



UNIVERSITAS INDONESIA

**EFEK RELATIVISTIK PADA HAMBURAN KAON-NUKLEON
DALAM BASIS TIGA DIMENSI**

SKRIPSI

RAHADIAN NOPRIANTOKO

0806452596

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI S1 FISIKA
DEPOK
MEI 2012**



UNIVERSITAS INDONESIA

**EFEK RELATIVISTIK PADA HAMBURAN KAON-NUKLEON
DALAM BASIS TIGA DIMENSI**

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

RAHADIAN NOPRIANTOKO

0806452596

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI S1 FISIKA
PEMINATAN FISIKA NUKLIR DAN PARTIKEL
DEPOK
MEI 2012**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.



Nama : Rahadian Nopriantoko
NPM : 0806452596
Tanda Tangan : 
Tanggal : 31 Mei 2012

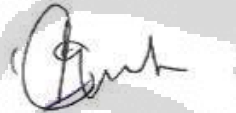
HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Rahadian Nopriantoko
NPM : 0806452596
Program Studi : S1 Fisika
Judul Skripsi : Efek Relativistik pada Hamburan Kaon-Nukleon dalam
Basis Tiga Dimensi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dr. Agus Salam



Pembimbing II : Dr. Imam Fachruddin



Penguji I : Prof. Dr. Terry Mart



Penguji II : Dr. Anto Sulaksono



Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 31 Mei 2012

O you who believe! when it is said to you, "Make room in (your) assemblies", then make ample room, Allah will give you ample. And when it is said, "Rise up", then rise up. Allah will exalt those of you who believe and those who are given knowledge in high degrees. And Allah is Aware of what you do.

QS. Al-Mujadila: 11

*Karya ini saya persembahkan untuk
para penikmat ilmu pengetahuan.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kehadirat Allah SWT, karena berkat rahmat, taufik dan hidayah-Nya saya dapat menyelesaikan skripsi ini sesuai dengan waktu yang telah direncanakan. Shalawat dan salam semoga selalu tercurahkan kepada junjungan alam Nabi Muhammad SAW beserta para keluarga, sahabat, dan pengikutnya yang setia hingga akhir zaman. Skripsi ini ditulis dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia. Saya menyadari bahwa dalam pembuatan skripsi ini saya telah mendapatkan banyak bantuan dari berbagai pihak, oleh karena itu pada kesempatan ini saya ingin mengucapkan terima kasih kepada:

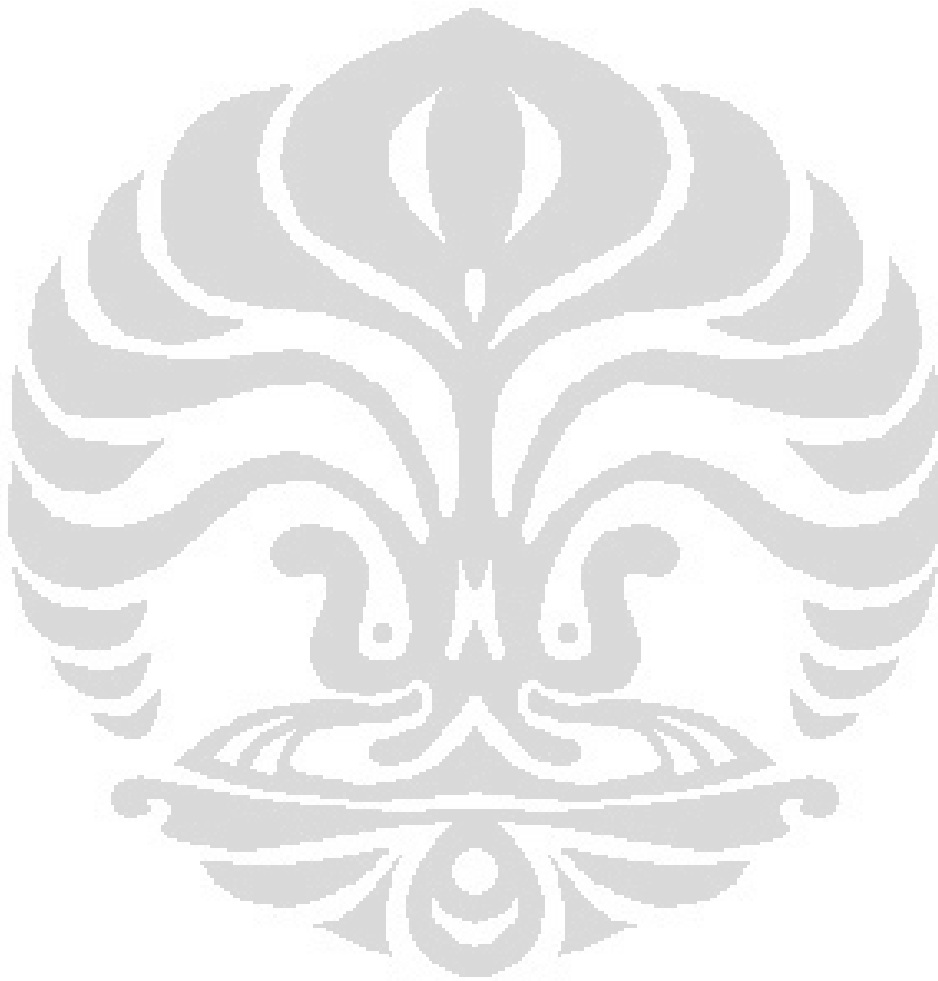
1. Dr. Agus Salam dan Dr. Imam Fachruddin selaku dosen pembimbing I dan pembimbing II atas bimbingan, motivasi, dan diskusinya dalam penyusunan skripsi ini.
2. Prof. Dr. Terry Mart selaku penguji I atas diskusinya dalam penyelesaian skripsi, dan selaku pembimbing akademis serta ketua peminatan fisika nuklir yang telah memberikan arahan dan nasehatnya kepada saya.
3. Dr. Anto Sulaksono selaku penguji II atas diskusinya dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Dr. Muhammad Hikam selaku mantan pembimbing akademis yang telah memberikan bimbingan dan nasehatnya kepada saya sewaktu masih dengan beliau.
5. Ayah dan Ibu tercinta yang telah membesarkan, mendidik, mendukung, dan mendoakan saya agar kelak menjadi orang yang sukses dunia dan akhirat. Serta anggota keluarga lain atas motivasi dan bantuannya.
6. Rekan-rekan mahasiswa Fisika Universitas Indonesia, khususnya mahasiswa peminatan fisika nuklir dan partikel, atas dukungan dan semangatnya.
7. Semua pihak yang tidak dapat dicantumkan namanya di sini, atas dukungan dan doa kepada saya selama penyelesaian tugas akhir karya tulis ini.

Saya menyadari bahwa karya tulis ini masih jauh dari sempurna, oleh sebab itu saya mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari para pembaca. Akhir

kata saya berharap, insya Allah semoga karya ini dapat bermanfaat bagi orang banyak dalam rangka untuk pengembangan ilmu pengetahuan dalam bidang fisika nuklir dan partikel.

Depok, 31 Mei 2012

Rahadian Nopriantoko



**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini;

Nama : Rahadian Nopriantoko
NPM : 0806452596
Program Studi : S1 Reguler
Departemen : Fisika
Peminatan : Fisika Nuklir dan Partikel
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demikian demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

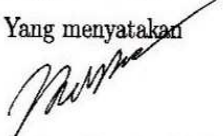
**Efek Relativistik pada Hamburan Kaon-Nukleon dalam Basis Tiga
Dimensi**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian Pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 31 Mei 2012

Yang menyatakan


(Rahadian Nopriantoko)

ABSTRAK

Nama : Rahadian Nopriantoko
Program Studi : S1 Fisika
Judul Skripsi : Efek Relativistik pada Hamburan Kaon-Nukleon dalam Basis Tiga Dimensi

Hamburan kaon-nukleon diformulasikan dalam basis momentum-spin tiga dimensi. Interaksi yang dipakai berdasarkan model potensial Yukawa dengan faktor spin-orbit. Dalam penelitian ini, kami memasukkan unsur kinematika relativistik ke dalam hamburan, dan kemudian menyelidiki efek relativistik pada hamburan kaon-nukleon untuk nilai energi yang bervariasi.

Kata kunci:

kinematika relativistik, hamburan kaon-nukleon, basis tiga dimensi.

ABSTRACT

Name : Rahadian Nopriantoko
Study Program : Undergraduate Physics
Title : Relativistic Effects on Kaon-Nucleon Scattering in Three
Dimensional Basis

Kaon-nucleon scattering is formulated in three-dimensional momentum-spin basis. The interaction being used is based on Yukawa potential model with spin-orbit factor. In this research, we use relativistic kinematics into scattering, and then investigate some relativistic effects on kaon-nucleon scattering for varies energy.

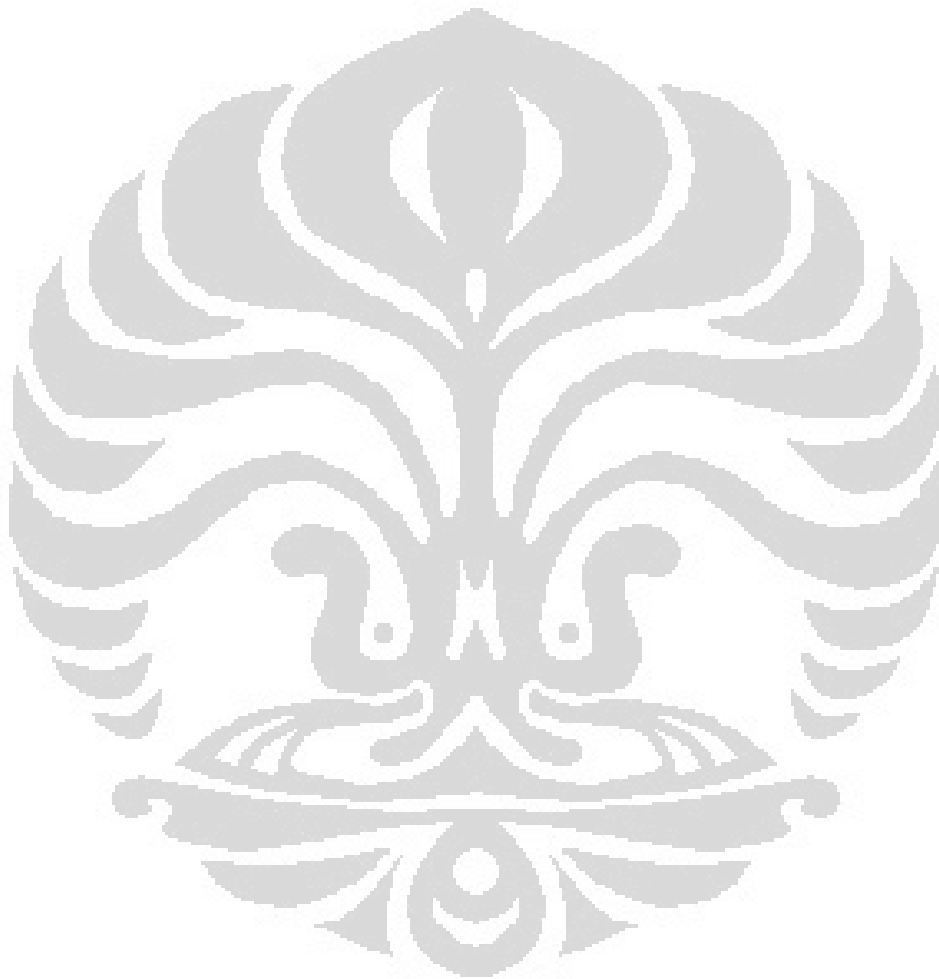
Keywords:

relativistic kinematics, kaon-nucleon scattering, three dimensional basis.

DAFTAR ISI

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
KATA PENGANTAR	vi
HALAMAN PERNYATAAN PERSUTUJUAN PUBLIKASI	viii
ABSTRAK	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	1
1.3 Metode Penelitian	2
1.4 Tujuan Penelitian	2
2 HAMBURAN KAON-NUKLEON	3
2.1 Kinematika Hamburan Kaon-Nukleon	3
2.2 Formulasi Hamburan Kaon-Nukleon dalam Basis Tiga Dimensi . . .	5
2.2.1 Keadaan Basis	5
2.2.2 Elemen Matriks Potensial	5
2.2.3 Elemen Matriks-T dan Persamaan Lippmann-Schwinger . . .	6
2.3 Besaran Spin	8
2.4 Kinematika Relativistik	9
3 HAMBURAN KAON-NUKLEON UNTUK INTERAKSI SPIN-ORBIT FENOMENOLOGIS	17
3.1 Model Interaksi Spin-Orbit	17
3.2 Hasil dan Pembahasan	21
3.2.1 Energi 100 MeV	31
3.2.2 Energi 500 MeV	32
3.2.3 Energi 1000 MeV	32

4 KESIMPULAN DAN SARAN	34
DAFTAR ACUAN	35
LAMPIRAN	36
A Realisasi Numerik	37
A.1 Langkah Analitik	37
A.2 Langkah Numerik	39



DAFTAR GAMBAR

2.1	Hamburan dalam kerangka laboratorium dan pusat massa	4
3.1	Penampang lintang differensial pada energi 100 MeV	22
3.2	Komponen faktor ruang fase pada energi 100 MeV	22
3.3	Komponen matriks-T pada energi 100 MeV	23
3.4	Polarisasi pada energi 100 MeV	23
3.5	Transfer polarisasi pada energi 100 MeV	24
3.6	Tensor depolarisasi pada energi 100 MeV	24
3.7	Penampang lintang differensial pada energi 500 MeV	25
3.8	Komponen faktor ruang fase pada energi 500 MeV	25
3.9	Komponen matriks-T pada energi 500 MeV	26
3.10	Polarisasi pada energi 500 MeV	26
3.11	Transfer polarisasi pada energi 500 MeV	27
3.12	Tensor depolarisasi pada energi 500 MeV	27
3.13	Penampang lintang differensial pada energi 1000 MeV	28
3.14	Komponen faktor ruang fase pada energi 1000 MeV	28
3.15	Komponen matriks-T pada energi 1000 MeV	29
3.16	Polarisasi pada energi 1000 MeV	29
3.17	Transfer polarisasi pada energi 1000 MeV	30
3.18	Tensor depolarisasi pada energi 1000 MeV	30

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Hamburan telah menjadi topik penelitian yang sampai saat ini masih terus dikembangkan dan dikaji oleh para fisikawan bidang fisika nuklir, khususnya yang menekuni bidang *few body physics*.

Interaksi antar partikel dapat diteliti secara eksperimen maupun teoritik. Secara eksperimen, dilakukan dengan cara menembakkan atau menumbukkan suatu atom atau partikel sebagai proyektil ke target yang berupa atom atau partikel juga. Dalam melakukan eksperimen, sifat dan kondisi awal dari partikel proyektil dan target dapat ketahui dan ditentukan. Setelah tumbukan, hasil akhir dari hamburan dapat diukur. Sedangkan secara teoritik, salah satunya ialah seperti yang akan dibahas dalam penelitian kami yang mana dalam hal ini adalah tentang hamburan kaon-nukleon.

Untuk menghitung proses hamburan pada energi yang lebih tinggi diperlukan jumlah momentum angular yang banyak, sehingga perumusan formulasi dan perhitungan numeriknya menjadi lebih sulit daripada proses hamburan pada energi yang lebih rendah, yang cukup memperhitungkan beberapa momentum angular saja. Oleh karena itu dalam hal ini digunakan suatu teknik perhitungan yang memakai state vektor momentum sebagai basis, teknik seperti ini dikenal dengan nama teknik tiga dimensi. Untuk sistem dua partikel dengan spin, kaon-nukleon, penggunaan teknik ini dijelaskan pada sesi formulasi tiga dimensi hamburan kaon-nukleon.

Pada energi tinggi efek relativistik mempunyai pengaruh yang cukup penting pada hamburan kaon-nukleon, oleh karena itu dalam penelitian ini kami mengkaji hal tersebut. Dengan demikian kita dapat mengetahui efek relativistik pada hamburan kaon-nukleon.

1.2 Perumusan Masalah

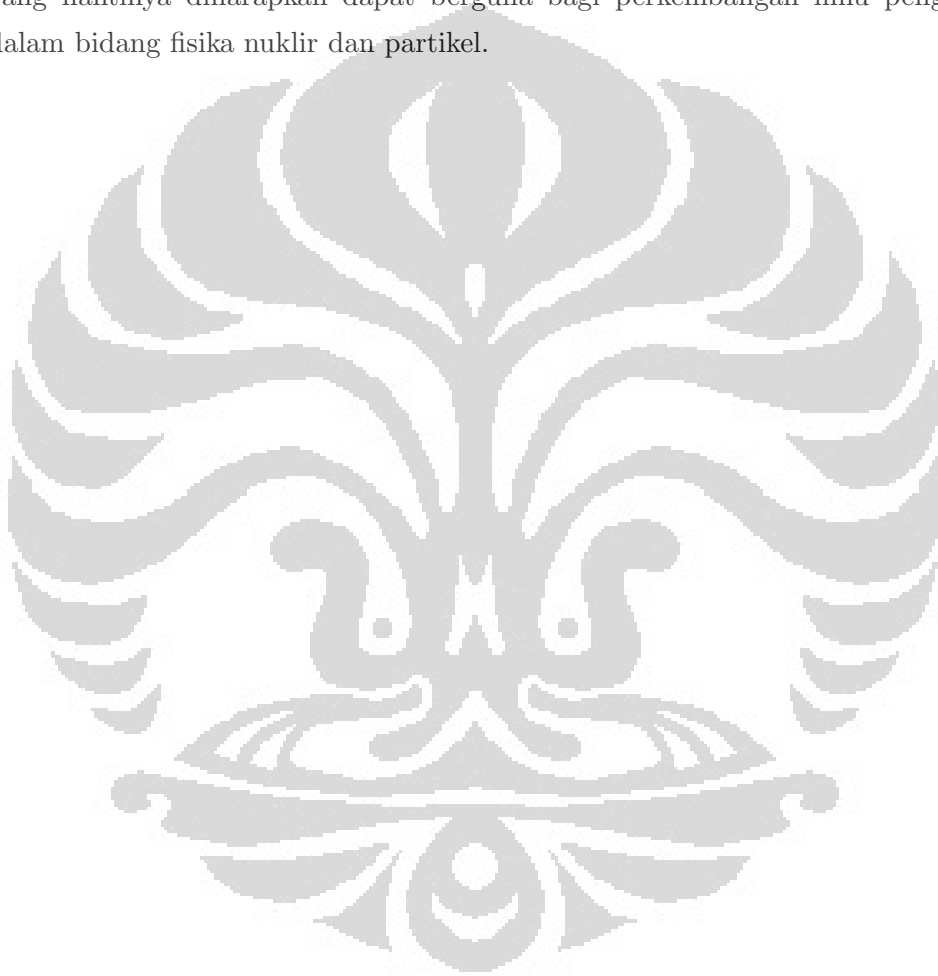
Penelitian yang dikaji adalah efek kinematika relativistik pada hamburan kaon-nukleon untuk beberapa variasi nilai energi.

1.3 Metode Penelitian

Penelitian ini bersifat teoritik dengan menggunakan prosedur analitik dan numerik dalam basis tiga dimensi yang dikembangkan dalam acuan [1], dan kemudian mengkaji hasil penelitian yang diperoleh.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk melihat efek relativistik pada hamburan kaon-nukleon, yang nantinya diharapkan dapat berguna bagi perkembangan ilmu pengetahuan dalam bidang fisika nuklir dan partikel.



BAB 2

HAMBURAN KAON-NUKLEON

Proses hamburan kaon-nukleon pada penelitian ini berawal dari tumbukan kaon-nukleon dan juga akan menghasilkan kaon-nukleon, atau dengan kata lain hamburan tersebut dapat dikatakan bersifat elastis.



Pada bab ini kami memformulasikan hamburan kaon-nukleon yang meliputi pembahasan keadaan basis, elemen matriks potensial, elemen matriks-T dan persamaan Lippmann-Schwinger yang dikerjakan dalam basis tiga dimensi. Selain itu, kami juga membahas besaran spin hamburan tersebut dan kinematika relativistik untuk penelitian efek relativistik yang akan kami kaji nantinya. Formulasi analitik hamburan kaon-nukleon yang telah didapatkan tersebut, selanjutnya akan direalisasikan ke dalam bentuk numerik, lalu setelah itu kami buat program numeriknya.

2.1 Kinematika Hamburan Kaon-Nukleon

Secara teoritis formulasi hamburan akan relatif lebih mudah bila menggunakan kerangka pusat massa (kerangka P.M.). Misalkan dalam kerangka laboratorium \mathbf{k}_i adalah momentum awal partikel- i , \mathbf{k}'_i adalah momentum akhir partikel- i , dan m_i adalah massa partikel- i . Dalam kasus ini m_1, m_2 masing-masing adalah massa kaon dan nukleon, \mathbf{k}_1 adalah momentum awal kaon, dan \mathbf{k}_2 adalah momentum awal nukleon. Besarnya momentum dalam kerangka P.M. \mathbf{p} dihitung sebagai momentum relatif.

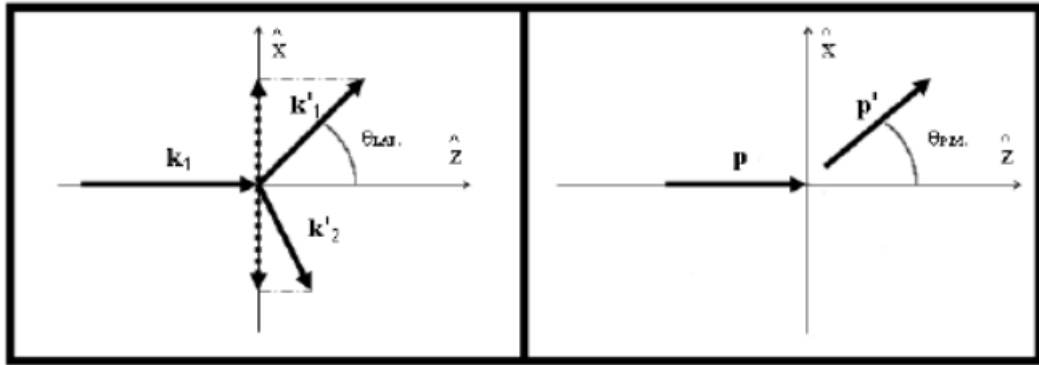
$$\mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{k}_1 - m_1 \mathbf{k}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.1)$$

pada keadaan awal nukleon dalam keadaan diam (target) $\mathbf{k}_2 = 0$, maka:

$$\mathbf{p} = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{k}_1 \quad (2.2)$$

dengan μ adalah massa reduksi

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.3)$$



Gambar 2.1: Hamburan dalam kerangka laboratorium dan pusat massa

Energi total dalam kerangka laboratorium dan kerangka pusat massa

$$E_{\text{Lab}} = E_1 = E'_1 + E'_2 \quad (2.4)$$

$$E_{\text{Lab}} = \frac{k_1^2}{2m_1} = \frac{k_1'^2}{2m_1} + \frac{k_2'^2}{2m_2} \quad (2.5)$$

$$E_{\text{P.M.}} = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{p'^2}{2\mu} \quad (2.6)$$

dimana μ adalah massa reduksi sistem kaon-nukleon. Karena hamburan bersifat elastis maka besar energi awal dan akhir adalah sama, sehingga dengan demikian kita bisa dapatkan hubungan antara $E_{\text{P.M.}}$ dan E_{Lab} :

$$\begin{aligned} E_{\text{P.M.}} &= \frac{p^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2m_1^2} k_1^2 \\ &= \frac{\mu}{m_1} E_{\text{Lab}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Kami tentukan momentum awal pada arah z dan hamburan pada bidang $\hat{x} - \hat{z}$, seperti pada gambar (2.1). Vektor momentum akhir dalam kerangka pusat massa adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= p'_x \hat{x} + p'_z \hat{z} \\ &= p \sin \theta_{\text{P.M.}} \hat{x} + p \cos \theta_{\text{P.M.}} \hat{z} \end{aligned} \quad (2.8)$$

atau dapat juga dinyatakan sebagai

$$\mathbf{p}' = \frac{m_2 \mathbf{k}'_1 - m_1 \mathbf{k}'_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.9)$$

Pada kerangka laboratorium vektor momentum awal hanya memiliki komponen pada sumbu-z, sehingga vektor momentum akhir total juga hanya pada sumbu-z, sedangkan untuk komponen sumbu-x vektor momentum akan saling meniadakan

$$k'_{2x} = -k'_{1x}.$$

Hubungan sudut hambur dalam kerangka Laboratorium dengan P.M. adalah

$$\tan \theta_{\text{Lab}} = \left(\frac{m_2}{m_1 \sec \theta' + m_2} \right) \tan \theta'. \quad (2.10)$$

2.2 Formulasi Hamburan Kaon-Nukleon dalam Basis Tiga Dimensi

Kini kita akan membahas hamburan kaon-nukleon yang diformulasikan berdasarkan pada momentum-spin basis tiga dimensi, yakni penggunaan keadaan vektor momentum $|\mathbf{p}\rangle$ sebagai basis untuk menyelesaikan persamaan Lippmann-Scwinger, yang disebut sebagai teknik tiga dimensi (3D). Formulasi ini mengacu ke acuan [1]

2.2.1 Keadaan Basis

Kita definisikan keadaan basis $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ sebagai produk langsung keadaan bebas $|\mathbf{p}\rangle$ dengan \mathbf{p} adalah momentum relatif kedua partikel dan $|\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle$ keadaan spin untuk spin total $s = \frac{1}{2}$, dengan spin terkuantisasi sepanjang sumbu z, dengan demikian

$$|\mathbf{p}\lambda\rangle \equiv |\mathbf{p}\rangle |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle. \quad (2.11)$$

Keadaan $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ dinormalisasi seperti

$$\langle \mathbf{p}'\lambda' | \mathbf{p}\lambda \rangle = \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda' | \langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle | \hat{\mathbf{z}}\lambda \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\lambda'\lambda}, \quad (2.12)$$

dan mempunyai relasi completeness

$$\sum_{\lambda=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\lambda\rangle \langle \mathbf{p}\lambda| = \sum_{\lambda=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda| \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = 1. \quad (2.13)$$

2.2.2 Elemen Matriks Potensial

Elemen matriks potensial $V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ pada keadaan basis tiga dimensi $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \langle \mathbf{p}'\lambda' | V | \mathbf{p}\lambda \rangle \\ &= \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda' | \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle | \hat{\mathbf{z}}\lambda \rangle \\ &= \langle \hat{\mathbf{z}}\lambda' | V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) | \hat{\mathbf{z}}\lambda \rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dengan $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ elemen matriks potensial dalam ruang momentum. Untuk sistem kaon-nukleon struktur umum $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ berbentuk

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = f_0(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) + f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}})(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}')(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}), \quad (2.15)$$

dengan $f_i(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}})$ fungsi tak bergantung spin dan $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\sigma$, dimana σ adalah operator spin Pauli. Potensial $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ dalam persamaan (2.15) bersifat invarian terhadap operasi, rotasi, paritas, dan pembalikan waktu dengan catatan $f_s(p', p, \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}})$ bersifat

$$f_i(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) = g_i(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) + g_i(p, p', \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}). \quad (2.16)$$

Kita masukkan struktur umum potensial yang diberikan oleh persamaan (2.15) ke dalam elemen matriks potensial yang didefinisikan di persamaan (2.14), hasilnya adalah

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \delta_{\lambda'\lambda} \left[f_0(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) \left\{ \cos \theta' \cos \theta + e^{-2i\lambda(\phi' - \phi)} \sin \theta' \sin \theta \right\} \right] \\ &\quad + \delta_{\lambda', -\lambda} f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) \frac{\lambda}{2} e^{2i\lambda\phi'} \\ &\quad \left\{ \sin \theta' \cos \theta - e^{-2i\lambda(\phi' - \phi)} \cos \theta' \sin \theta \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

untuk $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{z}}$:

$$V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = e^{-i(\lambda' - \lambda)\phi'} V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta'), \quad (2.18)$$

dengan

$$\begin{aligned} V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') &= \delta_{\lambda'\lambda} \left\{ f_0(p', p, \cos \theta') + \frac{1}{4} f_1(p', p, \cos \theta') \cos \theta' \right\} \\ &\quad + \delta_{\lambda', \lambda} \frac{\lambda}{2} f_1(p', p, \cos \theta') \sin \theta'. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Untuk mendapatkan nilai $V_{\lambda', -\lambda}(p', p\hat{\mathbf{z}})$ dan $V_{\lambda', -\lambda}(p', p, \theta')$, kita dapat gunakan relasi simetri seperti berikut

$$V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = (-)^{\lambda' - \lambda} e^{-2i(\lambda' - \lambda)\phi'} V_{\lambda', -\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) \quad (2.20)$$

$$V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') = (-)^{\lambda' - \lambda} V_{\lambda', -\lambda}(p', p, \theta'). \quad (2.21)$$

2.2.3 Elemen Matriks-T dan Persamaan Lippmann-Schwinger

Elemen matriks-T didefinisikan sebagai

$$T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \equiv \langle \mathbf{p}' \lambda' | T | \mathbf{p} \lambda \rangle. \quad (2.22)$$

Elemen matriks $T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ memenuhi persamaan Lippmann-Schwinger untuk elemen matriks-T dalam basis $|\mathbf{p}\lambda\rangle$ sebagai berikut:

$$T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = V_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \sum_{\lambda''=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int d\mathbf{p}'' V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') G_0^+(E_p) T_{\lambda''\lambda}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}), \quad (2.23)$$

dengan propagator bebas

$$G_0^+(E_p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E_p + i\epsilon - E_{p''}}, \quad (2.24)$$

dan energi E_p , $E_{p''}$ terhubung dengan momentum non-relativistik oleh persamaan

$$E_p = \frac{p^2}{2\mu}, \quad E_{p''} = \frac{p''^2}{2\mu}, \quad \mu = \text{massa tereduksi}. \quad (2.25)$$

Untuk $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{z}}$ berlaku juga

$$T_{\lambda'\lambda}(\mathbf{p}', p\hat{\mathbf{z}}) = e^{-i(\lambda' - \lambda)\phi'} T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta'), \quad (2.26)$$

dengan $T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')$ mengikuti persamaan integral

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda''=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int d\mathbf{p}'' \frac{V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')}{E_p + i\epsilon - E_{p''}} \\ &e^{i(\lambda'\phi' - \lambda''\phi'')} e^{-i\lambda(\phi' - \phi'')} T_{\lambda''\lambda}(p'', p, \theta''). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Kita definisikan $V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'')$ sebagai

$$V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'') \equiv \int_0^{2\pi} d\phi'' V_{\lambda'\lambda''}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(\lambda'\phi' - \lambda''\phi'')} e^{-i\lambda(\phi' - \phi'')} \quad (2.28)$$

sehingga persamaan integral untuk $T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta')$ sekarang adalah

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') \\ &+ 2\mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda''=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dp'' \frac{p''^2}{p^2 + i\epsilon - p''^2} \\ &\times \int d\cos\theta'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, \theta''). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Untuk $V_{-\lambda', -\lambda''}^{-\lambda}(p', p'', \theta', \theta'')$ dan $T_{-\lambda', -\lambda}(p', p, \theta')$ berlaku relasi simetri

$$V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', \theta', \theta'') = (-)^{\lambda' - \lambda''} V_{-\lambda', -\lambda''}^{-\lambda}(p', p'', \theta', \theta'') \quad (2.30)$$

$$T_{\lambda'\lambda}(p', p, \theta') = (-)^{\lambda' - \lambda} T_{-\lambda', -\lambda}(p', p, \theta'). \quad (2.31)$$

2.3 Besaran Spin

Besaran spin tidak bergantung pada ruang momentum atau ruang posisi, dan tidak bergantung pada teknik perhitungan. Arah proyektil dipilih sebagai arah z dan bidang hamburan sebagai bidang xz , dengan $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'$. Oleh karena itu $\phi' = 0$ dan

$$T_{\lambda'\lambda}(p\hat{\mathbf{p}}', p\hat{\mathbf{z}}) = T_{\lambda'\lambda}(p, p, \theta), \quad (2.32)$$

dimana kita set $p' = p$. Besaran spin dapat dicari dengan persamaan umum di bawah ini [2]

$$I\langle\sigma^\alpha\rangle = \frac{1}{2} (4\pi^2\mu)^2 \sum_{\beta=0}^3 Tr \left\{ T(p, p, \theta') \sigma^\beta T^\dagger(p, p, \theta') \sigma^\alpha \right\}, \quad (2.33)$$

yang menghubungkan berbagai polarisasi spin pada keadaan akhir $\langle\sigma^\alpha\rangle$, dan keadaan awal $\langle\sigma^\beta\rangle$. σ^α dan σ^β untuk $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ merupakan komponen operator spin Pauli, yang mengacu pada unit vektor di bawah ini:

$$\text{untuk } \sigma^\beta : \begin{cases} \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{k}}_1 \\ \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}' \\ \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad \text{untuk } \sigma^\alpha : \begin{cases} \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{k}}'_1 \\ \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{k}}_1 \times \hat{\mathbf{k}}'_1 = \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}}' \times \hat{\mathbf{z}}' \end{cases} \quad (2.34)$$

dengan \mathbf{k}_1 adalah momenta awal dan \mathbf{k}'_1 momenta akhir proyektil pada kerangka laboratorium. σ^0 adalah matriks identitas 2×2 yang menjelaskan kondisi tidak terpolarisasi dari proyektil atau polarisasi partikel terhambur yang tidak dihitung.

Dari persamaan umum (2.33), didapatkan besaran spin yang kita inginkan yaitu:

1. penampang lintang differensial rata-rata spin

$$\begin{aligned} I_0 \equiv \frac{d\sigma}{d\hat{\mathbf{p}}'} &= \frac{1}{2} (4\pi^2\mu)^2 Tr \left\{ T(p, p, \theta') T^\dagger(p, p, \theta') \right\} \\ &= (4\pi^2\mu)^2 \left\{ \left| T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right|^2 + \left| T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

2. polarisasi

$$\begin{aligned} P_y &\equiv \frac{1}{2I_0} Tr \left\{ T(p, p, \theta') T^\dagger(p, p, \theta') \sigma^y \right\} \\ &= \frac{2}{I_0} (4\pi^2\mu)^2 Im \left\{ T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^*(p, p, \theta') T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

3. analyzing power

$$\begin{aligned} A_y &\equiv \frac{1}{2I_0} (4\pi^2\mu)^2 Tr \left\{ T(p, p, \theta') \sigma^y T^\dagger(p, p, \theta') \right\} \\ &= P_y \end{aligned} \quad (2.37)$$

4. koefisien transfer polarisasi [2] atau tensor depolarisasi [3, 4]:

$$\begin{aligned}
D_{x'x} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \text{Tr} \left\{ T(p, p, \theta') T^\dagger(p, p, \theta') \sigma^{x'} \right\} \\
&= \frac{1}{I_0}(4\pi^2\mu)^2 \left[\left\{ \left| T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right|^2 - \left| T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right|^2 \right\} \cos \theta_{\text{Lab}} \right. \\
&\quad \left. + 2\text{Re} \left\{ T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^*(p, p, \theta') T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right\} \sin \theta_{\text{Lab}} \right] \quad (2.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{z'x} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \text{Tr} \left\{ T(p, p, \theta') T^\dagger(p, p, \theta') \sigma^{z'} \right\} \\
&= \frac{1}{I_0}(4\pi^2\mu)^2 \left[\left\{ \left| T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right|^2 - \left| T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right|^2 \right\} \sin \theta_{\text{Lab}} \right. \\
&\quad \left. - 2\text{Re} \left\{ T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^*(p, p, \theta') T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p, p, \theta') \right\} \cos \theta_{\text{Lab}} \right] \quad (2.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{yy} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \text{Tr} \left\{ T(p, p, \theta') \sigma^y T^\dagger(p, p, \theta') \sigma^y \right\} \\
&= 1 \quad (2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{x'z} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \text{Tr} \left\{ T(p, p, \theta') \sigma^z T^\dagger(p, p, \theta') \sigma^{x'} \right\} \\
&= -D_{x'x} \quad (2.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{z'z} &\equiv \frac{1}{2I_0}(4\pi^2\mu)^2 \text{Tr} \left\{ T(p, p, \theta') \sigma^z T^\dagger(p, p, \theta') \sigma^{z'} \right\} \\
&= D_{x'x}. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Dalam persamaan untuk $D_{x'x}$ dan $D_{z'x}$ di atas terdapat sudut hamburan dalam kerangka laboratorium θ_{Lab} , namun kita bisa meenjadikannya ke dalam bentuk sudut hamburan dalam kerangka pusat massa θ' dengan hubungan persamaan [5]

$$\tan \theta_{\text{Lab}} = \left(\frac{m_2}{m_1 \sec \theta' + m_2} \right) \tan \theta', \quad (2.43)$$

dengan m_1 dan m_2 masing-masing adalah masa proyektil dan masa target.

2.4 Kinematika Relativistik

Pada energi tinggi efek kinematika relativistik memiliki pengaruh penting pada hamburan kaon-nukleon, sehingga dalam penelitian ini kami mengkaji efek relativistik pada hamburan kaon-nukleon. Dengan demikian kita dapat mengetahui efek relativistik pada hamburan kaon-nukleon untuk beberapa variasi level energi, yang

mana dalam hal ini variasi energinya adalah 100 MeV - 1000 MeV. Di sini kita akan mencari beberapa besaran yang dipakai dari dalam ruang lingkup non-relativistik, menjadi ke dalam ruang lingkup relativistik. Selanjutnya setelah didapatkan hasil produksi data yang diinginkan, kami membandingkan hasil perhitungan antara non-relativistik dengan relativistik.

Pertama-tama untuk memulainya, kita gunakan hubungan energi relativistik dan momentum berikut:

$$E^2 = p^2 + m^2, \quad (2.44)$$

serta transformasi Lorentz dari kerangka laboratorium ke kerangka pusat massa (P.M.). Hubungan antara $E_{k,\text{Lab}}$, $E_{k,\text{P.M.}}$, dan besar momentum relatif p secara nonrelativistik adalah sebagai berikut:

$$E_{k,\text{Lab}} = \frac{m_1}{\mu} E_{k,\text{P.M.}} = \frac{m_1 p^2}{2\mu^2}, \quad (2.45)$$

setelah memasukkan efek kinematika relativistik nantinya kita harus mencari lagi hubungan antara $E_{k,\text{Lab}}$, $E_{k,\text{P.M.}}$ dan p .

Transformasi Lorentz dari kerangka laboratorium ke kerangka P.M. dikerjakan sebagaimana pada acuan [6]. Dimulai dengan mendefinisikan momentum-4 pada kerangka laboratorium untuk partikel ke- i , sebagai berikut:

$$k_i^\mu \equiv (E_i, \mathbf{k}_i), \quad (2.46)$$

dengan \mathbf{k}_i ialah vektor-3 momentum, dan E_i ialah energi total partikel ke- i dalam kerangka laboratorium, maka momentum-4 dalam kerangka P.M.

$$p_i^\mu \equiv L(\mathbf{v})k_i^\mu, \quad (2.47)$$

dimana $L(v)$ merupakan transformasi Lorentz dan v adalah kecepatan relatif kerangka P.M terhadap laboratorium. p^μ ialah momentum-4 pada kerangka P.M yang didapat melalui

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p} = \mathbf{k}_1 + (\gamma - 1)(\mathbf{k}_1 \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} - \gamma E_1 \mathbf{v}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}, \quad (2.49)$$

dan

$$E_{i,\text{P.M.}} = \gamma(E_i - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}), \quad (2.50)$$

dimana

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \quad (2.51)$$

maka transformasi sistem dari kerangka laboratorium ke kerangka P.M. dilakukan dengan menggunakan persamaan (2.47) - (2.51).

Energi partikel-1 (proyektil) pada keadaan awal ialah:

$$E_1 = (m_1^2 + \mathbf{k}_1^2)^{1/2}, \quad (2.52)$$

karena pada keadaan awal target diam ($\mathbf{k}_2 = 0$), maka energinya:

$$E_2 = m_2, \quad (2.53)$$

sehingga momentum-4 pada keadaan awal

$$k_1^\mu = (E_1, \mathbf{k}_1) \quad (2.54)$$

$$k_2^\mu = (m_2, 0), \quad (2.55)$$

maka momentum-4 total pada keadaan awal:

$$k^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu = (E_{\text{Lab}}, \mathbf{k}_1), \quad (2.56)$$

dimana E_{Lab} ialah energi total dalam kerangka laboratorium, $E_{\text{Lab}} = E_1 + m_2$.

Kecepatan relatif kerangka P.M terhadap kerangka laboratorium yaitu

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{k^0} = \frac{\mathbf{k}_1}{E_{\text{Lab}}}. \quad (2.57)$$

Faktor γ didapat dengan memasukkan kecepatan \mathbf{v} pada persamaan (2.57) ke persamaan (2.51), maka didapatkan:

$$\gamma = \frac{k^0}{\sqrt{k^\mu k_\mu}} = \frac{E_{\text{Lab}}}{M_0}, \quad (2.58)$$

dengan massa invarian sistem M_0 didefinisikan sebagai:

$$M_0 \equiv \sqrt{k^\mu k_\mu} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2}, \quad (2.59)$$

maka kita dapatkan momentum relatif \mathbf{p} dalam kerangka P.M menurut transformasi Lorentz, yaitu:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{k}_1 + (\gamma - 1)(\mathbf{k}_1 \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} - \gamma E_1 \mathbf{v} \\ &= \frac{m_2}{M_0} \mathbf{k}_1, \end{aligned} \quad (2.60)$$

dan energi dalam kerangka P.M.:

$$\begin{aligned} E_{1,P.M.} &= \gamma(E_1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_1) \\ &= \frac{m_1^2 + m_2 E_1}{M_0} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} E_{2,P.M.} &= \gamma m_2 \\ &= \frac{m_2^2 + m_2 E_1}{M_0}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

sehingga momentum-4 dalam kerangka P.M. untuk tiap partikel

$$p_1^\mu = (E_{1,P.M.}, \mathbf{p}) \quad (2.63)$$

$$p_2^\mu = (E_{2,P.M.}, -\mathbf{p}), \quad (2.64)$$

jadi momentum-4 total dalam kerangka P.M. yang merupakan energi total dari kerangka P.M, yaitu

$$\begin{aligned} p^\mu &= p_1^\mu + p_2^\mu \\ &= E_{1,P.M.} + E_{2,P.M.} \\ &\equiv E_{P.M.} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Karena M_0 invarian terhadap transformasi Lorentz

$$p^\mu p_\mu = k^\mu k_\mu, \quad (2.66)$$

maka

$$E_{P.M.} = M_0. \quad (2.67)$$

Kini kita cari relasi antara $E_{k,Lab}$, $E_{k,P.M.}$ dan \mathbf{p} yang kita mulai dengan

$$E_1 = E_{k,Lab} + m_1, \quad (2.68)$$

maka hubungan antara $E_{k,Lab}$ dan $E_{k,P.M.}$ yaitu:

$$\begin{aligned} E_{k,P.M.} &= E_{k,P.M.} - (m_1 + m_2) \\ &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2(E_{k,Lab} + m_1)m_2} - (m_1 + m_2). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Untuk menentukan besar momentum \mathbf{p} digunakan persamaan (2.60), dengan k_1 yang didapat melalui persamaan (2.52), sehingga didapatkan

$$p = \frac{m_2 \sqrt{E_{k,Lab} (E_{k,Lab} + 2m_1)}}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2(E_{k,Lab} + m_1)m_2}} \quad (2.70)$$

Untuk menentukan hubungan antara sudut hambur dalam kerangka laboratorium dan pusat massa, kita dapat mengasumsikan bahwa partikel-1 bergerak pada arah sumbu-z. Sehingga momentum-4 partikel-1 dalam kerangka laboratorium ialah

$$k_1^\mu = (E_1, 0, 0, k_1), \quad (2.71)$$

sedangkan dalam kerangka pusat massa (P.M.) ialah

$$p_1^\mu = (E_{1,P.M.}, 0, 0, p_1), \quad (2.72)$$

apabila sudut hambur dalam kerangka P.M. $\theta_{P.M.}$, maka momentum-4 setelah hamburan $p_1^{\prime\mu}$ ialah

$$p_1^{\prime\mu} = (E_{1,P.M.} p_1 \sin \theta_{P.M.}, 0, p_1 \cos \theta_{P.M.}), \quad (2.73)$$

dengan mentransformasikan kembali momentum-4 $p_1^{\prime\mu}$ ke kerangka laboratorium melalui transformasi:

$$\mathbf{k}'_1 = \mathbf{p}' + (\gamma - 1)(\mathbf{p}' \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} - \gamma E_{1,P.M.} \mathbf{u}, \quad (2.74)$$

dan

$$E_1 = \gamma(E_{1,P.M.} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{u}), \quad (2.75)$$

dimana $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ merupakan kecepatan relatif kerangka laboratorium terhadap kerangka P.M., maka akan didapatkan

$$E_1 = \gamma(E_{1,P.M.} + v p_1 \cos \theta_{P.M.}) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{k}'_1 = (p_1 \sin \theta_{P.M.}, 0, \gamma(p_1 \cos \theta_{P.M.} + v E_{1,P.M.})). \quad (2.77)$$

Sudut hambur dalam kerangka laboratorium θ_{Lab} dapat dihitung dengan (lihat gambar 2.1):

$$\tan \theta_{Lab} = \frac{k'_{1x}}{k'_{1z}}, \quad (2.78)$$

maka hubungan antara $\theta_{P.M.}$ dan θ_{Lab} :

$$\tan \theta_{Lab} = \frac{\sin \theta_{P.M.}}{\gamma \left(\cos \theta_{P.M.} + \frac{E_{1,P.M.}}{E_{2,P.M.}} \right)}. \quad (2.79)$$

Berikutnya adalah untuk menghitung penampang lintang dan polarisasi dalam kerangka Lab kami menggunakan matriks hamburan \mathcal{S} , yang dalam kerangka P.M. dan laboratorium masing-masing ialah

$$\mathcal{S}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - 2\pi i \delta(E'_{P.M.} - E_{P.M.}) T(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \quad (2.80)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 | \mathcal{S} | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle. \quad (2.81)$$

Dengan menggunakan hubungan

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = J^{-1/2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) |\mathbf{p}, \mathbf{K}\rangle, \quad (2.82)$$

dimana $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ dan J ialah Jacobian dari transformasi tersebut

$$J(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \left| \frac{\partial(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{\partial(p, \mathbf{K})} \right|, \quad (2.83)$$

dapat dikerjakan:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= J^{-1/2}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2) J^{-1/2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \mathcal{S}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \langle \mathbf{K}' | \mathbf{K} \rangle \\ &= \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) J^{-1/2}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2) J^{-1/2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ &\quad \times \{ \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - 2\pi i \delta(E'_{P.M.} - E_{P.M.}) T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan hubungan

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) &= J^{-1/2}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2) J^{-1/2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ &= \langle \mathbf{p}', \mathbf{K}' | J^{-1/2}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2) J^{-1/2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) | \mathbf{p}, \mathbf{K} \rangle \\ &= \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (2.85)$$

dan identitas berikut:

$$\delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{P.M.} - E_{P.M.}) = \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{Lab} - E_{Lab}) \frac{E'_{P.M.} + E_{P.M.}}{E'_{Lab} + E_{Lab}}, \quad (2.86)$$

persamaan (2.84) menjadi

$$\mathcal{S}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \delta(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) - 2\pi i \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{Lab} - E_{Lab}) \Gamma T(p', p), \quad (2.87)$$

dengan

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv J^{-1/2}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2) J^{-1/2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \frac{E'_{P.M.} + E_{P.M.}}{E'_{Lab} + E_{Lab}} \\ &= \left[\frac{E'_{Lab}}{E'_{1,Lab} E'_{2,Lab}} \frac{E'_{1,P.M.} E'_{2,P.M.}}{E'_{P.M.}} \frac{E_{Lab}}{E_{1,Lab} E_{2,Lab}} \frac{E_{1,P.M.} E_{2,P.M.}}{E_{P.M.}} \right]^{1/2} \\ &\quad \frac{E'_{P.M.} + E_{P.M.}}{E'_{Lab} + E_{Lab}} \\ &= \left[\frac{E'_{1,P.M.} E'_{2,P.M.} E_{1,P.M.} E_{2,P.M.}}{E'_{1,Lab} E'_{2,Lab} E_{1,Lab} E_{2,Lab}} \right]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Untuk menghitung penampang lintang hanya diambil suku kedua dari matriks- \mathcal{S} $\mathcal{S}^{(2)}(k'_1, k'_2, k_1, k_2)$, yang merupakan gelombang hambur.

$$\mathcal{S}^{(2)}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -2\pi i \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}}) \Gamma T(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \quad (2.89)$$

Dari bagian kedua dari matriks- \mathcal{S} ini bisa didapatkan besarnya probabilitas transisi

$$|\mathcal{S}^{(2)}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2 = (2\pi)^2 (\delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}}))^2 \Gamma^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2. \quad (2.90)$$

Fungsi delta pada persamaan (2.90) dapat dievaluasi sebagai

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\nu} dr e^{-i(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} dt e^{i(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}})t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \mathcal{V}\mathcal{T}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

sehingga persamaan (2.90) dapat ditulis menjadi:

$$|\mathcal{S}^{(2)}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2 = (2\pi)^{-2} \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}}) \Gamma^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \mathcal{V}\mathcal{T}. \quad (2.92)$$

Laju ransisi W dari keadaan awal $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ ke keadaan akhir $(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$ per satuan volume, ialah

$$\begin{aligned} W &= \frac{|\mathcal{S}^{(2)}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2}{\mathcal{V}\mathcal{T}} \\ &= (2\pi)^{-2} \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}}) \Gamma^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2, \end{aligned} \quad (2.93)$$

Elemen fluks terhambur yakni banyaknya partikel yang terhambur dari keadaan $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ ke keadaan akhir momentum $(\mathbf{k}'_1 + d\mathbf{k}'_1), (\mathbf{k}'_2 + d\mathbf{k}'_2)$ per satuan waktu dan volume ialah

$$\begin{aligned} dN &= W d\mathbf{k}'_1, d\mathbf{k}'_2 \\ &= (2\pi)^{-2} \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}}) \Gamma^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 d\mathbf{k}'_1, d\mathbf{k}'_2, \end{aligned} \quad (2.94)$$

sedangkan fluks datang

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{(E_{1,\text{Lab}} E_{2,\text{Lab}} - \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}{E_{1,\text{Lab}} E_{2,\text{Lab}}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k_1}{E_{1,\text{Lab}}}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

dan densitas target $j_0 = (2\pi)^{-3}$, maka diperoleh penampang lintang

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{dN}{j_0 j} \\ &= (2\pi)^4 \frac{E_{1,\text{Lab}}}{k_1} \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}}) \Gamma^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 d\mathbf{k}'_1, d\mathbf{k}'_2, \end{aligned} \quad (2.96)$$

dimana

$$d\mathbf{k}'_1 = k_1'^2 dk'_1 d\hat{\mathbf{k}}'_1 = E'_{1,\text{Lab}} k'_1 dE'_{1,\text{Lab}} d\hat{\mathbf{k}}'_1. \quad (2.97)$$

Karena keadaan akhir yang diamati hanya keadaan akhir partikel-1, maka penampang lintang diintegrasikan terhadap seluruh keadaan akhir \mathbf{k}'_2

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\hat{\mathbf{k}}'_1} &= (2\pi)^4 \frac{E_{1,\text{Lab}}}{k_1} \int d\mathbf{k}'_2 dE'_{1,\text{Lab}} k'_1 E'_{1,\text{Lab}} \\ &\quad \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K}) \delta(E'_{\text{Lab}} - E_{\text{Lab}}) \Gamma^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \\ &= (2\pi)^4 \frac{E_{1,\text{Lab}}}{k_1} k'_1 E'_{1,\text{Lab}} \Gamma^2 |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2 \\ &= (2\pi)^4 \frac{k'_1 (E_{1,\text{P.M.}} E_{2,\text{P.M.}})^2}{k_1 m_2 E'_{2,\text{Lab}}} |T(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Jadi penampang lintang differensial rata-rata spin untuk perhitungan dengan kinematika relativistik adalah

$$\frac{d\sigma}{d\hat{\mathbf{k}}'_1} = (2\pi)^4 \frac{k'_1 (E_{1,\text{P.M.}} E_{2,\text{P.M.}})^2}{k_1 m_2 E'_{2,\text{Lab}}} \frac{1}{2} \sum_{ij} |T_{ij}(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2. \quad (2.99)$$

Secara alternatif penampang lintang differensial rata-rata spin untuk perhitungan kinematika non-relativistik, kita bisa dapatkan dengan langkah berikut:

Untuk non-relativistik besar momentum $p \ll m$, maka

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{m^2 + p^2} \\ &\simeq m, \end{aligned} \quad (2.100)$$

dari pernyataan umum (2.100) tersebut kita bisa buat

$$E_{1,\text{P.M.}} \simeq m_1, \quad E_{2,\text{P.M.}} \simeq m_2, \quad E'_{2,\text{Lab}} \simeq m_2, \quad (2.101)$$

sehingga persamaan (2.99) dapat diubah menjadi

$$\frac{d\sigma}{d\hat{\mathbf{k}}'_1} = (2\pi)^4 \frac{k'_1 (m_1 m_2)^2}{k_1 m_2 m_2} \frac{1}{2} \sum_{ij} |T_{ij}(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2, \quad (2.102)$$

jadi dengan demikian penampang lintang differensial rata-rata spin untuk perhitungan kinematika non-relativistik adalah

$$\frac{d\sigma}{d\hat{\mathbf{k}}'_1} = (2\pi)^4 \frac{k'_1}{k_1} m_1^2 \frac{1}{2} \sum_{ij} |T_{ij}(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2. \quad (2.103)$$

BAB 3

HAMBURAN KAON-NUKLEON UNTUK INTERAKSI SPIN-ORBIT FENOMENOLOGIS

Formulasi hamburan kaon-nukleon yang telah dibahas sebelumnya, kini kita aplikasikan dengan menggunakan interaksi fenomenologis spin-orbit, dan kemudian melihat hasil perhitungannya berupa hasil grafik perbandingan antara hasil dari nonrelativistik dan relativistik untuk mengkaji efek relativistik pada hamburan kaon-nukleon.

3.1 Model Interaksi Spin-Orbit

Model interaksi yang digunakan dalam penelitian hamburan kaon-nukleon ini adalah model interaksi Yukawa spin-orbit.

Potensial Yukawa dengan gaya spin-orbit diberikan oleh:

$$V(r) = V_c \frac{e^{-\mu_c r}}{r} + V_s \frac{e^{-\mu_s r}}{r} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \quad (3.1)$$

Potensial dalam ruang momentum $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ ialah

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = f_0(p', p, \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}) + f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}})(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}')(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{p}}). \quad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (2.15) untuk persamaan potensial (3.2) maka kita dapatkan

$$f_0(p', p, \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{V_c}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 + \mu_c^2} + \frac{V_s(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p})}{\{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 + \mu_s^2\}^2} \right] \quad (3.3)$$

$$f_1(p', p, \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}) = -\frac{2V_s p' p}{\pi^2 \{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + \mu_s^2\}^2}, \quad (3.4)$$

kemudian kita terapkan ke persamaan (2.19) didapatkan:

$$V_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p, \theta') = \frac{V_c}{2\pi^2 (p'^2 + p^2 - 2p'p \cos \theta' + \mu_c^2)} \quad (3.5)$$

$$V_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p, \theta') = -\frac{V_s p' p \sin \theta'}{2\pi^2 (p'^2 + p^2 - 2p'p \cos \theta' + \mu_s^2)^2}. \quad (3.6)$$

Kita terapkan persamaan (2.17) kita dapatkan

$$\begin{aligned} V_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') &= f_0(p', p'', \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}'') \\ &+ \frac{1}{4} f_1(p', p'', \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}'') \left\{ \cos \theta' \cos \theta'' + e^{-i(\phi' - \phi'')} \sin \theta' \sin \theta'' \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$V_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \frac{1}{4}f_1(p', p'', \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}'')e^{-i\phi''} \left\{ \cos \theta' \sin \theta'' - e^{-i(\phi' - \phi'')} \sin \theta' \cos \theta'' \right\} \quad (3.8)$$

$$V_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \frac{1}{4}f_1(p', p'', \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}'')e^{i\phi'} \left\{ \sin \theta' \cos \theta'' - e^{-i(\phi' - \phi'')} \cos \theta' \sin \theta'' \right\} \quad (3.9)$$

$$V_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = f_0(p', p'', \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}'') + \frac{1}{4}f_1(p', p'', \hat{\mathbf{p}}', \hat{\mathbf{p}}'')e^{i(\phi' - \phi'')} \left\{ \cos \theta' \cos \theta'' + e^{-i(\phi' - \phi'')} \sin \theta' \sin \theta'' \right\} \quad (3.10)$$

Dengan memasukkan (3.7) - (3.10) ke persamaan (2.28) maka kita dapatkan:

$$\begin{aligned} V_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') &= \int_0^{2\pi} d\phi'' V_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(\frac{1}{2}\phi' - \frac{1}{2}\phi'')} e^{-\frac{1}{2}i(\phi' - \phi'')} \\ &= \frac{V_c}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi'' \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_c^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} V_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') &= \int_0^{2\pi} d\phi'' V_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi'')} e^{-\frac{1}{2}i(\phi' - \phi'')} \\ &= -\frac{V_s p' p''}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi'' \frac{\{\cos \theta' \sin \theta'' - \sin \theta' \cos \theta'' \cos(\phi' - \phi'')\}}{\{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_s^2\}^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} V_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') &= \int_0^{2\pi} d\phi'' V_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(-\frac{1}{2}\phi' - \frac{1}{2}\phi'')} e^{-\frac{1}{2}i(\phi' - \phi'')} \\ &= -\frac{V_s p' p''}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi'' \frac{\{\sin \theta' \cos \theta'' - \cos \theta' \sin \theta'' \cos(\phi' - \phi'')\}}{\{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_s^2\}^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} V_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') &= \int_0^{2\pi} d\phi'' V_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') e^{i(-\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi'')} e^{-\frac{1}{2}i(\phi' - \phi'')} \\ &= -\frac{V_s p' p''}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi'' \left[\frac{V_c \cos(\phi' - \phi'')}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_c^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{V_s p' p'' \sin \theta' \sin \theta'' \sin^2(\phi' - \phi'')}{\{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_s^2\}^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Untuk integral tertutup yang diberikan dalam persamaan (3.11) - (3.14) integrasi bisa mulai di titik manapun sepanjang sumbu ϕ'' seperti yang dicontohkan berikut ini

$$\int_0^{2\pi} d\phi'' g(\phi' - \phi'') = \int^{2\pi} d\phi'' g(\phi''). \quad (3.15)$$

Lalu, menerapkan persamaan (3.15) kita dapatkan

$$V_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') = \frac{V_c}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi'' \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_c^2} \quad (3.16)$$

$$V_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') = \frac{V_s p' p''}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi'' \frac{\{\cos \theta' \sin \theta'' - \sin \theta' \cos \theta'' \cos \phi''\}}{\{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_s^2\}^2} \quad (3.17)$$

$$V_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') = -\frac{V_s p' p''}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi'' \frac{\{\sin \theta' \cos \theta'' - \cos \theta' \sin \theta'' \cos \phi''\}}{\{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_s^2\}^2} \quad (3.18)$$

$$V_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi'' \left[\frac{V_c \cos \phi''}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_c^2} - \frac{V_s p' p'' \sin \theta' \sin \theta'' \sin^2 \phi''}{\{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \mu_s^2\}^2} \right], \quad (3.19)$$

dengan $(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')$ di dalam integral persamaan (3.16) - (3.19) yaitu

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 = p'^2 + p''^2 - 2p' p'' \cos \theta' \cos \theta'' - 2p' p'' \sin \theta' \theta'' \cos \theta''. \quad (3.20)$$

Lihat persamaan (2.29), set persamaan yang diselesaikan ialah

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p, \theta') &= V_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p, \theta') \\ &+ 2\mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda'' = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dp'' \frac{p''^2}{p^2 + i\epsilon - p''^2} \\ &\times \int_{-1}^1 d \cos \theta'' V_{\frac{1}{2}\lambda''}^{\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') T_{\lambda'', \frac{1}{2}}(p'', p, \theta''). \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p, \theta') &= V_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(p', p, \theta') \\ &+ 2\mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda'' = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dp'' \frac{p''^2}{p^2 + i\epsilon - p''^2} \\ &\times \int_{-1}^1 d \cos \theta'' V_{-\frac{1}{2}\lambda''}^{\frac{1}{2}}(p', p'', \theta', \theta'') T_{\lambda'', \frac{1}{2}}(p'', p, \theta''). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pada penelitian ini, untuk interaksinya kami menggunakan tiga interaksi pertukaran, yaitu pertukaran σ , ρ , ω . Kami menggunakan nilai parameter V_c , V_s , dan μ yang berbeda-beda pada persamaan $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ untuk setiap interaksinya. Besar nilai parameter tersebut adalah sebagai berikut:

1. Pertukaran σ

$$\begin{aligned}V_c &= 12.503 \text{ V} \\V_s &= 10.002 \text{ V} \\ \mu &= m_\sigma = 600 \text{ MeV.}\end{aligned}$$

2. Pertukaran ρ

$$\begin{aligned}V_c &= -2.193 \text{ V} \\V_s &= 47.388 \text{ V} \\ \mu &= m_\rho = 769 \text{ MeV.}\end{aligned}$$

3. Pertukaran ω

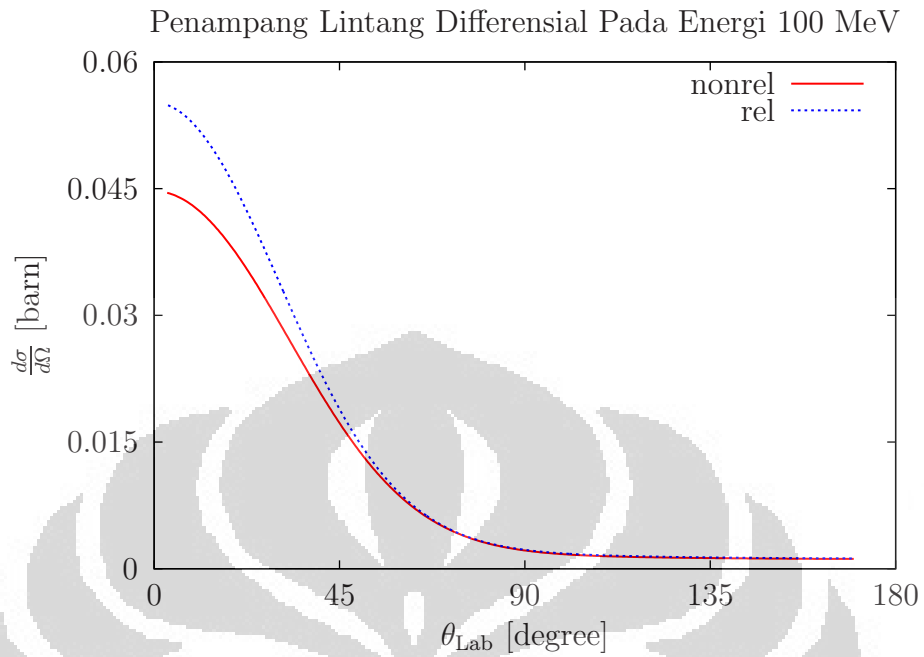
$$\begin{aligned}V_c &= -8.013 \text{ V} \\V_s &= 12.727 \text{ V} \\ \mu &= m_\omega = 782.6 \text{ MeV.}\end{aligned}$$

Parameter diperoleh dengan cara membandingkan secara kasar dengan model potensial pertukaran meson [7].

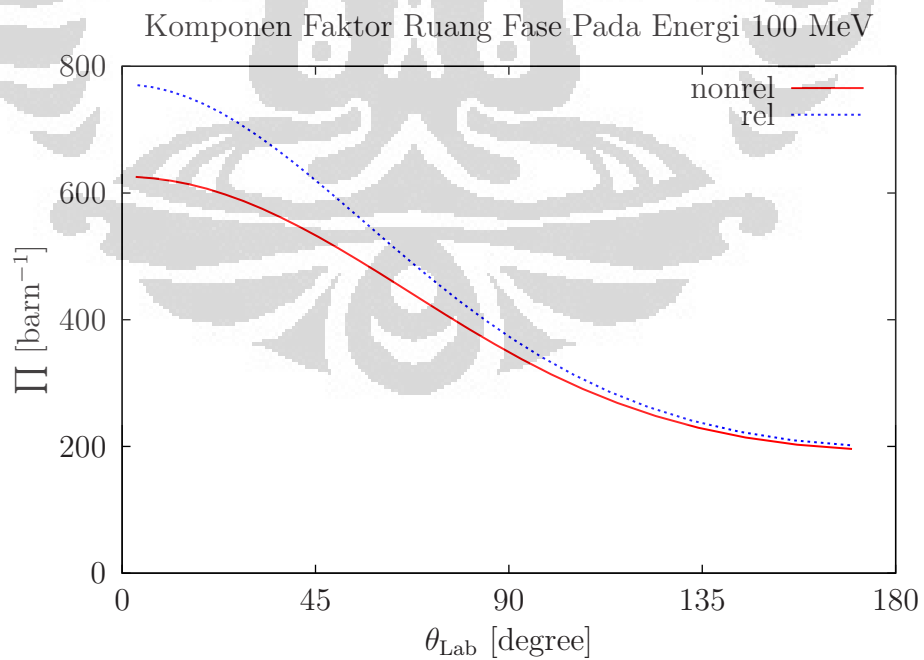
3.2 Hasil dan Pembahasan

Formulasi analitik yang telah diselesaikan sebelumnya, kami aplikasikan dengan menggunakan interaksi Yukawa spin-orbit, dan kemudian kami melakukan perhitungan dengan membuat program numeriknya. Pertama-tama kami melakukan perhitungan non-relativistik hamburan kaon-nukleon pada berbagai nilai energi, lalu kemudian kami memasukkan unsur kinematika relativistik untuk melakukan perhitungan relativistik hamburan kaon-nukleon pada berbagai nilai energi. Selanjutnya kami tampilkan grafik perpaduan hasil perhitungan non-relativistik dan relativistik pada beberapa nilai energi, sebagai perbandingan antara hasil non-relativistik dengan relativistik.

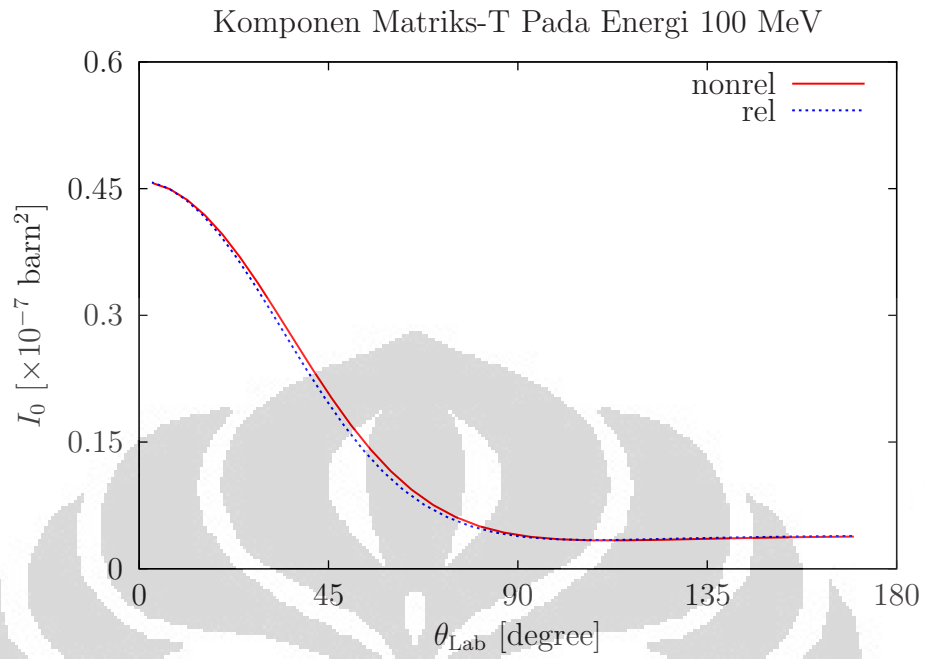
Sebelumnya perlu kami beritahukan di sini bahwa massa partikel nukleon adalah 938.272 MeV, sedangkan untuk massa partikel kaon adalah 493.677 MeV. Dalam perhitungan yang dilakukan kami menggunakan berbagai variasi nilai energi, yakni dari 100 MeV sampai 1000 MeV, namun kami hanya akan tampilkan hasil untuk energi 100 MeV, 500 MeV, dan 1000 MeV. Grafik-grafik yang kami tampilkan merupakan grafik perpaduan hasil perhitungan non-relativistik dan relativistik yang meliputi nilai penampang lintang differensial, polarisasi, transfer polarisasi, dan tensor depolarisasi untuk setiap variasi nilai energi. Selain itu, ditampilkan juga komponen faktor ruang fase (Π) dan matriks-T (I_0) dari penampang lintang differensial, untuk menunjukkan bagaimana kontribusi kedua komponen tersebut terhadap hasil perhitungan efek kinematika relativistik. Berikut ini kami tampilkan grafik-grafik perpaduan hasil perhitungan non-relativistik dengan relativistik pada energi 100 MeV, 500 MeV, dan 1000 MeV.



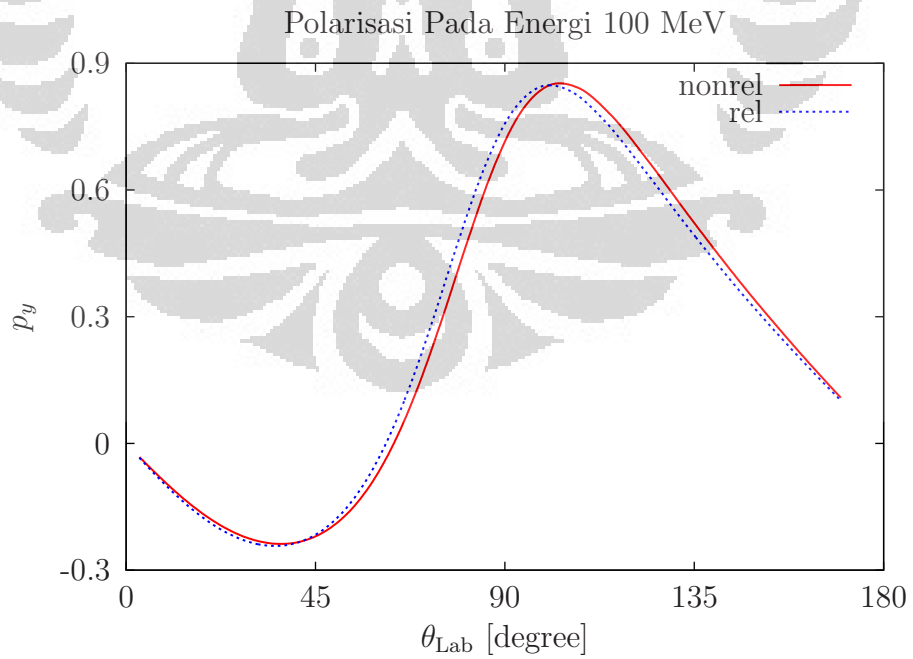
Gambar 3.1: Penampang lintang differensial pada energi 100 MeV



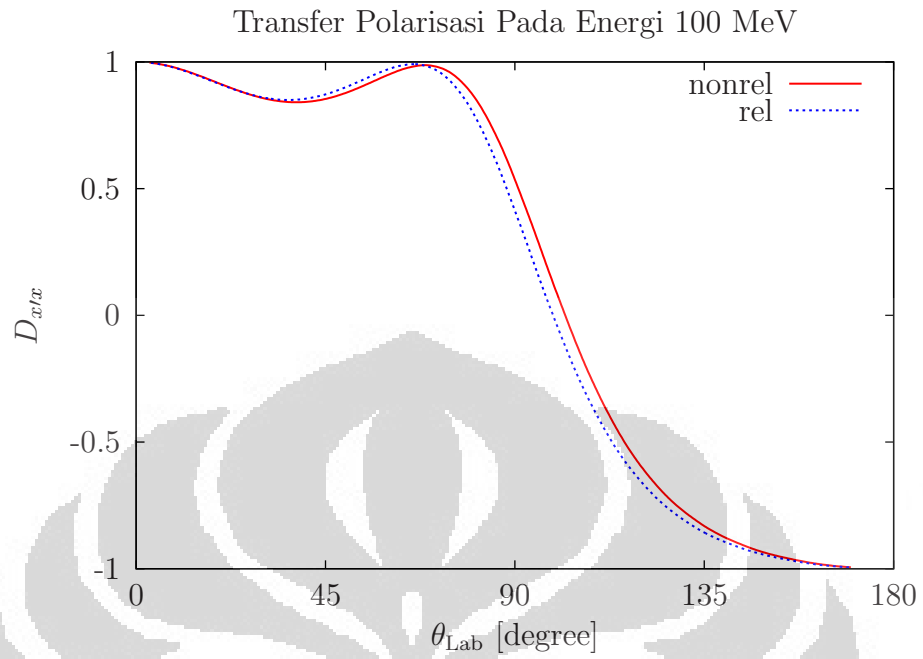
Gambar 3.2: Komponen faktor ruang fase pada energi 100 MeV



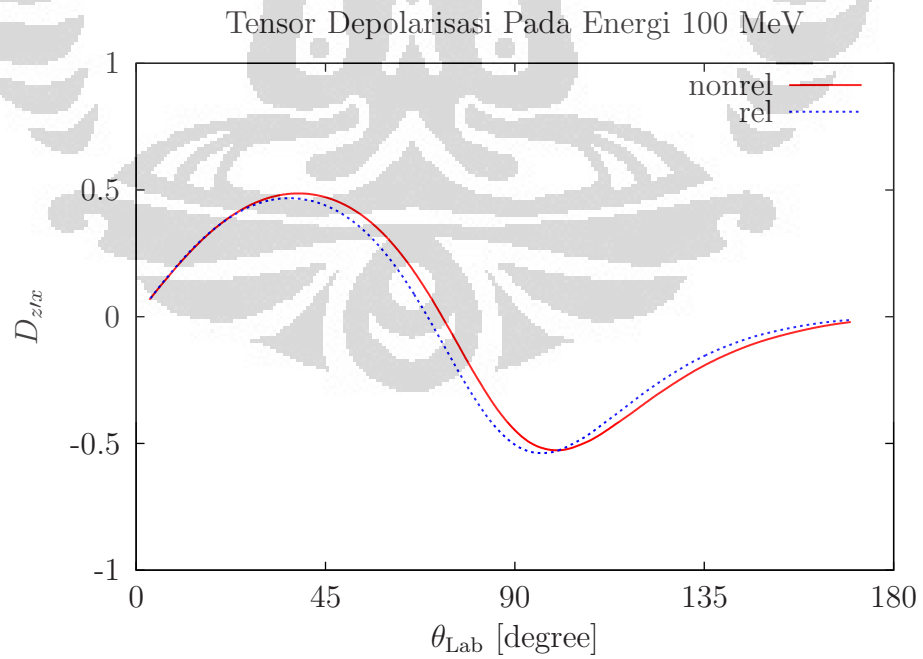
Gambar 3.3: Komponen matriks-T pada energi 100 MeV



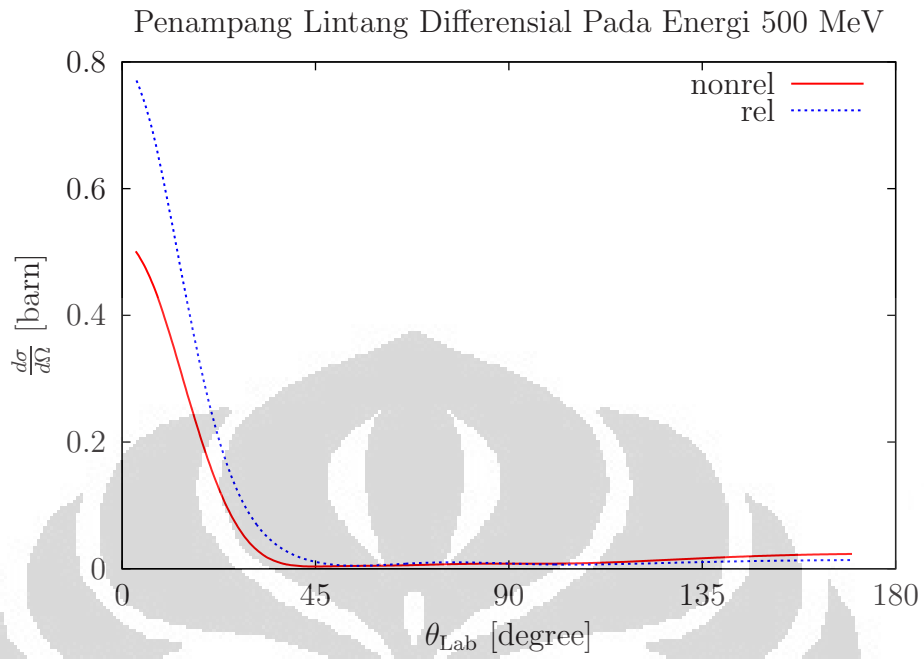
Gambar 3.4: Polarisasi pada energi 100 MeV



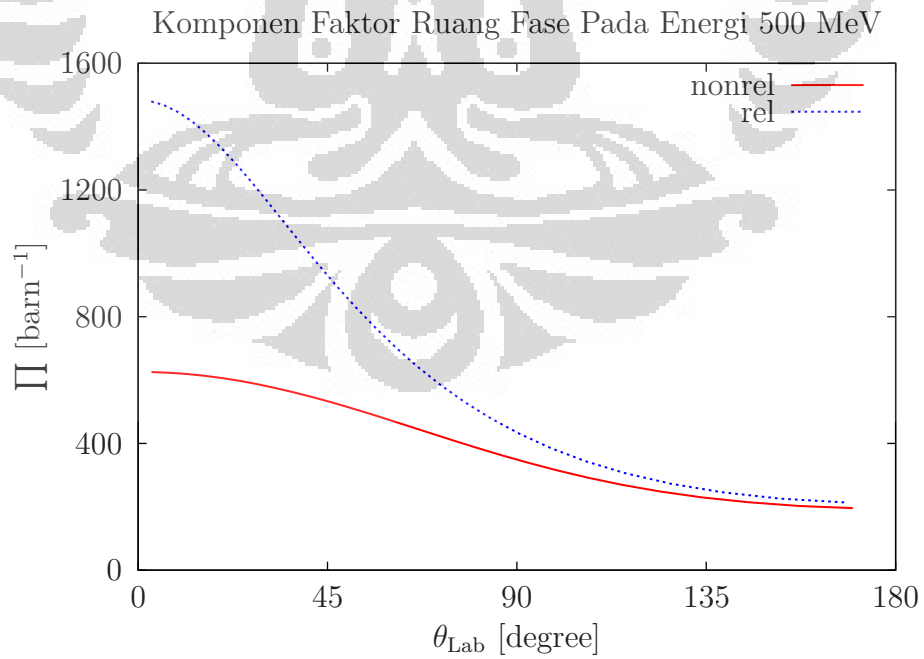
Gambar 3.5: Transfer polarisasi pada energi 100 MeV



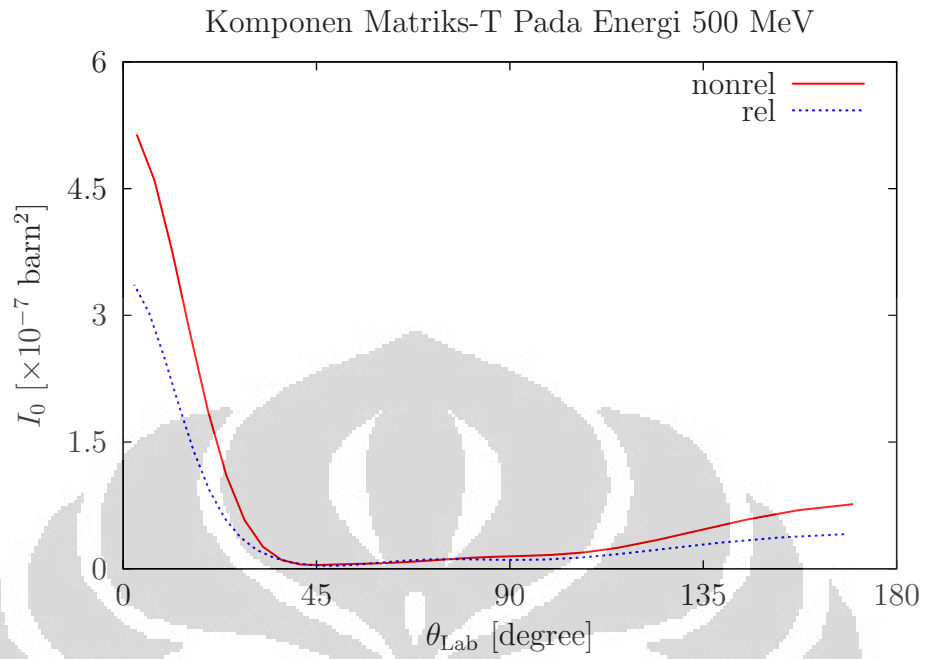
Gambar 3.6: Tensor depolarisasi pada energi 100 MeV



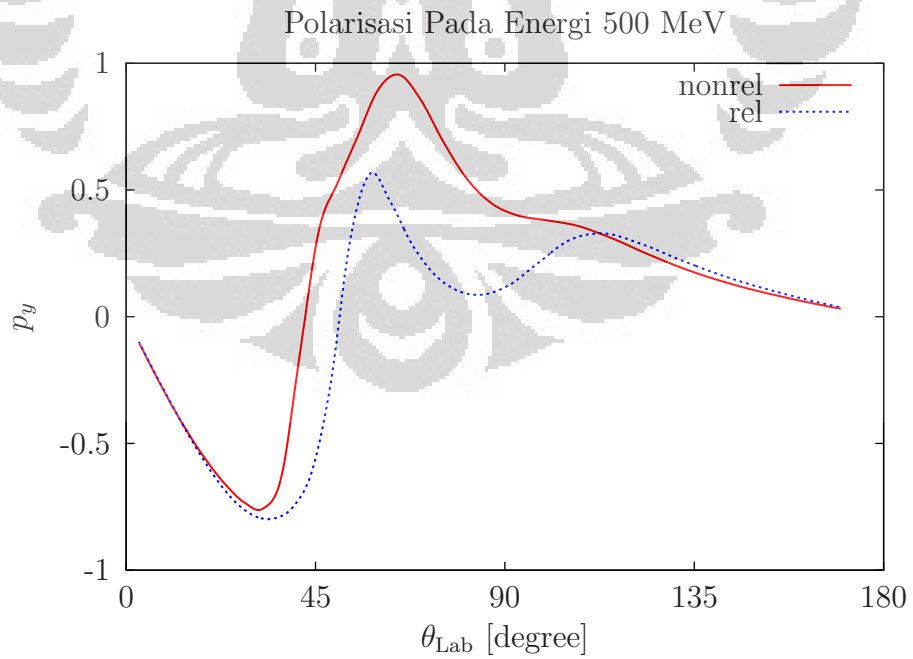
Gambar 3.7: Penampang lintang differensial pada energi 500 MeV



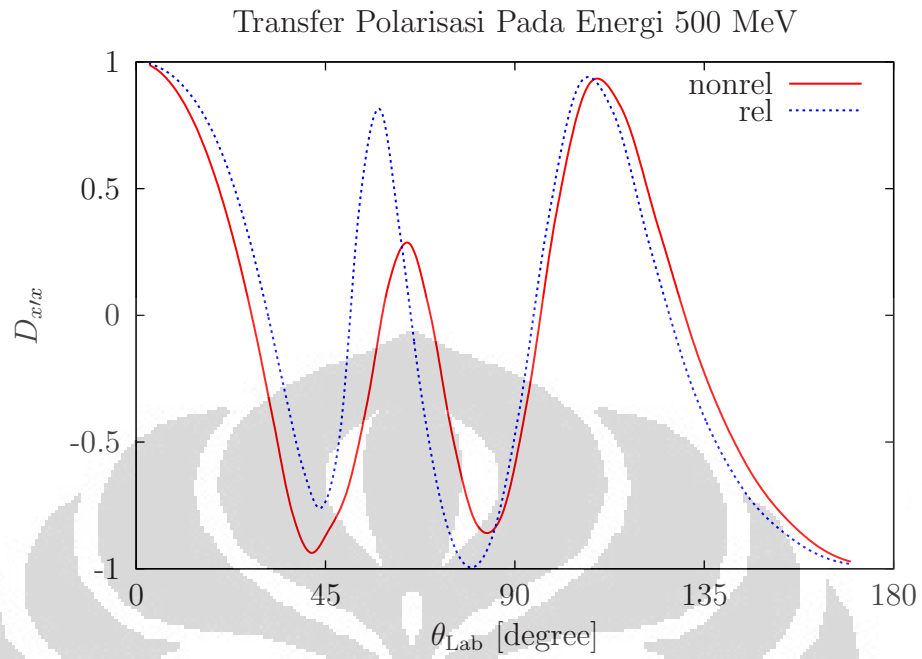
Gambar 3.8: Komponen faktor ruang fase pada energi 500 MeV



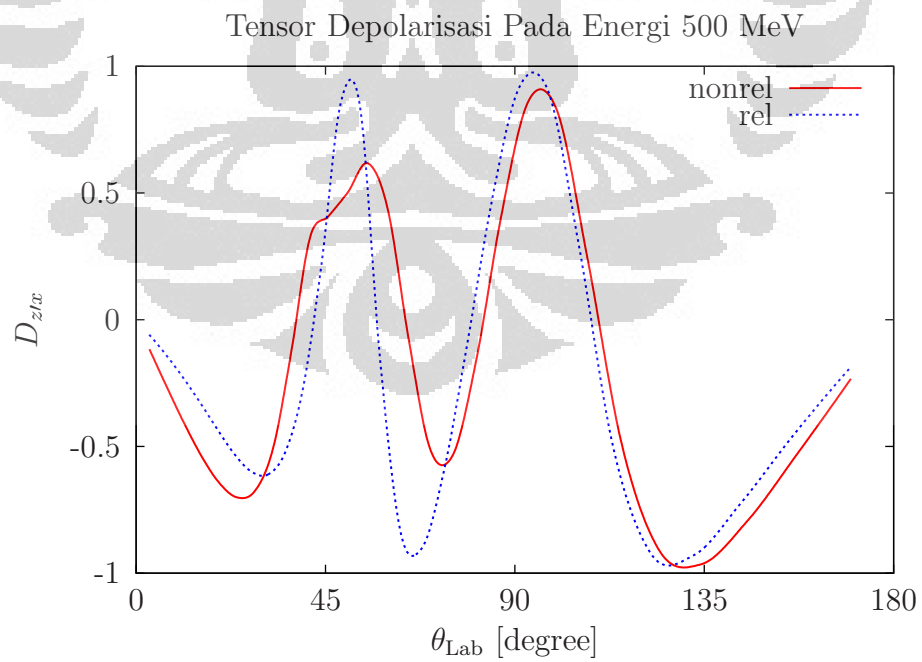
Gambar 3.9: Komponen matriks-T pada energi 500 MeV



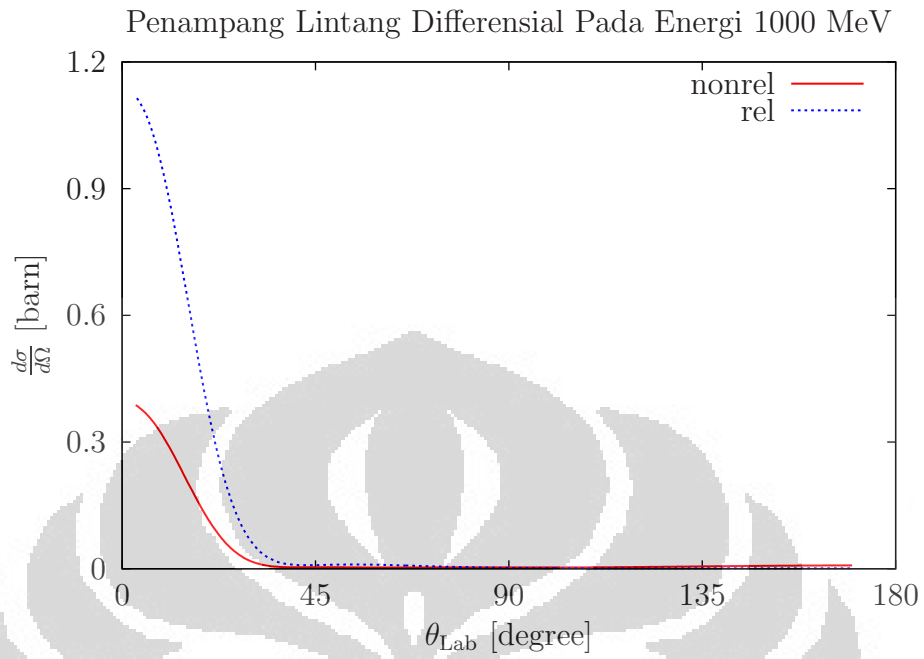
Gambar 3.10: Polarisasi pada energi 500 MeV



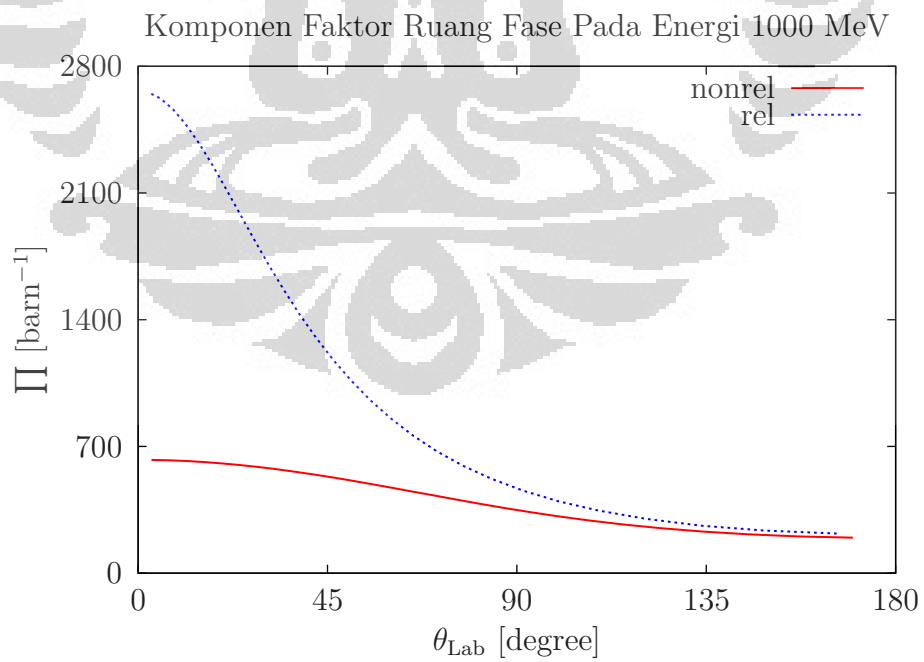
Gambar 3.11: Transfer polarisasi pada energi 500 MeV



Gambar 3.12: Tensor depolarisasi pada energi 500 MeV

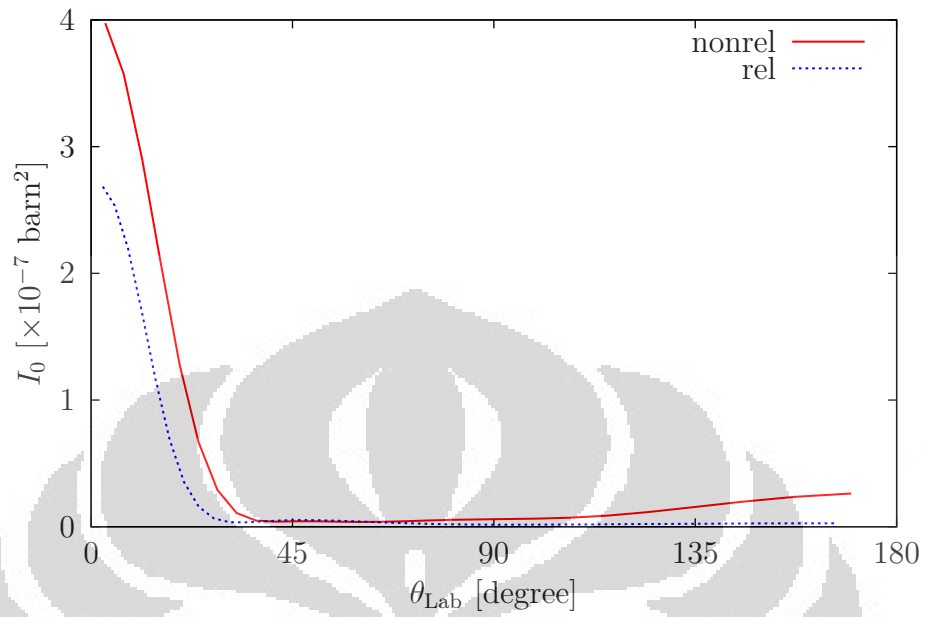


Gambar 3.13: Penampang lintang differensial pada energi 1000 MeV



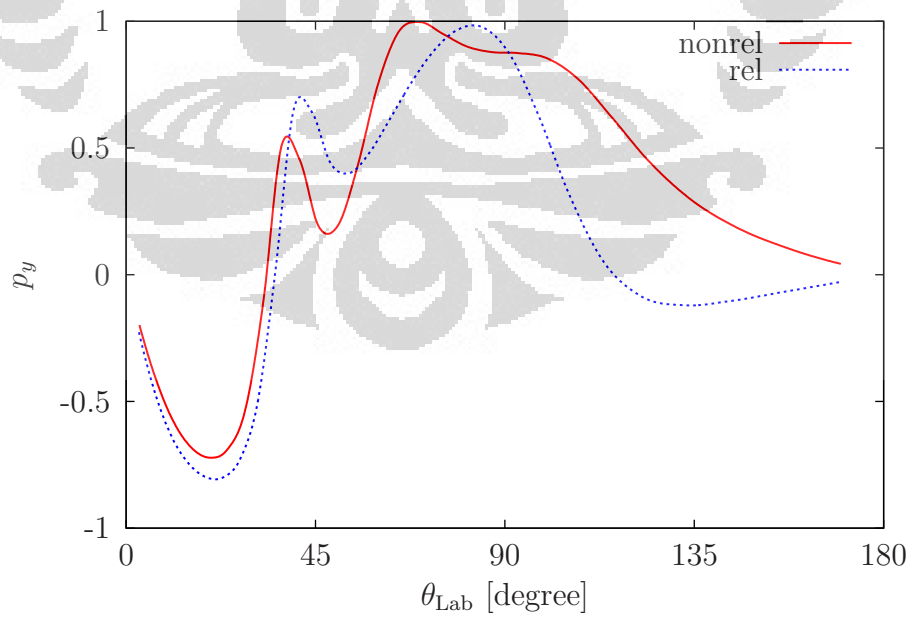
Gambar 3.14: Komponen faktor ruang fase pada energi 1000 MeV

Komponen Matriks-T Pada Energi 1000 MeV

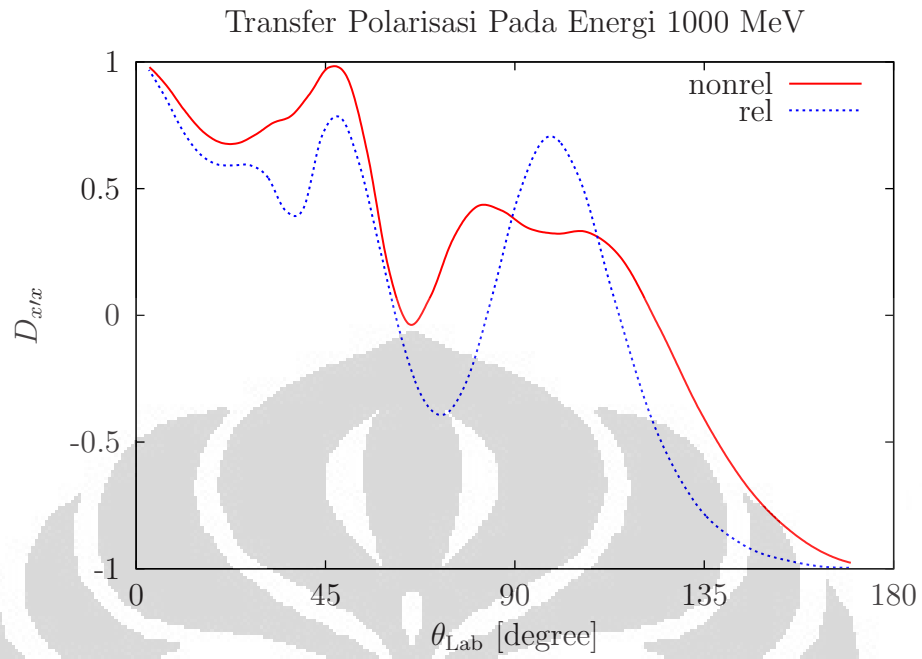


Gambar 3.15: Komponen matriks-T pada energi 1000 MeV

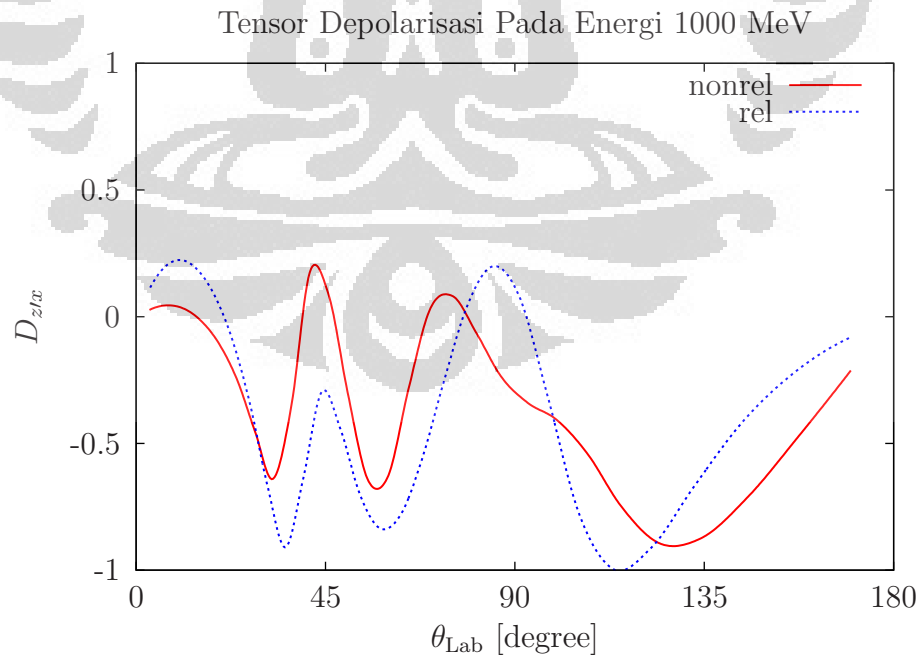
Polarisasi Pada Energi 1000 MeV



Gambar 3.16: Polarisasi pada energi 1000 MeV



Gambar 3.17: Transfer polarisasi pada energi 1000 MeV



Gambar 3.18: Tensor depolarisasi pada energi 1000 MeV

3.2.1 Energi 100 MeV

Gambar (3.1) - (3.6) di atas merupakan grafik hasil perhitungan non-relativistik dan relativistik pada nilai energi 100 MeV. Pada gambar (3.1) terlihat bahwa grafik untuk nilai energi 100 MeV, penampang lintang differensial hasil perhitungan relativistik memiliki nilai yang lebih besar daripada nilai penampang lintang differensial hasil perhitungan non-relativistik. Kedua hasil (kurva) tersebut memiliki perbedaan yang cukup berarti, hal ini terlihat pada saat sudut hambur (θ_{Lab}) kecil, kurva hasil perhitungannya memiliki rasio selisih perbedaan sekitar 19 %. Selain itu juga terlihat bahwa pada kurva hasil perhitungan relativistik mengalami sedikit pergeseran sudut θ_{Lab} , terhadap θ_{Lab} dari kurva hasil perhitungan non-relativistik sebelumnya.

Dalam penampang lintang differensial terdapat dua komponen yaitu komponen faktor ruang fase dan matriks-T. Sesuai dengan persamaan (2.99) dan (2.103), didapatkan komponen faktor ruang fase dan matriks-T untuk non-relativistik dan relativistik sebagai berikut:

faktor ruang fase untuk relativistik

$$\prod_{\text{rel}} = (2\pi)^4 \frac{k_1'}{k_1} \frac{(E_{1,\text{P.M.}} E_{2,\text{P.M.}})^2}{m_2 E_{2,\text{Lab}}'}, \quad (3.23)$$

faktor ruang fase untuk non-relativistik

$$\prod_{\text{nonrel}} = (2\pi)^4 \frac{k_1'}{k_1} m_1^2, \quad (3.24)$$

matriks-T untuk non-relativistik dan relativistik

$$I_0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} |T_{ij}(\mathbf{p}', \mathbf{p})|^2. \quad (3.25)$$

Untuk menunjukkan kontribusi faktor ruang fase (\prod) dan matriks-T (I_0) terhadap nilai penampang lintang diferensial, kami tampilkan gambar (3.2) dan (3.3). Berdasarkan gambar (3.2) dan (3.3) di atas, dapat kita lihat bahwa komponen faktor ruang fase pada efek kinematika relativistik menyebabkan perbedaan (penambahan) nilai penampang lintang differensial, sedangkan untuk I_0 mengakibatkan pergeseran nilai penampang lintang differensial ke arah sudut yang lebih kecil.

Polarisasi seperti yang ditampilkan oleh gambar (3.4), terlihat bahwa efek kinematika relativistik mulai muncul pada nilai energi 100 MeV, meskipun memang jika kita perhatikan efek tersebut masih terlihat kecil. Selain polarisasi, efek kinematika relativistik juga telah muncul pada transfer polarisasi dan tensor depolarisasi untuk nilai energi ini, seperti yang ditunjukkan pada gambar (3.5) dan (3.6).

3.2.2 Energi 500 MeV

Selanjutnya adalah grafik-grafik hasil perhitungan non-relativistik dan relativistik untuk nilai energi 500 MeV, seperti yang ditunjukkan oleh gambar (3.7) - (3.12). Dari gambar (3.7) dapat kita lihat bahwa pada nilai energi 500 MeV nilai penampang lintang differensial hasil perhitungan relativistik, pada saat θ_{Lab} kecil, lebih besar daripada nilai penampang lintang differensial hasil perhitungan non-relativistik, dengan selisih perbedaan yang cukup signifikan yakni sekitar 35 %. Jika kita perhatikan tampak bahwa selisih perbedaan grafik untuk energi 500 MeV adalah lebih besar daripada selisih perbedaan grafik untuk energi 100 MeV. Pada grafik (3.7) juga terjadi sedikit pergeseran sudut θ_{Lab} pada kurva hasil perhitungan relativistik, terhadap θ_{Lab} dari kurva hasil perhitungan non-relativistik sebelumnya. Perbedaan nilai penampang lintang differensial tersebut ditimbulkan oleh kontribusi nilai faktor ruang fase seperti ditunjukkan dalam gambar (3.8) dan I_0 , seperti yang ditunjukkan pada gambar (3.9), yang selain itu juga mengakibatkan pergeseran ke arah sudut yang lebih kecil.

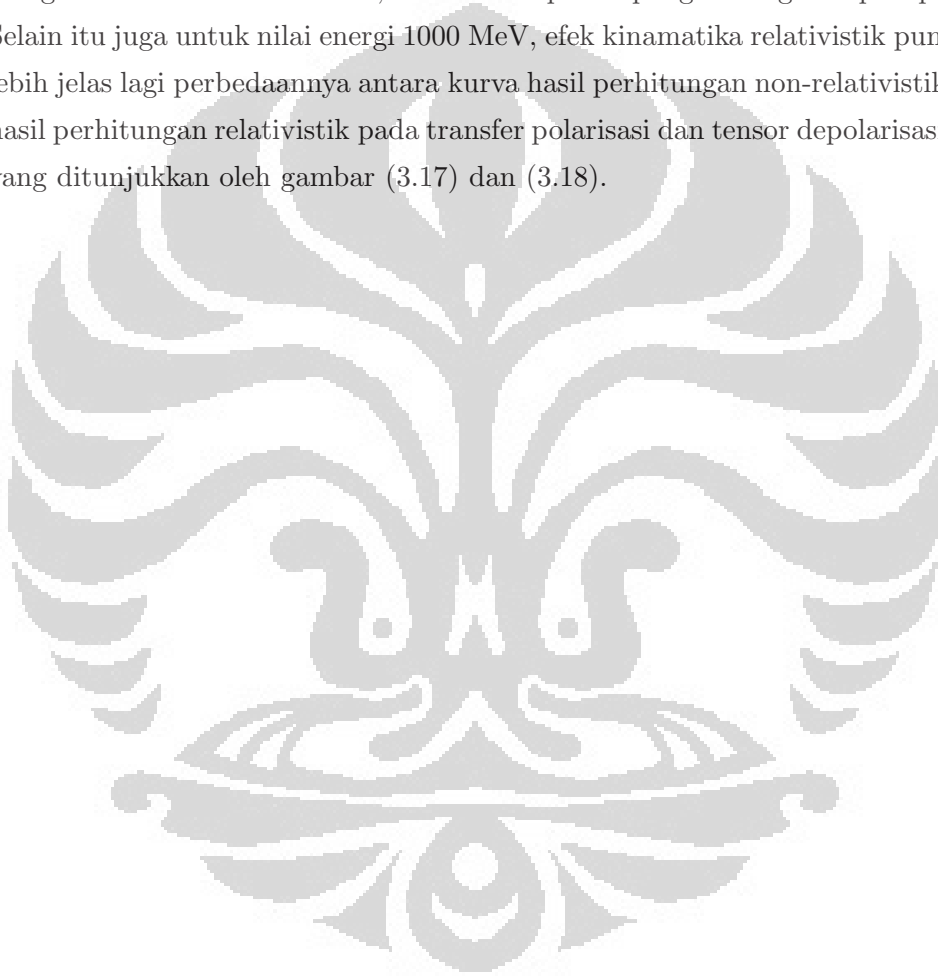
Berikutnya gambar (3.10) adalah grafik polarisasi, kita lihat bahwa dari grafik tersebut menunjukkan adanya efek kinematika relativistik untuk polarisasi pada energi 500 MeV. Pada energi ini terlihat tampak semakin jelas perbedaan antara kurva hasil perhitungan non-relativistik dengan hasil perhitungan relativistik pada polarisasi, baik untuk penampang lintang maupun polarisasi. Tidak hanya itu, efek kinematika relativistik juga tampak semakin jelas perbedaannya antara kurva hasil perhitungan non-relativistik dengan hasil perhitungan relativistik pada transfer polarisasi dan tensor depolarisasi untuk nilai energi 500 MeV, seperti yang ditunjukkan oleh gambar (3.11) dan (3.12).

3.2.3 Energi 1000 MeV

Terakhir adalah gambar grafik (3.13) - (3.18) yang menunjukkan hasil perhitungan non-relativistik dan relativistik untuk nilai energi 1000 MeV. Berdasarkan gambar (3.13) terlihat bahwa pada nilai energi 1000 MeV, nilai penampang lintang differensial hasil perhitungan relativistik lebih besar daripada nilai penampang lintang differensial hasil perhitungan non-relativistik pada saat θ_{Lab} kecil. Kedua kurva pada gambar (3.13) memiliki rasio perbedaan yang lebih signifikan, yaitu sekitar 65 %, sehingga dapat dikatakan bahwa selisih perbedaan grafik untuk energi 1000 MeV adalah paling besar dibandingkan dengan selisih perbedaan grafik untuk energi 100 MeV dan 500 MeV. Pada grafik tersebut juga dapat kita lihat bahwa sudut θ_{Lab} pada hasil perhitungan relativistik mengalami sedikit pergeseran sudut θ_{Lab} ,

terhadap θ_{Lab} hasil perhitungan non-relativistik. Sama seperti sebelumnya bahwa faktor ruang fase berkontribusi pada nilai penampang lintang differensial, sedangkan I_0 berkontribusi pada perbedaan nilai dan pergeseran sudutnya, seperti yang ditunjukkan dalam gambar (3.14) dan (3.15).

Selanjutnya kita lihat bahwa pada gambar (3.16), menunjukkan adanya efek kinematika relativistik untuk polarisasi pada energi 1000 MeV. Pada energi ini tampak semakin jelas perbedaan antara kurva hasil perhitungan non-relativistik dan hasil perhitungan relativistik pada energi 1000 MeV, dibandingkan dengan hasil pada energi 100 MeV dan 500 MeV, baik untuk penampang lintang maupun polarisasi. Selain itu juga untuk nilai energi 1000 MeV, efek kinematika relativistik pun tampak lebih jelas lagi perbedaannya antara kurva hasil perhitungan non-relativistik dengan hasil perhitungan relativistik pada transfer polarisasi dan tensor depolarisasi, seperti yang ditunjukkan oleh gambar (3.17) dan (3.18).



BAB 4

KESIMPULAN DAN SARAN

Hasil perhitungan kinematika relativistik mempunyai selisih perbedaan dengan hasil perhitungan kinematika non-relativistik, misalnya seperti perbedaan nilai penampang lintang differensial pada saat sudut hambur kecil. Besar selisih perbedaan tersebut bergantung pada nilai energinya, sehingga dapat dikatakan bahwa efek relativistik akan semakin signifikan pengaruhnya pada energi yang makin tinggi.

Penampang lintang differensial memiliki dua komponen, yaitu komponen faktor ruang fase dan komponen matriks-T. Faktor ruang fase memberikan kontribusi terhadap perbedaan nilai hasil penampang lintang differensial, sedangkan matriks-T berkontribusi terhadap pergeseran sudut pada semua nilai energi serta perbedaan nilai hasil penampang lintang differensial pada nilai energi tertentu.

Pada penelitian ini kami belum melakukan perbandingan kuantitatif antara hasil perhitungan teoritik dengan hasil eksperimen. Ke depan penelitian lebih komprehensif harus dilanjutkan, yakni dengan menggunakan potensial realistik yang sesuai dengan hamburan yang dikaji serta melakukan perbandingan dengan hasil eksperimen.

DAFTAR ACUAN

- [1] I Fachruddin dan A Salam, *Scattering of A Spin-1/2 Particle Off A Spin-0 Target in a Simple Three-Dimensional Basis*, Few-Body Systems, 2012, DOI: 10.1007/s00601-012-0353-y.
- [2] G. G. Ohlsen, Rep. Phys. 35, 717, 1972.
- [3] N. Hoshizaki, Suppl. Prog. Theor. Phys. 42, 107 (1968).
- [4] J. Bystricky, F. Lehar, and P. Winternitz, Le Journal de Physique 39, 1 (1978).
- [5] R. L. Liboff, *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, New York, 1992.
- [6] R. Fong dan J. Suche. Math Phys. 5 (1964) 456
- [7] R. Buttgen, K. Holinde, A. Muller Groeling, J. Speth and P Wyborny. *A Meson Exchange Model for K^+N Interaction*, Nuclear Physics A506(1990) 586-614.



LAMPIRAN

LAMPIRAN A

Realisasi Numerik

A.1 Langkah Analitik

Persamaan yang diselesaikan, catat bahwa $x = \cos \theta$

$$\begin{aligned}
 T_{\lambda'\lambda}(p', p, x') &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') \\
 &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda''} \int_0^\infty dp'' \frac{p^2}{\frac{p^2}{2\mu} + i\epsilon - \frac{p''^2}{2\mu}} \\
 &\int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
 &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') \\
 &+ 2\mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\lambda''} \int_0^\infty dp'' \frac{p^2}{p^2 + i\epsilon - p''^2} \\
 &\int_{-1}^1 dx'' v_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
 &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \int_0^\infty dp'' p''^2 \\
 &\left\{ \frac{P}{p^2 - p''^2} - i\phi\delta(p^2 - p''^2) \right\} \\
 &\times \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
 &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' \\
 &\int_0^\infty dp'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \frac{p''^2}{p^2 - p''^2} \\
 &- i\phi\mu p \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
 &\simeq V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' \\
 &\int_0^M dp'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \frac{p''^2}{p^2 - p''^2} \\
 &- i\phi\mu p \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x''). \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

Mengganti batas atas integral ∞ dengan bilangan besar M yang dapat diterima sejauh potensialnya adalah satu daerah pendek, kemudian mengambil singularitasnya

$$\begin{aligned}
T_{\lambda'\lambda}(p', p, x') &\simeq V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' \\
&\left\{ \int_0^M dp'' p''^2 V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \frac{1}{p^2 - p''^2} \right. \\
&\quad \left. - p^2 V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \int_0^\infty dp'' \frac{1}{p^2 - p''^2} - p^2 \right\} \\
&\quad - i\pi\mu p \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^{\phi\lambda}(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}^\phi(p'', p, x'') \\
&\simeq V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' \\
&\left\{ \int_0^M dp'' p''^2 V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \frac{1}{p^2 - p''^2} \right. \\
&\quad \left. - p^2 V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \int_0^M dp'' \frac{1}{p^2 - p''^2} \right. \\
&\quad \left. - p^2 V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \int_M^\infty dp'' \frac{1}{p^2 - p''^2} \right\} \\
&\quad - i\pi\mu p \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
&\simeq V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' \int_0^M dp'' \frac{1}{p^2 - p''^2} \\
&\quad \times \left\{ p''^2 V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \right. \\
&\quad \left. - p^2 V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \right\} \\
&\quad - \mu p \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
&\quad - i\pi\mu p \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
&\simeq V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' \\
&\quad \int_0^M dp'' \frac{p''^2}{p^2 - p''^2} V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
&\quad - 2\mu \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' p^2 V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \\
&\quad \int_0^M dp'' \frac{p''^2}{p^2 - p''^2} \\
&\quad - \mu p \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'')
\end{aligned}$$

$$-i\pi\mu p \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \quad (\text{A.2})$$

Persamaan terakhir

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda}(p', p, x') &\simeq V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \int_{-1}^1 dx'' \\ &\left[\int_0^M dp'' \frac{p''^2}{p^2 - p''^2} V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \right. \\ &\quad - \left\{ p \int_0^M dp'' \frac{1}{p^2 - p''^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) + \frac{1}{2} i\phi \right\} \\ &\quad \left. \times p V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p', p'', x', x'') T_{\lambda''\lambda}(p'', p, x'') \right] \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

A.2 Langkah Numerik

Pendeskringan variabel kontinu p dan x

$$\begin{aligned} p' &\rightarrow p_i & p'' &\rightarrow p_k \\ x' &\rightarrow x_j & x'' &\rightarrow x_l \end{aligned}$$

mengganti integral kedalam quadratur, mengatur $p_{n+1} = p$, dan menggunakan $\delta_{ab} = 1 - \delta_{ab}$

$$\begin{aligned} T_{\lambda'\lambda}(p', p, x') &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \sum_{l=1}^m w_{x,l} \\ &\left[\sum_{k=1}^n w_{p,k} \frac{p_k^2}{p^2 - p_k^2} V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p_i, p_k, x_j, x_l) T_{\lambda''\lambda}(p_k, p, x_l) \right. \\ &\quad - \left\{ p \sum_{r=1}^n w_{p,r} \frac{1}{p^2 - p_r^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) + \frac{1}{2} i\phi \right\} \\ &\quad \left. p V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p_i, p, x_j, x_l) T_{\lambda''\lambda}(p, p, x_l) \right] \\ &= V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \sum_{l=1}^m w_{x,l} \sum_{k=1}^{n+1} \\ &\left[\bar{\delta}_{k,n+1} \frac{w_{p,k} p_k^2}{p^2 - p_k^2} V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p_i, p_k, x_j, x_l) T_{\lambda''\lambda}(p_k, p, x_l) \right. \\ &\quad - \delta_{k,n+1} \left\{ p \sum_{r=1}^n \frac{w_{p,r}}{p^2 - p_r^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) + \frac{1}{2} i\phi \right\} \\ &\quad \left. p V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p_i, p, x_j, x_l) T_{\lambda''\lambda}(p, p, x_l) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V_{\lambda'\lambda}(p', p, x') + 2\mu \sum_{\lambda''} \sum_{l=1}^m w_{x,l} \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{n+1} \left[\bar{\delta}_{k,n+1} \frac{w_{p,k} p_k^2}{p^2 - p_k^2} - \delta_{k,n+1} p \right. \\
&\quad \left. \left\{ p \sum_{r=1}^n \frac{w_{p,r}}{p^2 - p_r^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) + \frac{1}{2} i\phi \right\} \right] \\
&\quad \times V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p_i, p_k, x_j, x_l) T_{\lambda''\lambda}(p_k, p, x_l), \tag{A.4}
\end{aligned}$$

membawa yang ruas tidak diketahui ke ruas kiri dan membentuk sistem persamaan linier

$$\begin{aligned}
T_{\lambda''\lambda}(p_i, p, x_j) &- 2\mu \sum_{\lambda''} \sum_{l=1}^m w_{x,l} \\
&\quad \sum_{k=1}^{n+1} \left[\bar{\delta}_{k,n+1} \frac{w_{p,k} p_k^2}{p^2 - p_k^2} - \delta_{k,n+1} p \right. \\
&\quad \left. \left\{ p \sum_{r=1}^n \frac{w_{p,r}}{p^2 - p_r^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) + \frac{1}{2} i\pi \right\} \right] \\
&\quad \times V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p_i, p_k, x_j, x_l) T_{\lambda''\lambda}(p_k, p, x_l) = V_{\lambda'\lambda}(p_i, p, x_j) \\
&\quad \sum_{\lambda''} \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{n+1} (\delta_{\lambda''\lambda'} \delta_{k_i} \delta_{l_j} T_{\lambda''\lambda}(p_k, p, x_l) \\
&\quad - \left[\bar{\delta}_{k,n+1} \frac{w_{p,k} p_k^2}{p^2 - p_k^2} - \delta_{k,n+1} p \right. \\
&\quad \left. \left\{ p \sum_{r=1}^n \frac{w_{p,r}}{p^2 - p_r^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) + \frac{1}{2} i\pi \right\} \right] \\
&\quad \times 2\mu w_{x,l} V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p_i, p_k, x_j, x_l) T_{\lambda''\lambda}(p_k, p, x_l) = V_{\lambda'\lambda}(p_i, p, x_j) \\
&\quad \sum_{\lambda''} \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{n+1} (\delta_{\lambda''\lambda'} \delta_{k_i} \delta_{l_j} \\
&\quad - \left[\bar{\delta}_{k,n+1} \frac{w_{p,k} p_k^2}{p^2 - p_k^2} - \delta_{k,n+1} p \right. \\
&\quad \left. \left\{ p \sum_{r=1}^n \frac{w_{p,r}}{p^2 - p_r^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) + \frac{1}{2} i\phi \right\} \right] \\
&\quad \times 2\mu w_{x,l} V_{\lambda'\lambda''}^\lambda(p_i, p_k, x_j, x_l) T_{\lambda''\lambda}(p_k, p, x_l) = V_{\lambda'\lambda}(p_i, p, x_j). \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Mendefinisikan skema index baru $\alpha = (\lambda' - 1)m(n + 1) + (j - 1)(n + 1) + i$ dan $\beta = (\lambda'' - 1)m(n + 1) + (l - 1)(n + 1) + k$.

Persamaan terakhir

$$\sum_{\beta} A_{\alpha\beta}^{\lambda}(p) = V_{\alpha,\lambda}(p), \quad (\text{A.6})$$

dengan p menjadi parameter energi dan

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{\lambda}(p) = & \delta_{\lambda''\lambda'}\delta_{ki}\delta_{lj} - \left[\delta_{k,n+1} \frac{w_{p,k}p_k^2}{p^2 - p_k^2} - \delta_{k,n+1}p \right. \\ & \left. \left\{ p \sum_{r=1}^n \frac{w_{p,r}}{p^2 - p_r^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M-p}{M+p} \right) + \frac{1}{2} i\phi \right\} \right] \\ & \times 2\mu w_{x,l} V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p_i, p_k, x_j, x_l), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$T_{\beta,\alpha}(p) = T_{\lambda'\lambda}(p_k, p, x_l), \quad (\text{A.8})$$

$$V_{\alpha,\lambda}(p) = V_{\lambda'\lambda''}^{\lambda}(p_i, p_k, x_j, x_l). \quad (\text{A.9})$$

