UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN TOTAL BUSUR AJAIB b-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF LOBSTER SEMI TERATUR $L_n(r, 0; 1, r)$ DAN $L_n(r, 0; 1, s)$

SKRIPSI

SRI WAHYUNI WULANDARI
0806325756

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN TOTAL BUSUR AJAIB b-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF LOBSTER SEMI TERATUR $L_n(r, 0; 1, r)$ DAN $L_n(r, 0; 1, s)$

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

SRI WAHYUNI WULANDARI
0806325756

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA

DEPOK
JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Sri Wahyuni Wulandari

NPM : 0806325756

Tanda Tangan :

Tanggal : 13 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Sri Wahyuni Wulandari

NPM : 0806325756

Program Studi : Matematika

Judul Skripsi : Pelabelan Total Busur Ajaib b-Busur Berurutan pada Graf Lobster Semi Teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

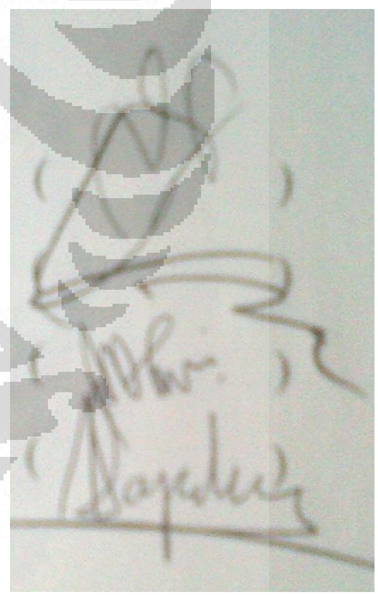
DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dra. Denny R. Silaban, M.Kom

Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami

Penguji : Dra. Nora Hariadi, M.Si

Penguji : Dr. Alhaji Akbar B., M.Sc



Ditetapkan di : Depok
Tanggal : Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Penulis sadar bahwa penulisan tugas akhir ini tidak terlepas dari dukungan dan bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian tugas akhir ini. Ucapan terima kasih diberikan kepada :

1) Dra. Denny R. Silaban, M.Kom selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu dan pikiran serta memberikan masukan-masukan yang berguna bagi penyelesaian penulisan tugas akhir ini;
2) Dra. Netty Sunandi, M.Si selaku pembimbing akademis penulis selama menjalani masa perkuliahan;
3) Dosen pengajar Departemen Matematika Universitas Indonesia, Dr. Kiki Ariyanti S, Dra. Nora Hariadi, M.Sc, Dra. Siti Aminah, M.Kom, Prof. Dr. Djati Kerami, dan lain-lain yang telah memberikan saran dan kritik selama masa skripsi;
4) Keluarga penulis, yaitu ibu, kakak-kakak, keponakan-keponakan, serta seluruh keluarga besar yang telah memberikan bantuan dan dukungannya baik berupa do'a ataupun moral;
5) Seluruh karyawan Departemen Matematika Universitas Indonesia, yaitu mba Santi, pak Saliman, dan lain-lain yang telah memberi bantuan dalam urusan administrasi dan penyediaan perlengkapan penunjang saat skripsi;
6) Teman-teman SMP penulis, yaitu Dona, Mariana, Winarti, Awan, Dharma, dan Ino yang telah memberikan persahabatan yang indah dalam kehidupan penulis dan juga selalu memberikan dukungan, do'a serta perhatian dan kerinduan bagi penulis sehingga penulis dapat bersemangat dalam menyelesaikan tugas akhir ini;

7) Kedua temanku Siti Nurul Kania dan Wuri Listyarini yang telah berbagi hal-hal menarik yang sama-sama kita sukai mulai dari drama, komik, dan terutama persahabatan sebagai teman sebangku penulis semasa SMA;
8) Teman-teman SMA penulis, yaitu Satrio, Srunny, Subkhi, Saphie, Memed, Lintang, Veli, dan Wulan yang bersedia berkumpul bersama disaat liburan. Penulis berharap dapat berkumpul lagi dengan kalian semua;
9) Teman terdekat di angkatan 2008, Dian Nurhayati, terima kasih karena selama ini sudah menemani dan membantu semasa kuliah dan skripsi;
10) Teman-teman SP fungsi kompleks, Isyah Dianora M., Novikasari, dan Uci Lestiana yang sudah sama-sama berbagi keceriaan saat menonton dan mengunduh drama-drama Korea;
11) Teman-teman satu kelompok bimbingan, Fani dan Arief terima kasih selama in sudah banyak memberi dukungan, semangat, bantuan, dan sarannya. Semoga di masa depan kita dapat menjadi orang yang sukses;
12) Semua angkatan 2008 yang lain, Asri, Nadia, Uchi, Yulial, Siwi, Maulia, Anisah, Dhila, Ifah, Nita, Kiki, Citra, Ega, Sita, Ines, Cindy, Hindun, Mei, Resti, May, Olin, Risya, Tuti, Dhewe, Numa, Ade, Agnes, Dhea, Luthfa, Janu, Eka, Ica, Emy, Yulian, dan lain-lain terima kasih atas dukungan dan semangat dari kalian. Momen-momen bersama kalian semua adalah hal yang sangat berharga;

Penulis juga ingin mengucapkan terima ksih kepada pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Akhir kata, penulis memohon maaf apabila terdapat kesalahan ataupun kekurangan dalam tugas akhir ini. Penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat berguna bagi pembaca.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah in:

Nama : Sri Wahyuni Wulandari
NPM : 0806325756
Program Studi : Sarjana
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

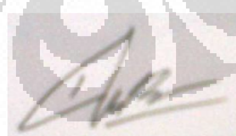
Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah yang berjudul:

Pelabelan Total Busur Ajaib b-Busur Berurutan pada Graf Lobster Semi Teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Tanggal : 13 Juni 2012
Yang menyatakan



(Sri Wahyuni Wulandari)

ABSTRAK

Nama : Sri Wahyuni Wulandari

Program studi : Matematika

Judul : Pelabelan Total Busur Ajaib b-Busur Berurutan pada Graf Lobster Semi Teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$

Misalkan suatu graf $G = (V, E)$ dengan $v = |V|$ simpul dan $e = |E|$ busur adalah graf berhingga, sederhana, dan tidak berarah. Pelabelan total busur ajaib pada G adalah pemetaan bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, v + e\}$, dimana terdapat suatu konstanta k sedemikian sehingga bobot busur $w_f(xy) = f(x) + f(xy) + f(y) = k$ untuk setiap $xy \in E$. Jika f adalah suatu pelabelan total busur ajaib dari G dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$ maka f adalah pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan. Pada makalah ini diberikan konstruksi pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada salah satu kelas graf pohon, yaitu graf lobster semi reguler $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$ dengan $n, r,$ dan s adalah bilangan-bilangan bulat positif.

Kata kunci : Pelabelan total busur ajaib, Pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan, graf lobster, graf semi teratur.

Xii + 75 halaman ; 23 gambar; 1 tabel

Daftar Pustaka : 10 (1986-2012)

ABSTRACT

Name : Sri Wahyuni Wulandari

Study Program : Mathematics

Title : A b-Edge Consecutive Edge Magic Total Labeling on Semi Regular Lobster Graph $L_n(r, 0; 1, r)$ and $L_n(r, 0; 1, s)$

Let $G = (V, E)$ be a finite, simple, and undirected graph with $v = |V|$ vertices and $e = |E|$ edges. An edge magic total labeling of G is a bijection f from $V \cup E$ to the set of consecutive integers $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$, where there is a constant k such that $w_f(xy) = f(x) + f(xy) + f(y) = k$ for all $xy \in E$. If f is an edge magic total labeling of G and $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \le b \le v$, then f is an b-edge consecutive edge magic total labeling. In this *skripsi* will be given constructions of b-edge consecutive magic total lebeling for a class of tree graph, that is semi regular lobster graph $L_n(r, 0; 1, r)$ and $L_n(r, 0; 1, s)$ with $n, r,$ and s are positive integers.

Keywords : Edge magic total labeling, b-edge consecutive edge magic total labeling, lobster graph, semi regular graph.

Xii + 75 pages ; 23 pictures; 1 table

Bibliography : 10 (1986-2012)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

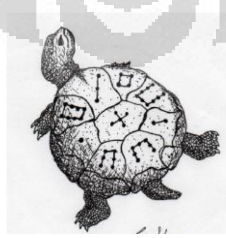
BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bagian dari matematika diskrit yang masih terus berkembang hingga saat ini. Pada dasarnya teori graf digunakan sebagai alat bantu untuk mengilustrasikan dan menyelesaikan suatu masalah atau persoalan agar lebih mudah untuk dipahami dan diselesaikan. Suatu graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak terurut dari elemen-elemen V. Elemen-elemen dari V disebut simpul dari G dan elemen-elemen dari E disebut busur dari G. Banyak anggota dari V dan E dinyatakan dengan $v = |V|$ dan $e = |E|$ (Hartsfield dan Ringel, 1994).

Beberapa jenis graf diantaranya adalah graf lingkaran, yaitu graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf yang diperoleh dari graf lingkaran dengan menghapus satu busur disebut graf lintasan. Graf caterpillar adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan dengan menambahkan sejumlah simpul daun pada setiap simpul graf lintasan (Baca dan Miller, 2008). Graf caterpillar teratur adalah graf caterpillar dimana banyak simpul daun dari setiap simpul pada graf lintasan adalah sama. Hutan adalah graf yang tidak mengandung lingkaran. Graf pohon adalah hutan yang terhubung (Wilson, 1996). Salah satu kelas bagian dari graf pohon adalah graf lobster. Graf lobster adalah suatu graf pohon yang mengandung lintasan dengan panjang maksimum dimana setiap simpul lain dari graf tersebut memiliki jarak maksimum t terhadap lintasan, dimana t adalah suatu bilangan bulat (Khan, Pal, dan Pal, 2009). Graf lobster teratur adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sejumlah yang sama simpul daun pada setiap simpul daun dari graf caterpillar teratur. Pada skipsi ini akan dibahas salah satu kasus khusus dari graf lobster dengan $t = 2$, yaitu graf lobster semi teratur yang dinotasikan dengan $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$. Graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ adalah graf lobster dengan $t = 2$ dimana n adalah banyaknya simpul pada lintasan, r dan 0 menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul ganjil pada lintasan, dan 1 dan r menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul genap pada lintasan. Graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ adalah graf lobster dengan $t = 2$ dimana n adalah banyaknya simpul pada lintasan, r dan 0 menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul ganjil pada lintasan, dan 1 dan s menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul genap pada lintasan.

Dalam teori graf tidak hanya mempelajari bagaimana cara menyederhanakan suatu masalah ke dalam bentuk graf tetapi juga mempelajari tentang pelabelan graf. Pelabelan graf muncul berdasarkan ide dari persegi ajaib. Sejarah persegi ajaib muncul sekitar 2800 SM di daratan China kuno. Pada waktu itu terjadi banjir besar yang melanda sungai Lo di China. Masyarakat setempat berusaha untuk menenangkan kemarahan sang penguasa sungai. Tak lama kemudian seekor kura-kura muncul ke permukaan sungai Lo dan pada cangkangnya terdapat pola bilangan aneh. Bilangan-bilangan tersebut tersusun menjadi pola persegi ukuran 3x3 yang sekarang lebih dikenal dengan sebutan persegi ajaib seperti pada Gambar 1.1. Penjumlahan bilangan-bilangan pada dari setiap baris, kolom, dan diagonal persegi ajaib menghasilkan bilangan yang sama yaitu 15. Kemudian persegi ajaib pertama yang berukuran 4x4 ditemukan terpahat di dinding gua Khajuraho, India (Jahannathan, 2005).



Gambar 1.1. Kura-kura sungai Lo yang pada cangkangnya terdapat pola persegi ajaib.

Persegi ajaib *nxn* adalah suatu matriks berukuran *nxn* yang entri-entrinya adalah susunan himpunan bilangan bulat berurutan $\{1, 2, \dots, n^2\}$ dimana semua elemen dari sembarang baris, kolom, atau diagonalnya dijumlahkan dan menghasilkan bilangan yang sama (Wallis, 2001). Pola cangkang kura-kura yang muncul di sungai Lo dapat direpresentasikan sebagai persegi ajaib 3x3 dimana jumlah entri-entri dari setiap baris, kolom, dan diagonalnya adalah 15 seperti pada Gambar 1.2.

15		15		15
	4	9	2	
15	3	5	7	15
	8	1	6	
15		15		15

Gambar 1.2. Persegi ajaib 3x3 yang ada pada cangkang kura-kura.

Pelabelan graf merupakan perluasan dari ide persegi ajaib. Pelabelan dari suatu graf *G* merupakan pemetaan elemen-elemen dari graf *G* ke himpunan bilangan bulat positif atau nonnegatif (Wallis, 2001). Jika domain dari pelabelan adalah himpunan simpul, maka pelabelan merupakan pelabelan simpul. Jika domainnya adalah himpunan busur, maka pelabelan meupakan pelabelan busur. Jika domainnya adalah himpunan semua simpul dan busur, maka pelabelan merupakan pelabelan total.

Bobot dari suatu simpul pada *G* atas pelabelan f adalah jumlah dari label simpul dan label busur-busur yang hadir pada simpul tersebut. Bobot dari suatu busur pada *G* atas pelabelan f adalah jumlah dari label busur dan label simpul-simpul ujung dari busur tersebut (Wallis, 2001). Apabila pelabelan menghasilkan bobot yang sama atau suatu konstanta untuk setiap busur dan atau simpul, maka pelabelan tersebut disebut pelabelan ajaib. Konstanta tersebut disebut bilangan ajaib. Namun jika pelabelan menghasilkan bobot yang berbeda untuk setiap busur dan atau simpul, maka pelabelan tersebut merupakan pelabelan anti ajaib. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai pelabelan total ajaib.

Beberapa jenis pelabelan total ajaib adalah pelabelan total simpul ajaib dan pelabelan total busur ajaib. Suatu pelabelan total simpul ajaib pada graf *G* adalah suatu pemetaan bijektif dari gabungan himpunan simpul dan himpunan busur ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, v + e\}$ dengan sifat bobot setiap simpul pada *G* adalah suatu bilangan konstan. Graf dengan pelabelan total simpul ajaib disebut graf simpul ajaib. Suatu pelabelan total busur ajaib dari graf *G* adalah suatu pemetaan bijektif dari gabungan himpunan simpul dan himpunan busur ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, v + e\}$ dengan sifat bobot dari busur-busur pada graf *G* adalah suatu bilangan konstan (Wallis, 2001).

Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, v + e\}$ disebut pelabelan total busur ajaib a-simpul berurutan dari *G* jika f adalah suatu pelabelan total busur ajaib dari *G* dan $f(V) = \{a + 1, a + 2, a + 3, \ldots, a + v\}, 0 \leq a \leq e$. Sebaliknya, $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, v + e\}$ disebut pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan dari *G* jika f adalah suatu pelabelan total busur ajaib dari *G* dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. Jika $a = 0$ (atau $b = 0$) maka f disebut pelabelan super simpul (atau busur) busur ajaib. Suatu graf yang memiliki pelabelan total busur ajaib a-simpul berurutan (atau b-busur berurutan) disebut graf busur ajaib a-simpul berurutan (atau b-busur berurutan) (Sugeng dan Miller, 2008).

Apabila suatu graf terhubung *G* memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan dengan $b \in \{1, 2, 3, \ldots, v - 1\}$ maka jumlah maksimum busur pada *G* adalah $v - 1$. Dengan demikian kelas graf terhubung yang memenuhi kondisi tersebut adalah graf pohon (Silaban dan Sugeng, 2010). Pada skripsi ini akan dibahas mengenai pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan untuk salah satu kelas graf pohon.

Hasil yang telah diperoleh berdasarkan hasil penelitian pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan adalah setiap graf busur ajaib b -busur berurutan memiliki pelabelan simpul anti ajaib. Hasil lainnya yaitu dual dari pelabelan total busur ajaib b -busur berurutan untuk suatu graf *G* adalah suatu pelabelan total busur ajaib $(v - b)$-

busur berurutan. Hasil untuk kelas graf pohon antara lain, setiap graf caterpillar dan graf firecracker memiliki pelabelan busur ajaib b -busur berurutan untuk setiap b. Beberapa penelitian mengenai pelabelan total busur ajaib b-busur beurutan juga telah dilakukan pada jenis-jenis graf lain seperti graf lingkaran, graf matahari, graf hairycycle, graf korona, graf dumbbell, graf kecebong, dan lainnya. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai pelabelan total busur ajaib (PTBA) b −busur berurutan untuk graf lobster. Hal ini dikarenakan penelitian mengenai pelabelan total busur ajaib b-busur beurutan belum dilakukan pada salah satu jenis graf pohon, yaitu graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$.

1.2 Permasalahan dan Ruang Lingkup

Permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana konstruksi pelabelan total busur ajaib (PTBA) b-busur berurutan pada salah satu jenis graf pohon,yaitu kelas graf lobster. Penelitian dilakukan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Jenis penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah penelitian dasar, yaitu penelitian yang bertujuan untuk memperoleh suatu pengetahuan baru dan dilakukan melalui percobaan atau melakukan pekerjaan teoritis. Metode yang digunakan adalah mengkonstruksi pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$ dengan cara mencari pola untuk mendapatkan pelabelan graf lobster, mendefinisikan rumus fungsi pelabelan, dan membuktikan bahwa pelabelan yang dirumuskan berlaku secara umum.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengkontruksi pelabelan total busur ajaib (PTBA) b- busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan tentang definisi-definisi serta istilah-istilah dalam graf, jenis-jenis graf, pelabelan pada graf, pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan, dan hasil-hasil yang telah diketahui dari pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan berdasarkan hasil penelitian yang telah dipublikasikan.

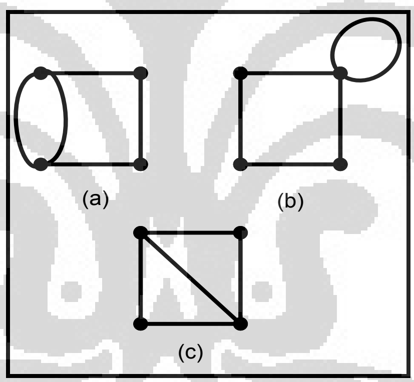
2.1 Definisi dan Istilah dalam Graf

Definisi-definisi yang digunakan pada bab ini pada umumnya mengacu pada sumber yang ditulis oleh Hartsfield dan Ringel (1994). Suatu graf *G* adalah pasangan dari himpunan (*V*,*E*) dimana *V* adalah himpunan tak kosong dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak terurut dari elemen-elemen *V*. Elemen-elemen dari *V* disebut sebagai simpul dari *G* dan elemen-elemen dari *E* disebut sebagai busur dari *G*. Kedua himpunan *V* dan *E* ini juga sering dinotasikan sebagai *V*(*G*) dan *E*(*G*) dari graf *G*. Elemen-elemen dari *V* dan *E* dinyatakan dengan huruf kecil atau bilangan bulat, contohnya $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ yang terdiri dari lima simpul dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ yang terdiri dari delapan busur. Suatu graf bisa berhingga atau tak berhingga tergantung kepada himpunan *V*.

Kardinalitas atau banyak anggota dari himpunan simpul pada suatu graf *G* disebut **order** dari *G* dan dinotasikan $v = |V|$, sedangkan kardinalitas dari himpunan busur disebut **ukuran** dari *G* dan dinotasikan dengan $e = |E|$. Sehingga graf (v, e) dikatakan memiliki **order** v dan **ukuran** e (Chartrand and Lesniak, 1986).

Ada beberapa istilah-istilah dasar dalam teori graf. Misalkan x dan y adalah dua simpul sembarang pada graf *G*. Dua simpul x dan y dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) jika terdapat busur yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Busur tersebut dinotasikan dengan xy. Simpul x dan y disebut sebagai **titik ujung** (*endpoint*) dari busur xy tersebut. Dua busur e_1 dan e_2 dikatakan bertetangga jika e_1 dan e_2 adalah dua busur yang berbeda pada G dan terhubung dengan simpul yang sama pada salah satu ujungnya. Simpul x dikatakan **terhubung** (*incident*) dengan busur e jika simpul x adalah titik ujung dari busur e.

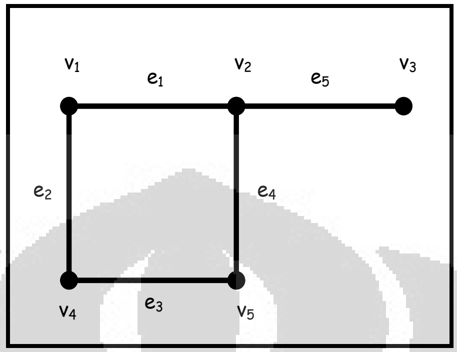
Graf umumnya tidak memiliki dua simpul yang dihubungkan oleh lebih dari satu busur. Jika di dalam graf tersebut terdapat dua simpul yang dihubungkan oleh lebih dari satu busur atau terdapat busur ganda, maka graf tersebut disebut **multigraf** (*multigraph*). **Gelung** (*loop*) adalah busur yang memiliki titik ujung (*endpoint*) atau simpul yang sama. Jika pada suatu graf terdapat gelung, maka graf tersebut disebut **pseudograf**. Graf yang tidak mengandung gelung dan busur ganda disebut **graf sederhana** (*simple graph*). Contoh dari multigraf, pseudograf, dan graf sederhana ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. (a) Multigraf (b) Pseudograf (c) Graf sederhana.

Derajat (*degree*) dari simpul x pada G, $d(x)$, adalah banyak busur yang hadir pada simpul tersebut. Simpul yang mempunyai derajat nol atau $d(x) = 0$ disebut **simpul terisolasi** (*isolated vertex*), sedangkan simpul yang mempunyai derajat satu atau $d(x) = 1$ disebut **simpul ujung** (*end vertex*). Graf dimana setiap simpulnya memiliki derajat yang sama disebut **graf teratur** (*regular graph*). Jika pada suatu graf setiap simpul berderajat r, maka graf tersebut disebut graf teratur berderajat r

atau r-teratur (Wilson, 1986). Contoh graf G yang memiliki 5 simpul yaitu, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan 5 busur yaitu, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Graf yang memiliki 5 simpul dan 5 busur.

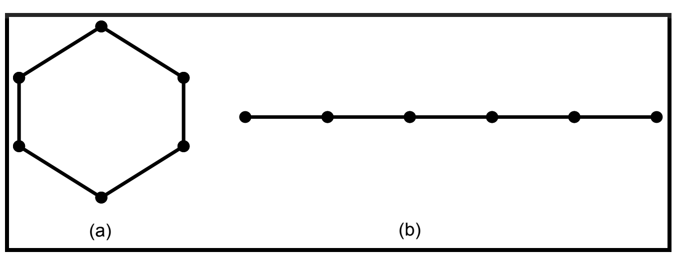
Berdasarkan definisi yang telah dijelaskan, maka terlihat bahwa simpul v_1 bertetangga dengan simpul v_2 dan v_4. Simpul v_2 bertetangga dengan simpul v_1, v_3, dan v_5, dan seterusnya. Simpul v_1 terhubung dengan busur e_1 dan e_2. Simpul v_2 terhubung dengan busur e_1, e_4, dan e_5, dan seterusnya. Derajat dari simpul v_1, v_4, dan v_5 adalah $d(v_1) = d(v_4) = d(v_5) = 2$. Derajat dari simpul $v_2$adalah $d(v_2) = 3$ dan derajat dari simpul v_3 adalah $d(v_3) = 1$ sehingga simpul v_3 merupakan simpul ujung.

Jalan (*walk*) pada graf G dinyatakan dengan barisan dari simpul $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dan busur $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$, yaitu $a_1 e_1 a_2 e_2 a_3 \ldots a_{n-1} e_{n-1} a_n$ dengan sifat bahwa setiap busur e_i terhubung dengan a_i dan a_{i+1}, dan $a_i \neq a_{i+1}$ jika e_i bukan gelung. Jika $a_1 \neq a_n$, maka jalan tersebut merupakan jalan terbuka (*open walk*). Jika $a_1 = a_n$, maka jalan tersebut merupakan jalan tertutup (*close walk*). **Jalur** (*trail*) pada graf G adalah jalan pada G dimana tidak ada busur yang berulang. **Lintasan** (*path*) pada graf G adalah jalan pada G dimana tidak ada simpul yang berulang. **Panjang** (*length*) dari lintasan adalah banyak busur pada lintasan. Suatu jalur tertutup (*closed trail*) adalah jalur yang titik ujungnya merupakan simpul yang sama. Jalur tertutup disebut **sirkuit** (*circuit*). Lintasan tertutup (*closed path*) adalah suatu lintasan yang titik ujungnya merupakan simpul yang sama. Lintasan tertutup disebut **lingkaran** (*cycle*). Suatu graf G dikatakan **terhubung** (*connected*) jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua simpul sembarang pada G. Selanjutnya akan dibahas mengenai jenis-jenis graf.

2.2 Jenis-jenis Graf

Pada skripsi ini akan dibahas mengenai graf terhubung, berhingga, dan tak berarah. **Graf lengkap** (*complete graph*) adalah graf sederhana dimana setiap pasang dari simpul-simpul yang berbeda bertetangga. Jika himpunan simpul dari suatu graf G dapat dipisahkan menjadi dua himpunan A dan B yang saling lepas sedemikian sehingga setiap busur pada G menghubungkan simpul pada himpunan A dan simpul pada himpunan B, maka G adalah **graf bipartit** (*bipartite graph*). **Graf bipartit lengkap** (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartit dimana setiap simpul pada himpunan A dihubungkan dengan setiap simpul pada himpunan B oleh tepat satu busur (Wilson, 1996).

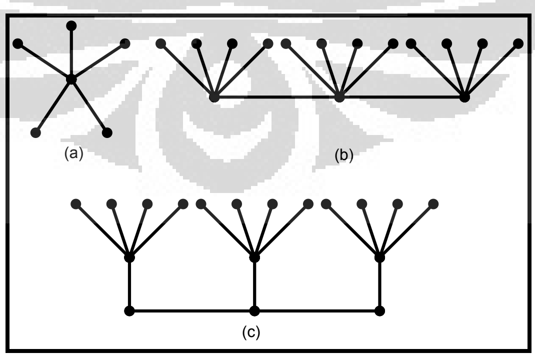
Beberapa jenis graf yang akan dibahas selanjutnya adalah graf lingkaran, graf lintasan, dan graf pohon. **Graf lingkaran** (*cycle graph*) adalah graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dinotasikan dengan C_n. **Graf lintasan** (*path graph*) adalah graf yang diperoleh dari graf lingkaran dengan menghapus satu busur (Wilson, 1996). Jadi, graf lintasan terdiri dari n simpul dan $n-1$ busur. Simpul-simpul pada graf lintasan memiliki derajat 2, kecuali pada simpul awal dan simpul akhir yang memiliki derajat 1. Graf lintasan dengan n simpul dinotasikan dengan P_n. Contoh dari graf lintasan dan graf lingkaran dengan banyak simpul 6 yaitu, C_6 dan P_6, ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3. (a) Graf lingkaran dengan 6 simpul (b) Graf lintasan dengan 6 simpul.

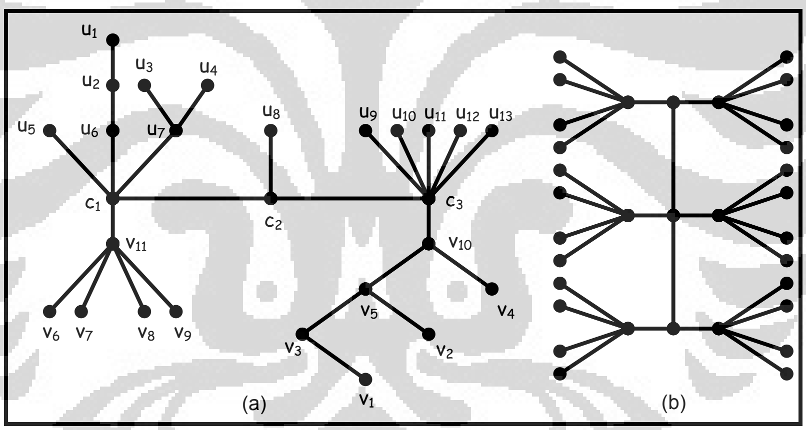
Hutan (*forest*) adalah graf yang tidak mengandung lingkaran. **Graf pohon** (*tree*) adalah hutan yang terhubung (Wilson, 1996). Salah satu sifat dari graf pohon adalah terhubung dan memiliki $n-1$ busur. Dengan demikian, salah satu contoh dari graf pohon adalah graf lintasan. Jenis-jenis lain dari graf pohon adalah graf bintang, graf caterpillar, graf firecracker, dan graf lobster.

Graf bipartit lengkap dengan himpunan partisi A dan B dimana $|A| = 1$ dan $|B| = n$ disebut **graf bintang** (Chartrand & Lesniak, 1986). Graf bintang sering dinotasikan dengan S_n dengan n adalah banyaknya simpul daun pada graf bintang. **Graf caterpillar** adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan dengan cara menambahkan sejumlah simpul daun pada setiap simpul graf lintasan (Baca dan Miller, 2008). Jika banyak simpul daun yang ditambahkan pada setiap simpul graf lintasan sama, maka graf tersebut disebut **Graf caterpillar teratur**. Graf caterpillar dapat dipandang sebagai barisan dari graf bintang $S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup S_{n_3} \cup \ldots \cup S_{n_r}$, dimana setiap S_{n_i} adalah graf bintang dengan pusat c_i dan n_i simpul daun, $i = 1,2,3, \ldots, r$ (Sugeng dan Miller, 2008). **Graf firecracker** adalah graf yang diperoleh dari rangkaian graf bintang dengan cara menghubungkan salah satu dari simpul-simpul daun pada setiap graf bintang (Galian, 2008). Contoh dari graf bintang, graf caterpillar, dan graf firecracker ditunjukkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4. (a) Graf bintang $\boldsymbol{S_5}$ (b) Graf caterpillar (c) Graf firecracker.

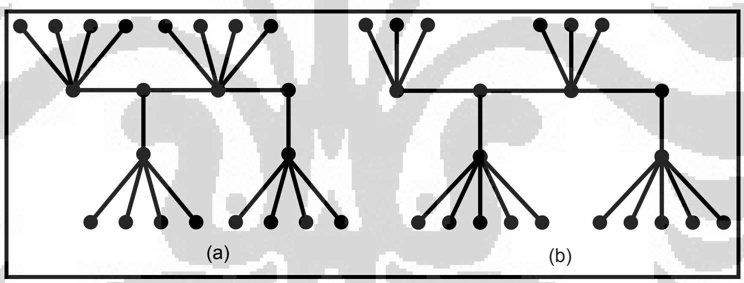
Graf lobster adalah suatu graf pohon yang mengandung lintasan (dengan panjang maksimum) dimana setiap simpul lain dari graf tersebut memiliki jarak maksimum *t* terhadap lintasan, dimana *t* adalah suatu bilangan bulat (Khan, Pal, dan Pal, 2009). Jarak suatu simpul graf lobster ke lintasan (pada graf lobster) adalah jarak simpul tersebut ke simpul lintasan yang terdekat dari simpul tersebut. Graf lobster yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah graf lobster dengan $t = 2$. Graf lobster dengan $t = 2$ dapat dipandang sebagai graf yang diperoleh dari graf caterpillar dengan menambahkan sejumlah simpul daun pada setiap simpul daun graf caterpillar. **Graf lobster teratur** adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sejumlah yang sama simpul daun pada setiap simpul daun dari graf caterpillar teratur. Contoh dari graf lobster dengan $t = 4$ dan graf lobster teratur dengan $t = 2$ ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5. (a) Graf lobster dengan $\boldsymbol{t = 4}$ (b) Graf lobster teratur dengan $\boldsymbol{t = 2}$.

Pada Gambar 2.5 (a) terlihat bahwa simpul v_1 memiliki jarak maksimum terhadap simpul c_3, yaitu $t = 4$, sehingga Gambar 2.5 (a) adalah contoh graf lobster dengan $t = 4$. Pada Gambar 2.5 (b) terlihat bahwa banyak simpul daun pada setiap simpul lintasan adalah sama (dua), banyak simpul daun yang ditambahkan pada setiap simpul daun dari graf caterpillar adalah sama (empat), dan jarak maksimum dari setiap simpul lainnya terhadap simpul pada lintasan adalah dua. Oleh karena itu, Gambar 2.5 (b) adalah contoh graf lobster teratur dengan $t = 2$.

Pada skipsi ini akan dibahas salah satu kasus khusus dari graf lobster dengan $t = 2$, yaitu graf lobster semi teratur yang dinotasikan dengan $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$. Graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ adalah graf lobster dengan $t = 2$ dimana n adalah banyaknya simpul pada lintasan, r dan 0 menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul ganjil pada lintasan, dan 1 dan r menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul genap pada lintasan. Graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ adalah graf lobster dengan $t = 2$ dimana n adalah banyaknya simpul pada lintasan, r dan 0 menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul ganjil pada lintasan, dan 1 dan s menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul genap pada lintasan. Contoh dari graf lobster semi teratur $L_4(4,0; 1,4)$ dan $L_4(3,0; 1,5)$ ditunjukkan pada Gambar 2.6.

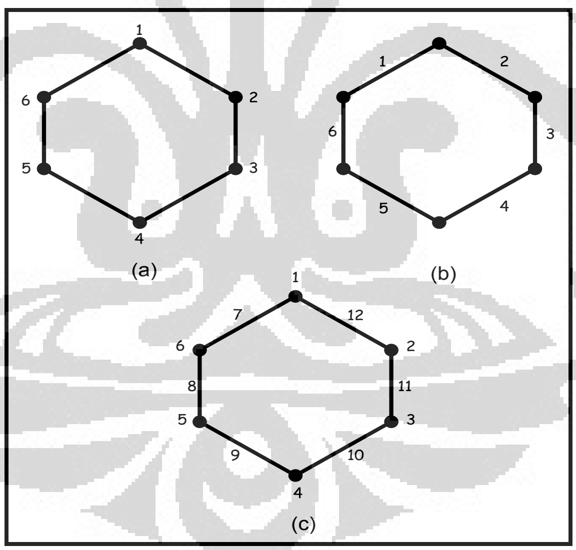


Gambar 2.6. (a) Graf lobster semi teratur $L_4(4,0; 1,4)$. (b) Graf lobster semi teratur $L_4(3,0; 1,5)$.

Pada Gambar 2.6 (a) terlihat bahwa pada graf lobster $L_4(4,0; 1,4)$ banyak simpul pada lintasan adalah 4, banyak simpul yang berjarak 1 dari simpul ganjil pada lintasan dan berjarak 2 dari simpul genap pada lintasan adalah sama (empat). Pada Gambar 2.6 (b) terlihat bahwa pada graf lobster $L_4(3,0; 1,5)$ banyak simpul pada lintasan adalah 4, banyak simpul yang berjarak 1 dari simpul ganjil pada lintasan adalah 3, dan banyak simpul yang berjarak 2 dari simpul genap pada lintasan adalah 5. Pada subbab selanjutnya akan dibahas mengenai pelabelan graf.

2.3 Pelabelan Graf

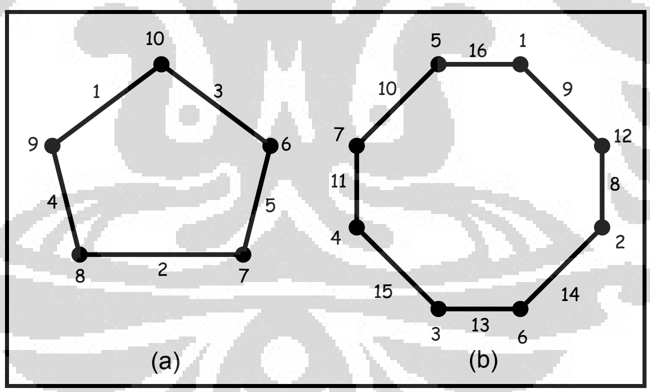
Pelabelan f dari suatu graf G merupakan pemetaan elemen-elemen dari graf G ke himpunan bilangan bulat positif atau nonnegatif (Wallis, 2001). Bilangan hasil pemetaan f disebut label. Jika domain dari pelabelan adalah himpunan simpul, maka pelabelan merupakan pelabelan simpul. Jika domainnya adalah himpunan busur, maka pelabelan meupakan pelabelan busur. Jika domainnya adalah gabungan himpunan simpul dan busur, maka pelabelan merupakan pelabelan total. Contoh pelabelan simpul, pelabelan busur, dan pelabelan total pada graf C_6 ditunjukkan pada Gambar 2.7 .



Gambar 2.7. (a) Pelabelan simpul (b) Pelabelan busur (c) Pelabelan total pada C_6.

Pada skripsi ini akan dijelaskan mengenai pelabelan total ajaib. Beberapa jenis dari pelabelan total ajaib adalah pelabelan total simpul ajaib dan pelabelan total busur ajaib. Suatu pelabelan total simpul ajaib dari graf G adalah suatu pemetaan bijektif

f dari himpunan simpul V dan himpunan busur E ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, v + e\}$ dengan sifat untuk setiap simpul x pada G, bobot dari simpul-simpul pada graf G adalah suatu bilangan konstan k atau $f(x) + \sum_{y \in N(x)} f(xy) = k$ dimana $N(x)$ adalah semua simpul y yang bertetangga dengan simpul x. Bilangan konstan k disebut bilangan ajaib untuk f. Graf dengan pelabelan total simpul ajaib akan disebut graf simpul ajaib. Suatu pelabelan total busur ajaib dari graf G adalah suatu pemetaan bijektif f dari himpunan simpul V dan himpunan busur E ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \ldots, v + e\}$ dengan sifat jika diberikan sembarang busur xy pada G maka bobot dari busur-busur pada graf G adalah suatu bilangan konstan k atau $f(x) + f(xy) + f(y) = k$. Graf dengan pelabelan total busur ajaib akan disebut graf busur ajaib. Suatu pelabelan total busur ajaib dikatakan sebagai pelabelan total super busur ajaib apabila terdapat sifat tambahan yaitu simpul-simpulnya dilabel dengan bilangan terkecil (Wallis, 2001). Contoh pelabelan total simpul ajaib dan pelabelan total busur ajaib untuk graf C_5 dan C_8 ditunjukkan pada Gambar 2.8.



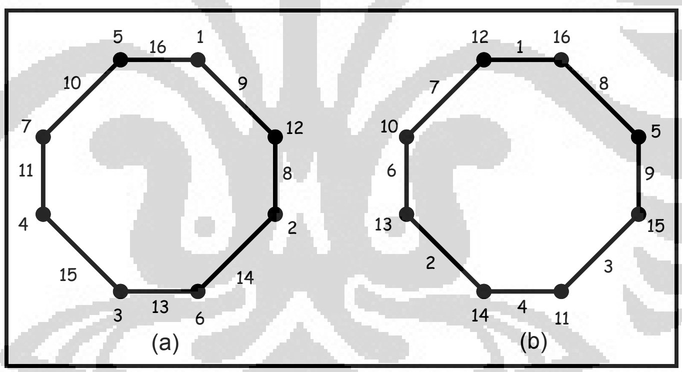
Gambar 2.8. (a) Pelabelan total simpul ajaib pada graf C_5 dengan $k = 14$ (b) Pelabelan total busur ajaib pada graf C_8 dengan $k = 22$.

Pada Gambar 2.8 (a) terlihat bahwa bobot simpul untuk setiap simpul pada C_5 akan menghasilkan suatu bilangan konstan, yaitu $k = 14$. Contohnya, bobot simpul dari simpul x dengan label 10 adalah $w = f(x) + \sum_{y \in N(x)} f(xy) = 10 + 1 + 3 = 14$. Pada Gambar 2.8 (b) terlihat bahwa bobot busur untuk setiap busur pada C_8 akan menghasilkan suatu bilangan konstan, yaitu $k = 22$. Contohnya, bobot busur dari busur xy dengan label 10 adalah $w = f(x) + f(xy) + f(y) = 7 + 10 + 5 = 22$.

Pada pelabelan total busur ajaib didefinisikan pelabelan dual. Diberikan suatu pelabelan $f: V \cup E \to \{1, 2, 3, \ldots, v + e\}$ yang merupakan pelabelan total busur ajaib dari *G*. Pelabelan dual, yaitu f' didefinisikan sebagai berikut.

$$f'(x) = (v + e + 1) - f(x), \forall x \in V$$
$$f'(xy) = (v + e + 1) - f(xy), \forall xy \in E$$

Pelabelan dual dari suatu pelabelan total busur ajaib juga merupakan pelabelan total busur ajaib (Sugeng dan Miller, 2008). Contoh pelabelan dual pada graf C_8 ditunjukkan pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9. (a) PTBA pada graf C_8 dengan $k = 22$ (b) Pelabelan dual dari PTBA pada graf C_8 dengan $k = 29$.

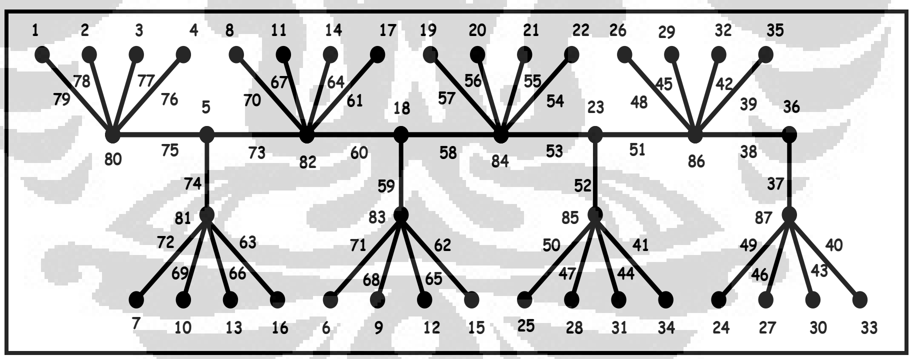
Pada Gambar 2.9 diketahui bahwa untuk graf C_8, $v = 8$ dan $e = 8$ sehingga $v + e + 1 = 17$. Label-label simpul dan busur pada pelabelan dual dari PTBA untuk graf C_8 diperoleh dengan cara mengurangkan $v + e + 1$ dengan label-label dari simpul atau busur. Contohnya, untuk simpul x dengan label 5 pada Gambar 2.9 (a) akan diperoleh $f'(x) = (v + e + 1) - f(x) = 17 - 5 = 12$ dan untuk busur xy

dengan label 16 pada Gambar 2.9 (a) akan diperoleh $f^{'}(xy) = (v + e + 1) - f(xy) = 17 - 16 = 1$.

Salah satu pengembangan dari pelabelan total busur ajaib adalah pelabelan total busur ajaib (PTBA) b-busur berurutan. Pada subbab selanjutnya akan dibahas mengenai PTBA b-busur berurutan.

2.4 Pelabelan Total Busur Ajaib (PTBA) b-Busur Berurutan

Suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut **pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan** dari G jika f adalah suatu pelabelan total busur ajaib dari G dan $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \dots, b + e\}, 0 \leq b \leq v$. Jika $b = 0$ maka f disebut pelabelan total super busur ajaib. Suatu graf yang memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan disebut graf busur ajaib b-busur berurutan (Sugeng dan Miller, 2008). Contoh pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ ditunjukkan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10. Pelabelan total busur ajaib (PTBA) 36 $-$busur berurutan pada graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ dengan $k = 160$.

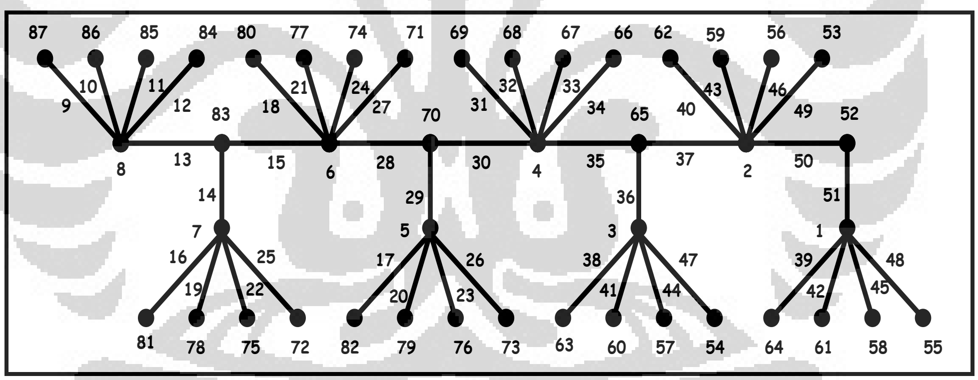
Padas Gambar 2.10 terlihat bahwa bobot busur untuk setiap busur pada graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ adalah $k = 160$. Oleh karena itu, pelabelan graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ merupakan pelabelan total busur ajaib. Label-label dari busur membentuk himpunan bilangan positif berurutan dengan $b = 36$, yaitu $f(E) =$

$\{b+1, b+2, b+3, \ldots, b+e\} = \{37, 38, \ldots, 79\}$. Berdasarkan definisi PTBA *b*-busur berurutan, maka Gambar 2.10 merupakan contoh dari pelabelan total busur ajaib (PTBA) 36 −busur berurutan pada graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ dengan $k = 160$.

Ada beberapa teorema yang telah diketahui mengenai pelabelan total busur ajaib (PTBA) b-busur berurutan. Berdasarkan sifat dari pelabelan dual, jika suatu graf *G* memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan akan berlaku Teorema 2.1.

Teorema 2.1 (Sugeng dan Miller, 2008). Dual dari pelabelan total busur ajaib b -busur berurutan untuk suatu graf *G* adalah suatu pelabelan total busur ajaib $(v - b)$-busur berurutan.

Contoh pelabelan dual dari graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ ditunjukkan pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11. Pelabelan dual dari Gambar 2.10 yaitu, PTBA 8 −busur berurutan pada graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ dengan $k = 104$.

Pada Gambar 2.11 diketahui bahwa untuk graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$, $v = 44$ dan $e = 43$ sehingga $v + e + 1 = 88$. Label-label simpul dan busur pada pelabelan dual dari PTBA b-busur berurutan untuk graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ diperoleh dengan cara mengurangkan $v + e + 1$ dengan label-label dari simpul atau busur. Contohnya, untuk simpul x dengan label 5 pada Gambar 2.10 akan diperoleh $f'(x) = (v + e + 1) - f(x) = 88 - 5 = 83$ dan untuk busur xy dengan label 37 pada Gambar 2.10 akan diperoleh $f'(xy) = (v + e + 1) - f(xy) = 88 - 37 = 51$. Berdasarkan Teorema 2.1 dan sifat pelabelan dual, maka graf lobster $L_8(4, 0; 1, 4)$ memiliki pelabelan dual, yaitu PTBA $(v - b) = 44 - 36 = 8$ −busur berurutan dengan $k = 104$ dengan label-label busurnya membentuk himpunan bilangan bulat positif berurutan, yaitu $f(E) = \{ b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\} = \{9, 10, \ldots, 51\}$.

Teorema lain yang telah diketahui mengenai pelabelan total busur ajaib (PTBA) b-busur berurutan diberikan pada Teorema 2.2.

Teorema 2.2 (Sugeng dan Miller, 2008). jika *G* adalah suatu graf terhubung dan memiliki pelabelan total busur ajaib (PTBA) b-busur berurutan dimana $b \in \{ 1, 2, \ldots, v - 1\}$, maka *G* adalah graf pohon.

Hasil yang telah diperoleh berdasarkan penelitian pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan untuk kelas graf pohon antara lain, setiap graf caterpillar memiliki pelabelan total busur ajaib b -busur berurutan, dimana

$$b = \begin{cases} \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil + \sum_{i\ even} n_i - 2 & \text{jika } i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil + \sum_{i\ even, i<r} n_i - 2 + (n_r - 1) & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

(Sugeng dan Miller, 2008).

Setiap firecracker teratur dan setiap *caterpillar like-tree* teratur memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan, dimana $b = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil s + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ dengan r menyatakan banyaknya simpul daun pada graf bintang dan s menyatakan jumlah graf bintang yang memiliki simpul daun sebanyak r (Silaban dan Sugeng, 2008). Graf bintang ganda S_{n_1,n_2} memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan untuk suatu $b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dimana jika $b = 1$, maka S_{n_1,n_2} adalah graf bintang atau jika $b > 1$, maka $b = n_2 + 1$ (Sugeng dan Miller, 2008). Pada bab selanjutnya akan dibahas mengenai konstruksi pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan untuk salah satu kelas graf pohon, yaitu graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$.

BAB 3
PELABELAN TOTAL BUSUR AJAIB $\boldsymbol{b}$-BUSUR BERURUTAN PADA GRAF LOBSTER SEMI TERATUR $\boldsymbol{L_n(r,0;1,r)}$ DAN $\boldsymbol{L_n(r,0;1,s)}$

Pada bab ini akan dibahas mengenai konstruksi pelabelan total busur ajaib (PTBA) b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_n(r,0;1,r)$ dan $L_n(r,0;1,s)$. Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa suatu pemetaan bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ 3,\dots,v+e\}$ disebut **pelabelan total busur ajaib $\boldsymbol{b}$-busur berurutan** dari *G* jika f adalah suatu pelabelan total busur ajaib dari *G* dan $f(E) = \{b+1, b+2, b+3, \dots, b+e\}, 0 \le b \le v$. Jika $b = 0$ maka f disebut pelabelan total super busur ajaib. Suatu graf yang memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan disebut graf busur ajaib b-busur berurutan (Sugeng dan Miller, 2008). Pada skripsi ini akan dibahas pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan untuk $0 < b < v$.

Untuk membuktikan konstruksi pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan dari suatu graf *G* dapat digunakan Lemma 3.1.

Lemma 3.1 (Silaban dan Sugeng, 2010). Suatu graf G dengan v simpul dan e busur adalah suatu graf busur ajaib b-busur-berurutan jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi bijektif $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots,v+e\}$ sedemikian sehingga $f(V) = \{1,2,3,\dots,v+e\} - \{b+1, b+2, b+3, \dots, b+e\}, 0 \le b \le v$ dan himpunan $W = \{f(x)+f(y) | xy \in E\}$ terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan. Dalam kasus ini, f dapat ditingkatkan menjadi suatu *PTBA* b-busur berurutan pada G dengan konstanta ajaib $k = b+e+w$ dengan $w = \min(W)$ dan $W = \{f(x)+f(y) | xy \in E\} = \{k-(b+1), k-(b+2), \dots, k-(b+e)\}$.

Lemma 3.1 menjelaskan bahwa pada suatu graf G terdapat suatu fungsi bijektif dari gabungan himpunan simpul dan himpunan busur ke $\{1, 2, \ldots, v + e\}$ sedemikian sehingga himpunan label-label simpul adalah $f(V) = \{1, 2, 3, \ldots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}$ dan himpunan dari penjumlahan label-label simpul ujung pada setiap busur, yaitu $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ adalah himpunan e bilangan bulat positif berurutan. Terlihat bahwa jika $0 < b < v$, maka himpunan label-label simpul membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e dimana himpunan pertama adalah $\{1, 2, \ldots, b\}$ dan himpunan kedua adalah $\{b + e + 1, b + e + 2, \ldots, v + e\}$. Karena $f(V \cup E) = f(V) + f(E)$, maka $f(V) = f(V \cup E) - f(E) = \{1, 2, 3, \ldots, v + e\} - \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}$. Sehingga, himpunan label-label busur pada G adalah $f(E) = \{b + 1, b + 2, b + 3, \ldots, b + e\}$ yang merupakan himpunan bilangan berurutan. Himpunan bobot busur pada G adalah himpunan dari penjumlahan label busur dan label-label simpul ujungnya atau dapat ditulis $W_f = \{f(xy) | xy \in E\} + W$ dengan $f(E) = \{f(xy) | xy \in E\}$. Karena W merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan dan $f(E)$ adalah himpunan bilangan yang berurutan pula, maka akan diperoleh nilai- nilai anggota dari W_f yang konstan dengan cara menjumlahkan nilai-nilai anggota dari W mulai dari yang terkecil dengan nilai-nilai anggota dari $f(E)$ mulai dari yang terbesar. Karena diperoleh $f(E)$ adalah himpunan bilangan yang berurutan dan himpunan bobot busur konstan, maka graf G adalah graf busur ajaib b-busur berurutan dan bilangan konstannya adalah $k = b + e + w$ dengan $w = \min(W)$. Hal yang sama juga akan diperoleh dari penjelasan sebaliknya.

Berdasarkan penjelasan tersebut, secara garis besar langkah-langkah untuk membuktikan bahwa suatu graf G memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan adalah sebagai berikut:

- Definisikan fungsi pelabelan untuk simpul.
- Tunjukkan bahwa label-label dari simpul membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e.

- Tunjukkan bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y) | xy \in E\}$ merupakan himpunan yang terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan.

Pada subbab selanjutnya akan diberikan konstruksi pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$.

3.1 PTBA b-Busur Berurutan pada Graf Lobster Semi Teratur $L_n(r, 0; 1, r)$

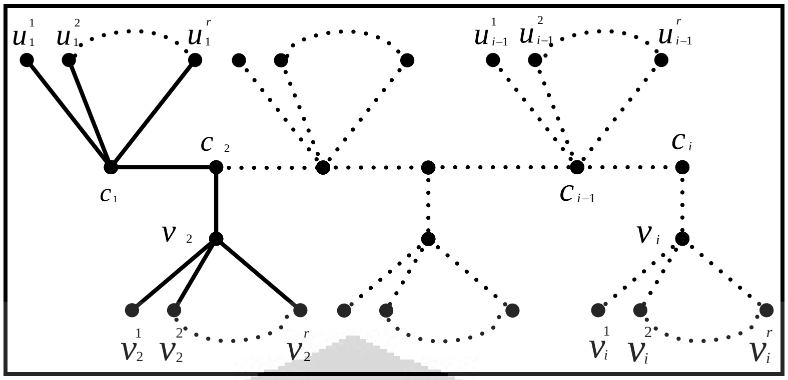
Graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ adalah graf lobster dengan $t = 2$ dimana n adalah banyaknya simpul pada lintasan, r dan 0 menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul ganjil pada lintasan, dan 1 dan r menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul genap pada lintasan. Pelabelan total busur ajaib (PTBA) b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ diberikan pada Teorema 3.1.

Teorema 3.1. Setiap graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ untuk $n \not\equiv 3 \bmod 4$ memiliki PTBA b −busur berurutan dimana

$$b = \begin{cases} \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ nr + \frac{n}{2}, & n \equiv 2 \bmod 4. \\ 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(2r + 1), & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Bukti.

Nyatakan $I = \{1, 2, \ldots n\}$ dan $J = \{1, 2, \ldots, r\}$. Kemudian beri penamaan untuk setiap simpul-simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ yaitu, c_i adalah simpul ke-i pada lintasan dimana $i \in I$, u_i^j adalah simpul daun ke-j pada simpul daun ke-i dari simpul pada lintasan untuk i ganjil, $i \in I$ dan $j \in J$, v_i adalah simpul daun ke-i dari simpul pada lintasan untuk i genap, $i \in I$, dan v_i^j adalah simpul daun ke-j pada simpul daun ke-i dari simpul pada lintasan untuk i genap, $i \in I$ dan $j \in J$. Penamaan simpul-simpul dari graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, r)$ ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Penamaan simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r,0;1,r)$.

Nyatakan,

$$p = \begin{cases} 2\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 3\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ n(2r+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ 8\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r + 2\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) - 1, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \qquad (3.1).$$

Kemudian label simpul-simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r,0;1,r)$ dengan cara seperti berikut.

$$f(c_i) = \begin{cases} (i-1)r + \frac{i}{2}, & i \equiv 2 \bmod 4, i \in I \\ \frac{i}{2}(2r+1), & i \equiv 0 \bmod 4, i \in I \\ p + i, & i \equiv 1{,}3 \bmod 4, i \in I \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$f(u_i^j) = \begin{cases} (i-1)r + j + \frac{i-1}{2}, & i \equiv 1 \bmod 4, i \in I \\ (i-2)r + 3j + \frac{i-1}{2}, & i \equiv 3 \bmod 4, i \in I \end{cases} \qquad (3.3)$$

$$f(v_i) = p + i, \quad i \equiv 0{,}2 \bmod 4, i \in I \qquad (3.4)$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} (i-1)r + 3j + \frac{i-2}{2}, & i \equiv 2 \bmod 4, i \in I\,; j \in J \\ (i-3)r + 3j + \frac{i-6}{2}, & i \equiv 0 \bmod 4, i \in I\,; j \in J \\ (i-1)r + j + \frac{i}{2}, & i = n \text{ dimana } n \equiv 2 \bmod 4\,; j \in J \end{cases} \qquad (3.5)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label-label simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r,0;1,r)$ membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e. Nyatakan,

$L_1 = \{f(c_i) | i \equiv 2 \bmod 4, i \in I\}$

$$= \left\{(2-1)r + \frac{2}{2}, (6-1)r + \frac{6}{2}, (10-1)r + \frac{10}{2}, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 1\right)r + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2}{2}\right\}$$

$$= \left\{r+1, 5r+3, 9r+5, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right\}.$$

$L_2 = \{f(c_i) | i \equiv 0 \bmod 4, i \in I\}$

$$= \left\{\frac{4}{2}(2r+1), \frac{8}{2}(2r+1), \frac{12}{2}(2r+1), \dots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor}{2}(2r+1)\right\}$$

$$= \left\{2(2r+1), 4(2r+1), 6(2r+1), \dots, 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(2r+1)\right\}.$$

$L_3 = \{f(c_i) | i \equiv 1{,}3 \bmod 4, i \in I\}$

$$= \left\{p+1, p+3, p+5, \dots, p + 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right\}.$$

$L_4 = \left\{f\left(u_i^j\right) \middle| i \equiv 1 \bmod 4, i \in I; j \in J\right\}$

$$= \left\{(1-1)r + 1 + \frac{1-1}{2}, (1-1)r + 2 + \frac{1-1}{2}, \dots, (1-1)r + r + \frac{1-1}{2}, (5-1)r + 1 + \frac{5-1}{2}, \dots, (5-1)r + r + \frac{5-1}{2}, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3 - 1\right)r + 1 + \frac{4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3 - 1}{2}, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3 - 1\right)r + r + \frac{4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3 - 1}{2}\right\}$$

$$= \left\{1, 2, 3, \dots, r, 4r+3, \dots, 5r+2, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + 1 + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right), \dots, \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + r + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)\right\}.$$

$L_5 = \left\{f\left(u_i^j\right) \middle| i \equiv 3 \bmod 4, i \in I; j \in J\right\}$

$= \Big\{(3-2)r+3+\frac{3-1}{2}, (3-2)r+6+\frac{3-1}{2}, (3-2)r+9+\frac{3-1}{2}, \ldots, (3-2)r+3r+\frac{3-1}{2}, (7-2)r+3+\frac{7-1}{2}, \ldots, (7-2)r+3r+\frac{7-1}{2}, \ldots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-2\right)r+3+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}, \ldots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-2\right)r+3r+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}\Big\}$

$= \left\{r+4, r+7, r+10, \ldots, 4r+1, 5r+6, \ldots, 8r+3, \ldots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)r+3+2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1, \ldots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)r+3r+2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right\}.$

$L_6 = \{f(v_i) | i \equiv 0{,}2 \bmod 4, i \in I\}$

$= \left\{p+2, p+4, p+6, p+8, \ldots, p+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}.$

$L_7 = \left\{f\left(v_i^j\right) \middle| i \equiv 2 \bmod 4, i \in I\,; j \in J\right\}$

$= \Big\{(2-1)r+3+\frac{2-2}{2}, (2-1)r+6+\frac{2-2}{2}, (2-1)r+9+\frac{2-2}{2}, \ldots, (2-1)r+3r+\frac{2-2}{2}, (6-1)r+3+\frac{6-2}{2}, \ldots, (6-1)r+3r+\frac{6-2}{2}, \ldots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-1\right)r+3+\frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-2}{2}, \ldots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-1\right)r+3r+\frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-2}{2}\Big\}$

$= \left\{r+3, r+6, r+9, 4r, 5r+5, \ldots, 8r+2, \ldots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-3\right)r+3+2\left(\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right), \ldots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-3\right)r+3r+2\left(\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)\right\}.$

$L_8 = \left\{f\left(v_i^j\right) \middle| i \equiv 0 \bmod 4, i \in I; j \in J\right\}$

$= \Big\{(4-3)r+3+\frac{(4-6)}{2}, (4-3)r+6+\frac{4-6}{2}, (4-3)r+9+\frac{4-6}{2}, \ldots, (4-3)r+3r+\frac{4-6}{2}, (8-3)r+3+\frac{8-6}{2}, \ldots, (8-3)r+3r+\frac{8-6}{2}, \ldots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)r+3+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-6}{2}, \ldots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)r+3r+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-6}{2}\Big\}$

$= \left\{r+1, r+5, r+8, \ldots, 4r-2, 5r+4, \ldots, 8r+1, \ldots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)r+3+2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3, \ldots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)r+3r+2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right\}.$

$L_9 = \left\{ f\left(v_i^j\right) \middle| i = n = 2 \bmod 4, i \in I\,; j \in J \right\}$

$= \left\{ (n-1)r + 1 + \frac{n}{2}, (n-1)r + 2 + \frac{n}{2}, \dots, (n-1)r + r + \frac{n}{2} \right\}$

$= \left\{ (n-1)r + 1 + \frac{n}{2}, (n-1)r + 2 + \frac{n}{2}, \dots, nr + \frac{n}{2} \right\}.$

Berdasarkan pendefinisian fungsi dari label simpul, maka pembuktian selanjutnya akan dibagi menjadi tiga kasus, yaitu untuk $n \equiv 1 \bmod 4$, $n \equiv 2 \bmod 4$, dan $n \equiv 0 \bmod 4$. Himpunan label-label simpul dari graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, r)$, diperoleh dari gabungan himpunan L_1, L_2, …, L_9 sesuai dengan kasus-kasus yang telah disebutkan, yaitu:

Kasus 1: $n \equiv 1 \bmod 4$

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8$

$= \left\{ r+1, 5r+3, 9r+5, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1 \right\} \cup \left\{ 2(2r+1), 4(2r+1), 6(2r+1), \dots, 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(2r+1) \right\} \cup \left\{ p+1, p+3, p+5, \dots, p+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1 \right\} \cup \left\{ 1, 2, 3, \dots, r, 4r+3, \dots, 5r+2, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + 1 + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right), \dots, \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + r + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right) \right\} \cup$

$\left\{ r+4, r+7, r+10, \dots, 4r+1, 5r+6, \dots, 8r+3, \dots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3 + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1, \dots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3r + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1 \right\} \cup \left\{ p+2, p+4, p+6, p+8, \dots, p+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \right\} \cup \left\{ r+3, r+6, r+9, 4r, 5r+5, \dots, 8r+2, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 3 + 2\left(\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right), \dots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 3r + 2\left(\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right) \right\} \cup \left\{ r+1, r+5, r+8, \dots, 4r-2, 5r+4, \dots, 8r+1, \dots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3 + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3, \dots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3r + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3 \right\}$

$= \left\{ 1, 2, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right) \right\} \cup \left\{ p+1, p+2, \dots, p+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1 \right\}.$

Kasus 2: $n \equiv 2 \bmod 4$

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8 \cup L_9$

$$= \left\{ r+1, 5r+3, 9r+5, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right) r + 2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1 \right\} \cup \dots \cup \left\{ (n-1)r + 1 + \frac{n}{2}, (n-1)r + 2 + \frac{n}{2}, \dots, (n-1)r + r + \frac{n}{2} \right\}$$

$$= \left\{ 1, 2, \dots, nr + \frac{n}{2} \right\} \cup \left\{ p+1, p+2, \dots, p + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \right\}.$$

Kasus 3: $n \equiv 0 \bmod 4$

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8$

$$= \left\{ r+1, 5r+3, 9r+5, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right) r + 2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1 \right\} \cup \dots \cup \left\{ r+1, r+5, r+8, \dots, 4r-2, 5r+4, \dots, 8r+1, \dots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right) r + 3 + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3, \dots, \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right) r + 3r + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3 \right\}$$

$$= \left\{ 1, 2, \dots, 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor (2r+1) \right\} \cup \left\{ p+1, p+2, \dots, p + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \right\}.$$

Terlihat bahwa himpunan label-label simpul dari graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, r)$, membentuk dua himpunan bilangan berurutan, yaitu:

$$f(V) = \begin{cases} \left\{ 1, \dots, \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right) r + 2(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1) \right\} \cup \left\{ p+1, \dots, p + 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1 \right\}, & n \equiv 1 \bmod 4 \\ \left\{ 1, \dots, nr + \frac{n}{2} \right\} \cup \left\{ p+1, \dots, p + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \right\}, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ \left\{ 1, \dots, 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor (2r+1) \right\} \cup \left\{ p+1, \dots, p + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \right\}, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \quad (3.6).$$

Dari ketiga himpunan label-label simpul tersebut diperoleh tiga nilai b yang berbeda, yaitu:

$$b = \begin{cases} \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right) r + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ nr + \frac{n}{2}, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor (2r+1), & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}.$$

Pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ diketahui bahwa

$$e = \begin{cases} \left(4\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 3\right) r + 2\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ nr + \frac{n}{2} + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ 4\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor r + 2\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) - 1, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \quad (3.7).$$

Apabila persamaan (3.1) disubtitusikan ke persamaan (3.6), maka akan diperoleh bahwa jarak antara kedua himpunan label-label simpul adalah sebesar $(p + 1) - (b + 1) = p - b$ yang hasilnya sama dengan persamaan (3.7), yaitu:

- Untuk $n \equiv 1 \bmod 4$, $p - b = \left[2\left(4\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 3\right) r + 2\left(2\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 3\right)\right] - \left[\left(4\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 3\right) r + 2\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1\right)\right] = \left(4\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 3\right) r + 2\left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2\right) = e$
- Untuk $n \equiv 2 \bmod 4$, $p - b = \left[n(2r + 1) + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right] - \left[nr + \frac{n}{2}\right] = nr + \frac{n}{2} + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 = e$
- Untuk $n \equiv 0 \bmod 4$, $p - b = \left[8\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor r + 2\left(2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) - 1\right] - \left[2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor (2r + 1)\right] = 4\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor r + 2\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) - 1 = e$.

Dengan demikian, himpunan label-label simpul pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e.

Selanjutnya akan ditunjukkan pula bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y) | \, xy \in E\}$ dari graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, r)$, membentuk himpunan e bilangan bulat positif berurutan. Pembuktian akan dibagi menjadi empat kasus sesuai dengan pendefinisian fungsi dari label simpul pada graf, yaitu:

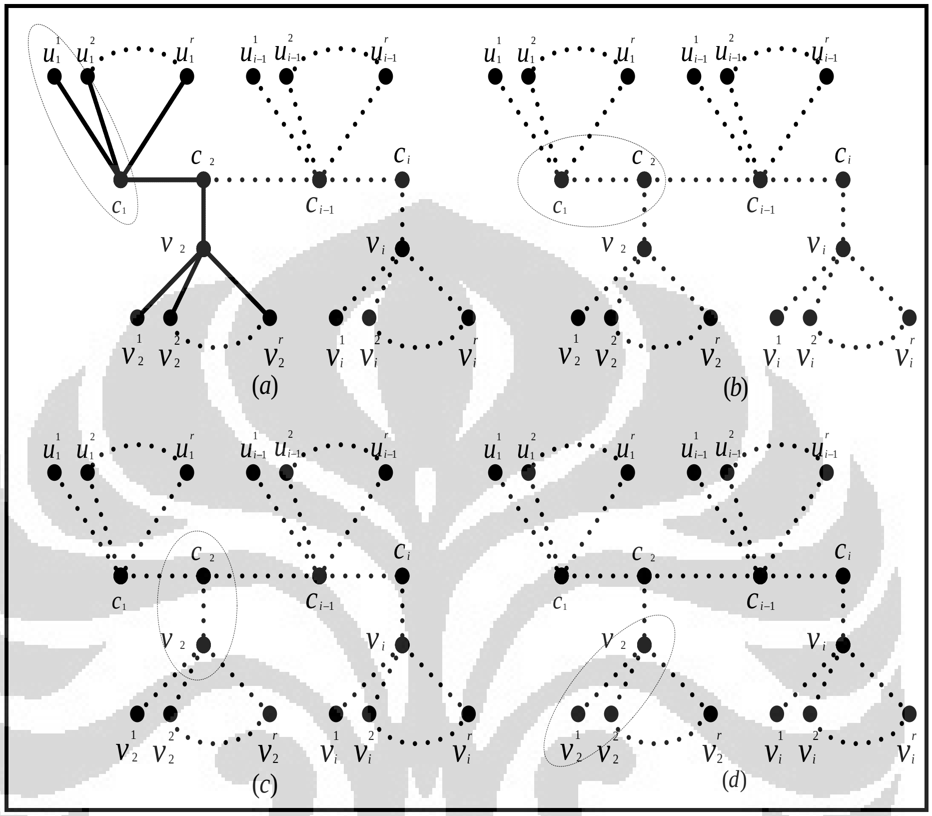
Kasus 1: $c_i u_i^j$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1, i \in I$ dimana $n \not\equiv 3 \bmod 4$ dan $j \in J$.

Kasus 2: $c_i c_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq n - 1, i \in I$.

Kasus 3: $c_i v_i$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, i \in I$.

Kasus 4: $v_i v_i^j$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, i \in I$ dan $j \in J$.

Pembagian kasus-kasus menjadi empat kasus yang sesuai dengan pendefinisian fungsi dari label simpul pada graf ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. (a) Kasus 1, (b) Kasus 2, (c) Kasus 3, (d) Kasus 4.

Kasus 1 : $c_i u_i^j$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1, i \in I$ dan $j \in J$.

Pada kasus 1 pembuktian akan dibagi menjadi dua subkasus, yaitu untuk $i \equiv 1 \bmod 4$ dan $i \equiv 3 \bmod 4$.

Untuk $i \equiv 1 \bmod 4$ dan $j \in J$,

$$w_1 = f(c_i) + f(u_i^j)$$

$$= (p + i) + (i - 1)r + j + \frac{i-1}{2}$$

$= p + (i-1)r + j + \frac{3i-1}{2}.$

Substitusikan $i \equiv 1 \bmod 4$ dan $j \in J$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_1 = \left\{\{f(c_i) + f(u_i^j)\} \middle| i \equiv 1 \bmod 4 \text{ dan } j \in J \right\}$$

$$= \Big\{p + (1-1)r + 1 + \tfrac{3-1}{2}, p + (1-1)r + 2 + \tfrac{3-1}{2}, \dots, p + (1-1)r + r + \tfrac{3-1}{2}, p + (5-1)r + 1 + \tfrac{15-1}{2}, \dots, p + (5-1)r + r + \tfrac{15-1}{2}, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 3 - 1\right)r + 1 + \tfrac{3(4\lceil\frac{n}{4}\rceil - 3) - 1}{2}, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 3 - 1\right)r + r + \tfrac{3(4\lceil\frac{n}{4}\rceil - 3) - 1}{2}\Big\}$$

$$= \Big\{p + 2, p + 3, \dots, p + r + 1, p + 4r + 8, \dots, p + 5r + 7, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + 1 + 6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5\Big\}.$$

Untuk $i \equiv 3 \bmod 4$ dan $j \in J$,

$$w_2 = f(c_i) + f(u_i^j)$$

$$= (p + i) + (i-2)r + 3j + \frac{i-1}{2}$$

$$= p + (i-2)r + 3j + \frac{3i-1}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 3 \bmod 4$ dan $j \in J$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_2 = \left\{\{f(c_i) + f(u_i^j)\} \middle| i \equiv 3 \bmod 4 \text{ dan } j \in J \right\}$$

$$= \Big\{p + (3-2)r + 3 + \tfrac{9-1}{2}, p + (3-2)r + 6 + \tfrac{9-1}{2}, \dots, p + (3-2)r + 3r + \tfrac{9-1}{2}, p + (7-2)r + 3 + \tfrac{21-1}{2}, \dots, p + (7-2)r + 3r + \tfrac{21-1}{2}, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 1 - 2\right)r + 3 + \tfrac{3(4\lceil\frac{n}{4}\rceil - 1) - 1}{2}, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 1 - 2\right)r + 3r + \tfrac{3(4\lceil\frac{n}{4}\rceil - 1) - 1}{2}\Big\}$$

$= \left\{p + r + 7, p + r + 10, \dots, p + 4r + 4, p + 5r + 13, \dots, p + 8r + 10, \dots, p + \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3 + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2, \dots, p + 4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right\}.$

Kasus 2 : $c_i c_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq n-1, i \in I$.

Pada kasus 2 pembuktian akan dibagi menjadi dua subkasus yaitu, untuk $i \equiv 1{,}3 \bmod 4$ dan $i \equiv 0{,}2 \bmod 4$.

Untuk $i \equiv 1{,}3 \bmod 4$ dan $(i+1) \equiv 2 \bmod 4$,

$w_3 = f(c_i) + f(c_{i+1})$

$$= p + i + (i + 1 - 1)r + \frac{i+1}{2}$$

$$= p + ir + \frac{3i+1}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 1 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$W_3 = \{f(c_i) + f(c_{i+1}) | i \equiv 1 \bmod 4, i \in I\}$

$$= \left\{p + r + \frac{3+1}{2}, p + 5r + \frac{15+1}{2}, \dots, p + \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + \frac{3\left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right) + 1}{2}\right\}$$

$$= \left\{p + r + 2, p + 5r + 8, \dots, p + \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right\}.$$

Untuk $i \equiv 1{,}3 \bmod 4$ dan $(i+1) \equiv 0 \bmod 4$,

$w_4 = f(c_i) + f(c_{i+1})$

$$= p + i + \frac{i+1}{2}(2r + 1)$$

$$= p + (i+1)r + \frac{3i+1}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 3 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_4 = \{f(c_i) + f(c_{i+1}) | i \equiv 3 \bmod 4, i \in I\}$$

$$= \left\{p + (3+1)r + \frac{9+1}{2}, p + (7+1)r + \frac{21+1}{2}, \dots, p + \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1 + 1\right)r + \frac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right) + 1}{2}\right\}$$

$$= \left\{p + 4r + 5, p + 8r + 11, \dots, p + 4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right\}.$$

Untuk $i \equiv 0{,}2 \bmod 4$ dan $(i+1) \equiv 3 \bmod 4$,

$$w_5 = f(c_i) + f(c_{i+1})$$

$$= (i-1)r + \frac{i}{2} + p + i + 1$$

$$= p + (i-1)r + \frac{3i+2}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 2 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_5 = \{f(c_i) + f(c_{i+1}) | i \equiv 2 \bmod 4, i \in I\}$$

$$= \left\{p + (2-1)r + \frac{6+2}{2}, p + (6-1)r + \frac{18+2}{2}, \dots, p + \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2 - 1\right)r + \frac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right) + 2}{2}\right\}$$

$$= \left\{p + r + 4, p + 5r + 10, \dots, p\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right\}.$$

Untuk $i \equiv 0, 2 \bmod 4$ dan $(i+1) \equiv 1 \bmod 4$,

$$w_6 = f(c_i) + f(c_{i+1})$$

$$= \frac{i}{2}(2r+1) + p + i + 1$$

$$= p + ir + \frac{3i+2}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 0 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_6 = \{f(c_i) + f(c_{i+1}) | i \equiv 0 \bmod 4, i \in I\}$$

$$= \left\{p + 4r + \frac{12+2}{2}, p + 8r + \frac{24+2}{2}, \ldots, p + \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + \frac{3\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4\right)+2}{2}\right\}$$

$$= \left\{p + 4r + 7, p + 8r + 13, \ldots, p + \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + 6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 5\right\}.$$

Kasus 3 : $c_i v_i$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, i \in I$.

Pada kasus 3 pembuktian akan dibagi menjadi dua subkasus, yaitu untuk $i \equiv 2 \bmod 4$ dan $i \equiv 0 \bmod 4$.

Untuk $i \equiv 2 \bmod 4$,

$$w_7 = f(c_i) + f(v_i)$$

$$= (i-1)r + \frac{i}{2} + a + i$$

$$= p + (i-1)r + \frac{3i}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 2 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_7 = \{f(c_i) + f(v_i) | i \equiv 2 \bmod 4, i \in I\}$$

$$= \left\{p + (2-1)r + \frac{6}{2}, p + (6-1)r + \frac{18}{2}, p + (10-1)r + \frac{30}{2}, \ldots, p + \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 1\right)r + \frac{3\left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)}{2}\right\}$$

$$= \left\{p + r + 3. p + 5r + 9. p + 9r + 15, \ldots, p + \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right\}.$$

Untuk $i \equiv 0 \bmod 4$,

$$w_8 = f(c_i) + f(v_i)$$

$$= \frac{i}{2}(2r + 1) + a + i$$

$= p + ir + \frac{3i}{2}.$

Substitusikan $i \equiv 0 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$W_8 = \{f(c_i) + f(v_i) | i \equiv 0 \bmod 4, i \in I\}$

$= \left\{p + 4r + \frac{12}{2}, p + 8r + \frac{24}{2}, \ldots, p + \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)r + \frac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)}{2}\right\}$

$= \left\{p + 4r + 6, p + 8r + 12, \ldots, p + \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)r + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right\}.$

Kasus 4 : $v_i v_i^j$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, i \in I$ dan $j \in J$

Pada kasus 4 pembuktian akan dibagi menjadi tiga subkasus, yaitu untuk $i \equiv 2 \bmod 4$, $i \equiv 0 \bmod 4$, dan $i = n$ dimana $n \equiv 2 \bmod 4$.

Untuk $i \equiv 2 \bmod 4$ dan $j \in J$,

$w_9 = f(v_i) + f\left(v_i^j\right)$

$= (p + i) + (i - 1)r + 3j + \frac{i - 2}{2}$

$= p + (i - 1)r + 3j + \frac{3i-2}{2}.$

Substitusikan $i \equiv 2 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$W_9 = \left\{f(v_i) + f\left(v_i^j\right) | i \equiv 2 \bmod 4, i \in I\right\}$

$= \Big\{p + (2 - 1)r + 3 + \frac{6-2}{2}, \ldots, p + (2 - 1)r + 3r + \frac{6-2}{2}, \ldots, p + (6 - 1)r + 3 +$
$\frac{18-2}{2}, p + (6 - 1)r + 3r + \frac{18-2}{2}, \ldots, p + \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 1\right)r + 3 +$
$\frac{3\left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)-2}{2}, \ldots, p + \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 1\right)r + 3r + \frac{3\left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)-2}{2}\Big\}$

$= \left\{p + r + 5, \dots, p + 4r + 2, \dots, p + \left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 3 + 6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4, \dots, p + 4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil r + 6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right\}.$

Untuk $i \equiv 0 \bmod 4$ dan $j \in J$,

$w_{10} = f(v_i) + f\left(v_i^j\right)$

$= (p + i) + (i - 3)r + 3j + \dfrac{i - 6}{2}$

$= p + (i - 3)r + 3j + \frac{3i-6}{2}.$

Substitusikan $i \equiv 0 \bmod 4$ dan $j \in J$ maka akan diperoleh himpunan

$W_{10} = \left\{f(v_i) + f\left(v_i^j\right) \middle| i \equiv 0 \bmod 4, i \in I\right\}$

$= \left\{p + (4-3)r + 3 + \frac{12-6}{2}, \dots, p + (4-3)r + 3r + \frac{12-6}{2}, \dots, p + \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3 + \frac{3(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor)-6}{2}, \dots, p + \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3r + \frac{3(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor)-6}{2}\right\}$

$= \left\{p + r + 6, \dots, a + 4r + 3, \dots, p + \left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3 + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3, \dots, p + 4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right\}.$

Untuk $i = n$ dimana $n \equiv 2 \bmod 4$ dan $j \in J$,

$w_{11} = f(v_i) + f\left(v_i^j\right)$

$= p + i + (i - 1)r + j + \dfrac{i}{2}$

$= p + (i - 1)r + j + \frac{3i}{2}.$

Substitusikan $i = n$ dimana $n \equiv 2 \bmod 4$ dan $j \in J$ maka akan diperoleh himpunan

$W_{11} = \left\{f(v_i) + f\left(v_i^j\right) \middle| i = n \text{ dimana } n = 2 \bmod 4\right\}$

$$= \left\{p + (n-1)r + 1 + \frac{3n}{2}, p + (n-1)r + 2 + \frac{3n}{2}, \dots, p + (n-1)r + r + \frac{3n}{2}\right\}$$

$$= \left\{p + (n-1)r + 1 + \tfrac{3n}{2}, p + (n-1)r + 2 + \tfrac{3n}{2}, \dots, p + nr + \tfrac{3n}{2}\right\}.$$

Berdasarkan pendefinisian fungsi dari label simpul, maka pembuktian selanjutnya akan dibagi menjadi tiga kasus, yaitu untuk $n \equiv 1 \bmod 4$, $n \equiv 2 \bmod 4$, dan $n \equiv 0 \bmod 4$. Himpunan $W = \{f(x) + f(y) | \ xy\epsilon E\}$ dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ diperoleh dari gabungan himpunan W_1, W_2, …, W_{11} sesuai dengan kasus-kasus yang telah disebutkan, yaitu:

Kasus 1: $n \equiv 1 \bmod 4$

$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7 \cup W_8 \cup W_9 \cup W_{10}$

$$= \left\{p + 2, p + 3, \dots, p + r + 1, p + 4r + 8, \dots, p + 5r + 7, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + 1 + 6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5\right\} \cup \left\{p + r + 7, p + r + 10, \dots, p + 4r + 4, p + 5r + 13, \dots, p + 8r + 10, \dots, p + \left(4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3 + 6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2, \dots, p + 4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor r + 6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right\} \cup \left\{p + r + 2, p + 5r + 8, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 6\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right\} \cup \left\{p + 4r + 5, p + 8r + 11, \dots, p + 4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor r + 6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right\} \cup$$

$$\left\{p + r + 4, p + 5r + 10, \dots, p + \left(4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right\} \cup \left\{p + 4r + 7, p + 8r + 13, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 4\right)r + 6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5\right\} \cup \left\{p + r + 3. p + 5r + 9. p + 9r + 15, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 6\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right\} \cup$$

$$\left\{p + 4r + 6, p + 8r + 12, \dots, p + \left(4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor\right)r + 6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor\right\} \cup \left\{p + r + 5, \dots, p + 4r + 2, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)r + 3 + 6\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 4, \dots, p + 4\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil r + 6\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right\} \cup \left\{p + r + 6, \dots, p + 4r + 3, \dots, p + \left(4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 3\right)r + 3 + 6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 3, \dots, p + 4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor r + 6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 3\right\}$$

$$= \left\{p + 2, p + 3, \dots, p + \left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5\right\}.$$

Kasus 2: $n \equiv 2 \bmod 4$

$$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7 \cup W_8 \cup W_9 \cup W_{10} \cup W_{11}$$

$$= \Big\{p+2, p+3, \dots, p+r+1, p+4r+8, \dots, p+5r+7, \dots, p+\left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil-4\right)r+1+6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil-5, \dots, p+\left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil-3\right)r+6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil-5\Big\} \cup \dots \cup \Big\{p+(n-1)r+1+\tfrac{3n}{2}, p+(n-1)r+2+\tfrac{3n}{2}, \dots, p+nr+\tfrac{3n}{2}\Big\}$$

$$= \left\{p+2, p+3, \dots, p+nr+\frac{3n}{2}\right\}.$$

Kasus 3: $n \equiv 0 \bmod 4$

$$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7 \cup W_8 \cup W_9 \cup W_{10}$$

$$= \Big\{p+2, p+3, \dots, p+r+1, p+4r+8, \dots, p+5r+7, \dots, p+\left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil-4\right)r+1+6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil-5, \dots, p+\left(4\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil-3\right)r+6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil-5\Big\} \cup \dots \cup \Big\{p+r+6, \dots, p+4r+3, \dots, p+\left(4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor-3\right)r+3+6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor-3, \dots, p+4\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor r+6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor-3\Big\}$$

$$= \left\{p+2, p+3, \dots, p+\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)r+6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right\}.$$

Terlihat bahwa himpunan W dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ membentuk himpunan yang terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan, yaitu:

$$W = \begin{cases} \left\{p+2, p+3, \dots, p+\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-3\right)r+6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-5\right\}, & n \equiv 1 \bmod 4 \\ \left\{p+2, p+3, \dots, p+nr+\frac{3n}{2}\right\}, & n \equiv 2 \bmod 4. \\ \left\{p+2, p+3, \dots, p+\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)r+6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right\}, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, karena himpunan label-label simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e dan himpunan $W = \{f(x)+f(y) \mid xy \epsilon E\}$ merupakan himpunan yang terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan, maka terbukti bahwa graf lobster semi teratur, $L_n(r,0;1,r)$, memiliki PTBA b - busur berurutan dengan

$$b = \begin{cases} \left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ nr + \frac{n}{2}, & n \equiv 2 \bmod 4. \\ 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(2r+1), & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Berdasarkan Lemma 3.1, bilangan ajaib dari pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan adalah $k = b + e + w$ dengan $w = \min(W) = p + 2$. Kemudian akan dicari nilai dari bilangan ajaib tersebut. Substitusikan persamaan (3.7) dan nilai-nilai *b*, maka akan diperoleh:

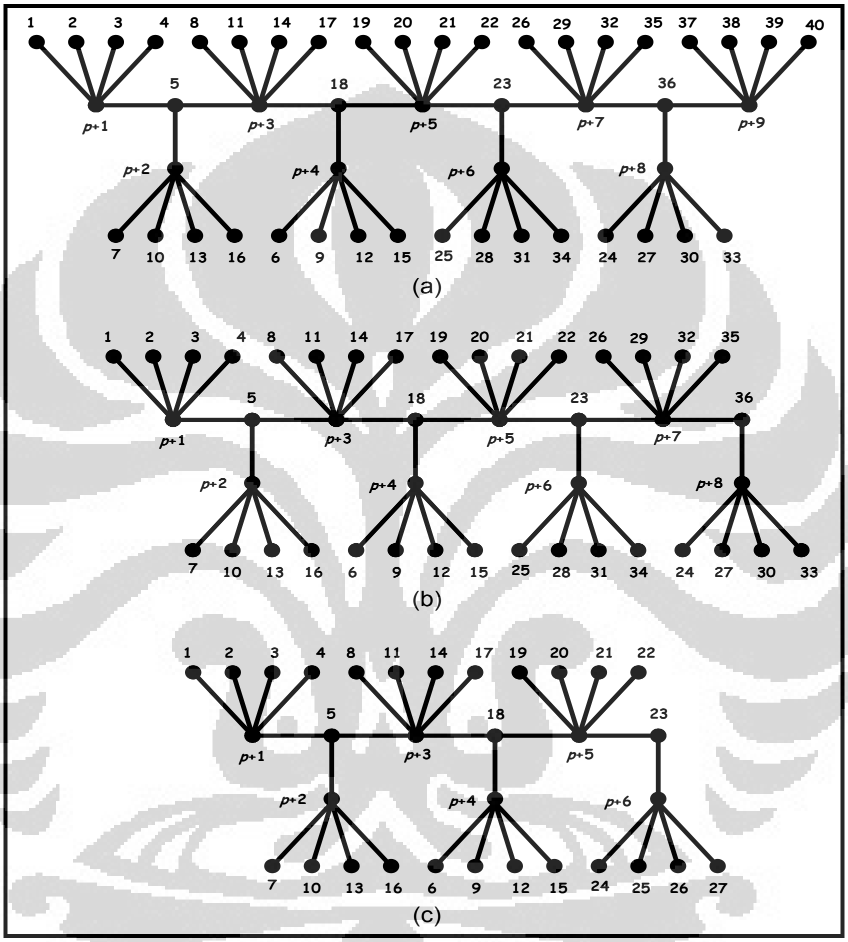
$$k = \begin{cases} p + 2\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 2\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ p + n(2r+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ p + 8\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r + 2\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + 1, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \qquad (3.8).$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.1) ke persamaan (3.8), maka diperoleh:

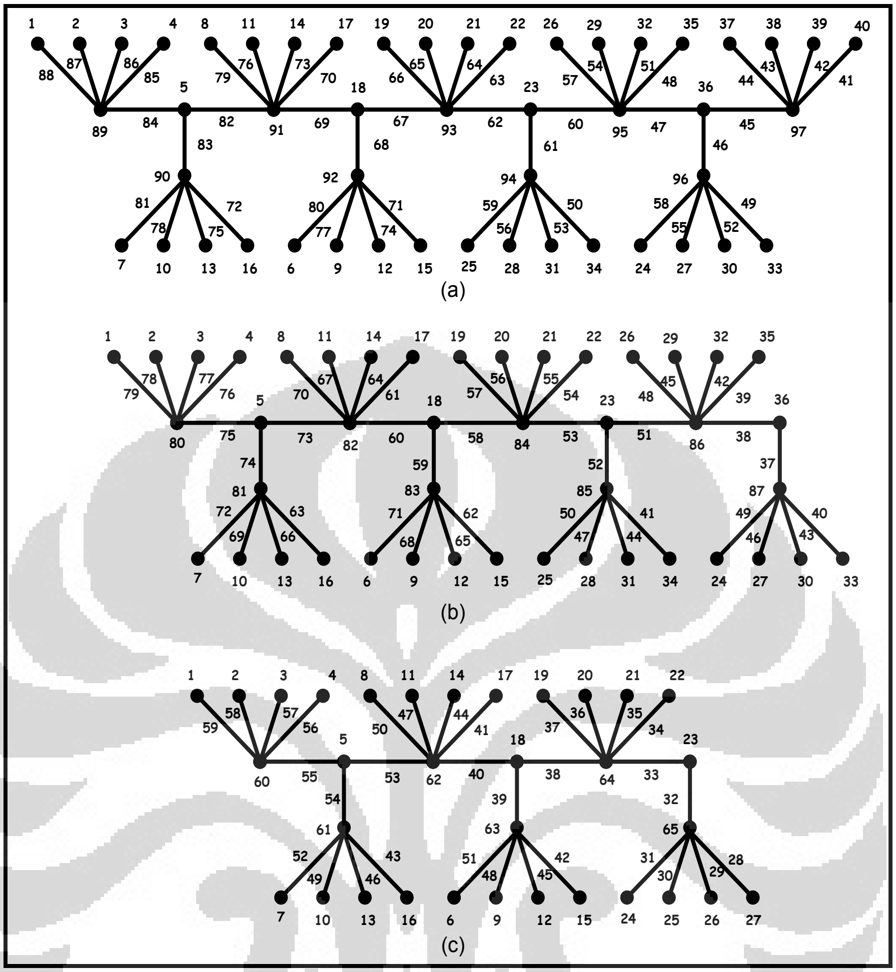
$$k = \begin{cases} 4\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 5\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ 2n(2r+1) + 2\left(2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1\right), & n \equiv 2 \bmod 4 \\ 16\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r + 4\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right), & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}.$$

Contoh pelabelan simpul dengan menggunakan persamaan (3.2)-(3.5) ditunjukkan pada Gambar 3.3. Pada Gambar 3.3, terlihat bahwa label-label simpul membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang tepisah sejauh e. Pada Gambar 3.3 (a) terbentuk himpunan $\{1,2,\ldots,40\}$ dan $\{p+1, p+2, \ldots, p+9\}$, Gambar 3.3 (b) terbentuk himpunan $\{1,2,\ldots,36\}$ dan $\{p+1, p+2, \ldots, p+8\}$ sedangkan Gambar 3.3 (c) terbentuk himpunan $\{1,2,\ldots,27\}$ dan $\{p+1, p+2, \ldots, p+6\}$. Dengan demikian diperoleh nilai b yang berbeda untuk (a), (b), dan (c) yaitu $b = 40$, $b = 36$, dan $b = 27$. Terlihat pula bahwa pada Gambar 3.3 akan diperoleh himpunan W yang berbeda untuk (a), (b), dan (c) yaitu $\{p+2, p+3, \ldots, p+49\}$, $\{p+2, p+3, \ldots, p+$

44}, dan $\{p+2, p+3, \ldots, p+33\}$ yang masing-masing merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan. Kemudian jika disubstitusikan nilai p untuk (a), (b), dan (c) yaitu $p = 88$, $p = 79$, dan $p = 59$ serta label-label busurnya, maka akan diperoleh pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan seperti pada Gambar 3.4.



Gambar 3.3. (a) Pelabelan simpul dari graf lobster $L_9(4,0;1,4)$, (b) Pelabelan simpul dari graf lobster $L_8(4,0;1,4)$, (c) Pelabelan simpul dari graf lobster $L_6(4,0;1,4)$.



Gambar 3.4. (a) PTBA 40-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_9(4, 0; 1,4)$ (b) PTBA 36-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_8(4, 0; 1,4)$ (c) PTBA 27-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(4, 0; 1,4)$.

Pada Gambar 3.4 terlihat bahwa setelah mensubstitusi nilai p dan menambahkan label busur pada Gambar 3.3, maka akan diperoleh suatu bilangan ajaib untuk masing-masing (a), (b), dan (c) yaitu $k = 1 + 88 + 89 = 178$, $k = 1 + 79 + 80 = 160$, dan $k = 1 + 59 + 60 = 120$.

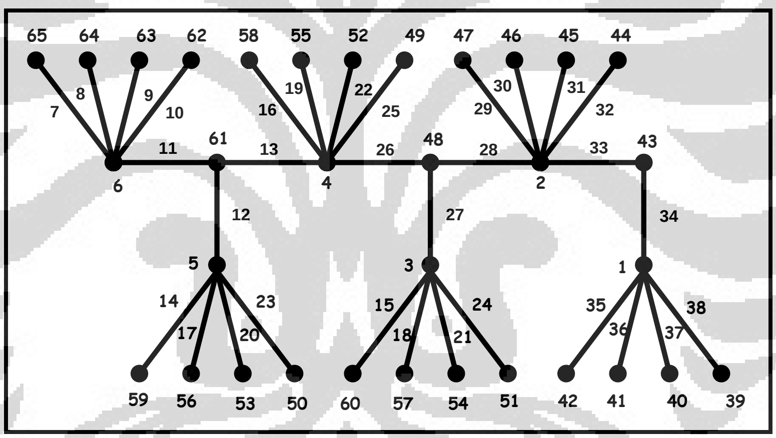
Pada Teorema 2.1 telah dijelaskan bahwa dual dari pelabelan total busur ajaib b -busur berurutan untuk suatu graf G adalah suatu pelabelan total busur ajaib

$(v-b)$-busur berurutan. Berdasarkan teorema tersebut, diperoleh Akibat 3.1 dimana nilai b pada Akibat 3.1 adalah banyak simpul v dikurangi dengan nilai b pada Teorema 3.1.

Akibat 3.1. Setiap graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, r)$, memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan dimana

$$b = \begin{cases} 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1, & n \equiv 1 \bmod 4 \\ 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & n \equiv 2 \bmod 4. \\ 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Contoh pelabelan dual dari Gambar 3.4 (c), yaitu PTBA b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur, $L_6(4, 0; 1,4)$, ditunjukkan pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5. PTBA 6-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(4, 0; 1,4)$ dengan $k = 78$.

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa pada pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan didefinisikan pelabelan dual dan simpul-simpul pada pelabelan dual dilabel dengan cara mengurangkan $v + e + 1$ dengan label simpul yang terkait. Contohnya, pada Gambar 3.5 terlihat bahwa simpul c_1 yang semula diberi label 60 pada Gambar 3.4 (c) berubah menjadi $v + e + 1 - f(c_1) = 33 + 32 + 1 - 60 =$

$66 - 60 = 6$. Nilai b pada pelabelan dual dari graf lobster semi teratur $L_6(4, 0; 1,4)$ adalah $b = 6$. Dengan demikian pelabelan dual untuk PTBA 27-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(4, 0; 1,4)$ (Gambar 3.4.c) adalah PTBA 6-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(4, 0; 1,4)$ dengan $k = 78$. Pada subbab selanjutnya akan diberikan konstruksi pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$.

3.2 PTBA b-Busur Berurutan pada Graf Lobster Semi Teratur $L_n(r, 0; 1, s)$

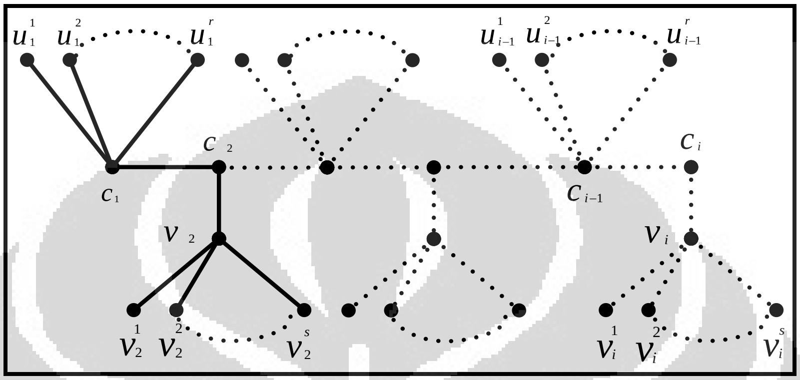
Graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ adalah graf lobster dengan $t = 2$ dimana n adalah banyaknya simpul pada lintasan, r dan 0 menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul ganjil pada lintasan, dan 1 dan s menyatakan banyak simpul yang berjarak 1 dan 2 dari simpul genap pada lintasan. Pelabelan total busur ajaib (PTBA) b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, s)$, diberikan pada Teorema 3.2.

Teorema 3.2. Setiap graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, s)$, untuk $n \not\equiv 3 \bmod 4$ memiliki PTBA b −busur berurutan dimana

$$b = \begin{cases} \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ \frac{n}{2}(r+s+1), & n \equiv 2 \bmod 4. \\ 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1), & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Bukti.

Nyatakan $I = \{1, 2, \dots n\}$, $J = \{1, 2, \dots, r\}$, dan $S = \{1, 2, \dots, s\}$. Kemudian beri penamaan untuk setiap simpul-simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ yaitu, c_i adalah simpul ke-i pada lintasan dimana $i \in I$, u_i^j adalah simpul daun ke-j pada simpul ke-i dari simpul pada lintasan untuk i ganjil, $i \in I$ dan $j \in J$, v_i adalah simpul daun ke-i dari simpul pada lintasan untuk i genap, $i \in I$, dan v_i^j adalah simpul daun ke-j pada simpul daun ke-i dari simpul pada lintasan untuk i genap, $i \in I$ dan $j \in S$. Penamaan simpul-simpul dari graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, s)$ ditunjukkan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6. Penamaan simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$.

Nyatakan,

$$p = \begin{cases} 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 3\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ n(r+s+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ 4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \quad (3.9).$$

Kemudian label simpul-simpul dari graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, s)$, dengan cara seperti berikut.

$$f(c_i) = \begin{cases} \frac{i}{2}(r+1) + \frac{i-2}{2}s, & i \equiv 2 \bmod 4, i \in I \\ \frac{i}{2}(r+s+1), & i \equiv 0 \bmod 4, i \in I \\ p + i, & i \equiv 1{,}3 \bmod 4, i \in I \end{cases} \quad (3.10)$$

$$f(u_i^j) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}(r+s+1)+j, & i \equiv 1 \bmod 4, i \in I \,; j \in J \\ \frac{i-1}{2}(r+1)+\frac{i-3}{2}s+3j, & i \equiv 3 \bmod 4, i \in I \,; j \in J \,;\, r < s \\ \frac{i-1}{2}(r+1)+\frac{i-3}{2}s+3j, & i \equiv 3 \bmod 4, i \in I \,;\, j = 1,2,\dots,s \,; r > s \\ \frac{i-1}{2}(r+1)+\frac{i-3}{2}s+3j-2, & i \equiv 3 \bmod 4, i \in I \,;\, j = s+1,\dots,r \,; r > s \end{cases} \tag{3.11}$$

$$f(v_i) = p + i, \qquad , \; i \equiv 0,2 \bmod 4, i \in I \tag{3.12}$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} \frac{i}{2}r+\frac{i-2}{2}(s+1)+3j, & i \equiv 2 \bmod 4, i \in I; j \in S; r > s \\ \frac{i}{2}r+\frac{i-2}{2}(s+1)+3j, & i \equiv 2 \bmod 4, i \in I; j = 1,2,\dots,r+1 \,; r < s \\ \frac{i}{2}r+\frac{i-2}{2}(s+1)+3j-1, & i \equiv 2 \bmod 4, i \in I;\, j = r+2,\dots,s \,; r < s \\ \frac{i-2}{2}r+\frac{i-4}{2}(s+1)+3j-1, & i \equiv 0 \bmod 4, i \in I;\, j \in S;\, r > s \\ \frac{i-2}{2}r+\frac{i-4}{2}(s+1)+3j-1, & i \equiv 0 \bmod 4, i \in I;\, j = 1,2,\dots,r+1 \,; r < s \\ \frac{i-2}{2}r+\frac{i-4}{2}(s+1)+3j-2, & i \equiv 0 \bmod 4, i \in I;\, j = r+2,\dots,s \,; r < s \\ \frac{i}{2}r+\frac{i-2}{2}(s+1)+j+1, & i = n \text{ dimana } n \equiv 2 \bmod 4, i \in I;\, j \in S \end{cases} \tag{3.13}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label-label simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r,0;1,s)$ membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e. Nyatakan,

$$L_1 = \{f(c_i) | i \equiv 2 \bmod 4, i \in I\}$$

$$= \left\{\frac{2}{2}(r+1)+\frac{2-2}{2}s, \frac{6}{2}(r+1)+\frac{6-2}{2}s, \dots, \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2}{2}(r+1)+\frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-2}{2}s\right\}$$

$$= \left\{(r+1)+, 3(r+1)+2s, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)(r+1)+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)s\right\}.$$

$$L_2 = \{f(c_i) | i \equiv 0 \bmod 4, i \in I\}$$

$$= \left\{\frac{4}{2}(r+s+1), \frac{8}{2}(r+s+1), \dots, 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1)\right\}$$

$$= \left\{2(r+s+1), 4(r+s+1), \dots, 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1)\right\}.$$

$$L_3 = \{f(c_i) | i \equiv 1,3 \bmod 4, i \in I\}$$

$$= \left\{p+1, p+3, p+5, \ldots, p+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1\right\}.$$

$$L_4 = \left\{f\left(u_i^j\right) \middle| i \equiv 1 \bmod 4, i \in I; j \in J\right\}$$

$$= \left\{\frac{1-1}{2}(r+s+1)+1, \frac{1-1}{2}(r+s+1)+2, \ldots, \frac{1-1}{2}(r+s+1)+r, \frac{5-1}{2}(r+s+1)+\right.$$

$$\left. 1, \ldots, \frac{5-1}{2}(r+s+1)+r, \ldots, \frac{4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-3-1}{2}(r+s+1)+1, \ldots, \frac{4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-3-1}{2}(r+s+1)+r\right\}$$

$$= \left\{1,2, \ldots, r, 2(r+s+1)+1, \ldots, 2(r+s+1)+r, \ldots, \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)(r+s+1)+\right.$$

$$\left. 1, \ldots, \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)(r+s+1)+r\right\}.$$

$$L_5 = \left\{f\left(u_i^j\right) \middle| i \equiv 3 \bmod 4, i \in I; j \in J\right\}$$

$$= \left\{\frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+3, \frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+6, \ldots, \frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+\right.$$

$$3r, \frac{7-1}{2}(r+1)+\frac{7-3}{2}s+3, \ldots, \frac{7-1}{2}(r+1)+\frac{7-3}{2}s+3r, \ldots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}(r+1)+$$

$$\left. \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s+3, \ldots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}(r+1)+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s+3r\right\}$$

$$= \left\{(r+1)+3, (r+1)+6, \ldots, (r+1)+3r, 3(r+1)+2s+3, \ldots, 3(r+1)+2s+\right.$$

$$3r, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)(r+1)+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+3, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)(r+1)+$$

$$\left. \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+3r\right\}.$$

$$L_6 = \left\{f\left(u_i^j\right) \middle| i \equiv 3 \bmod 4, i \in I; j = 1,2,3, \ldots, s\right\}$$

$$= \left\{\frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+3, \frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+6, \ldots, \frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+\right.$$

$$3(s), \frac{7-1}{2}(r+1)+\frac{7-3}{2}s+3, \ldots, \frac{7-1}{2}(r+1)+\frac{7-3}{2}s+3(s), \ldots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}(r+1)+$$

$$\left. \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s+3, \ldots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}(r+1)+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s+3(s)\right\}$$

$= \Big\{(r+1)+3, (r+1)+6, \dots, (r+1)+3s, 3(r+1)+2s+3, \dots, 3(r+1)+2s+3s, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)(r+1)+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+3, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)(r+1)+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+3s\Big\}.$

$L_7 = \{f(u_i^j) | i \equiv 3 \bmod 4, i \in I; j = s+1, \dots, r\}$

$= \Big\{\frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+3(s+1)-2, \frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+3(s+2)-2, \dots, \frac{3-1}{2}(r+1)+\frac{3-3}{2}s+3r-2, \frac{7-1}{2}(r+1)+\frac{7-3}{2}s+3(s+1)-2, \dots, \frac{7-1}{2}(r+1)+\frac{7-3}{2}s+3r-2, \dots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}(r+1)+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s+3(s+1)-2, \dots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}(r+1)+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s+3r-2\Big\}$

$= \Big\{(r+1)+3(s+1)-2, (r+1)+3(s+2)-2, \dots, (r+1)+3r-2, 3(r+1)+2s+3(s+1)-2, \dots, 3(r+1)+2s+3r-2, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)(r+1)+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+3(s+1)-2, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)(r+1)+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+3r-2\Big\}.$

$L_8 = \{f(v_i) | i \equiv 0,2 \bmod 4, i \in I\}$

$= \Big\{p+2, p+4, p+6, \dots, p+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\Big\}.$

$L_9 = \{f(v_i^j) | i \equiv 2 \bmod 4, i \in I; j \in S\}$

$= \Big\{\frac{2}{2}r+\frac{2-2}{2}(s+1)+3, \frac{2}{2}r+\frac{2-2}{2}(s+1)+6, \dots, \frac{2}{2}r+\frac{2-2}{2}(s+1)+3s, \frac{6}{2}r+\frac{6-2}{2}(s+1)+3, \dots, \frac{6}{2}r+\frac{6-2}{2}(s+1)+3s, \dots, \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2}{2}r+\frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-2}{2}(s+1)+3, \dots, \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2}{2}r+\frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-2}{2}(s+1)+3s\Big\}$

$= \Big\{r+3, r+6, \dots, r+3s, 3r+2(s+1)+3, \dots, 3r+2(s+1)+3s, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)(s+1)+3, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)(s+1)+3s\Big\}.$

$$L_{10} = \{f(v_i^j) | i \equiv 2 \bmod 4, i \in I; j = 1,2,3,\dots, r+1\}$$

$$= \left\{\frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}(s+1) + 3, \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}(s+1) + 6, \dots, \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}(s+1) + 3(r+1), \frac{6}{2}r + \frac{6-2}{2}(s+1) + 3, \dots, \frac{6}{2}r + \frac{6-2}{2}(s+1) + 3(r+1), \dots, \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2}{2}r + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 2}{2}(s+1) + 3, \dots, \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2}{2}r + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 2}{2}(s+1) + 3(r+1)\right\}$$

$$= \left\{r + 3, r + 6, \dots, r + 3(r+1), 3r + 2(s+1) + 3, \dots, 3r + 2(s+1) + 3(r+1), \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1) + 3, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1) + 3(r+1)\right\}.$$

$$L_{11} = \{f(v_i^j) | i \equiv 2 \bmod 4, i \in I; j = r+2, \dots, s\}$$

$$= \left\{\frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}(s+1) + 3(r+2) - 1, \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}(s+1) + 3(r+3) - 1, \dots, \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}(s+1) + 3s - 1, \frac{6}{2}r + \frac{6-2}{2}(s+1) + 3(r+2) - 1, \dots, \frac{6}{2}r + \frac{6-2}{2}(s+1) + 3s - 1, \dots, \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2}{2}r + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 2}{2}(s+1) + 3(r+2) - 1, \dots, \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2}{2}r + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 2}{2}(s+1) + 3s - 1\right\}$$

$$= \left\{r + 3(r+2) - 1, r + 3(r+3) - 1, \dots, r + 3s - 1, 3r + 2(s+1) + 3(r+2) - 1, \dots, 3r + 2(s+1) + 3s - 1, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1) + 3(r+2) - 1, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1) + 3s - 1\right\}.$$

$$L_{12} = \{f(v_i^j) | i \equiv 0 \bmod 4, i \in I; j \in S\}$$

$$= \left\{\frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s+1) + 3 - 1, \frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s+1) + 6 - 1, \dots, \frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s+1) + 3s - 1, \frac{8-2}{2}r + \frac{8-4}{2}(s+1) + 3 - 1, \dots, \frac{8-2}{2}r + \frac{8-4}{2}(s+1) + 3s - 1, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4}{2}(s+1) + 3 - 1, \dots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4}{2}(s+1) + 3s - 1\right\}$$

$= \left\{r + 2, r + 5, \ldots, r + 3s - 1, 3r + 2(s + 1) + 2, \ldots, 3r + 2(s + 1) + 3s - 1, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)(s + 1) + 3 - 1, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)(s + 1) + 3s - 1\right\}.$

$L_{13} = \{f(v_i^j) | i \equiv 0 \bmod 4, i \in I; j = 1,2, \ldots, r + 1\}$

$= \left\{\frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s + 1) + 3 - 1, \frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s + 1) + 6 - 1, \ldots, \frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s + 1) + 3(r + 1) - 1, \frac{8-2}{2}r + \frac{8-4}{2}(s + 1) + 3 - 1, \ldots, \frac{8-2}{2}r + \frac{8-4}{2}(s + 1) + 3(r + 1) - 1, \ldots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4}{2}(s + 1) + 2, \ldots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4}{2}(s + 1) + 3(r + 1) - 1\right\}$

$= \left\{r + 2, r + 5, \ldots, r + 3(r + 1) - 1, 3r + 2(s + 1) + 2, \ldots, 3r + 2(s + 1) + 3(r + 1) - 1, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)(s + 1) + 2, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)(s + 1) + 3(r + 1) - 1\right\}.$

$L_{14} = \{f(v_i^j) | i \equiv 0 \bmod 4, i \in I; j = r + 2, \ldots, s\}$

$= \left\{\frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s + 1) + 3(r + 2) - 2, \frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s + 1) + 3(r + 3) - 2, \ldots, \frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}(s + 1) + 3s - 2, \frac{8-2}{2}r + \frac{8-4}{2}(s + 1) + 3(r + 2) - 2, \ldots, \frac{8-2}{2}r + \frac{8-4}{2}(s + 1) + 3s - 2, \ldots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4}{2}(s + 1) + 3(r + 2) - 2, \ldots, \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4}{2}(s + 1) + 3s - 2\right\}$

$= \left\{r + 3(r + 2) - 2, r + 3(r + 3) - 2, \ldots, r + 3s - 2, 3r + 2(s + 1) + 3(r + 2) - 2, \ldots, 3r + 2(s + 1) + 3s - 2, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)(s + 1) + 3(r + 2) - 2, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)(s + 1) + 3s - 2\right\}.$

$L_{15} = \{f(v_i^j) |\ i = n \text{ dimana } n \equiv 2 \bmod 4, i \in I; j \in S\}$

$= \left\{\frac{n}{2}r + \frac{n-2}{2}(s + 1) + 1 + 1, \ldots, \frac{n}{2}r + \frac{n-2}{2}(s + 1) + s + 1\right\}.$

Berdasarkan pendefinisian fungsi dari label simpul, maka selanjutnya pembuktian akan dibagi menjadi tiga kasus, yaitu untuk $n \equiv 1 \bmod 4$, $n \equiv 2 \bmod 4$, dan $n \equiv 0 \bmod 4$. Himpunan label-label simpul dari graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, s)$, diperoleh dari gabungan himpunan $L_1, L_2, \ldots, L_{15}$ sesuai dengan kasus-kasus yang telah disebutkan, yaitu:

Kasus 1: $n \equiv 1 \bmod 4$

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8 \cup L_9 \cup L_{10} \cup L_{11} \cup L_{12} \cup L_{13} \cup L_{14}$

$= \left\{(r+1)+, 3(r+1)+2s, \ldots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)(r+1) + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s\right\} \cup$
$\left\{2(r+s+1), 4(r+s+1), \ldots, 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1)\right\} \cup \left\{p+1, p+3, p+5, \ldots, p+\right.$
$\left.2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right\} \cup \left\{1, 2, \ldots, r, 2(r+s+1)+1, \ldots, 2(r+s+1)+r, \ldots, \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(r+s+\right.$
$\left.1)+1, \ldots, \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(r+s+1)+r\right\} \cup$

$\left\{(r+1)+3, (r+1)+6, \ldots, (r+1)+3r, 3(r+1)+2s+3, \ldots, 3(r+1)+2s+\right.$
$3r, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)(r+1) + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + 3, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)(r+1)+$
$\left.\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + 3r\right\} \cup \left\{(r+1)+3, (r+1)+6, \ldots, (r+1)+3s, 3(r+1)+2s+\right.$
$3, \ldots, 3(r+1)+2s+3s, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)(r+1) + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + 3, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor -\right.$
$\left.1\right)(r+1) + \left.\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + 3s\right\} \cup \left\{(r+1)+3(s+1)-2, (r+1)+3(s+2)-\right.$
$2, \ldots, (r+1)+3r-2, 3(r+1)+2s+3(s+1)-2, \ldots, 3(r+1)+2s+3r-$
$2, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)(r+1) + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + 3(s+1)-2, \ldots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)(r+1)+$
$\left.\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + 3r - 2\right\} \cup \left\{p+2, p+4, p+6, \ldots, p+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\} \cup$

$\left\{r+3, r+6, \ldots, r+3s, 3r+2(s+1)+3, \ldots, 3r+2(s+1)+3s, \ldots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil -\right.\right.$
$\left.1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1)+3, \ldots, \left.\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1)+3s\right\} \cup$
$\left\{r+3, r+6, \ldots, r+3(r+1), 3r+2(s+1)+3, \ldots, 3r+2(s+1)+3(r+\right.$
$1), \ldots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1)+3, \ldots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r+$

$\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)(s+1)+3(r+1)\Big\} \cup \Big\{r+3(r+2)-1, r+3(r+3)-1, \dots, r+ 3s-1, 3r+2(s+1)+3(r+2)-1, \dots, 3r+2(s+1)+3s-1, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil- 1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)(s+1)+3(r+2)-1, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)(s+ 1)+3s-1\Big\} \cup \Big\{r+2, r+5, \dots, r+3s-1, 3r+2(s+1)+2, \dots, 3r+2(s+1)+ 3s-1, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)(s+1)+3-1, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor- 2\right)(s+1)+3s-1\Big\} \cup$

$\Big\{r+2, r+5, \dots, r+3(r+1)-1, 3r+2(s+1)+2, \dots, 3r+2(s+1)+3(r+1)- 1, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)(s+1)+2, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)(s+ 1)+3(r+1)-1\Big\} \cup \Big\{r+3(r+2)-2, r+3(r+3)-2, \dots, r+3s-2, 3r+ 2(s+1)+3(r+2)-2, \dots, 3r+2(s+1)+3s-2, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+ \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)(s+1)+3(r+2)-2, \dots, \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)(s+1)+3s-2\Big\}$

$= \Big\{1,2, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)(s+1)\Big\} \cup \Big\{p+1, p+2, \dots, p+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1\Big\}.$

Kasus 2: $n \equiv 2 \bmod 4$

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8 \cup L_9 \cup L_{10} \cup L_{11} \cup L_{12} \cup L_{13} \cup L_{14} \cup L_{15}$

$= \Big\{(r+1)+, 3(r+1)+2s, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)(r+1)+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)s\Big\} \cup \dots \cup \Big\{\frac{n}{2}r+\frac{n-2}{2}(s+1)+1+1, \dots, \frac{n}{2}r+\frac{n-2}{2}(s+1)+s+1\Big\}$

$= \Big\{1,2, \dots, \frac{n}{2}(r+s+1)\Big\} \cup \Big\{p+1, p+2, \dots, p+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\Big\}.$

Kasus 3: $n \equiv 0 \bmod 4$

$f(V) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8 \cup L_9 \cup L_{10} \cup L_{11} \cup L_{12} \cup L_{13} \cup L_{14}$

$= \Big\{(r+1)+, 3(r+1)+2s, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)(r+1)+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)s\Big\} \cup \dots \cup \Big\{r+3(r+2)-2, r+3(r+3)-2, \dots, r+3s-2, 3r+2(s+1)+3(r+2)-$

$2, \dots, 3r + 2(s+1) + 3s - 2, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1) +$

$3(r+2) - 2, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1) + 3s - 2\Big\}$

$$= \left\{1, 2, \dots, 2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil(r+s+1)\right\} \cup \left\{p+1, p+2, \dots, p+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right\}.$$

Terlihat bahwa himpunan label-label simpul dari graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, s)$, membentuk dua himpunan bilangan berurutan, yaitu:

$$f(V) = \begin{cases} \left\{1, \dots, \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1)\right\} \cup \left\{p+1, \dots, p+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1\right\}, & n \equiv 1 \bmod 4 \\ \left\{1, \dots, \frac{n}{2}(r+s+1)\right\} \cup \left\{p+1, \dots, p+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right\}, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ \left\{1, \dots, 2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil(r+s+1)\right\} \cup \left\{p+1, \dots, p+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right\}, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \quad (3.14).$$

Dari ketiga himpunan label-label simpul tersebut diperoleh tiga nilai b yang berbeda, yaitu

$$b = \begin{cases} \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ \frac{n}{2}(r+s+1), & n \equiv 2 \bmod 4. \\ 2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil(r+s+1), & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ diketahui bahwa

$$e = \begin{cases} \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 2\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ \frac{n}{2}(r+s+1) + 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ 2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil(r+s+1) + 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \quad (3.15).$$

Apabila persamaan (3.9) disubtitusikan ke persamaan (3.14), maka akan diperoleh bahwa jarak antara kedua himpunan label-label simpul adalah sebesar $(p+1) - (b+1) = p - b$ yang hasilnya sama dengan persamaan (3.15), yaitu:

- Untuk $n \equiv 1 \bmod 4$, $p - b = \left[2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 3\right)\right] - \left[\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1)\right] = \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 2\right) = e$

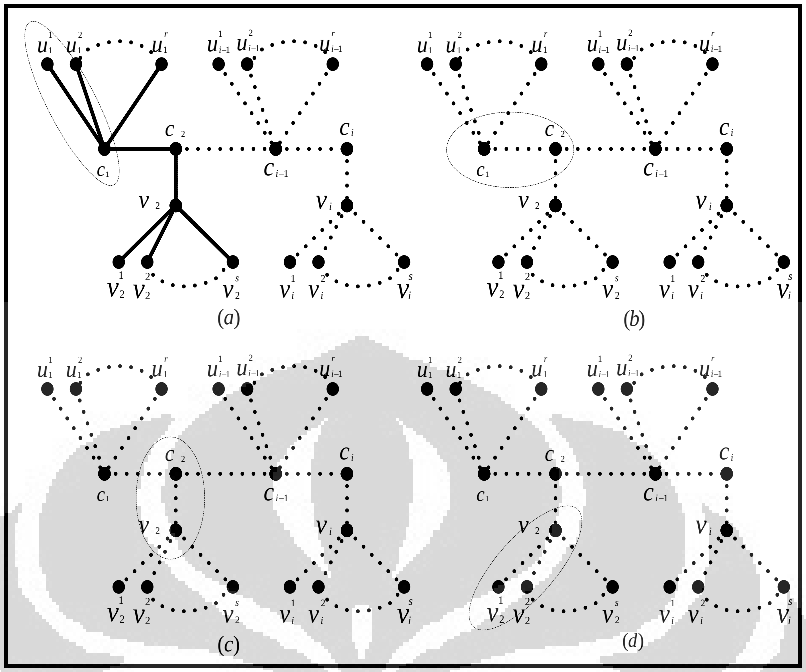
- Untuk $n \equiv 2 \bmod 4$, $p - b = \left[n(r+s+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1\right] - \left[\frac{n}{2}(r+s+1)\ \right] = \frac{n}{2}(r+s+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1 = e$
- Untuk $n \equiv 0 \bmod 4$, $p - b = \left[4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1\right] - \left[2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1)\ \right] = 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1 = e.$

Dengan demikian, himpunan label-label simpul pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e.

Selanjutnya akan ditunjukkan pula bahwa himpunan $W = \{f(x) + f(y) |\ xy \epsilon E\}$ dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ membentuk himpunan yang terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan. Pembuktian akan dibagi menjadi empat kasus sesuai dengan pendefinisian fungsi dari label simpul pada graf, yaitu:

Kasus 1: $c_i u_i^j$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1, i \in I$ dimana $n \not\equiv 3 \bmod 4$ dan $j \in J$.
Kasus 2: $c_i c_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq n - 1, i \in I$.
Kasus 3: $c_i v_i$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, i \in I$.
Kasus 4: $v_i v_i^j$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, i \in I$ dan $j \in S$.

Pembagian kasus-kasus menjadi empat kasus yang sesuai dengan pendefinisian fungsi dari label simpul pada graf ditunjukkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7. (a) Kasus 1 (b) Kasus 2 (c)Kasus 3 (d) Kasus 4.

Kasus 1 : $c_i u_i^j$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1, i \in I$ dimana $n \not\equiv 3$ mod 4 dan $j \in J$.

Pada kasus 1 pembuktian akan dibagi menjadi empat subkasus, yaitu untuk $i \equiv 1$ mod 4 dan $i \equiv 3$ mod 4.

Untuk $i \equiv 1$ mod 4 dan $j \in J$,

$$w_1 = f(c_i) + f(u_i^j)$$

$$= p + i + \frac{i-1}{2}(r + s + 1) + j$$

$$= p + \frac{i-1}{2}(r + s) + \frac{3i-1}{2} + j.$$

Substitusikan $i \equiv 1$ mod 4 dan $j \in J$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_1 = \left\{ \{ f(c_i) + f(u_i^j) \} \middle| i \equiv 1 \text{ mod } 4, i \in I \text{ dan } j \in J \right\}$$

$$= \Big\{p + \tfrac{1-1}{2}(r+s) + \tfrac{3-1}{2} + 1, \dots, p + \tfrac{1-1}{2}(r+s) + \tfrac{3-1}{2} + r, p + \tfrac{5-1}{2}(r+s) + \tfrac{15-1}{2} + 1, \dots, p + \tfrac{5-1}{2}(r+s) + \tfrac{15-1}{2} + r, \dots, p + \tfrac{4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-3-1}{2}(r+s) + \tfrac{3\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-3\right)-1}{2} + 1, \dots, p + \tfrac{4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-3-1}{2}(r+s) + \tfrac{3\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-3\right)-1}{2} + r\Big\}$$

$$= \Big\{p + 2, \dots, p + r, p + 2(r+s) + 8, \dots, p + 2(r+s) + 7 + r, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(r+s) + \left(6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5\right) + 1, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(r+s) + \left(6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5\right) + r\Big\}.$$

Untuk $r < s$, $i \equiv 3 \bmod 4$ dan $j \in J$,

$$w_2 = f(c_i) + f(u_i^j)$$

$$= p + i + \frac{i-1}{2}(r+1) + \frac{i-3}{2}s + 3j$$

$$= p + \tfrac{i-1}{2}r + \tfrac{i-3}{2}s + \tfrac{3i-1}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i \equiv 3 \bmod 4$ dan $j \in J$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_2 = \left\{\{f(c_i) + f(u_i^j)\} \,\middle|\, i \equiv 3 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j \in J\right\}$$

$$= \Big\{p + \tfrac{3-1}{2}r + \tfrac{3-3}{2}s + \tfrac{9-1}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{3-1}{2}r + \tfrac{3-3}{2}s + \tfrac{9-1}{2} + 3r, p + \tfrac{7-1}{2}r + \tfrac{7-3}{2}s + \tfrac{21-1}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{7-1}{2}r + \tfrac{7-3}{2}s + \tfrac{21-1}{2} + 3r, \dots, p + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}r + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s + \tfrac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)-1}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}r + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s + \tfrac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)-1}{2} + 3r\Big\}$$

$$= \Big\{p + r + 7, \dots, p + r + 4 + 3r, p + 3r + 2s + 13, \dots, p + 3r + 2s + 10 + 3r, \dots, p + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right) + 3, \dots, p + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right) + 3r\Big\}.$$

Untuk $r > s$, $i \equiv 3 \bmod 4$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, s$,

$$w_3 = f(c_i) + f(u_i^j)$$

$$= p + i + \frac{i-1}{2}(r+1) + \frac{i-3}{2}s + 3j$$

$$= p + \frac{i-1}{2}r + \frac{i-3}{2}s + \frac{3i-1}{2} + 3j.$$

Substitusikan$i \equiv 3 \bmod 4$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, s$ maka akan diperoleh himpunan

$W_3 = \left\{ \{ f(c_i) + f(u_i^j) \} \middle| i \equiv 1 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, s \right\}$

$$= \Big\{ p + \tfrac{3-1}{2}r + \tfrac{3-3}{2}s + \tfrac{9-1}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{3-1}{2}r + \tfrac{3-3}{2}s + \tfrac{9-1}{2} + 3s, p + \tfrac{7-1}{2}r + \tfrac{7-3}{2}s + \tfrac{21-1}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{7-1}{2}r + \tfrac{7-3}{2}s + \tfrac{21-1}{2} + 3s, \dots, p + \tfrac{4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1-1}{2}r + \tfrac{4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1-3}{2}s + \tfrac{3(4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1)-1}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1-1}{2}r + \tfrac{4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1-3}{2}s + \tfrac{3(4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1)-1}{2} + 3s \Big\}$$

$$= \Big\{ p + r + 7, \dots, p + r + 4 + 3s, p + 3r + 2s + 13, \dots, p + 3r + 2s + 10 + 3s, \dots, p + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right) + 3, \dots, p + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right) + 3s \Big\}.$$

Untuk $r > s$, $i \equiv 3 \bmod 4$ dan $j = s+1, \dots, r$,

$w_4 = f(c_i) + f(u_i^j)$

$$= p + i + \frac{i-1}{2}(r+1) + \frac{i-3}{2}s + 3j - 2$$

$$= p + \frac{i-1}{2}r + \frac{i-3}{2}s + \frac{3i-5}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i \equiv 3 \bmod 4$ dan $j = s+1, \dots, r$ maka akan diperoleh himpunan

$W_4 = \left\{ \{ f(c_i) + f(u_i^j) \} \middle| i \equiv 3 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j = s+1, \dots, r \right\}$

$$= \Big\{ p + \tfrac{3-1}{2}r + \tfrac{3-3}{2}s + \tfrac{9-5}{2} + 3(s+1), \dots, p + \tfrac{3-1}{2}r + \tfrac{3-3}{2}s + \tfrac{9-5}{2} + 3r, p + \tfrac{7-1}{2}r + \tfrac{7-3}{2}s + \tfrac{21-5}{2} + 3(s+1), \dots, p + \tfrac{7-1}{2}r + \tfrac{7-3}{2}s + \tfrac{21-5}{2} + 3r, \dots, p + \tfrac{4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1-1}{2}r +$$

$$\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s+\frac{3(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1)-5}{2}+3(s+1),\dots,p+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-1}{2}r+\frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1-3}{2}s+\frac{3(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1)-5}{2}+3r\Big\}$$

$$=\Big\{p+r+2+3(s+1),\dots,p+r+2+3r,p+3r+2s+8+3(s+1),\dots,p+3r+2s+8+3r,\dots,p+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+\left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4\right)+3(s+1),\dots,p+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+\left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4\right)+3r\Big\}.$$

Kasus 2 : c_ic_{i+1} untuk $1 \le i \le n-1, i \in I$.

Pada kasus 2 pembuktian akan dibagi menjadi dua subkasus, yaitu untuk $i \equiv 1{,}3 \bmod 4$ dan $i \equiv 0{,}2 \bmod 4$.

Untuk $i \equiv 1{,}3 \bmod 4$ dan $(i+1) \equiv 2 \bmod 4$,

$$w_5 = f(c_i) + f(c_{i+1})$$

$$= p + i + \frac{i+1}{2}(r+1) + \frac{i+1-2}{2}s$$

$$= p + \frac{i+1}{2}r + \frac{i-1}{2}s + \frac{3i+1}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 1 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_5 = \{\{f(c_i) + f(c_{i+1})\} | i \equiv 1 \bmod 4, i \in I\}$$

$$= \Big\{p+\frac{1+1}{2}r+\frac{1-1}{2}s+\frac{3+1}{2},p+\frac{5+1}{2}r+\frac{5-1}{2}s+\frac{15+1}{2},\dots,p+\frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-3+1}{2}r+\frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-3-1}{2}s+\frac{3(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-3)+1}{2}\Big\}$$

$$= \Big\{p+r+2,p+3r+2s+8,\dots,p+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)s+\left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-4\right)\Big\}.$$

Untuk $i \equiv 1{,}3 \bmod 4$ dan $(i+1) \equiv 0 \bmod 4$,

$w_6 = f(c_i) + f(c_{i+1})$

$= p + i + \frac{i+1}{2}(r+s+1)$

$= p + \frac{i+1}{2}r + \frac{i+1}{2}s + \frac{3i+1}{2}.$

Substitusikan $i \equiv 3 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$W_6 = \left\{\{f(c_i) + f(c_{i+1})\} \middle| i \equiv 3 \bmod 4, i \in I\right\}$

$= \left\{p + \frac{3+1}{2}r + \frac{3+1}{2}s + \frac{9+1}{2}, p + \frac{7+1}{2}r + \frac{7+1}{2}s + \frac{21+1}{2}, \ldots, p + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1 + 1}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1 + 1}{2}s + \frac{3(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1) + 1}{2}\right\}$

$= \left\{p + 2r + 2s + 5, p + 4r + 4s + 11, \ldots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)\right\}.$

Untuk $i \equiv 0{,}2 \bmod 4$ dan $(i+1) \equiv 3 \bmod 4$,

$w_7 = f(c_i) + f(c_{i+1})$

$= \frac{i}{2}(r+1) + \frac{i-2}{2}s + p + i + 1$

$= p + \frac{i}{2}r + \frac{i-2}{2}s + \frac{3i+2}{2}.$

Substitusikan $i \equiv 2 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$W_7 = \left\{\{f(c_i) + f(c_{i+1})\} \middle| i \equiv 2 \bmod 4, i \in I\right\}$

$= \left\{p + \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}s + \frac{6+2}{2}, p + \frac{6}{2}r + \frac{6-2}{2}s + \frac{18+2}{2}, \ldots, p + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2 - 2}{2}s + \frac{3(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2) + 2}{2}\right\}$

$= \left\{p + r + 4, p + 3r + 2s + 10, \ldots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)\right\}.$

Untuk $i \equiv 0{,}2 \bmod 4$ dan $(i+1) \equiv 1 \bmod 4$,

$$w_8 = f(c_i) + f(c_{i+1})$$

$$= \frac{i}{2}(r+s+1) + p + i + 1$$

$$= p + \frac{i}{2}r + \frac{i}{2}s + \frac{3i+2}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 0 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_8 = \left\{\{f(c_i) + f(c_{i+1})\} \middle| i \equiv 0 \bmod 4, i \in I \right\}$$

$$= \left\{p + \frac{4}{2}r + \frac{4}{2}s + \frac{12+2}{2}, p + \frac{8}{2}r + \frac{8}{2}s + \frac{24+2}{2}, \dots, p + \frac{4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4}{2}r + \frac{4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4}{2}s + \frac{3(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 4) + 2}{2}\right\}$$

$$= \left\{p + 2r + 2s + 7, p + 4r + 4s + 13, \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 5\right)\right\}.$$

Kasus 3 : $c_i v_i$ untuk $1 \le i \le 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, i \in I$.

Pada kasus 3 pembuktian akan dibagi menjadi dua subkasus, yaitu untuk $i \equiv 2 \bmod 4$ dan $i \equiv 0 \bmod 4$.

Untuk $i \equiv 2 \bmod 4$,

$$w_9 = f(c_i) + f(v_i)$$

$$= \frac{i}{2}(r+1) + \frac{i-2}{2}s + p + i$$

$$= p + \frac{i}{2}r + \frac{i-2}{2}s + \frac{3i}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 2 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_9 = \left\{\{f(c_i) + f(v_i)\} \middle| i \equiv 2 \bmod 4, i \in I \right\}$$

$$= \left\{ p + \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}s + \frac{6}{2}, p + \frac{6}{2}r + \frac{6-2}{2}s + \frac{18}{2}, \ldots, p + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2}{2}r + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2 - 2}{2}s + \frac{3\left(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)}{2} \right\}$$

$$= \left\{ p + r + 3, p + 3r + 2s + 9, \ldots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right) \right\}.$$

Untuk$i \equiv 0 \bmod 4$,

$$w_{10} = f(c_i) + f(v_i)$$

$$= \frac{i}{2}(r + s + 1) + p + i$$

$$= p + \frac{i}{2}r + \frac{i}{2}s + \frac{3i}{2}.$$

Substitusikan $i \equiv 0 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_{10} = \left\{ \{f(c_i) + f(v_i)\} \middle| i \equiv 0 \bmod 4, i \in I \right\}$$

$$= \left\{ p + \frac{4}{2}r + \frac{4}{2}s + \frac{12}{2}, p + \frac{8}{2}r + \frac{8}{2}s + \frac{24}{2}, \ldots, p + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor}{2}s + \frac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)}{2} \right\}$$

$$= \left\{ p + 2r + 2s + 6, p + 4r + 4s + 12, \ldots, p + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor s + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor \right\}.$$

Kasus 4 : $v_i v_i^j$ untuk $1 \leq i \leq 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, i \in I$

Pada kasus 4 pembuktian akan dibagi menjadi tujuh subkasus, yaitu untuk $i \equiv 2 \bmod 4$ dan $i \equiv 0 \bmod 4$.

Untuk $r > s$, $i \equiv 2 \bmod 4$ dan $j \in S$,

$$w_{11} = f(v_i) + f(v_i^j)$$

$$= p + i + \frac{i}{2}r + \frac{i-2}{2}(s+1) + 3j$$

$$= p + \frac{i}{2}r + \frac{i-2}{2}s + \frac{3i-2}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i \equiv 2 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_{11} = \left\{\{f(v_i) + f(v_i^j)\}\middle| i \equiv 2 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j \in S\right\}$$

$$= \left\{p + \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}s + \frac{6-2}{2} + 3, p + \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}s + \frac{6-2}{2} + 6, \dots, p + \frac{2}{2}r + \frac{2-2}{2}s + \frac{6-2}{2} + 3s, p + \frac{6}{2}r + \frac{6-2}{2}s + \frac{18-2}{2} + 3, \dots, p + \frac{6}{2}r + \frac{6-2}{2}s + \frac{18-2}{2} + 3s, \dots, p + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2}{2}r + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-2}{2}s + \frac{3(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2)-2}{2} + 3, \dots, p + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2}{2}r + \frac{4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2-2}{2}s + \frac{3(4\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2)-2}{2} + 3s\right\}$$

$$= \left\{p + r + 5, p + r + 8, \dots, p + r + 2 + 3s, p + 3r + 2s + 11, \dots, p + 3r + 2s + 8 + 3s, \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3, \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3s\right\}.$$

Untuk $r < s$, $i \equiv 2 \bmod 4$ dan $j = 1,2,\dots,r+1$,

$$w_{12} = f(v_i) + f(v_i^j)$$

$$= p + i + \frac{i}{2}r + \frac{i-2}{2}(s+1) + 3j$$

$$= p + \frac{i}{2}r + \frac{i-2}{2}s + \frac{3i-2}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i \equiv 2 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_{12} = \left\{\{f(v_i) + f(v_i^j)\}\middle| i \equiv 2 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j = 1, 2, \dots, r+1\right\}$$

$$= \Big\{p + \tfrac{2}{2}r + \tfrac{2-2}{2}s + \tfrac{6-2}{2} + 3, p + \tfrac{2}{2}r + \tfrac{2-2}{2}s + \tfrac{6-2}{2} + 6, \dots, p + \tfrac{2}{2}r + \tfrac{2-2}{2}s + \tfrac{6-2}{2} + 3(r+1), p + \tfrac{6}{2}r + \tfrac{6-2}{2}s + \tfrac{18-2}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{6}{2}r + \tfrac{6-2}{2}s + \tfrac{18-2}{2} + 3(r+1), \dots, p + \tfrac{4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2}{2}r + \tfrac{4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2-2}{2}s + \tfrac{3\left(4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2\right)-2}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2}{2}r + \tfrac{4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2-2}{2}s + \tfrac{3\left(4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2\right)-2}{2} + 3(r+1)\Big\}$$

$$= \Big\{p + r + 5, p + r + 8, \dots, p + r + 2 + 3(r+1), p + 3r + 2s + 11, \dots, p + 3r + 2s + 8 + 3(r+1), \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3(r+1)\Big\}.$$

Untuk $r < s, i \equiv 2 \bmod 4$ dan $j = r + 2, \dots, s$,

$$w_{13} = f(v_i) + f(v_i^j)$$

$$= p + i + \frac{i}{2}r + \frac{i-2}{2}(s+1) + 3j - 1$$

$$= p + \tfrac{i}{2}r + \tfrac{i-2}{2}s + \tfrac{3i-4}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i \equiv 2 \bmod 4$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_{13} = \left\{\{f(v_i) + f(v_i^j)\}\middle| i \equiv 2 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j = r+2, r+3, \dots, s\right\}$$

$$= \Big\{p + \tfrac{2}{2}r + \tfrac{2-2}{2}s + \tfrac{6-2}{2} + 3(r+2), p + \tfrac{2}{2}r + \tfrac{2-2}{2}s + \tfrac{6-2}{2} + 3(r+3), \dots, p + \tfrac{2}{2}r + \tfrac{2-2}{2}s + \tfrac{6-2}{2} + 3s, p + \tfrac{6}{2}r + \tfrac{6-2}{2}s + \tfrac{18-2}{2} + 3(r+2), \dots, p + \tfrac{6}{2}r + \tfrac{6-2}{2}s + \tfrac{18-2}{2} + 3s, \dots, p + \tfrac{4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2}{2}r + \tfrac{4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2-2}{2}s + \tfrac{3\left(4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2\right)-2}{2} + 3(r+2), \dots, p + \tfrac{4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2}{2}r + \tfrac{4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2-2}{2}s + \tfrac{3\left(4\lceil\frac{n-1}{4}\rceil-2\right)-2}{2} + 3s\Big\}$$

$$= \Big\{p + r + 2 + 3(r+2), p + r + 2 + 3(r+3), \dots, p + r + 2 + 3s, p + 3r + 2s + 8 + 3(r+2), \dots, p + 3r + 2s + 8 + 3s, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\tfrac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s +$$

$\left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-4\right)+3(r+2),\dots,p+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-2\right)s+$
$\left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil-4\right)+3s\Big\}.$

Untuk $r > s,\ i \equiv 0 \bmod 4$ dan $j \in S$,

$w_{14} = f(v_i) + f(v_i^j)$

$$= p + i + \frac{i-2}{2}r + \frac{i-4}{2}(s+1) + 3j - 1$$

$$= p + \frac{i-2}{2}r + \frac{i-4}{2}s + \frac{3i-6}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i \equiv 0 \bmod 4$ dan $j \in S$ maka akan diperoleh himpunan

$W_{14} = \left\{\{f(v_i) + f(v_i^j)\}\middle| i \equiv 0 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j \in S\right\}$

$$= \Big\{p + \frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}s + \frac{12-6}{2} + 3,\dots,p + \frac{4-2}{2}r + \frac{4-4}{2}s + \frac{12-6}{2} + 3s, p + \frac{8-2}{2}r + \frac{8-4}{2}s + \frac{24-6}{2} + 3,\dots,p + \frac{8-2}{2}r + \frac{8-4}{2}s + \frac{24-6}{2} + 3s,\dots,p + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4}{2}s + \frac{3(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor)-6}{2} + 3,\dots,p + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2}{2}r + \frac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4}{2}s + \frac{3(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor)-6}{2} + 3s\Big\}$$

$$= \Big\{p + r + 6,\dots,p + r + 3 + 3s, p + 3r + 2s + 12,\dots,p + 3r + 2s + 9 + 3s,\dots,p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right) + 3,\dots,p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right) + 3s\Big\}.$$

Untuk $r < s,\ i \equiv 0 \bmod 4$ dan $j = 1,2,\dots,r+1$,

$w_{15} = f(v_i) + f(v_i^j)$

$$= p + i + \frac{i-2}{2}r + \frac{i-4}{2}(s+1) + 3j - 1$$

$$= p + \frac{i-2}{2}r + \frac{i-4}{2}s + \frac{3i-6}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i \equiv 0 \bmod 4$ dan $j = 1, 2, \dots, r+1$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_{15} = \left\{\{f(v_i) + f(v_i^j)\}\middle|\, i \equiv 0 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j = 1, 2, \dots, r+1\right\}$$

$$= \Big\{p + \tfrac{4-2}{2}r + \tfrac{4-4}{2}s + \tfrac{12-6}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{4-2}{2}r + \tfrac{4-4}{2}s + \tfrac{12-6}{2} + 3(r+1), p + \tfrac{8-2}{2}r + \tfrac{8-4}{2}s + \tfrac{24-6}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{8-2}{2}r + \tfrac{8-4}{2}s + \tfrac{24-6}{2} + 3(r+1), \dots, p + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2}{2}r + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4}{2}s + \tfrac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right) - 6}{2} + 3, \dots, p + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2}{2}r + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4}{2}s + \tfrac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right) - 6}{2} + 3(r+1)\Big\}$$

$$= \Big\{p + r + 6, \dots, p + r + 3 + 3(r+1), p + 3r + 2s + 12, \dots, p + 3r + 2s + 9 + 3(r+1), \dots, p + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 3\right) + 3, \dots, p + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 3\right) + 3(r+1)\Big\}.$$

Untuk $r < s$, $i \equiv 0 \bmod 4$ dan $j = r+2, \dots, s$,

$$w_{16} = f(v_i) + f(v_i^j)$$

$$= p + i + \frac{i-2}{2}r + \frac{i-4}{2}(j+1) + 3j - 2$$

$$= p + \tfrac{i-2}{2}r + \tfrac{i-4}{2}s + \tfrac{3i-8}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i \equiv 0 \bmod 4$ dan $j = r+2, \dots, s$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_{16} = \left\{\{f(v_i) + f(v_i^j)\}\middle|\, i \equiv 0 \bmod 4, i \in I \text{ dan } j = r+2, \dots, s\right\}$$

$$= \Big\{p + \tfrac{4-2}{2}r + \tfrac{4-4}{2}s + \tfrac{12-8}{2} + 3(r+2), \dots, p + \tfrac{4-2}{2}r + \tfrac{4-4}{2}s + \tfrac{12-8}{2} + 3s, p + \tfrac{8-2}{2}r + \tfrac{8-4}{2}s + \tfrac{24-8}{2} + 3(r+2), \dots, p + \tfrac{8-2}{2}r + \tfrac{8-4}{2}s + \tfrac{24-8}{2} + 3s, \dots, p + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2}{2}r + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4}{2}s + \tfrac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right) - 8}{2} + 3(r+2), \dots, p + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2}{2}r + \tfrac{4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4}{2}s + \tfrac{3\left(4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right) - 8}{2} + 3s\Big\}$$

$$= \Big\{p + r + 2 + 3(r+2), \dots, p + r + 2 + 3s, p + 3r + 2s + 8 + 3(r+2), \dots, p + 3r + 2s + 8 + 3s, \dots, p + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 4\right) + 3(r+2), \dots, p + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\tfrac{n}{4}\right\rfloor - 4\right) + 3s\Big\}.$$

Untuk $r < s,\ i = n$ dimana $n \equiv 2 \bmod 4$ dan $j \in S$,

$w_{17} = f(v_i) + f(v_i^j)$

$$= p + i + \frac{i}{2}r + \frac{i-2}{2}(s+1) + j + 1$$

$$= p + \tfrac{i}{2}r + \tfrac{i-2}{2}s + \tfrac{3i}{2} + 3j.$$

Substitusikan $i = n$ dimana $n \equiv 2 \bmod 4$ dan $j \in S$ maka akan diperoleh himpunan

$$W_{17} = \left\{\{f(v_i) + f(v_i^j)\}\middle|\ i = n \text{ dan } j \in S \quad \text{dimana } n \equiv 2 \bmod 4\right\}$$

$$= \left\{p + \tfrac{n}{2}r + \tfrac{n-2}{2}s + \tfrac{3n}{2} + 1, p + \tfrac{n}{2}r + \tfrac{n-2}{2}s + \tfrac{3n}{2} + 2, \dots, p\ + \tfrac{n}{2}r + \tfrac{n-2}{2}s + \tfrac{3n}{2} + s\right\}$$

$$= \left\{p + \tfrac{n}{2}r + \tfrac{n-2}{2}s + \tfrac{3n}{2} + 1, p + \tfrac{n}{2}r + \tfrac{n-2}{2}s + \tfrac{3n}{2} + 2, \dots, p + \tfrac{n}{2}(r+s) + \tfrac{3n}{2}\right\}.$$

Berdasarkan pendefinisian fungsi dari label simpul, maka pembuktian selanjutnya akan dibagi menjadi tiga kasus, yaitu untuk $n \equiv 1 \bmod 4$, $n \equiv 2 \bmod 4$, dan $n \equiv 0 \bmod 4$. Himpunan $W = \{f(x) + f(y)|\ xy\epsilon E\}$ dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ diperoleh dari gabungan himpunan $W_1, W_2, \dots, W_{17}$ sesuai dengan kasus-kasus yang telah disebutkan, yaitu:

Kasus 1: $n \equiv 1 \bmod 4$

$$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7 \cup W_8 \cup W_9 \cup W_{10} \cup W_{11} \cup W_{12} \cup W_{13} \cup W_{14} \cup W_{15} \cup W_{16}$$

$$= \Big\{p + 2, \dots, p + r, p + 2(r+s) + 8, \dots, p + 2(r+s) + 7 + r, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(r + s) + \left(6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5\right) + 1, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(r+s) + \left(6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 5\right) + r\Big\} \cup \Big\{p + r + 7, \dots, p + r + 4 + 3r, p + 3r + 2s + 13, \dots, p + 3r + 2s + 10 + 3r, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right) + 3, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right) + 3r\Big\} \cup \Big\{p + r + 7, \dots, p + r + 4 + 3s, p + 3r + 2s + 13, \dots, p + 3r + 2s + 10 + 3s, \dots, p + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\tfrac{n}{4}\right\rceil - 2\right) +$$

$3, \dots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right) + 3s\right\} \cup \left\{p + r + 2 +$
$3(s+1), \dots, p + r + 2 + 3r, p + 3r + 2s + 8 + 3(s+1), \dots, p + 3r + 2s + 8 +$
$3r, \dots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4\right) + 3(s+1), \dots, p +$
$\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4\right) + 3r\right\} \cup \left\{p + r + 2, p + 3r + 2s +$
$8, \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right)\right\} \cup$

$\left\{p + 2r + 2s + 5, p + 4r + 4s + 11, \dots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)\right\} \cup$
$\left\{p + r + 4, p + 3r + 2s + 10, \dots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)\right\} \cup$
$\left\{p + 2r + 2s + 7, p + 4r + 4s + 13, \dots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s +$
$\left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 5\right)\right\} \cup \left\{p + r + 3, p + 3r + 2s + 9, \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil -$
$2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 3\right)\right\} \cup \left\{p + 2r + 2s + 6, p + 4r + 4s + 12, \dots, p + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r +$
$2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor s + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right\} \cup$

$\left\{p + r + 5, p + r + 8, \dots, p + r + 2 + 3s, p + 3r + 2s + 11, \dots, p + 3r + 2s + 8 +$
$3s, \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3, \dots, p +$
$\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3s\right\} \cup \left\{p + r + 5, p + r +$
$8, \dots, p + r + 2 + 3(r+1), p + 3r + 2s + 11, \dots, p + 3r + 2s + 8 + 3(r +$
$1), \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3, \dots, p +$
$\left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3(r+1)\right\} \cup \left\{p + r + 2 +$
$3(r+2), p + r + 2 + 3(r+3), \dots, p + r + 2 + 3s, p + 3r + 2s + 8 + 3(r +$
$2), \dots, p + 3r + 2s + 8 + 3s, \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s +$
$\left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 4\right) + 3(r+2), \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil -$
$4\right) + 3s\right\} \cup$

$\left\{p + r + 6, \dots, p + r + 3 + 3s, p + 3r + 2s + 12, \dots, p + 3r + 2s + 9 + 3s, \dots, p +$
$\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 3\right) + 3, \dots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r +$

$\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)s+\left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)+3s\Big\}\cup\Big\{p+r+6,\dots,p+r+3+3(r+1),p+3r+$
$2s+12,\dots,p+3r+2s+9+3(r+1),\dots,p+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+$
$\left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)+3,\dots,p+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+\left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-3\right)+3(r+1)\Big\}\cup$
$\Big\{p+r+2+3(r+2),\dots,p+r+2+3s,p+3r+2s+8+3(r+2),\dots,p+3r+$
$2s+8+3s,\dots,p+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+\left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4\right)+3(r+2),\dots,p+$
$\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1\right)r+\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-2\right)s+\left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-4\right)+3s\Big\}$

$=\left\{p+2,p+3,\dots,p+\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)s+\left(6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-5\right)\right\}.$

Kasus 2: $n\equiv 2 \bmod 4$

$W=W_1\cup W_2\cup W_3\cup W_4\cup W_5\cup W_6\cup W_7\cup W_8\cup W_9\cup W_{10}\cup W_{11}\cup W_{12}\cup W_{13}\cup$
$W_{14}\cup W_{15}\cup W_{16}\cup W_{17}$

$=\Big\{p+2,\dots,p+r,p+2(r+s)+8,\dots,p+2(r+s)+7+r,\dots,p+\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)(r+$
$s)+\left(6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-5\right)+1,\dots,p+\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)(r+s)+\left(6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-5\right)+r\Big\}\cup\dots\cup$
$\left\{p+\frac{n}{2}r+\frac{n-2}{2}s+\frac{3n}{2}+1,p+\frac{n}{2}r+\frac{n-2}{2}s+\frac{3n}{2}+2,\dots,p+\frac{n}{2}(r+s)+\frac{3n}{2}\right\}$

$=\left\{p+2,p+3,\dots,p+\frac{n}{2}(r+s)+\frac{3n}{2}\right\}.$

Kasus 3: $n\equiv 0 \bmod 4$

$W=W_1\cup W_2\cup W_3\cup W_4\cup W_5\cup W_6\cup W_7\cup W_8\cup W_9\cup W_{10}\cup W_{11}\cup W_{12}\cup W_{13}\cup$
$W_{14}\cup W_{15}\cup W_{16}$

$=\Big\{p+2,\dots,p+r,p+2(r+s)+8,\dots,p+2(r+s)+7+r,\dots,p+\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)(r+$
$s)+\left(6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-5\right)+1,\dots,p+\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)(r+s)+\left(6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-5\right)+r\Big\}\cup\dots\cup$
$\Big\{p+r+2+3(r+2),\dots,p+r+2+3s,p+3r+2s+8+3(r+2),\dots,p+3r+$

$$2s + 8 + 3s, \dots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4\right) + 3(r+2), \dots, p + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 1\right)r + \left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 2\right)s + \left(6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - 4\right) + 3s\Big\}$$

$$= \left\{p+2, p+3, \dots, p + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s) + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right\}.$$

Terlihat bahwa himpunan W dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ membentuk himpunan yang terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan, yaitu:

$$W = \begin{cases} \left\{p+2, p+3, \dots, p + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + \left(6\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 5\right)\right\}, & n \equiv 1 \bmod 4 \\ \left\{p+2, p+3, \dots, p + \frac{n}{2}(r+s) + \frac{3n}{2}\right\}, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ \left\{p+2, p+3, \dots, p + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s) + 6\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right\}, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}.$$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, karena himpunan label-label simpul dari graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ membentuk dua himpunan bilangan berurutan yang terpisah sejauh e dan himpunan $W = \{f(x) + f(y) |\ xy \epsilon E\}$ merupakan himpunan yang terdiri dari e bilangan bulat positif berurutan, maka terbukti bahwa graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ memiliki PTBA b - busur berurutan dengan

$$b = \begin{cases} \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + \left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)(s+1), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ \frac{n}{2}(r+s+1), & n \equiv 2 \bmod 4. \\ 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1), & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \quad \blacksquare$$

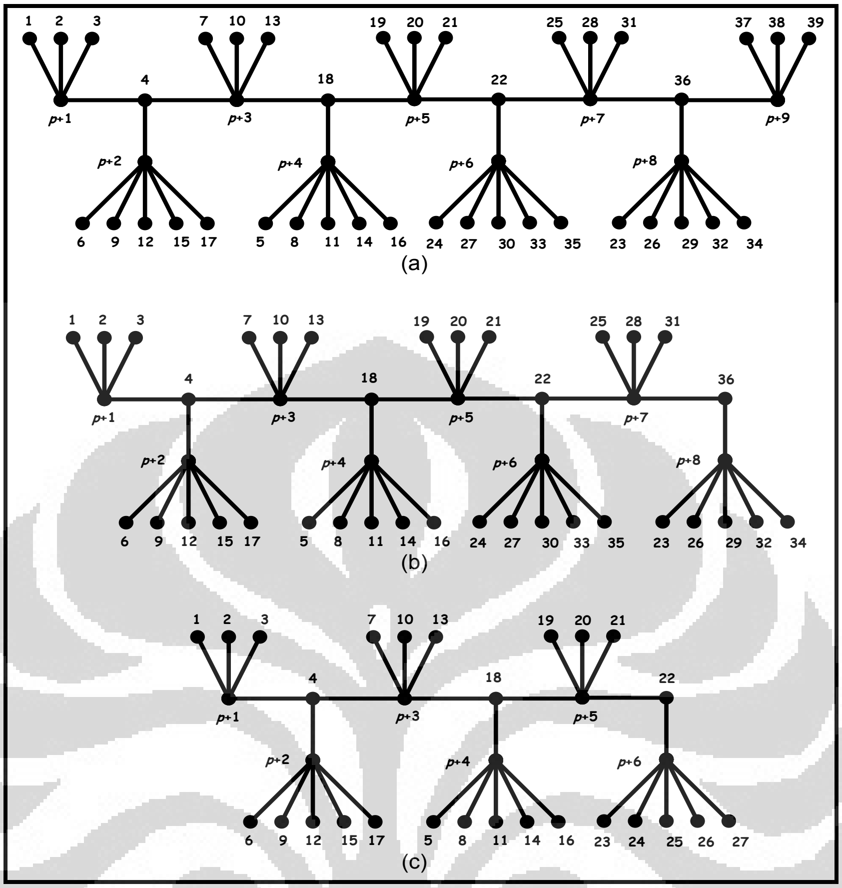
Berdasarkan Lemma 3.1, bilangan ajaib dari pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan adalah $k = b + e + w$ dengan $w = \min(W) = p + 2$. Kemudian akan dicari nilai dari bilangan ajaib k. Substitusikan persamaan (3.15) dan nilai-nilai b, maka akan diperoleh:

$$k = \begin{cases} p + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 2\right)s + 2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 4\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ p + n(r+s+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1, & n \equiv 2 \bmod 4 \\ p + 8\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1) + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases} \quad (3.16).$$

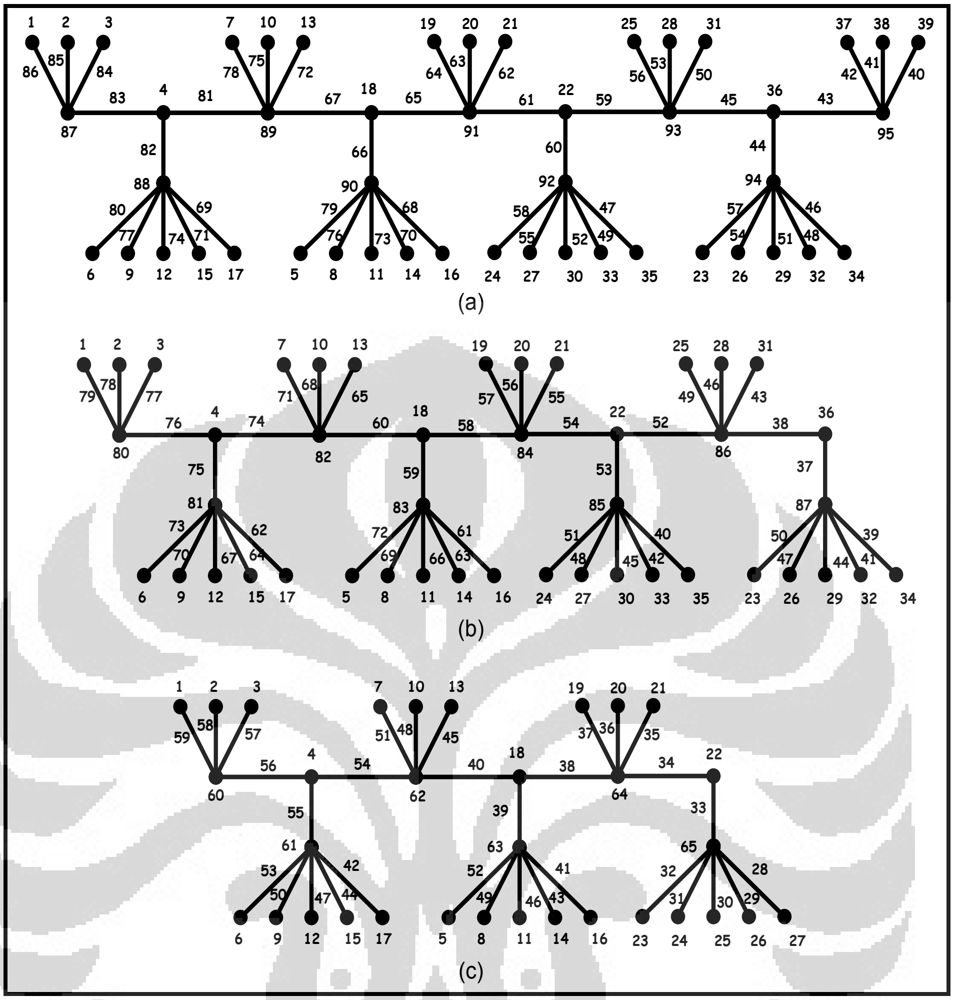
Dengan mensubstitusi persamaan (3.9) ke persamaan (3.16), maka diperoleh:

$$k = \begin{cases} 4\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)r + 4\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)s + 2\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 7\right), & n \equiv 1 \bmod 4 \\ 2n(r+s+1) + 4\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, & n \equiv 2 \bmod 4. \\ 16\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1) + 4\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Contoh pelabelan simpul dengan menggunakan persamaan (3.10)-(3.13) pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ ditunjukkan pada Gambar 3.8. Pada Gambar 3.8, terlihat bahwa label-label simpul membentuk dua himpunan bilangan berurutan. Pada Gambar 3.8 (a) terbentuk himpunan $\{1, 2, \ldots, 39\}$ dan $\{p+1, p+2, \ldots, p+9\}$, Gambar 3.8 (b) terbentuk himpunan $\{1, 2, \ldots, 36\}$ dan $\{p+1, p+2, \ldots, p+8\}$ sedangkan Gambar 3.8 (c) terbentuk himpunan $\{1, 2, \ldots, 27\}$ dan $\{p+1, p+2, \ldots, p+6\}$. Dengan demikian diperoleh nilai b yang berbeda untuk (a), (b), dan (c) yaitu $b = 39$, $b = 36$, dan $b = 27$. Terlihat pula bahwa pada Gambar 3.8 akan diperoleh himpunan W yang berbeda untuk (a), (b), dan (c) yaitu $\{p+2, p+3, \ldots, p+48\}$, $\{p+2, p+3, \ldots, p+44\}$, dan $\{p+2, p+3, \ldots, p+33\}$ yang masing-masing merupakan himpunan e bilangan bulat positif berurutan. Kemudian jika disubstitusikan nilai p untuk (a), (b), dan (c) yaitu $p = 86$, $p = 79$, dan $p = 59$ serta label-label busurnya, maka akan diperoleh pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan seperti pada Gambar 3.9.



Gambar 3.8. (a) Pelabelan simpul dari graf lobster $L_9(3,0;1,5)$ (b) Pelabelan simpul dari graf lobster $L_8(3,0;1,5)$ (c) Pelabelan simpul dari graf lobster $L_6(3,0;1,5)$.



Gambar 3.9. (a) PTBA 39-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_9(3,0;1{,}5)$ (a) PTBA 36-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_8(3,0;1{,}5)$ (a) PTBA 27-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(3,0;1{,}5)$.

Pada Gambar 3.9 terlihat bahwa setelah mensubstitusi nilai p dan menambahkan label busur pada Gambar 3.8, maka akan diperoleh suatu bilangan ajaib untuk masing-masing (a), (b), dan (c) yaitu $k = 1 + 86 + 87 = 174$, $k = 1 + 79 + 80 = 160$, dan $k = 1 + 59 + 60 = 120$.

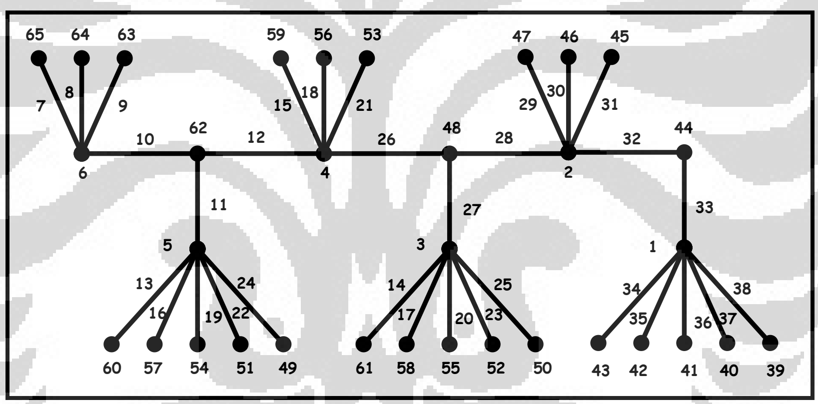
Pada Teorema 2.1 telah dijelaskan bahwa dual dari pelabelan total busur ajaib b -busur berurutan untuk suatu graf G adalah suatu pelabelan total busur ajaib

$(v - b)$-busur berurutan. Berdasarkan teorema tersebut, diperoleh Akibat 3.2 dimana nilai b pada Akibat 3.2 adalah banyak simpul v dikurangi dengan nilai b pada Teorema 3.2.

Akibat 3.2. Setiap graf lobster semi teratur, $L_n(r, 0; 1, s)$, memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan dimana

$$b = \begin{cases} 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1, & n \equiv 1 \bmod 4 \\ 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & n \equiv 2 \bmod 4. \\ 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & n \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Contoh pelabelan dual dari Gambar 3.9 (c), yaitu PTBA b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(3, 0; 1,5)$ ditunjukkan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10. PTBA 6-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(3, 0; 1,5)$ dengan $k = 78$.

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa pada pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan didefinisikan pelabelan dual dan simpul-simpul pada pelabelan dual dilabel dengan cara mengurangkan $v + e + 1$ dengan label simpul yang terkait. Contohnya, pada Gambar 3.10 terlihat bahwa simpul c_1 yang semula diberi label 60 pada Gambar 3.9 (c) berubah menjadi $v + e + 1 - f(c_1) = 33 + 32 + 1 - 60 = 66 - 60 = 6$. Nilai b pada pelabelan dual dari graf lobster semi teratur $L_6(3, 0; 1, 5)$

adalah $b = 6$. Dengan demikian pelabelan dual untuk PTBA 27-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(3,0;1,5)$ (Gambar 3.9.c) adalah PTBA 6-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_6(3,0;1,5)$ dengan $k = 78$.

BAB 4
KESIMPULAN

Pada bab sebelumnya telah diberikan konstruksi pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$. Berdasarkan Teorema 3.1, setiap graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ memiliki pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan untuk $n \not\equiv 3 \bmod 4$ dan diperoleh tiga nilai *b* yang berbeda untuk $n \equiv 1 \bmod 4$, $n \equiv 2 \bmod 4$, dan $n \equiv 0 \bmod 4$. Berdasarkan Teorema 3.2, setiap graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ memiliki pelabelan total busur ajaib *b*-busur berurutan untuk $n \not\equiv 3 \bmod 4$ dan juga diperoleh pula tiga nilai *b* yang berbeda untuk $n \equiv 1 \bmod 4$, $n \equiv 2 \bmod 4$, dan $n \equiv 0 \bmod 4$. Selain itu, telah dijelaskan pula bahwa pada pelabelan total busur ajaib didefinisikan pelabelan dual. Pada Teorema 2.1 diberikan bahwa dual dari pelabelan total busur ajaib b -busur berurutan untuk suatu graf *G* adalah suatu pelabelan total busur ajaib $(v - b)$-busur berurutan. Oleh karena itu, diperoleh Akibat 3.1 dan Akibat 3.2 yang merupakan hasil pelabelan dual pada Teorema 3.1 dan Teorema 3.2. Hasil selengkapnya diberikan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Pelabelan Total Busur Ajaib *b*-Busur Berurutan pada Graf Lobster Semi Teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$

Graf		Pelabelan	Bilangan Ajaib
Graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$	$n \equiv 1 \bmod 4$	PTBA $\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 1\right)$-Busur Berurutan	$k = 4\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil - 3\right)r + 2\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 5\right)$
	$n \equiv 2 \bmod 4$	PTBA $nr + \frac{n}{2}$-Busur Berurutan	$k = 2n(2r + 1) +$

			$2\left(2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)$
	$n \equiv 0 \bmod 4$	PTBA $2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(2r+1)$-Busur Berurutan	$k=16\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r+4\left(2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$
	$n \equiv 1 \bmod 4$	PTBA $2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1$-Busur Berurutan	$k=2\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-3\right)r+4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil+8\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-8$
	$n \equiv 2 \bmod 4$	PTBA $2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$-Busur Berurutan	$k=n(1+2r)+8\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$
	$n \equiv 0 \bmod 4$	PTBA $2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$-Busur Berurutan	$k=8\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor r+4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+4\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$
Graf lobster semi teratur $L_n(r,0;1,s)$	$n \equiv 1 \bmod 4$	PTBA $\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-1\right)r+\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)(s+1)$-Busur Berurutan	$k=4\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-1\right)r+4\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-1\right)s+2\left(4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil+2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-7\right)$
	$n \equiv 2 \bmod 4$	PTBA $\frac{n}{2}(r+s+1)$-Busur Berurutan	$k=2n(r+s+1)+4\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$
	$n \equiv 0 \bmod 4$	PTBA $2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1)$-Busur Berurutan	$k=16\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1)+4\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$
	$n \equiv 1 \bmod 4$	PTBA $2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1$-Busur Berurutan	$k=2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-1\right)r+2\left(2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-2\right)s+4\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil+8\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-8$
	$n \equiv 2 \bmod 4$	PTBA $2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$-Busur Berurutan	$k=n(r+s+1)$
	$n \equiv 0 \bmod 4$	PTBA $2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$-Busur Berurutan	$k=4\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor(r+s+1)+8\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$

Penelitian lebih lanjut mengenai pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan pada graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; , r)$ dan $L_n(r, 0; 1, s)$ yang belum ditemukan diberikan pada masalah terbuka berikut.

Masalah terbuka 1. Apakah graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, r)$ memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan untuk $n \equiv 3 \bmod 4$?

Masalah terbuka 2. Apakah graf lobster semi teratur $L_n(r, 0; 1, s)$ memiliki pelabelan total busur ajaib b-busur berurutan untuk $n \equiv 3 \bmod 4$?

DAFTAR PUSTAKA

Baca, M., & Miller, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs: A Wealth of Problems and Some Solutions*. Florida: Brown Walker Press.

Chartrand, L., & Lesniak, L. (1986). *Graphs & Digraphs*. California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Book & Software.

Gallian, J. A. (2008). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal Combinatorics 15*, #DS6.

Hartsfield, N., & Ringel, G. (1994). *Pearls in Graph Theory*. New York: Dover Publication.

Jahannathan, S. (2005). *Magic square for All Success*. Februari 29, 2012. pk. 11.20 WIB. http://www.spiritualmindpower.com/files/MAGIC_SQUARES.pdf

Khan, N., Pal, A., Pal, M. (2009). Edge colouring of cactus graphs. *Advance Modeling and Optimization*, 11(4), 407-421.

Silaban, D. R., & Sugeng, K. A. (2010). Pelabelan Total Busur Berurutan Busur Ajaib pada Graf Terhubung bukan Graf Pohon. *Prosiding KNM XV*, 55-60.

Sugeng, K. A., & Miller, M. (2008). On consecutive edge magic total labeling of graph. *Journal of Discrete Algorithm*, 6, 59-60.

Wallis, W. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser.

Wilson, R. J. (1996). *Intoduction to Graph Theory* (4rd ed.). London: Prentice Hall.