((8*I)*Y^3*R^2*m+(18* \\
& I)*a*m^2*t^2*R^2+(18*I)*a*t*Y*R*m*T+(8*I)*Y^3*T^2*m- \\
& (48*I)*m^4*t^3*p*T*R+(24*I)*m^2*t*p*Y^2*T^2-(8*I)*t^3*m^4*T^2- \\
& (8*I)*t^3*m^4*R^2+(36*I)*a*t*E*Y*R*m*T-(24*I)*m^4*t^3*p^2*T^2- \\
& (24*I)*m^4*t^3*p^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3*p^3*R^2+(24*I)*Y*m^3*t^2*R^2+ \\
& (16*I)*t^3*m^4*R*T+(48*I)*m^2*t*Y^2*R*T+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y*R^2- \\
& (18*I)*a*t*Y*R^2*m+8*t*a^2*R^2*E*m*p*Y*T+2*m*t*Y*R^2*a- \\
& 4*t^2*a*R^2*E*m^2+8*m*t*Y*R^2*a*E+8*m*t*Y*R^2*a*E^2- \\
& 4*m^2*t^2*R^2*a*E^2-(48*I)*m^3*t^2*p*Y*T^2+(36*I)*a*m^2*t^2*E*R^2- \\
& (24*I)*m^2*t^2*Y^2*T^2-(48*I)*Y*m^3*t^2*T*R- \\
& (48*I)*m^3*t^2*p^2*Y*T*R- \\
& (18*I)*a*m^2*t^2*R*T+(96*I)*m^3*t^2*p*Y*T*R-(36*I)*a*t*E*Y*R^2*m- \\
& (24*I)*m^2*t*Y^2*R^2+(18*I)*a^2*t^2*R^2*m^2*p*T-2*m*t*p*Y*R^2*a- \\
& 4*Y^2*R^3*a^2*E-4*Y^2*R^2*a*E-4*Y^2*R^2*a*E^2-8*m*t*p*Y*R^2*a*E- \\
& 8*m*t*p*Y*R^2*a*E^2+Y^2*T*a*R+Y^2*T*a^3*R^3+2*Y^2*T*a^2*R^2+4*Y^2* \\
& T*a^2*R^2*E+4*Y^2*T*a*R*E+4*Y^2*T*a*R*E^2+m^2*t^2*p^2*T*a*R+m^2*t^ \\
& 2*p^2*T*a^3*R^3+2*m^2*t^2*p^2*T*a^2*R^2+2*t*a^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3* \\
& p^3*T^2+4*m^2*t^2*p^2*T*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*p^2*T*a*R*E+4*m^2*t^2* \\
& p^2*T*a*R*E^2-2*m*t*Y*T*a*R-2*m*t*Y*T*a^3*R^3-4*m*t*Y*T*a^2*R^2- \\
& 8*m*t*Y*T*a^2*R^2*E-8*m*t*Y*T*a*R*E- \\
& 8*m*t*Y*T*a*R*E^2+4*m^2*t^2*T*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*T*a*R*E+4*m^2*t^ \\
& 2*T*a*R*E^2- \\
& 2*m^2*t^2*p*T*a*R+28*m^2*t^2*T*a*R+m^2*t^2*T*a^3*R^3+2*m^2*t^2*T*a \\
& ^2*R^2-2*m^2*t^2*p*T*a^3*R^3- \\
& 4*m^2*t^2*p*T*a^2*R^2+(24*I)*Y*m^3*t^2*T^2+(36*I)*a*t^2*E*m^2*p*R* \\
& T-(16*I)*m^4*t^3*p^3*T*R-Y^2*R^2*a- \\
& (48*I)*m^2*t*p*Y^2*T*R+6*t*a^4*R^4+2*t*a^5*R^5-Y^2*R^4*a^3- \\
& 2*Y^2*R^3*a^2-t^2*a^3*R^4*m^2+24*t*a^3*R^3*E- \\
& 2*t^2*a^2*R^3*m^2+24*t*a^3*R^3*E^2+12*t*a^2*R^2*E- \\
& 28*t^2*a*R^2*m^2-8*m^2*t^2*p*T*a^2*R^2*E-8*m^2*t^2*p*T*a*R*E- \\
& 8*m^2*t^2*p*T*a*R*E^2+24*t*a^2*R^2*E^2+16*t*a^2*R^2*E^3+12*t*a^4*R \\
& ^4*E-m^2*t^2*p^2*R^2*a- \\
& 4*m^2*t^2*p^2*R^2*a*E+2*t^2*a^3*R^4*m^2*p+2*t*a^3*R^3*m*p*Y*T+4*t* \\
& a^2*R^3*m*Y-4*t*a^2*R^3*m*p*Y- \\
& 2*t^2*a^2*R^3*m^2*p^2+4*t^2*a^2*R^3*m^2*p+4*t*a^2*R^2*m*p*Y*T+8*t* \\
& a^2*R^3*E*m*Y-4*t^2*a^2*R^3*E*m^2-8*t*a^2*R^3*E*m*p*Y- \\
& 4*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p^2+8*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p+2*t*a^3*R^4*m*Y- \\
& 2*t*a^3*R^4*m*p*Y-t^2*a^3*R^4*m^2*p^2+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y*T^2- \\
& (48*I)*m^3*t^2*p*Y*R^2-(18*I)*a^2*t^2*R^3*m^2*p+2*m^2*t^2*p*R^2*a-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (16*I) * Y^3 * R^m * T - \\
& 4 * m^2 * t^2 * p^2 * R^2 * a * E^2 + 8 * m^2 * t^2 * p * R^2 * a * E + 8 * m^2 * t^2 * p * R^2 * a * E^2 + \\
& 8 * m * t * p * Y * T * a * R * E - \\
& (36*I) * a * t^2 * E * m^2 * p * R^2 + (18*I) * a * t^2 * m^2 * p * R * T + 2 * m * t * p * Y * T * a * R + 8 * \\
& m * t * p * Y * T * a * R * E^2 + 6 * t * a^3 * R^3 + (18*I) * a^2 * t * R^2 * Y * m * T - \\
& (18*I) * a^2 * m^2 * t^2 * R^2 * T + (48*I) * m^4 * t^3 * p^2 * R * T + (24*I) * m^4 * t^3 * p * R \\
& ^2 - \\
& (18*I) * a^2 * t * R^3 * Y * m + (24*I) * m^2 * t * p * Y^2 * R^2 + (18*I) * a^2 * m^2 * t^2 * R^3 \\
& - (36*I) * a * m^2 * t^2 * E * R * T + (24*I) * m^4 * t^3 * p * T^2 - \\
& (18*I) * a * t^2 * m^2 * p * R^2) / (-T + R)) - (54*I) * a * m * t^2 * R) * (- \\
& T + R)^2) ^ (1/3) + (2/3) * Y - (2/3) * t * m + (2/3) * m * t * p - \\
& (1/2 * I) * \text{sqrt}(3) * ((1/6) * ((24 * Y * m^2 * t^2 * T - \\
& 24 * Y * m^2 * t^2 * R + 18 * a^2 * t * R^2 * Y + 18 * a * t * Y * R - 18 * a * m * t^2 * R - \\
& 36 * a * m * t^2 * E * R + 36 * a * t * E * Y * R - 18 * a^2 * m * t^2 * R^2 + 18 * a^2 * t^2 * R^2 * m * p - \\
& 24 * m^3 * t^3 * p * R + 8 * m^3 * t^3 * p^3 * T - 8 * m^3 * t^3 * p^3 * R + 24 * m^3 * t^3 * p^2 * R - \\
& 24 * m^3 * t^3 * p^2 * T - 24 * m * t * Y^2 * T + 24 * m * t * Y^2 * R + 24 * m^3 * t^3 * p * T - \\
& 8 * Y^3 * R + 8 * Y^3 * T + 36 * a * t^2 * E * m * p * R + 18 * a * t^2 * m * p * R + 24 * m * t * p * Y^2 * T - \\
& 24 * m * t * p * Y^2 * R + 24 * m^2 * t^2 * p^2 * Y * T - \\
& 48 * m^2 * t^2 * p * Y * T + 48 * m^2 * t^2 * p * Y * R - 24 * m^2 * t^2 * p^2 * Y * R - \\
& 8 * t^3 * m^3 * T + 8 * t^3 * m^3 * R + 6 * \text{sqrt}(3) * t * \text{sqrt}(a * R * ((8 * I) * Y^3 * R^2 * m + (18 * \\
& I) * a * m^2 * t^2 * R^2 + (18 * I) * a * t * Y * R * m * T + (8 * I) * Y^3 * T^2 * m - \\
& (48 * I) * m^4 * t^3 * p * T * R + (24 * I) * m^2 * t * p * Y^2 * T^2 - (8 * I) * t^3 * m^4 * T^2 - \\
& (8 * I) * t^3 * m^4 * R^2 + (36 * I) * a * t * E * Y * R * m * T - (24 * I) * m^4 * t^3 * p^2 * T^2 - \\
& (24 * I) * m^4 * t^3 * p^2 * R^2 + (8 * I) * m^4 * t^3 * p^3 * R^2 + (24 * I) * Y * m^3 * t^2 * R^2 + \\
& (16 * I) * t^3 * m^4 * R * T + (48 * I) * m^2 * t * Y^2 * R * T + (24 * I) * m^3 * t^2 * p^2 * Y * R^2 - \\
& (18 * I) * a * t * Y * R^2 * m + 8 * t * a^2 * R^2 * E * m * p * Y * T + 2 * m * t * Y * R^2 * a - \\
& 4 * t^2 * a * R^2 * E * m^2 + 8 * m * t * Y * R^2 * a * E + 8 * m * t * Y * R^2 * a * E^2 - \\
& 4 * m^2 * t^2 * R^2 * a * E^2 - (48 * I) * m^3 * t^2 * p * Y * T^2 + (36 * I) * a * m^2 * t^2 * E * R^2 - \\
& (24 * I) * m^2 * t * Y^2 * T^2 - (48 * I) * Y * m^3 * t^2 * T * R - \\
& (48 * I) * m^3 * t^2 * p^2 * Y * T * R - \\
& (18 * I) * a * m^2 * t^2 * R * T + (96 * I) * m^3 * t^2 * p * Y * T * R - (36 * I) * a * t * E * Y * R^2 * m - \\
& (24 * I) * m^2 * t * Y^2 * R^2 + (18 * I) * a^2 * t^2 * R^2 * m^2 * p * T - 2 * m * t * p * Y * R^2 * a - \\
& 4 * Y^2 * R^3 * a^2 * E - 4 * Y^2 * R^2 * a * E - 4 * Y^2 * R^2 * a * E^2 - 8 * m * t * p * Y * R^2 * a * E - \\
& 8 * m * t * p * Y * R^2 * a * E^2 + Y^2 * T * a * R + Y^2 * T * a^3 * R^3 + 2 * Y^2 * T * a^2 * R^2 + 4 * Y^2 * \\
& T * a^2 * R^2 * E + 4 * Y^2 * T * a * R * E + 4 * Y^2 * T * a * R * E^2 + m^2 * t^2 * p^2 * T * a * R + m^2 * t^2 * \\
& 2 * p^2 * T * a^3 * R^3 + 2 * m^2 * t^2 * p^2 * T * a^2 * R^2 + 2 * t * a^2 * R^2 + (8 * I) * m^4 * t^3 * \\
& p^3 * T^2 + 4 * m^2 * t^2 * p^2 * T * a^2 * R^2 * E + 4 * m^2 * t^2 * p^2 * T * a * R * E + 4 * m^2 * t^2 * \\
& p^2 * T * a * R * E^2 - 2 * m * t * Y * T * a * R - 2 * m * t * Y * T * a^3 * R^3 - 4 * m * t * Y * T * a^2 * R^2 - \\
& 8 * m * t * Y * T * a^2 * R^2 * E - 8 * m * t * Y * T * a * R * E - \\
& 8 * m * t * Y * T * a * R * E^2 + 4 * m^2 * t^2 * T * a^2 * R^2 * E + 4 * m^2 * t^2 * T * a * R * E + 4 * m^2 * t^2 * \\
& 2 * T * a * R * E^2 - \\
& 2 * m^2 * t^2 * p * T * a * R + 28 * m^2 * t^2 * T * a * R + m^2 * t^2 * T * a^3 * R^3 + 2 * m^2 * t^2 * T * a \\
& ^2 * R^2 - 2 * m^2 * t^2 * p * T * a^3 * R^3 - \\
& 4 * m^2 * t^2 * p * T * a^2 * R^2 + (24 * I) * Y * m^3 * t^2 * T^2 + (36 * I) * a * t^2 * E * m^2 * p * R * \\
& T - (16 * I) * m^4 * t^3 * p^3 * T * R - Y^2 * R^2 * a - \\
& (48 * I) * m^2 * t * p * Y^2 * T * R + 6 * t * a^4 * R^4 + 2 * t * a^5 * R^5 - Y^2 * R^4 * a^3 - \\
& 2 * Y^2 * R^3 * a^2 - t^2 * a^3 * R^4 * m^2 + 24 * t * a^3 * R^3 * E - \\
& 2 * t^2 * a^2 * R^3 * m^2 + 24 * t * a^3 * R^3 * E^2 + 12 * t * a^2 * R^2 * E - \\
& 28 * t^2 * a * R^2 * m^2 - 8 * m^2 * t^2 * p * T * a^2 * R^2 * E - 8 * m^2 * t^2 * p * T * a * R * E - \\
& 8 * m^2 * t^2 * p * T * a * R * E^2 + 24 * t * a^2 * R^2 * E^2 + 16 * t * a^2 * R^2 * E^3 + 12 * t * a^4 * R \\
& ^4 * E - m^2 * t^2 * p^2 * R^2 * a - \\
& 4 * m^2 * t^2 * p^2 * R^2 * a * E + 2 * t^2 * a^3 * R^4 * m^2 * p + 2 * t * a^3 * R^3 * m * p * Y * T + 4 * t * \\
& a^2 * R^3 * m * Y - 4 * t * a^2 * R^3 * m * p * Y - \\
& 2 * t^2 * a^2 * R^3 * m^2 * p^2 + 4 * t^2 * a^2 * R^3 * m^2 * p + 4 * t * a^2 * R^2 * m * p * Y * T + 8 * t * \\
& a^2 * R^3 * E * m * Y - 4 * t^2 * a^2 * R^3 * E * m^2 - 8 * t * a^2 * R^3 * E * m * p * Y - \\
& 4 * t^2 * a^2 * R^3 * E * m^2 * p^2 + 8 * t^2 * a^2 * R^3 * E * m^2 * p + 2 * t * a^3 * R^4 * m * Y - \\
& 2 * t * a^3 * R^4 * m * p * Y - t^2 * a^3 * R^4 * m^2 * p^2 + (24 * I) * m^3 * t^2 * p^2 * Y * T^2 - \\
& (48 * I) * m^3 * t^2 * p * Y * R^2 - (18 * I) * a^2 * t^2 * R^3 * m^2 * p + 2 * m^2 * t^2 * p * R^2 * a - \\
& (16 * I) * Y^3 * R^m * T -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4m^2t^2p^2R^2a^2E^2+8m^2t^2p^2R^2a^2E+8m^2t^2p^2R^2a^2E^2+ \\
& 8m^2t^2p^2Y^2T^2a^2R^2E- \\
& (36I) * a^2t^2E^2m^2p^2R^2+ (18I) * a^2t^2m^2p^2R^2T+2m^2t^2p^2Y^2T^2a^2R^2+8m^2 \\
& m^2t^2p^2Y^2T^2a^2R^2E^2+6t^2a^3R^3+ (18I) * a^2t^2R^2Y^2m^2T- \\
& (18I) * a^2m^2t^2R^2T+ (48I) * m^4t^3p^2R^2T+ (24I) * m^4t^3p^2R \\
& ^2- \\
& (18I) * a^2t^2R^3Y^2m+ (24I) * m^2t^2p^2Y^2R^2+ (18I) * a^2m^2t^2R^3 \\
& - (36I) * a^2m^2t^2E^2R^2T+ (24I) * m^4t^3p^2T^2- \\
& (18I) * a^2t^2m^2p^2R^2) / (-T+R) - (54I) * a^2m^2t^2R) * (- \\
& T+R)^2) ^ (1/3) / (-T+R) + (1/3) * (-2Y^2R+2Y^2T+2m^2t^2p^2T- \\
& 4m^2t^2Y^2T+2m^2t^2T- \\
& 4m^2t^2p^2T+3t^2a^2R^2+3t^2a^2R+6t^2a^2R^2E+4m^2t^2Y^2R-2m^2t^2R- \\
& 4m^2t^2p^2Y^2R- \\
& 2m^2t^2p^2R+4m^2t^2p^2R+4m^2t^2p^2Y^2T) / ((24Y^2m^2t^2T- \\
& 24Y^2m^2t^2R+18a^2t^2R^2Y+18a^2t^2Y^2R-18a^2m^2t^2R- \\
& 36a^2m^2t^2E^2R+36a^2t^2E^2Y^2R-18a^2m^2t^2R^2+18a^2t^2R^2m^2p- \\
& 24m^3t^3p^2R+8m^3t^3p^3T-8m^3t^3p^3R+24m^3t^3p^2R- \\
& 24m^3t^3p^2T-24m^2t^2Y^2T+24m^2t^2Y^2R+24m^3t^3p^2T- \\
& 8Y^3R+8Y^3T+36a^2t^2E^2m^2p^2R+18a^2t^2m^2p^2R+24m^2t^2p^2Y^2T- \\
& 24m^2t^2p^2Y^2R+24m^2t^2p^2Y^2T- \\
& 48m^2t^2p^2Y^2T+48m^2t^2p^2Y^2R-24m^2t^2p^2Y^2R- \\
& 8t^3m^3T+8t^3m^3R+6\sqrt{3}) * t * \sqrt{3} * (a^2R * ((8I) * Y^3R^2m+ (18I) \\
& I) * a^2m^2t^2R^2+ (18I) * a^2t^2Y^2R^2m^2T+ (8I) * Y^3T^2m- \\
& (48I) * m^4t^3p^2T^2R+ (24I) * m^2t^2p^2Y^2T^2- (8I) * t^3m^4T^2- \\
& (8I) * t^3m^4R^2+ (36I) * a^2t^2E^2Y^2R^2m^2T- (24I) * m^4t^3p^2T^2- \\
& (24I) * m^4t^3p^2R^2+ (8I) * m^4t^3p^3R^2+ (24I) * Y^2m^3t^2R^2+ \\
& (16I) * t^3m^4R^2T+ (48I) * m^2t^2Y^2R^2T+ (24I) * m^3t^2p^2Y^2R^2- \\
& (18I) * a^2t^2Y^2R^2m+8t^2a^2R^2E^2m^2p^2Y^2T+2m^2t^2Y^2R^2a- \\
& 4t^2a^2R^2E^2m^2+8m^2t^2Y^2R^2a^2E+8m^2t^2Y^2R^2a^2E^2- \\
& 4m^2t^2R^2a^2E^2- (48I) * m^3t^2p^2Y^2T^2+ (36I) * a^2m^2t^2E^2R^2- \\
& (24I) * m^2t^2Y^2T^2- (48I) * Y^2m^3t^2T^2R- \\
& (48I) * m^3t^2p^2Y^2T^2R- \\
& (18I) * a^2m^2t^2R^2T+ (96I) * m^3t^2p^2Y^2T^2R- (36I) * a^2t^2E^2Y^2R^2m- \\
& (24I) * m^2t^2Y^2R^2+ (18I) * a^2t^2R^2m^2p^2T-2m^2t^2p^2Y^2R^2a- \\
& 4Y^2R^3a^2E-4Y^2R^2a^2E-4Y^2R^2a^2E^2-8m^2t^2p^2Y^2R^2a^2E- \\
& 8m^2t^2p^2Y^2R^2a^2E^2+Y^2T^2a^2R+Y^2T^2a^3R^3+2Y^2T^2a^2R^2+4Y^2T^2 \\
& T^2a^2R^2E+4Y^2T^2a^2R^2E+4Y^2T^2a^2R^2E^2+m^2t^2p^2T^2a^2R+m^2t^2 \\
& 2p^2T^2a^3R^3+2m^2t^2p^2T^2a^2R^2+2t^2a^2R^2+ (8I) * m^4t^3p^2 \\
& p^3T^2+4m^2t^2p^2T^2a^2R^2E+4m^2t^2p^2T^2a^2R^2E+4m^2t^2p^2T^2a^2R^2E \\
& p^2T^2a^2R^2E^2-2m^2t^2Y^2T^2a^2R-2m^2t^2Y^2T^2a^3R^3-4m^2t^2Y^2T^2a^2R^2- \\
& 8m^2t^2Y^2T^2a^2R^2E-8m^2t^2Y^2T^2a^2R^2E- \\
& 8m^2t^2Y^2T^2a^2R^2E^2+4m^2t^2T^2a^2R^2E+4m^2t^2T^2a^2R^2E+4m^2t^2 \\
& 2T^2a^2R^2E^2- \\
& 2m^2t^2p^2T^2a^2R+28m^2t^2T^2a^2R+m^2t^2T^2a^3R^3+2m^2t^2T^2a^2R^2 \\
& ^2R^2-2m^2t^2p^2T^2a^3R^3- \\
& 4m^2t^2p^2T^2a^2R^2+ (24I) * Y^2m^3t^2T^2+ (36I) * a^2t^2E^2m^2p^2R^2 \\
& T- (16I) * m^4t^3p^3T^2R-Y^2R^2a- \\
& (48I) * m^2t^2p^2Y^2T^2R+6t^2a^4R^4+2t^2a^5R^5-Y^2R^4a^3- \\
& 2Y^2R^3a^2-t^2a^3R^4m^2+24t^2a^3R^3E- \\
& 2t^2a^2R^3m^2+24t^2a^3R^3E^2+12t^2a^2R^2E- \\
& 28t^2a^2R^2m^2-8m^2t^2p^2T^2a^2R^2E-8m^2t^2p^2T^2a^2R^2E- \\
& 8m^2t^2p^2T^2a^2R^2E^2+24t^2a^2R^2E^2+16t^2a^2R^2E^3+12t^2a^4R^2 \\
& ^4E-m^2t^2p^2R^2a- \\
& 4m^2t^2p^2R^2a^2E+2t^2a^3R^4m^2p+2t^2a^3R^3m^2p^2Y^2T+4t^2a^2 \\
& a^2R^3m^2Y-4t^2a^2R^3m^2p^2Y- \\
& 2t^2a^2R^3m^2p^2+4t^2a^2R^3m^2p+4t^2a^2R^2m^2p^2Y^2T+8t^2a^2R^3E^2m^2Y- \\
& 4t^2a^2R^3E^2m^2p^2-8t^2a^2R^3E^2m^2p^2Y- \\
& 4t^2a^2R^3E^2m^2p^2+8t^2a^2R^3E^2m^2p+2t^2a^3R^4m^2Y- \\
& 2t^2a^3R^4m^2p^2-t^2a^3R^4m^2p^2+ (24I) * m^3t^2p^2Y^2T^2-
\end{aligned}$$

```

(48*I)*m^3*t^2*p*Y*R^2-(18*I)*a^2*t^2*R^3*m^2*p+2*m^2*t^2*p*R^2*a-
(16*I)*Y^3*R*m*T-
4*m^2*t^2*p^2*R^2*a*E^2+8*m^2*t^2*p*R^2*a*E+8*m^2*t^2*p*R^2*a*E^2+
8*m*t*p*Y*T*a*R*E-
(36*I)*a*t^2*E*m^2*p*R^2+(18*I)*a*t^2*m^2*p*R*T+2*m*t*p*Y*T*a*R+8*
m*t*p*Y*T*a*R*E^2+6*t*a^3*R^3+(18*I)*a^2*t*R^2*Y*m*T-
(18*I)*a^2*m^2*t^2*R^2*T+(48*I)*m^4*t^3*p^2*R*T+(24*I)*m^4*t^3*p*R
^2-
(18*I)*a^2*t*R^3*Y*m+(24*I)*m^2*t*p*Y^2*R^2+(18*I)*a^2*m^2*t^2*R^3
-(36*I)*a*m^2*t^2*E*R*T+(24*I)*m^4*t^3*p*T^2-
(18*I)*a*t^2*m^2*p*R^2)/(-T+R))- (54*I)*a*m*t^2*R)*(-
T+R)^2)^(1/3));
Q2t = inline (char(Q2));

```

```

n = 100;
h = (T-R)/n;

tN0 = Q2t(R)+Q2t(T);
tN1 = 0;
tN2 = 0;

for i=1:(n-1)
    t = R + i*h;
    if (mod(i,2)==0)
        tN2 = tN2 + Q2t(t);
    else
        tN1 = tN1 + Q2t(t);
    end
end

W2 = (h/3)*(tN0+2*tN2+4*tN1);

```

Lampiran 2 Rata-rata Waktu Tunggu Kendaraan

```

clc; clear;
syms t a m p R T E Y I

a = input('Rata2 laju kedatangan dalam 1 siklus (kendaraan/menit)= ');
m = input('Rata2 laju keberangkatan dalam 1 siklus (kendaraan/menit)= ');
R = input('Lama Lampu Merah (menit)= ');
T = input('Lama 1 siklus (menit)= ');
E = input('Jumlah kendaraan awal siklus = ');
v = input('Variansi jumlah kedatangan pada satu siklus(hasil observasi)= ');
x = input('Rata-rata jumlah kedatangan pada satu siklus (hasil observasi)= \n\n');

tic
%% total waktu tunggu saat fase merah (kendaraan.menit)
Q1 = E+a*t;
W1 = int(Q1,t,0,R);
%%
total waktu tunggu saat fase hijau (kendaraan.menit)
Y = E+a*R;
p = a/m;
I = v/x;
Q2 = -(1/12)*((24*Y*m^2*t^2*T-
24*Y*m^2*t^2*R+18*a^2*t*R^2*Y+18*a*t*Y*R-18*a*m*t^2*R-
36*a*m*t^2*E*R+36*a*t*E*Y*R-18*a^2*m*t^2*R^2+18*a^2*t^2*R^2*m*p-
24*m^3*t^3*p*R+8*m^3*t^3*p^3*T-8*m^3*t^3*p^3*R+24*m^3*t^3*p^2*R-
24*m^3*t^3*p^2*T-24*m*t*Y^2*T+24*m*t*Y^2*R+24*m^3*t^3*p*T-
8*Y^3*R+8*Y^3*T+36*a*t^2*E*m*p*R+18*a*t^2*m*p*R+24*m*t*p*Y^2*T-
24*m*t*p*Y^2*R+24*m^2*t^2*p^2*Y*T-
48*m^2*t^2*p*Y*T+48*m^2*t^2*p*Y*R-24*m^2*t^2*p^2*Y*R-
8*t^3*m^3*T+8*t^3*m^3*R+6*sqrt(3)*t*sqrt(a*R*((8*I)*Y^3*R^2*m+(18*I)*a*m^2*t^2*R^2+(18*I)*a*t*Y*R*m*T+(8*I)*Y^3*T^2*m-
(48*I)*m^4*t^3*p*T*R+(24*I)*m^2*t*p*Y^2*T^2-(8*I)*t^3*m^4*T^2-
(8*I)*t^3*m^4*R^2+(36*I)*a*t*E*Y*R*m*T-(24*I)*m^4*t^3*p^2*T^2-
(24*I)*m^4*t^3*p^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3*p^3*R^2+(24*I)*Y*m^3*t^2*R^2+
(16*I)*t^3*m^4*R*T+(48*I)*m^2*t*Y^2*R*T+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y*R^2-
(18*I)*a*t*Y*R^2*m+8*t*a^2*R^2*E*m*p*Y*T+2*m*t*Y*R^2*a-
4*t^2*a*R^2*E*m^2+8*m*t*Y*R^2*a*E+8*m*t*Y*R^2*a*E^2-
4*m^2*t^2*R^2*a*E^2-(48*I)*m^3*t^2*p*Y*T^2+(36*I)*a*m^2*t^2*E*R^2-
(24*I)*m^2*t*Y^2*T^2-(48*I)*Y*m^3*t^2*T*R-
(48*I)*m^3*t^2*p^2*Y*T*R-
(18*I)*a*m^2*t^2*R*T+(96*I)*m^3*t^2*p*Y*T*R-(36*I)*a*t*E*Y*R^2*m-
(24*I)*m^2*t*Y^2*R^2+(18*I)*a^2*t^2*R^2*m^2*p*T-2*m*t*p*Y*R^2*a-
4*Y^2*R^3*a^2*E-4*Y^2*R^2*a*E-4*Y^2*R^2*a*E^2-8*m*t*p*Y*R^2*a*E-
8*m*t*p*Y*R^2*a*E^2+Y^2*T*a*R+Y^2*T*a^3*R^3+2*Y^2*T*a^2*R^2+4*Y^2*
T*a^2*R^2*E+4*Y^2*T*a*R*E+4*Y^2*T*a*R*E^2+m^2*t^2*p^2*T*a*R+m^2*t^
2*p^2*T*a^3*R^3+2*m^2*t^2*p^2*T*a^2*R^2+2*t*a^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3*
p^3*T^2+4*m^2*t^2*p^2*T*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*p^2*T*a*R*E+4*m^2*t^2*
p^2*T*a*R*E^2-2*m*t*Y*T*a*R-2*m*t*Y*T*a^3*R^3-4*m*t*Y*T*a^2*R^2-
8*m*t*Y*T*a^2*R^2*E-8*m*t*Y*T*a*R*E-
8*m*t*Y*T*a*R*E^2+4*m^2*t^2*T*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*T*a*R*E+4*m^2*t^
2*T*a*R*E^2-

```


$$\begin{aligned}
& 2*m^2*t^2*p^T*a^R+28*m^2*t^2*T*a^R+m^2*t^2*T*a^3*R^3+2*m^2*t^2*T*a^2*R^2-2*m^2*t^2*p^T*a^3*R^3- \\
& 4*m^2*t^2*p^T*a^2*R^2+(24*I)*Y^m^3*t^2*T^2+(36*I)*a*t^2*E^m^2*p^R^* \\
& T-(16*I)*m^4*t^3*p^3*T^R-Y^2*R^2*a- \\
& (48*I)*m^2*t*p^Y^2*T^R+6*t*a^4*R^4+2*t*a^5*R^5-Y^2*R^4*a^3- \\
& 2*Y^2*R^3*a^2-t^2*a^3*R^4*m^2+24*t*a^3*R^3*E- \\
& 2*t^2*a^2*R^3*m^2+24*t*a^3*R^3*E^2+12*t*a^2*R^2*E- \\
& 28*t^2*a^2*R^2*m^2-8*m^2*t^2*p^T*a^2*R^2*E-8*m^2*t^2*p^T*a^R*E- \\
& 8*m^2*t^2*p^T*a^R*E^2+24*t*a^2*R^2*E^2+16*t*a^2*R^2*E^3+12*t*a^4*R^4*E-m^2*t^2*p^2*R^2*a- \\
& 4*m^2*t^2*p^2*R^2*a^E+2*t^2*a^3*R^4*m^2*p+2*t*a^3*R^3*m^p*Y^T+4*t^* \\
& a^2*R^3*m^Y-4*t^*a^2*R^3*m^p*Y- \\
& 2*t^2*a^2*R^3*m^2*p^2+4*t^2*a^2*R^3*m^2*p+4*t^*a^2*R^2*m^p*Y^T+8*t^* \\
& a^2*R^3*E^m^Y-4*t^2*a^2*R^3*E^m^2-8*t^*a^2*R^3*E^m^p*Y- \\
& 4*t^2*a^2*R^3*E^m^2*p^2+8*t^2*a^2*R^3*E^m^2*p+2*t^*a^3*R^4*m^Y- \\
& 2*t^*a^3*R^4*m^p*Y-t^2*a^3*R^4*m^2*p^2+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y^T^2- \\
& (48*I)*m^3*t^2*p^Y^R^2-(18*I)*a^2*t^2*R^3*m^2*p+2*m^2*t^2*p^R^2*a- \\
& (16*I)*Y^3*R^m^T- \\
& 4*m^2*t^2*p^2*R^2*a^E^2+8*m^2*t^2*p^R^2*a^E+8*m^2*t^2*p^R^2*a^E^2+ \\
& 8*m^t*p^Y^T*a^R*E- \\
& (36*I)*a^t^2*E^m^2*p^R^2+(18*I)*a^t^2*m^2*p^R^T+2*m^t*p^Y^T*a^R+8^* \\
& m^t*p^Y^T*a^R*E^2+6*t^*a^3*R^3+(18*I)*a^2*t^R^2*Y^m^T- \\
& (18*I)*a^2*m^2*t^2*R^2*T+(48*I)*m^4*t^3*p^2*R^T+(24*I)*m^4*t^3*p^R^ \\
& ^2- \\
& (18*I)*a^2*t^R^3*Y^m+(24*I)*m^2*t^p^Y^2*R^2+(18*I)*a^2*m^2*t^2*R^3 \\
& -(36*I)*a^m^2*t^2*E^R^T+(24*I)*m^4*t^3*p^T^2- \\
& (18*I)*a^t^2*m^2*p^R^2)/(-T+R))- (54*I)*a^m^t^2*R)*(- \\
& T+R)^2)^(1/3)/(-T+R)+(1/6)*(-2*Y^2*R+2*Y^2*T+2*m^2*t^2*p^2*T- \\
& 4*m^t*Y^T+2*m^2*t^2*T- \\
& 4*m^2*t^2*p^T+3*t^*a^2*R^2+3*t^*a^R+6*t^*a^R*E+4*m^t*Y^R-2*m^2*t^2*R- \\
& 4*m^t*p^Y^R- \\
& 2*m^2*t^2*p^2*R+4*m^2*t^2*p^R+4*m^t*p^Y^T)/((24*Y^m^2*t^2*T- \\
& 24*Y^m^2*t^2*R+18*a^2*t^R^2*Y+18*a^t*Y^R-18*a^m^t^2*R- \\
& 36*a^m^t^2*E^R+36*a^t*E^Y^R-18*a^2*m^t^2*R^2+18*a^2*t^2*R^2*m^p- \\
& 24*m^3*t^3*p^R+8*m^3*t^3*p^3*T-8*m^3*t^3*p^3*R+24*m^3*t^3*p^2*R- \\
& 24*m^3*t^3*p^2*T-24*m^t*Y^2*T+24*m^t*Y^2*R+24*m^3*t^3*p^T- \\
& 8*Y^3*R+8*Y^3*T+36*a^t^2*E^m^p^R+18*a^t^2*m^p^R+24*m^t*p^Y^2*T- \\
& 24*m^t*p^Y^2*R+24*m^2*t^2*p^2*Y^T- \\
& 48*m^2*t^2*p^Y^T+48*m^2*t^2*p^Y^R-24*m^2*t^2*p^2*Y^R- \\
& 8*t^3*m^3*T+8*t^3*m^3*R+6*sqrt(3)*t*sqrt(a^R*((8*I)*Y^3*R^2*m+(18^* \\
& I)*a^m^2*t^2*R^2+(18*I)*a^t*Y^R^m^T+(8*I)*Y^3*T^2*m- \\
& (48*I)*m^4*t^3*p^T^R+(24*I)*m^2*t^p^Y^2*T^2-(8*I)*t^3*m^4*T^2- \\
& (8*I)*t^3*m^4*R^2+(36*I)*a^t*E^Y^R^m^T-(24*I)*m^4*t^3*p^2*T^2- \\
& (24*I)*m^4*t^3*p^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3*p^3*R^2+(24*I)*Y^m^3*t^2*R^2+ \\
& (16*I)*t^3*m^4*R^T+(48*I)*m^2*t^Y^2*R^T+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y^R^2- \\
& (18*I)*a^t*Y^R^2*m+8*t^*a^2*R^2*E^m^p^Y^T+2*m^t*Y^R^2*a^E- \\
& 4*t^2*a^R^2*E^m^2+8*m^t*Y^R^2*a^E+8*m^t*Y^R^2*a^E^2- \\
& 4*m^2*t^2*R^2*a^E^2-(48*I)*m^3*t^2*p^Y^T^2+(36*I)*a^m^2*t^2*E^R^2- \\
& (24*I)*m^2*t^Y^2*T^2-(48*I)*Y^m^3*t^2*T^R- \\
& (48*I)*m^3*t^2*p^2*Y^T^R- \\
& (18*I)*a^m^2*t^2*R^T+(96*I)*m^3*t^2*p^Y^T^R-(36*I)*a^t*E^Y^R^2*m- \\
& (24*I)*m^2*t^Y^2*R^2+(18*I)*a^2*t^2*R^2*m^2*p^T-2*m^t*p^Y^R^2*a^E- \\
& 4*Y^2*R^3*a^2*E-4*Y^2*R^2*a^E-4*Y^2*R^2*a^E^2-8*m^t*p^Y^R^2*a^E- \\
& 8*m^t*p^Y^R^2*a^E^2+Y^2*T^*a^R+Y^2*T^*a^3*R^3+2*Y^2*T^*a^2*R^2+4*Y^2* \\
& T^*a^2*R^2*E+4*Y^2*T^*a^R*E+4*Y^2*T^*a^R*E^2+m^2*t^2*p^2*T^*a^R+m^2*t^ \\
& ^2*p^2*T^*a^3*R^3+2*m^2*t^2*p^2*T^*a^2*R^2+2*t^*a^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3* \\
& p^3*T^2+4*m^2*t^2*p^2*T^*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*p^2*T^*a^R*E+4*m^2*t^2* \\
& p^2*T^*a^R*E^2-2*m^t*Y^T^*a^R-2*m^t*Y^T^*a^3*R^3-4*m^t*Y^T^*a^2*R^2- \\
& 8*m^t*Y^T^*a^2*R^2*E-8*m^t*Y^T^*a^R*E-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8*m*t*Y*T*a*R^E^2+4*m^2*t^2*T*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*T*a*R*E+4*m^2*t^2* \\
& 2*T*a*R^E^2- \\
& 2*m^2*t^2*p*T*a*R+28*m^2*t^2*T*a*R+m^2*t^2*T*a^3*R^3+2*m^2*t^2*T*a \\
& ^2*R^2-2*m^2*t^2*p*T*a^3*R^3- \\
& 4*m^2*t^2*p*T*a^2*R^2+(24*I)*Y*m^3*t^2*T^2+(36*I)*a*t^2*E*m^2*p*R* \\
& T-(16*I)*m^4*t^3*p^3*T*R-Y^2*R^2*a- \\
& (48*I)*m^2*t*p*Y^2*T*R+6*t*a^4*R^4+2*t*a^5*R^5-Y^2*R^4*a^3- \\
& 2*Y^2*R^3*a^2-t^2*a^3*R^4*m^2+24*t*a^3*R^3*E- \\
& 2*t^2*a^2*R^3*m^2+24*t*a^3*R^3*E^2+12*t*a^2*R^2*E- \\
& 28*t^2*a^2*R^2*m^2-8*m^2*t^2*p*T*a^2*R^2*E-8*m^2*t^2*p*T*a*R*E- \\
& 8*m^2*t^2*p*T*a*R^E^2+24*t*a^2*R^2*E^2+16*t*a^2*R^2*E^3+12*t*a^4*R \\
& ^4*E-m^2*t^2*p^2*R^2*a- \\
& 4*m^2*t^2*p^2*R^2*a*E+2*t^2*a^3*R^4*m^2*p+2*t*a^3*R^3*m*p*Y*T+4*t* \\
& a^2*R^3*m*Y-4*t*a^2*R^3*m*p*Y- \\
& 2*t^2*a^2*R^3*m^2*p^2+4*t^2*a^2*R^3*m^2*p+4*t*a^2*R^2*m*p*Y*T+8*t* \\
& a^2*R^3*E*m*Y-4*t^2*a^2*R^3*E*m^2-8*t*a^2*R^3*E*m*p*Y- \\
& 4*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p^2+8*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p+2*t*a^3*R^4*m*Y- \\
& 2*t*a^3*R^4*m*p*Y-t^2*a^3*R^4*m^2*p^2+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y*T^2- \\
& (48*I)*m^3*t^2*p*Y*R^2-(18*I)*a^2*t^2*R^3*m^2*p+2*m^2*t^2*p*R^2*a- \\
& (16*I)*Y^3*R*m*T- \\
& 4*m^2*t^2*p^2*R^2*a*E^2+8*m^2*t^2*p*R^2*a*E+8*m^2*t^2*p*R^2*a*E^2+ \\
& 8*m*t*p*Y*T*a*R*E- \\
& (36*I)*a*t^2*E*m^2*p*R^2+(18*I)*a*t^2*m^2*p*R*T+2*m*t*p*Y*T*a*R+8* \\
& m*t*p*Y*T*a*R^E^2+6*t*a^3*R^3+(18*I)*a^2*t^2*R^2*Y*m*T- \\
& (18*I)*a^2*m^2*t^2*R^2*T+(48*I)*m^4*t^3*p^2*R*T+(24*I)*m^4*t^3*p*R \\
& ^2- \\
& (18*I)*a^2*t^2*R^3*Y*m+(24*I)*m^2*t^2*p*Y^2*R^2+(18*I)*a^2*m^2*t^2*R^3 \\
& -(36*I)*a*m^2*t^2*E*R*T+(24*I)*m^4*t^3*p*T^2- \\
& (18*I)*a*t^2*m^2*p*R^2)/(-T+R))- (54*I)*a*m*t^2*R)*(- \\
& T+R)^2)^(1/3)+(2/3)*Y-(2/3)*t*m+(2/3)*m*t*p- \\
& (1/2*I)*sqrt(3)*((1/6)*((24*Y*m^2*t^2*T- \\
& 24*Y*m^2*t^2*R+18*a^2*t^2*R^2*Y+18*a*t*Y*R-18*a*m*t^2*R- \\
& 36*a*m*t^2*E*R+36*a*t*E*Y*R-18*a^2*m*t^2*R^2+18*a^2*t^2*R^2*m*p- \\
& 24*m^3*t^3*p*R+8*m^3*t^3*p^3*T-8*m^3*t^3*p^3*R+24*m^3*t^3*p^2*R- \\
& 24*m^3*t^3*p^2*T-24*m*t*Y^2*T+24*m*t*Y^2*R+24*m^3*t^3*p*T- \\
& 8*Y^3*R+8*Y^3*T+36*a*t^2*E*m*p*R+18*a*t^2*m*p*R+24*m*t*p*Y^2*T- \\
& 24*m*t*p*Y^2*R+24*m^2*t^2*p^2*Y*T- \\
& 48*m^2*t^2*p*Y*T+48*m^2*t^2*p*Y*R-24*m^2*t^2*p^2*Y*R- \\
& 8*t^3*m^3*T+8*t^3*m^3*R+6*sqrt(3)*t*sqrt(a*R*((8*I)*Y^3*R^2*m+(18* \\
& I)*a*m^2*t^2*R^2+(18*I)*a*t*Y*R*m*T+(8*I)*Y^3*T^2*m- \\
& (48*I)*m^4*t^3*p*T*R+(24*I)*m^2*t^2*p*Y^2*T^2-(8*I)*t^3*m^4*T^2- \\
& (8*I)*t^3*m^4*R^2+(36*I)*a*t*E*Y*R*m*T-(24*I)*m^4*t^3*p^2*T^2- \\
& (24*I)*m^4*t^3*p^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3*p^3*R^2+(24*I)*Y*m^3*t^2*R^2+ \\
& (16*I)*t^3*m^4*R*T+(48*I)*m^2*t^2*Y^2*R*T+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y*R^2- \\
& (18*I)*a*t*Y*R^2*m+8*t*a^2*R^2*E*m*p*Y*T+2*m*t*Y*R^2*a- \\
& 4*t^2*a^2*R^2*E*m^2+8*m*t*Y*R^2*a*E+8*m*t*Y*R^2*a*E^2- \\
& 4*m^2*t^2*R^2*a*E^2-(48*I)*m^3*t^2*p*Y*T^2+(36*I)*a*m^2*t^2*E*R^2- \\
& (24*I)*m^2*t^2*Y^2*T^2-(48*I)*Y*m^3*t^2*T*R- \\
& (48*I)*m^3*t^2*p^2*Y*T*R- \\
& (18*I)*a*m^2*t^2*R*T+(96*I)*m^3*t^2*p*Y*T*R-(36*I)*a*t*E*Y*R^2*m- \\
& (24*I)*m^2*t^2*Y^2*R^2+(18*I)*a^2*t^2*R^2*m^2*p*T-2*m*t*p*Y*R^2*a- \\
& 4*Y^2*R^3*a^2*E-4*Y^2*R^2*a*E-4*Y^2*R^2*a*E^2-8*m*t*p*Y*R^2*a*E- \\
& 8*m*t*p*Y*R^2*a*E^2+Y^2*T*a*R+Y^2*T*a^3*R^3+2*Y^2*T*a^2*R^2+4*Y^2* \\
& T*a^2*R^2*E+4*Y^2*T*a*R*E+4*Y^2*T*a*R*E^2+m^2*t^2*p^2*T*a*R+m^2*t^ \\
& ^2*p^2*T*a^3*R^3+2*m^2*t^2*p^2*T*a^2*R^2+2*t*a^2*R^2+(8*I)*m^4*t^3* \\
& p^3*T^2+4*m^2*t^2*p^2*T*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*p^2*T*a*R*E+4*m^2*t^2* \\
& p^2*T*a*R^E^2-2*m*t*Y*T*a*R-2*m*t*Y*T*a^3*R^3-4*m*t*Y*T*a^2*R^2- \\
& 8*m*t*Y*T*a^2*R^2*E-8*m*t*Y*T*a*R*E- \\
& 8*m*t*Y*T*a*R^E^2+4*m^2*t^2*T*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*T*a*R*E+4*m^2*t^2*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 * T * a * R * E ^ 2 - \\
& 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * T * a * R + 28 * m ^ 2 * t ^ 2 * T * a * R + m ^ 2 * t ^ 2 * T * a ^ 3 * R ^ 3 + 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * T * a \\
& ^ 2 * R ^ 2 - 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * T * a ^ 3 * R ^ 3 - \\
& 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * T * a ^ 2 * R ^ 2 + (24 * I) * Y * m ^ 3 * t ^ 2 * T ^ 2 + (36 * I) * a * t ^ 2 * E * m ^ 2 * p * R * \\
& T - (16 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * p ^ 3 * T * R - Y ^ 2 * R ^ 2 * a - \\
& (48 * I) * m ^ 2 * t * p * Y ^ 2 * T * R + 6 * t * a ^ 4 * R ^ 4 + 2 * t * a ^ 5 * R ^ 5 - Y ^ 2 * R ^ 4 * a ^ 3 - \\
& 2 * Y ^ 2 * R ^ 3 * a ^ 2 - t ^ 2 * a ^ 3 * R ^ 4 * m ^ 2 + 24 * t * a ^ 3 * R ^ 3 * E - \\
& 2 * t ^ 2 * a ^ 2 * R ^ 3 * m ^ 2 + 24 * t * a ^ 3 * R ^ 3 * E ^ 2 + 12 * t * a ^ 2 * R ^ 2 * E - \\
& 28 * t ^ 2 * a * R ^ 2 * m ^ 2 - 8 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * T * a ^ 2 * R ^ 2 * E - 8 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * T * a * R * E - \\
& 8 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * T * a * R * E ^ 2 + 24 * t * a ^ 2 * R ^ 2 * E ^ 2 + 16 * t * a ^ 2 * R ^ 2 * E ^ 3 + 12 * t * a ^ 4 * R \\
& ^ 4 * E - m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * R ^ 2 * a - \\
& 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * R ^ 2 * a * E + 2 * t ^ 2 * a ^ 3 * R ^ 4 * m ^ 2 * p + 2 * t * a ^ 3 * R ^ 3 * m * p * Y * T + 4 * t * \\
& a ^ 2 * R ^ 3 * m * Y - 4 * t * a ^ 2 * R ^ 3 * m * p * Y - \\
& 2 * t ^ 2 * a ^ 2 * R ^ 3 * m ^ 2 * p ^ 2 + 4 * t ^ 2 * a ^ 2 * R ^ 3 * m ^ 2 * p + 4 * t * a ^ 2 * R ^ 2 * m * p * Y * T + 8 * t * \\
& a ^ 2 * R ^ 3 * E * m * Y - 4 * t ^ 2 * a ^ 2 * R ^ 3 * E * m ^ 2 - 8 * t * a ^ 2 * R ^ 3 * E * m * p * Y - \\
& 4 * t ^ 2 * a ^ 2 * R ^ 3 * E * m ^ 2 * p ^ 2 + 8 * t ^ 2 * a ^ 2 * R ^ 3 * E * m ^ 2 * p + 2 * t * a ^ 3 * R ^ 4 * m * Y - \\
& 2 * t * a ^ 3 * R ^ 4 * m * p * Y - t ^ 2 * a ^ 3 * R ^ 4 * m ^ 2 * p ^ 2 + (24 * I) * m ^ 3 * t ^ 2 * p ^ 2 * Y * T ^ 2 - \\
& (48 * I) * m ^ 3 * t ^ 2 * p * Y * R ^ 2 - (18 * I) * a ^ 2 * t ^ 2 * R ^ 3 * m ^ 2 * p + 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * R ^ 2 * a - \\
& (16 * I) * Y ^ 3 * R * m * T - \\
& 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * R ^ 2 * a * E ^ 2 + 8 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * R ^ 2 * a * E + 8 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * R ^ 2 * a * E ^ 2 + \\
& 8 * m * t * p * Y * T * a * R * E - \\
& (36 * I) * a * t ^ 2 * E * m ^ 2 * p * R ^ 2 + (18 * I) * a * t ^ 2 * m ^ 2 * p * R * T + 2 * m * t * p * Y * T * a * R + 8 * \\
& m * t * p * Y * T * a * R * E ^ 2 + 6 * t * a ^ 3 * R ^ 3 + (18 * I) * a ^ 2 * t * R ^ 2 * Y * m * T - \\
& (18 * I) * a ^ 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * R ^ 2 * T + (48 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * p ^ 2 * R * T + (24 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * p * R \\
& ^ 2 - \\
& (18 * I) * a ^ 2 * t * R ^ 3 * Y * m + (24 * I) * m ^ 2 * t * p * Y ^ 2 * R ^ 2 + (18 * I) * a ^ 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * R ^ 3 \\
& - (36 * I) * a * m ^ 2 * t ^ 2 * E * R * T + (24 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * p * T ^ 2 - \\
& (18 * I) * a * t ^ 2 * m ^ 2 * p * R ^ 2) / (-T + R) - (54 * I) * a * m * t ^ 2 * R) * (- \\
& T + R) ^ 2) ^ (1/3) / (-T + R) + (1/3) * (-2 * Y ^ 2 * R + 2 * Y ^ 2 * T + 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * T - \\
& 4 * m * t * Y * T + 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * T - \\
& 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * T + 3 * t * a ^ 2 * R ^ 2 + 3 * t * a * R + 6 * t * a * R * E + 4 * m * t * Y * R - 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * R - \\
& 4 * m * t * p * Y * R - \\
& 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * R + 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * R + 4 * m * t * p * Y * T) / ((24 * Y * m ^ 2 * t ^ 2 * T - \\
& 24 * Y * m ^ 2 * t ^ 2 * R + 18 * a ^ 2 * t * R ^ 2 * Y + 18 * a * t * Y * R - 18 * a * m * t ^ 2 * R - \\
& 36 * a * m * t ^ 2 * E * R + 36 * a * t * E * Y * R - 18 * a ^ 2 * m * t ^ 2 * R ^ 2 + 18 * a ^ 2 * t ^ 2 * R ^ 2 * m * p - \\
& 24 * m ^ 3 * t ^ 3 * p * R + 8 * m ^ 3 * t ^ 3 * p ^ 3 * T - 8 * m ^ 3 * t ^ 3 * p ^ 3 * R + 24 * m ^ 3 * t ^ 3 * p ^ 2 * R - \\
& 24 * m ^ 3 * t ^ 3 * p ^ 2 * T - 24 * m * t * Y ^ 2 * T + 24 * m * t * Y ^ 2 * R + 24 * m ^ 3 * t ^ 3 * p * T - \\
& 8 * Y ^ 3 * R + 8 * Y ^ 3 * T + 36 * a * t ^ 2 * E * m * p * R + 18 * a * t ^ 2 * m * p * R + 24 * m * t * p * Y ^ 2 * T - \\
& 24 * m * t * p * Y ^ 2 * R + 24 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * Y * T - \\
& 48 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * Y * T + 48 * m ^ 2 * t ^ 2 * p * Y * R - 24 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * Y * R - \\
& 8 * t ^ 3 * m ^ 3 * T + 8 * t ^ 3 * m ^ 3 * R + 6 * \text{sqrt}(3) * t * \text{sqrt}(a * R * ((8 * I) * Y ^ 3 * R ^ 2 * m + (18 * \\
& I) * a * m ^ 2 * t ^ 2 * R ^ 2 + (18 * I) * a * t * Y * R * m * T + (8 * I) * Y ^ 3 * T ^ 2 * m - \\
& (48 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * p * T * R + (24 * I) * m ^ 2 * t * p * Y ^ 2 * T ^ 2 - (8 * I) * t ^ 3 * m ^ 4 * T ^ 2 - \\
& (8 * I) * t ^ 3 * m ^ 4 * R ^ 2 + (36 * I) * a * t * E * Y * R * m * T - (24 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * p ^ 2 * T ^ 2 - \\
& (24 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * p ^ 2 * R ^ 2 + (8 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * p ^ 3 * R ^ 2 + (24 * I) * Y * m ^ 3 * t ^ 2 * R ^ 2 + \\
& (16 * I) * t ^ 3 * m ^ 4 * R * T + (48 * I) * m ^ 2 * t * Y ^ 2 * R * T + (24 * I) * m ^ 3 * t ^ 2 * p ^ 2 * Y * R ^ 2 - \\
& (18 * I) * a * t * Y * R ^ 2 * m + 8 * t * a ^ 2 * R ^ 2 * E * m * p * Y * T + 2 * m * t * Y * R ^ 2 * a - \\
& 4 * t ^ 2 * a * R ^ 2 * E * m ^ 2 + 8 * m * t * Y * R ^ 2 * a * E + 8 * m * t * Y * R ^ 2 * a * E ^ 2 - \\
& 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * R ^ 2 * a * E ^ 2 - (48 * I) * m ^ 3 * t ^ 2 * p * Y * T ^ 2 + (36 * I) * a * m ^ 2 * t ^ 2 * E * R ^ 2 - \\
& (24 * I) * m ^ 2 * t * Y ^ 2 * T ^ 2 - (48 * I) * Y * m ^ 3 * t ^ 2 * T * R - \\
& (48 * I) * m ^ 3 * t ^ 2 * p ^ 2 * Y * T * R - \\
& (18 * I) * a * m ^ 2 * t ^ 2 * R * T + (96 * I) * m ^ 3 * t ^ 2 * p * Y * T * R - (36 * I) * a * t * E * Y * R ^ 2 * m - \\
& (24 * I) * m ^ 2 * t * Y ^ 2 * R ^ 2 + (18 * I) * a ^ 2 * t ^ 2 * R ^ 2 * m ^ 2 * p * T - 2 * m * t * p * Y * R ^ 2 * a - \\
& 4 * Y ^ 2 * R ^ 3 * a ^ 2 * E - 4 * Y ^ 2 * R ^ 2 * a * E - 4 * Y ^ 2 * R ^ 2 * a * E ^ 2 - 8 * m * t * p * Y * R ^ 2 * a * E - \\
& 8 * m * t * p * Y * R ^ 2 * a * E ^ 2 + Y ^ 2 * T * a * R + Y ^ 2 * T * a ^ 3 * R ^ 3 + 2 * Y ^ 2 * T * a ^ 2 * R ^ 2 + 4 * Y ^ 2 * \\
& T * a ^ 2 * R ^ 2 * E + 4 * Y ^ 2 * T * a * R * E + 4 * Y ^ 2 * T * a * R * E ^ 2 + m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * T * a * R + m ^ 2 * t ^ \\
& 2 * p ^ 2 * T * a ^ 3 * R ^ 3 + 2 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * T * a ^ 2 * R ^ 2 + 2 * t * a ^ 2 * R ^ 2 + (8 * I) * m ^ 4 * t ^ 3 * \\
& p ^ 3 * T ^ 2 + 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * T * a ^ 2 * R ^ 2 * E + 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * p ^ 2 * T * a * R * E + 4 * m ^ 2 * t ^ 2 * \\
& p ^ 2 * T * a * R * E ^ 2 - 2 * m * t * Y * T * a * R - 2 * m * t * Y * T * a ^ 3 * R ^ 3 - 4 * m * t * Y * T * a ^ 2 * R ^ 2 -
\end{aligned}$$

```

8*m*t*Y*T*a^2*R^2*E-8*m*t*Y*T*a*R*E-
8*m*t*Y*T*a*R*E^2+4*m^2*t^2*T*a^2*R^2*E+4*m^2*t^2*T*a*R*E+4*m^2*t^
2*T*a*R*E^2-
2*m^2*t^2*p*T*a*R+28*m^2*t^2*T*a*R+m^2*t^2*T*a^3*R^3+2*m^2*t^2*T*a
^2*R^2-2*m^2*t^2*p*T*a^3*R^3-
4*m^2*t^2*p*T*a^2*R^2+(24*I)*Y*m^3*t^2*T^2+(36*I)*a*t^2*E*m^2*p*R*
T-(16*I)*m^4*t^3*p^3*T*R-Y^2*R^2*a-
(48*I)*m^2*t*p*Y^2*T*R+6*t*a^4*R^4+2*t*a^5*R^5-Y^2*R^4*a^3-
2*Y^2*R^3*a^2-t^2*a^3*R^4*m^2+24*t*a^3*R^3*E-
2*t^2*a^2*R^3*m^2+24*t*a^3*R^3*E^2+12*t*a^2*R^2*E-
28*t^2*a*R^2*m^2-8*m^2*t^2*p*T*a^2*R^2*E-8*m^2*t^2*p*T*a*R*E-
8*m^2*t^2*p*T*a*R*E^2+24*t*a^2*R^2*E^2+16*t*a^2*R^2*E^3+12*t*a^4*R
^4*E-m^2*t^2*p^2*R^2*a-
4*m^2*t^2*p^2*R^2*a*E+2*t^2*a^3*R^4*m^2*p+2*t*a^3*R^3*m*p*Y*T+4*t*
a^2*R^3*m*Y-4*t*a^2*R^3*m*p*Y-
2*t^2*a^2*R^3*m^2*p^2+4*t^2*a^2*R^3*m^2*p+4*t*a^2*R^2*m*p*Y*T+8*t*
a^2*R^3*E*m*Y-4*t^2*a^2*R^3*E*m^2-8*t*a^2*R^3*E*m*p*Y-
4*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p^2+8*t^2*a^2*R^3*E*m^2*p+2*t*a^3*R^4*m*Y-
2*t*a^3*R^4*m*p*Y-t^2*a^3*R^4*m^2*p^2+(24*I)*m^3*t^2*p^2*Y*T^2-
(48*I)*m^3*t^2*p*Y*R^2-(18*I)*a^2*t^2*R^3*m^2*p+2*m^2*t^2*p*R^2*a-
(16*I)*Y^3*R*m*T-
4*m^2*t^2*p^2*R^2*a*E^2+8*m^2*t^2*p*R^2*a*E+8*m^2*t^2*p*R^2*a*E^2+
8*m*t*p*Y*T*a*R*E-
(36*I)*a*t^2*E*m^2*p*R^2+(18*I)*a*t^2*m^2*p*R*T+2*m*t*p*Y*T*a*R+8*
m*t*p*Y*T*a*R*E^2+6*t*a^3*R^3+(18*I)*a^2*t^2*R^2*Y*m*T-
(18*I)*a^2*m^2*t^2*R^2*T+(48*I)*m^4*t^3*p^2*R*T+(24*I)*m^4*t^3*p*R
^2-
(18*I)*a^2*t*R^3*Y*m+(24*I)*m^2*t*p*Y^2*R^2+(18*I)*a^2*m^2*t^2*R^3
-(36*I)*a*m^2*t^2*E*R*T+(24*I)*m^4*t^3*p*T^2-
(18*I)*a*t^2*m^2*p*R^2)/(-T+R))- (54*I)*a*m*t^2*R)*(-
T+R)^2)^(1/3));
Q2t = inline (char(Q2));
n = 100;
h = (T-R)/n;

tN0 = Q2t(R)+Q2t(T);
tN1 = 0;
tN2 = 0;

for i=1:(n-1)
    t = R + i*h;
    if (mod(i,2)==0)
        tN2 = tN2 + Q2t(t);
    else
        tN1 = tN1 + Q2t(t);
    end
end

W2 = (h/3)*(tN0+2*tN2+4*tN1);

%% _____ %%
rata2 waktu tunggu kendaraan selama 1 siklus

d = (W1+W2)/a*T;
fprintf('\nRata-rata waktu tunggu kendaraan selama 1 siklus adalah
= %d (menit)\n',double(d));
toc

```