



UNIVERSITAS INDONESIA

**ANALISIS MODEL *MARKET PRICE OF RISK* TERKAIT
MODEL TINGKAT BUNGA SATU FAKTOR**

TESIS

**FENI ANDRIANI
1006786114**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012**



UNIVERSITAS INDONESIA

**ANALISIS MODEL *MARKET PRICE OF RISK* TERKAIT
MODEL TINGKAT BUNGA SATU FAKTOR**

TESIS

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Magister Sains**

**FENI ANDRIANI
1006786114**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

**Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.**

Nama : Feni Andriani

NPM : 1006786114

TTD : 

Tanggal : 13 Juli 2012

HALAMAN PENGESAHAN

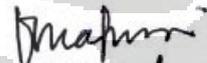
Tesis ini diajukan oleh :

Nama : Feni Andriani
NPM : 1006786114
Program Studi : Matematika
Judul Tesis : Analisis Model *Market Price of Risk* Terkait Model Tingkat Bunga Satu Faktor

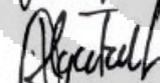
Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Bevina D. Handari., Ph.D.

()

Pembimbing : Gatot F. Hertono, Ph.D.

()

Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami

()

Penguji : Dr. Dian Lestari

()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 13 Juli 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kehadirat Allah SWT atas rahmat, nikmat, dan karunia yang tidak henti – hentinya dilimpahkan pada penulis. Shalawat dan salam penulis sampaikan kepada suri tauladan kita, junjungan kita, nabi Muhammad SAW. Meskipun melalui berbagai rintangan dan ujian kesabaran yang tidak mudah, alhamdulillah, rangkaian panjang ujian tersebut membuahkan hasil dengan terselesaikannya tesis ini. Penulis menghaturkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu penulis sampai tesis ini dapat terselesaikan, yaitu kepada

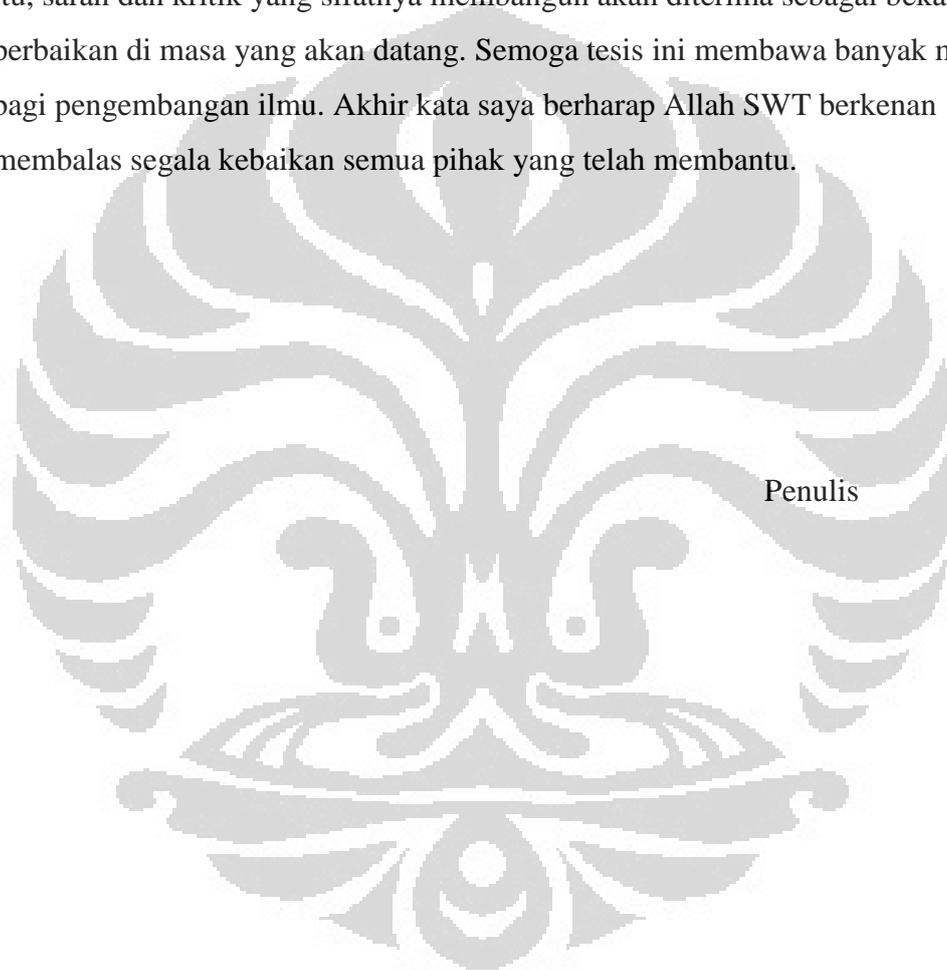
1. Ibu Bevina D. Handari selaku Pembimbing 1, atas semangatnya dalam membimbing penulis, memberi saran dan nasehat yang berharga kepada penulis. Ibu juga telah membuka wawasan penulis bagaimana cara membuat penelitian beserta dengan penulisannya, ibu juga selalu memberikan motivasi yang begitu banyak yang diberikan kepada penulis. Terima kasih bu.
2. Bapak Gatot F. Hertono selaku Pembimbing 2 yang juga yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, saran, pengarahan dan kemudahan lainnya selama penulisan tesis ini.
3. Pak Djati, Bu Sri, Pak Yudi, Pak Hengki, Pa Hendri, Pak AlHaji, Bu Netty, Bu Rianti, Bu Dian, Bu Bella, Bu Suarsih, Ka Ari, Bu Titin, Mba Mila, Mba Rahmi, Bu Saski, Mba Sarini dan seluruh dosen Departemen Matematika atas segala ilmu yang penulis peroleh selama menjadi mahasiswa Matematika UI.
4. Mba Santi, Pak Saliman, Mba Rusmi, Pa Anshori, Mas Irwan, Pak Turino, Mba Via dan seluruh karyawan Departemen Matematika lainnya yang telah banyak memberikan bantuan.

Ucapan terima kasih yang tulus dan khusus kepada orang – orang terpenting dalam kehidupan penulis, yaitu mas Panji, suamiku atas cinta dan kasih sayang yang selalu dicurahkan kepada penulis. Hafiz, anakku yang telah mengorbankan banyak waktu bermain bersama. Mamah dan Bapa yang tak pernah berhenti mendoakan penulis agar tetap maju. Rizka dan mba Fitri saudaraku yang terus memberikan semangat kepada penulis. Ibu dan Bapak yang

telah mendoakan dan rela membantu penulis dalam mengurus Hafiz. Amma yang mendoakan dan sabar pada penulis.

Selanjutnya, penulis ucapkan terima kasih kepada rekan - rekan mahasiswa magister Matematika 2010, Iif, Dewi, Desti, Mia, Nurma, Ka PJ, Uun, Rifkos, Vidya, Dina, Ias, Pa Haryono, Ka Onggo, Mba Rina, Mba Fatin, Mba Titi, dan teman2 lainnya yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis memohon maaf jika di dalam tesis ini terdapat kekurangan. Untuk itu, saran dan kritik yang sifatnya membangun akan diterima sebagai bekal untuk perbaikan di masa yang akan datang. Semoga tesis ini membawa banyak manfaat bagi pengembangan ilmu. Akhir kata saya berharap Allah SWT berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu.



**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Feni Andriani
NPM : 1006786114
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Tesis

demikian demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

**Analisis Model *Market Price of Risk* Terkait Model Tingkat Bunga
Satu Faktor**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 13 Juli 2012
Yang menyatakan



(Feni Andriani)

ABSTRAK

Nama : Feni Andriani
Program Studi : Matematika
Judul : Analisis Model *Market Price of Risk* Terkait Model Tingkat Bunga Satu Faktor

Market price of risk merupakan tambahan keuntungan yang diharapkan investor untuk menutupi satu unit risiko investasi. *Market price of risk* bernilai positif berarti investor bersifat *greedy*, yakni investor memiliki keberanian untuk mengambil risiko meskipun memiliki peluang untuk rugi. Begitu pula sebaliknya, jika *market price of risk* bernilai negatif berarti investor bersifat *fear*, yakni investor hanya berani mengambil risiko jika memiliki peluang memperoleh keuntungan. Pada tesis ini akan dibahas perilaku investor melalui analisis model *market price of risk* terkait model tingkat bunga satu faktor. *Market price of risk* diperoleh melalui analisis *slope yield-curve* pada *short end*. Model tingkat bunga satu faktor pada tesis ini adalah model yang lebih didasarkan pada analisis data empiris tingkat bunga obligasi. Implementasi tesis ini menggunakan data historis tingkat bunga obligasi pemerintah Jepang 1 September 1996 sampai dengan 31 Agustus 2011 yang dapat diunduh dari <http://www.economagic.com/em-cgi/data.exe/bjap/dayinrate01>. Secara teknis *market price of risk* bernilai negatif, namun berdasarkan data yang digunakan, diperoleh hasil bahwa sebagian besar *market price of risk* bernilai positif. Hal ini menunjukkan bahwa umumnya perilaku investor di negara Jepang sebagian besar bersifat *greedy* atau *overconfident* dalam arti memiliki keberanian yang tinggi dalam berinvestasi.

Kata Kunci : *market price of risk*, model tingkat bunga satu faktor, obligasi, tingkat bunga, *yield-curve*.

Xiii + 73 Halaman; 20 Gambar; 3 Lampiran; 11 Tabel.

Daftar pustaka : 15 (1991-2012)

ABSTRACT

Name : Feni Andriani
Study Program : Mathematics
Title : Analysis of Market Price of Risk Model Associated with One Factor Interest Rate Model

The market price of risk is the return in excess of the risk-free rate that the market wants as compensation for taking risk. The positive value of market price of risk means that investors are willing to pay to take risks. This is labeled as greed, while the negative values means that investors need extra return for taking risk. This is labeled as fear. This thesis will analyze investor behaviour through analyzing market price of risk model associated with one-factor interest rate models. Market price of risks are obtained from analyzing the slope of the yield curve at the short end. However in this thesis, a one-factor interest rate model is based on analyzing historical yield-curve data. Historical Japanese government bond rate data start from September 1st 1996 and ending on August 31st 2011 is used in the implementation. The data can be downloaded at <http://www.economagic.com/emcgi/data.exe/bjap/day-intrate01>. Technically, the market price of risk is negative, but the result shows that market price of risk for the Japanese bond rate data is positive. This means that the general behavior of Japanese investors is greedy or overconfident.

Keywords : bond, bond rate, market price of risk, one-factor interest rate model, yield-curve.

xiii + 73 Pages; 20 Pictures; 3 Attachment; 11 Tables.

Bibliography : 15 (1991-2012)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
KATA PENGANTAR	iv
HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR LAMPIRAN	xii
DAFTAR TABEL	xiii
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup Penelitian	3
1.3 Jenis dan Metode Penelitian	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
2. MATEMATIKA KEUANGAN DAN TEORI PROBABILITAS	4
2.1 Teori Ekonomi	5
2.1.1 Obligasi	6
2.1.2 Tingkat Bunga	6
2.1.3 <i>Yield</i> dan harga obligasi	10
2.1.4 <i>Yield-curve</i>	12
2.1.5 <i>Market Price of Risk</i>	13
2.2 Teori Probabilitas	13
2.2.1 Probabilitas Transisi	14
2.2.2 Persamaan <i>forward</i> Fokker-Planck	14
2.2.3 Distribusi <i>Steady-State</i>	14
2.2.4 Distribusi Normal	15
2.2.5 Distribusi Lognormal	16
2.3 Proses Stokastik.....	17
2.3.1 Proses Wiener	17
2.3.2 Persamaan Diferensial Stokastik	18
2.4 Metode Numerik	18
2.4.1 Metode <i>Least square</i>	19
2.4.2 Interpolasi Lagrange	20
2.4.3 Metode Euler-Maruyama	21
2.4.4 <i>Root Mean Square Error</i>	21
3. MODEL TINGKAT BUNGA SATU FAKTOR DAN MODEL MARKET PRICE OF RISK.....	22
3.1 Model Tingkat Bunga Satu Faktor.....	23
3.1.1 Metode Estimasi Parameter Struktur Volatilitas	24

3.1.2 Metode Estimasi Parameter Struktur <i>Drift</i>	27
3.2 Analisa <i>slope yield-curve</i> pada <i>short-end</i>	30
3.3 Model <i>Market Price of Risk</i>	37
3.3.1 Metode Estimasi Parameter Struktur Volatilitas	37
3.3.2 Metode Estimasi Parameter Struktur <i>Drift</i>	40
4. ANALISA MODEL MARKET PRICE OF RISK TERKAIT MODEL	
<i>TINGKAT BUNGA SATU FAKTOR</i>	42
4.1 Estimasi Parameter Model Tingkat Bunga Satu Faktor.....	42
4.1.1 Estimasi Parameter Struktur Volatilitas	43
4.1.2 Estimasi Parameter Struktur <i>Drift</i>	45
4.2 Data <i>Time-series Market Price of Risk</i>	50
4.3 Estimasi Parameter Model <i>Market Price of Risk</i>	53
4.3.1 Estimasi Parameter Struktur Volatilitas	54
4.3.2 Estimasi Parameter Struktur <i>Drift</i>	57
4.3.3 Analisa Model <i>Market Price of Risk</i>	61
5. KESIMPULAN DAN SARAN	64
5.1 Kesimpulan	64
5.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	65

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Tingkat bunga spot-rate s_t dan short-rate r_t	7
Gambar 2.2	Grafik harga obligasi terhadap <i>yield</i>	11
Gambar 2.3	Ilustrasi Harga zero coupon-bond pada saat t dengan jatuh tempo di T	11
Gambar 2.4	Grafik <i>pdf</i> distribusi Normal	15
Gambar 2.5	Grafik <i>pdf</i> distribusi Lognormal	16
Gambar 3.1	Skema pembahasan model tingkat bunga satu faktor dan model <i>market price of risk</i>	23
Gambar 3.2	Ilustrasi estimasi parameter struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor	26
Gambar 3.3	Ilustrasi estimasi parameter struktur drift model tingkat bunga satu faktor	29
Gambar 3.4	Ilustrasi estimasi parameter struktur volatilitas market price of risk.	40
Gambar 3.5	Ilustrasi estimasi parameter struktur <i>drift market price of risk</i> ...	41
Gambar 4.1	Approksimasi <i>least square</i> $y = 1.27x - 7.358$ terhadap lima belas titik (x_i, y_i) , dimana x_i menyatakan $\ln(r_i)$ dan y_i menyatakan $\ln E[dr_i^2]$	44
Gambar 4.2	Histogram dan kurva distribusi lognormal data tingkat bunga ...	46
Gambar 4.3	Histogram dan kurva distribusi normal logaritma data tingkat bunga	47
Gambar 4.4	Grafik lintasan data historis tingkat bunga obligasi dan lintasan model tingkat bunga satu faktor tahun 1996-2011 dengan menggunakan skema Euler-Maruyama	50
Gambar 4.5	Grafik <i>Market Price of Risk</i> Obligasi Pemerintah Jepang 1 September 1996 hingga 31 Agustus 2011	52
Gambar 4.6	Grafik <i>Market Price of Risk</i> dengan lima buah nilai λ_i	55
Gambar 4.7	Grafik <i>Market Price of Risk</i> dengan enam buah nilai λ_i	56
Gambar 4.8	Histogram dan kurva distribusi Weibull	59
Gambar 4.9	Histogram dan kurva distribusi Gumbel-Max	59
Gambar 4.10	Grafik simulasi model <i>market price of risk</i> (biru) terhadap data <i>time series market price of risk</i> untuk data tingkat bunga yang berdistribusi lognormal dan <i>market price of risk</i> yang berdistribusi Gumbel Max (merah)	62

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1.	Data Tingkat Bunga Obligasi Pemerintah Jepang.....	66
Lampiran 2.	<i>Source code</i> implementasi model Tingkat Bunga Satu Faktor ...	68
Lampiran 3.	<i>Source code</i> implementasi model <i>Market Price of Risk</i>	72



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Tabel distribusi frekuensi data tingkat bunga obligasi pemerintah Jepang	46
Tabel 4.2	Tabel <i>output</i> One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	48
Tabel 4.3	Tabel parameter distribusi lognormal dari logaritma data	48
Tabel 4.4	Tabel Perhitungan data <i>time-series Market Price of Risk</i>	51
Tabel 4.5	Lima nilai <i>Market Price of Risk</i>	55
Tabel 4.6	Enam nilai <i>Market Price of Risk</i>	56
Tabel 4.7	Tabel nilai $q(\lambda)$ untuk pemilihan lima titik	57
Tabel 4.8	Tabel nilai $q(\lambda)$ untuk pemilihan enam titik	57
Tabel 4.9	Tabel distribusi frekuensi data <i>time-series market price of risk</i>	58
Tabel 4.10	Parameter distribusi Weibull	59
Tabel 4.11	Parameter distribusi Gumbel-Max	60



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ekonomi yang semakin berkembang tentunya membawa peluang dan risiko yang semakin besar bagi investor, sehingga investor terus meningkatkan upaya untuk mengamankan investasi mereka. Pada awalnya para investor hanya mengenal produk investasi tradisional, seperti tabungan dan deposito. Seiring dengan perkembangan ekonomi, saat ini didominasi oleh produk-produk investasi yang diterbitkan di pasar modal. Pasar modal didefinisikan sebagai pasar untuk berbagai instrumen keuangan (atau sekuritas) jangka panjang yang bisa diperjualbelikan, baik dalam bentuk hutang ataupun modal sendiri, baik yang diterbitkan oleh pemerintah, maupun perusahaan swasta. Dalam perekonomian suatu negara, pasar modal memiliki peranan penting karena pasar modal menjalankan dua fungsi, yaitu sebagai sarana bagi perusahaan untuk mendapatkan dana dari masyarakat pemodal (investor), dan sebagai sarana bagi masyarakat untuk berinvestasi pada instrumen keuangan pasar modal seperti saham, obligasi, opsi, dan lain-lain (Husnan, 2005).

Saham dan obligasi merupakan instrumen keuangan dalam pasar modal yang paling sering dipilih investor. Saham merupakan bukti kepemilikan seseorang atau badan atas suatu perusahaan atau perseroan terbatas. Sedangkan obligasi merupakan surat pengakuan hutang suatu perusahaan yang akan dibayar pada waktu jatuh tempo sebesar nilai nominalnya (Darmadji, dkk, 2001).

Perilaku investor terhadap perkembangan harga saham maupun harga obligasi merupakan suatu indikator penting dalam menggambarkan kondisi pasar modal. Terdapat dua faktor yang mendominasi perilaku investor, yakni sentimen dan ekspektasi. Sentimen terhadap indikasi bahwa akan terjadi resesi dunia yang bersumber dari negara-negara adidaya yang tengah dilanda krisis utang dapat menyebabkan kekhawatiran investor untuk berinvestasi. Sedangkan ekspektasi

dimaksudkan kepada harapan investor terhadap pemerintah setempat dalam mempercepat pemulihan ekonomi (Husnan, 2005).

Umumnya dalam menghadapi sentimen negatif pasar modal, investor cenderung menghindari risiko. Namun bagaimanapun risiko harus tetap diatasi. Salah satu cara untuk mengatasi risiko pada instrumen investasi saham adalah melakukan *hedging*. *Hedging* merupakan suatu investasi pada instrumen investasi yang mendasarinya (*underlying asset*) yang dilakukan oleh investor untuk melindungi risiko portofolio investasi (Wilmott, 2007). Berbeda halnya dengan obligasi, faktor yang mendasari obligasi merupakan tingkat bunga yang tidak dapat diperjualbelikan. Hal ini mengakibatkan risiko tidak dapat sepenuhnya diatasi sehingga menimbulkan adanya faktor *market price of risk*. Penentuan nilai *market price of risk* sangat diperlukan dalam manajemen risiko investasi obligasi.

Market price of risk merupakan tambahan keuntungan yang diharapkan investor untuk menutupi satu unit risiko investasi. *Market price of risk* bernilai positif berarti investor bersifat *greedy*, yakni investor memiliki keberanian untuk mengambil risiko meskipun memiliki peluang untuk rugi. Begitu pula sebaliknya, jika *market price of risk* bernilai negatif berarti investor bersifat *fear*, yakni investor hanya berani mengambil risiko jika memiliki peluang memperoleh keuntungan (Ahmad, & Wilmott, 2007). Berdasarkan uraian tersebut perilaku investor dapat dilihat dari besarnya nilai *market price of risk*.

Pada tesis ini dibahas perilaku investor terhadap instrumen keuangan obligasi melalui analisis model *market price of risk* terkait model tingkat bunga satu faktor. Metode yang digunakan dalam analisis model lebih didasarkan pada analisis data empiris tingkat bunga obligasi yang diperkenalkan oleh Paul Wilmott. *Market price of risk* diperoleh melalui analisis *slope yield-curve* pada *short end* yang terkait dengan model tingkat bunga satu faktor (Wilmott, 2007).

Model tingkat bunga satu faktor dan model *market price of risk* merupakan suatu persamaan differensial stokastik yang terdiri dari struktur *drift* dan struktur volatilitas. Parameter struktur *drift* diperoleh berdasarkan analisis distribusi yang memenuhi persamaan *forward Fokker-Planck*, sedangkan parameter struktur volatilitas diperoleh berdasarkan analisis pada variansi data.

Setelah diperoleh model *market price of risk* terkait model tingkat bunga satu faktor berdasarkan data tingkat obligasi suatu negara, selanjutnya dilakukan analisis pergerakan dari *market price of risk*. Pergerakan *market price of risk* mencerminkan perilaku dari investor. Dengan mengetahui perilaku investor, diharapkan dapat membantu investor dalam melakukan pengambilan keputusan investasi. Pada tesis ini analisis model *market price of risk* dilakukan terhadap adalah data historis tingkat bunga obligasi pemerintah Jepang mulai dari 1 September 1996 hingga 31 Agustus 2011 yang dapat diunduh di <http://www.economagic.com/em-cgi/data.exe/bjap/day-intrate01> dan sebagian data dapat dilihat pada Lampiran 1.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup Penelitian

Permasalahan pada tesis ini adalah bagaimana menganalisis pergerakan *market price of risk* terkait model tingkat bunga satu faktor, dan analisis dilakukan pada data historis tingkat bunga obligasi pemerintah Jepang mulai dari 1 September 1996 hingga 31 Agustus 2011.

1.3 Jenis dan Metode Penelitian

Penelitian dilakukan melalui penelusuran literatur dan mensimulasikan pergerakan *market price of risk* dengan menggunakan metode numerik Euler-Maruyama.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tesis ini adalah menganalisis pergerakan *market price of risk* terkait model tingkat bunga satu faktor.

BAB II

MATEMATIKA KEUANGAN DAN TEORI PROBABILITAS

Pada bab ini dibahas teori-teori yang mendukung tesis ini. Pembahasan tesis ini berkaitan dengan manajemen risiko pada investasi obligasi. Oleh karena itu terlebih dahulu pada subbab 2.1 dibahas mengenai teori ekonomi. Selanjutnya produk investasi obligasi dibahas pada subbab 2.1.1. Risiko utama investasi obligasi adalah pergerakan acak tingkat bunga. Tingkat bunga dibahas pada subbab 2.1.2. Dalam investasi obligasi juga harus mempertimbangkan besar kecilnya *yield*. *Yield* merupakan imbal hasil yang diharapkan oleh investor obligasi. *Yield* mempengaruhi harga obligasi, *yield* dan harga obligasi dibahas pada subbab 2.1.3. Untuk melihat kurva mengenai hubungan antara *yield* dengan masa jatuh tempo obligasi dapat dilihat melalui *yield-curve* yang akan dibahas pada subbab 2.1.4. Tambahan keuntungan yang diharapkan investor obligasi terhadap satu unit risiko dapat dilihat melalui nilai *market price of risk* yang dibahas pada subbab 2.1.5.

Pergerakan acak *market price of risk* melibatkan adanya unsur probabilitas di dalamnya. *Market price of risk* maupun tingkat bunga obligasi diasumsikan merupakan suatu peubah acak sehingga pada subbab 2.2 dibahas mengenai teori probabilitas dan pada subbab 2.2.1 dibahas mengenai probabilitas transisi. Selanjutnya pada subbab 2.2.2 dibahas mengenai persamaan *forward Fokker-Planck*. Solusi dari persamaan *forward Fokker-Planck* yang dibahas pada subbab 2.2.3 berdistribusi *steady-state*. Pembahasan mengenai persamaan *forward Fokker-Planck* dan distribusi *steady-state* berguna pada saat estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor maupun model *market price of risk*. Pada subbab 2.2.4 dibahas mengenai distribusi normal dan pada subbab 2.2.5 dibahas distribusi lognormal yang digunakan pada penentuan distribusi tingkat bunga obligasi.

Pergerakan tingkat bunga obligasi maupun *market price of risk* berubah-ubah mengikuti proses stokastik, pada subbab 2.3 dibahas mengenai proses stokastik dan salah satu contoh proses stokastik yakni proses Wiener dibahas pada subbab 2.3.1. Proses stokastik tingkat bunga obligasi maupun *market price of risk*

dapat dijelaskan melalui suatu persamaan diferensial stokastik yang dibahas pada subbab 2.3.2.

Selanjutnya pada subbab 2.4 dibahas mengenai metode numerik. Metode numerik digunakan sebagai aproksimasi pencarian solusi. Pada subbab 2.4.1 dibahas mengenai metode *Least square*. Metode *least square* digunakan ketika melakukan estimasi parameter struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor dan model *market price of risk*. Pada subbab 2.4.2 dibahas mengenai interpolasi Lagrange dan pada subbab 2.4.3 dibahas mengenai metode Euler-Maruyama sebagai metode pencarian solusi dari persamaan diferensial stokastik dan digunakan untuk mensimulasikan solusi model tingkat bunga satu faktor dan model *market price of risk*. Terakhir pada bab 2.4.4 dibahas mengenai *root mean square error* (RMSE).

2.1 Teori ekonomi

Dalam dunia ekonomi, setiap manusia selalu ingin mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya dan mengurangi risiko sekecil-kecilnya. Berbagai usaha dilakukan manusia untuk mendapatkan keuntungan salah satunya dengan melakukan investasi.

Selain menawarkan keuntungan yang besar, investasi juga memiliki unsur ketidakpastian atau risiko. Apabila investor mengharapkan untuk memperoleh tingkat keuntungan yang tinggi, maka ia harus menanggung risiko yang tinggi pula. Namun investor tidak mengetahui dengan pasti hasil yang akan diperolehnya dari investasi yang dilakukannya, sehingga perlu dilakukan manajemen risiko investasi. Salah satu risiko utama yang mempengaruhi harga obligasi adalah pergerakan acak tingkat bunga (BSMR, 2010), dan salah satu strategi manajemen risiko obligasi dapat dilakukan melalui strategi *hedging* pada obligasi lain yang memiliki masa jatuh tempo yang berbeda. Hal ini mengakibatkan munculnya faktor *market price of risk* yang dibahas pada subbab 3.2.

Pada subbab-subbab berikut ini dibahas mengenai teori-teori dasar ekonomi pada obligasi.

2.1.1 Obligasi

Salah satu produk investasi dengan pendapatan tetap (*fix income instrument*) adalah obligasi. Obligasi merupakan suatu kontrak jangka panjang dimana peminjam setuju untuk melakukan pembayaran bunga dan pokok pinjaman pada tanggal tertentu kepada pemegang obligasi (Husnan, 2005). Untuk menghasilkan suatu strategi investasi obligasi yang baik diperlukan suatu analisis terhadap faktor-faktor yang berpengaruh terhadap harga obligasi. Harga obligasi dipengaruhi oleh risiko dan tingkat pengembalian yang diharapkan dari obligasi tersebut.

Berdasarkan penerbitnya, obligasi dapat dibedakan atas tiga jenis :

1. Obligasi pemerintah,
2. Obligasi perusahaan milik negara,
3. Obligasi perusahaan swasta.

Obligasi pemerintah merupakan obligasi yang paling diminati oleh para investor. Hal ini dikarenakan para investor percaya akan kemampuan pemerintah untuk dapat membayar utangnya saat jatuh tempo, dengan perkataan lain obligasi pemerintah memiliki risiko gagal bayar yang sangat kecil. Selanjutnya berikut ini adalah klasifikasi obligasi berdasarkan sistem pembayarannya.

1. *Coupon bond*.

Coupon bond memberikan bunga secara periodik.

2. *Zero coupon-bond*.

Bunga pada *zero coupon-bond* dibayarkan sekaligus pada awal transaksi.

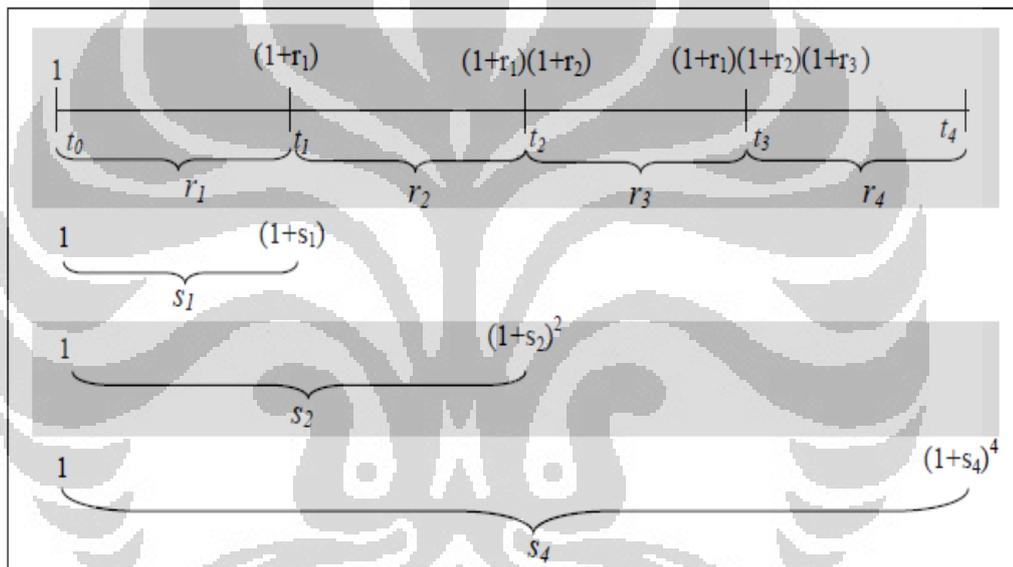
Implementasi pada tesis ini menggunakan jenis obligasi pemerintah *zero coupon-bond*. Selanjutnya pada subbab 2.1.2 berikut dibahas mengenai tingkat bunga.

2.1.2 Tingkat bunga

Tingkat bunga dinyatakan sebagai rasio antara besarnya bunga yang diterima dengan besarnya modal yang dipinjam, dan biasanya dinyatakan dalam prosentase per tahun. Salah satu faktor yang mempengaruhi besar kecilnya tingkat

bunga pada obligasi adalah lamanya masa jatuh tempo. Semakin panjang masa jatuh tempo pembayaran, maka semakin tinggi tingkat bunga yang diberikan. Sebaliknya, semakin pendek masa jatuh tempo pembayaran, maka tingkat bunga yang akan dikenakan pada peminjam akan semakin rendah pula.

Tingkat bunga dapat diklasifikasikan menjadi dua jenis yaitu *spot-rate*, dan *short-rate*. *Spot-rate* s_t , didefinisikan sebagai tingkat bunga yang dikenakan atas modal yang dipinjam di waktu sekarang t_0 hingga waktu jatuh tempo t . Sedangkan *short-rate* r_t , didefinisikan sebagai tingkat bunga yang berlaku untuk suatu interval waktu t tertentu. Untuk lebih jelasnya, berikut ini diberikan ilustrasi *spot-rate* dan *short-rate* (Luenberger, 1998).



Gambar 2.1. Tingkat bunga *spot-rate* s_t dan *short-rate* r_t

Dalam tesis ini, tingkat bunga yang akan dibahas adalah tingkat bunga *short-rate* r_t .

Berdasarkan (Kellison, 1991) terdapat beberapa ukuran tingkat bunga, diantaranya:

1. *Amount function*

Misalkan $a(t)$ adalah nilai akumulasi pada waktu t untuk investasi awal sebesar 1 dan terdapat investasi awal (pokok) sebesar k pada awal periode, maka *amount function* $A(t)$ adalah

$$A(t) = ka(t), \tag{2.1}$$

sehingga untuk $a(0) = 1$ menghasilkan $A(0) = k$.

Terdapat salah satu metode penghitungan bunga yang biasa digunakan, yaitu bunga majemuk (*compound interest*). Pada metode penghitungan bunga dengan bunga majemuk, pokok beserta bunga yang diperoleh pada suatu periode diinvestasikan kembali pada periode berikutnya. Secara umum, *amount function* pada waktu t , $A(t)$, dari pokok $A(0)$ dengan metode penghitungan bunga majemuk adalah

$$A(t) = A(0)(1 + i)^t,$$

untuk $t \geq 0$ dengan i adalah tingkat bunga majemuk untuk setiap periode.

Pada penghitungan bunga majemuk, terdapat dua cara pengukuran tingkat bunga yaitu tingkat bunga efektif dan tingkat bunga nominal. Tingkat bunga efektif didefinisikan sebagai rasio dari bunga yang diperoleh dalam satu periode terhadap jumlah uang yang diinvestasikan pada awal periode. Tingkat bunga efektif pada periode ke- n ditulis sebagai

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)}, \quad \text{untuk } n \geq 1.$$

Jika bunga dibayar sebanyak m kali dalam satu periode, maka tingkat bunga dalam satu periode disebut tingkat bunga nominal dan dinotasikan sebagai $i^{(m)}$. Sedangkan tingkat bunga efektif untuk masing-masing m periode adalah

$$i = i^{(m)}/m.$$

Misalkan seseorang menginvestasikan pokok sebesar 1 selama satu periode pada tingkat bunga efektif i , maka nilai akumulasinya adalah

$$A(1) = 1 + i.$$

Jika investasi dilakukan juga pada tingkat bunga nominal $i^{(m)}$ yang dikonversikan m kali, maka nilai akumulasinya adalah

$$A(1) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m,$$

sehingga

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m,$$

$$i^{(m)} = m((1 + i)^{1/m} - 1).$$

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai faktor diskon.

2. Faktor diskon

Suku $\frac{1}{1+i}$ disebut faktor diskon (*discount factor*), karena “mendiskonkan” nilai akhir investasi dari akhir periode ke-awal periode investasi. Faktor diskon diberi simbol v , yaitu

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Secara umum, untuk mendapatkan nilai akhir investasi sebesar satu pada akhir periode t , besarnya nilai investasi awal pada waktu 0 adalah

$$v^t = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t.$$

3. Force of interest

Force of interest δ , merupakan pengukuran bunga untuk waktu sesaat. *Force of interest* pada waktu t , δ_t , dapat dipandang sebagai tingkat bunga nominal yang dikonversikan secara kontinu, yaitu

$$\begin{aligned}\delta_t &= \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \frac{i^{(m)}}{m}.\end{aligned}$$

$\frac{i^{(m)}}{m}$ merupakan tingkat bunga efektif dibayar sebanyak m kali dalam 1 periode, dan tingkat bunga efektif pada periode ke $t + \frac{1}{m}$ adalah $\frac{A(t+\frac{1}{m})-A(t)}{A(t)}$. Sehingga persamaan δ_t di atas dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\delta_t &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \frac{A(t+\frac{1}{m})-A(t)}{A(t)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{A(t+\frac{1}{m})-A(t)}{1/m}\right)}{A(t)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(A(t+h)-A(t))}{h} \\ &= \frac{A'(t)}{A(t)},\end{aligned}\tag{2.2}$$

dengan $A'(t)$ merupakan turunan pertama dari *amount function* $A(t)$.

Persamaan (2.2) dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\delta_t &= \frac{d \ln A(t)}{dt}, \\ \int_0^t \delta_r dr &= \int_0^t \frac{d \ln A(r)}{dr} dr\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln A(r) \Big|_0^t \\
&= \ln \frac{A(t)}{A(0)},
\end{aligned}$$

sehingga persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$A(t) = A(0)e^{\int_0^t \delta_r dr}. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dapat diinterpretasikan sebagai nilai pokok sebesar $A(0)$ dengan *force of interest* δ_r akan berkembang menjadi $A(t)$.

Selanjutnya berdasarkan persamaan (2.1) yakni $A(t) = ka(t)$, dan persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai

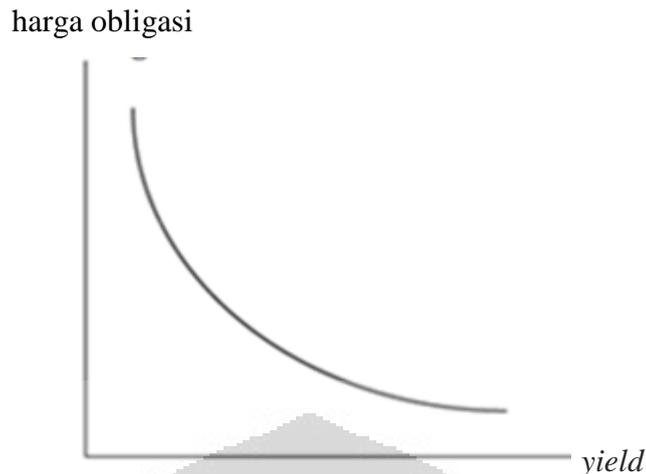
$$\begin{aligned}
ka(t) &= A(0)e^{\int_0^t \delta_r dr} \\
&= ke^{\int_0^t \delta_r dr}, \\
a(t) &= e^{\int_0^t \delta_r dr}.
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Ketiga ukuran tingkat bunga yakni *amount function* $A(t)$, faktor diskon v^t , dan *force of interest* δ_t , akan digunakan untuk menentukan *yield to maturity* yang dibahas pada subbab 2.1.3 berikut ini.

2.1.3 Yield dan Harga Obligasi

Harga dan *yield* obligasi merupakan dua peubah penting dalam transaksi obligasi bagi investor. *Yield* merupakan imbal hasil yang diberikan atas investasi modal seorang investor. *Yield* sampai jatuh tempo (*yield to maturity*) merupakan tingkat pengembalian (*return*) yang diterima jika memegang obligasi sampai dengan jatuh tempo. Secara khusus semakin tinggi tingkat pengembalian hingga jatuh tempo, semakin rendah tingkat perubahan harga obligasi.

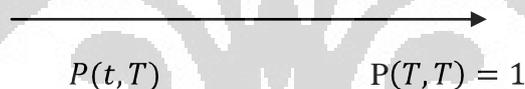
Menurut Van Horne dan Wachowicz (1997) jika tingkat bunga meningkat sehingga *yield* yang diharapkan investor juga meningkat, maka harga obligasi akan menurun. Jika tingkat bunga menurun, harga obligasi meningkat. Sehingga tingkat bunga dan harga obligasi bergerak dalam arah yang berlawanan. Dari pernyataan diatas, menunjukkan bahwa keberagaman tingkat bunga dapat menyebabkan keberagaman harga obligasi. Hubungan *yield* dan harga obligasi tersebut dapat digambarkan dalam sebuah kurva sebagai berikut.



Gambar 2.2. Grafik harga obligasi terhadap *yield*

Harga obligasi merupakan jumlah *present value* dari arus kas yang diharapkan selama periode obligasi tersebut. Berikut adalah ilustrasi untuk mendapatkan *yield to maturity* berdasarkan harga *zero coupon-bond*.

Suatu *zero coupon-bond* yang memiliki nilai nominal satu pada waktu jatuh tempo T dapat dilihat pada Gambar 2.3 berikut:



Gambar 2.3. Ilustrasi Harga *zero coupon-bond* pada saat t dengan jatuh tempo di T .

Keterangan:

$P(t, T)$: Harga *zero coupon-bond* pada saat t dengan jatuh tempo di T .

$P(T, T)$: Nilai nominal di T .

$R(t, T)$: *Yield to maturity* (YTM). YTM diasumsikan mengikuti *force of interest* yang telah dibahas pada subbab 2.1.2.

Berdasarkan ukuran tingkat bunga, Gambar 2.3 dapat dijelaskan sebagai berikut : *zero coupon-bond* membayarkan nilai nominal satu pada waktu jatuh tempo T berarti $P(T, T) = 1$ atau $A(T) = 1$. Harga *zero coupon-bond* pada saat t dengan jatuh tempo di T berarti investasi di awal periode saat t yaitu $k = P(t, T)$. $R(t, T)$ diasumsikan mengikuti *force of interest* dan bernilai konstan, sehingga berdasarkan persamaan (2.4) untuk panjang interval obligasi $T - t$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 a(T) &= e^{\int_t^T R(t,T) dr} \\
 &= e^{R(t,T)(T-t)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Selanjutnya berdasarkan keterangan tersebut dan berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
 A(T) &= ka(T), \\
 1 &= P(t, T)e^{[R(t,T)(T-t)]}, \\
 P(t, T) &= e^{-[R(t,T)(T-t)]}, \\
 \ln P(t, T) &= -R(t, T)(T - t),
 \end{aligned}$$

maka *yield to maturity* $R(t, T)$ adalah

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T).
 \tag{2.6}$$

Yield to maturity $R(t, T)$ akan digunakan pada saat analisis *slope yield-curve* pada *short-end* yang dibahas pada subbab 3.2. Selanjutnya pada subbab berikut dibahas mengenai *yield-curve*.

2.1.4. *Yield-curve*

Yield-curve merupakan hubungan antara *yield* obligasi dengan masa jatuh temponya. *Yield curve* menjelaskan hubungan antara masa jatuh tempo (pada sumbu horisontal) dalam satuan waktu dengan *yield to maturity* (sumbu vertikal) dalam prosentase pada waktu tertentu. Umumnya *yield curve* merupakan fungsi naik, semakin lama masa jatuh tempo maka *yield to maturity* akan semakin besar.

Terdapat dua istilah dalam *yield-curve*. Pertama, istilah *long-end* pada *yield-curve*, yaitu obligasi dengan masa jatuh tempo lebih dari satu tahun. Kedua, istilah *short-end* pada *yield-curve*. *Short-end* pada *yield-curve* berarti obligasi dengan masa jatuh tempo kurang dari atau sama dengan satu tahun. Penjelasan lebih dalam mengenai *yield-curve* dapat dilihat di (Khader, 2008).

Pada tesis ini digunakan *short-end* pada *yield-curve* yang dibahas pada subbab 3.2. Selanjutnya pada subbab berikut dibahas mengenai *market price of risk*.

2.1.5. *Market Price of Risk*

Market price of risk (λ) merupakan tambahan keuntungan yang diharapkan investor untuk menutupi satu unit risiko investasi (Wilmott, 2007). Dengan perkataan lain *market price of risk* (λ) merupakan selisih antara tingkat pengembalian yang diharapkan dengan tingkat pengembalian bebas risiko untuk setiap satu unit risiko. *Market price of risk* diformulasikan sebagai

$$\lambda_t = \frac{E(r_t) - r_t}{\sigma}, \quad (2.7)$$

dengan $E(r_t)$ menyatakan *expected return*, r_t menyatakan tingkat bebas risiko, dan σ menyatakan akar dari variansi.

Market price of risk bernilai positif berarti investor bersifat *greedy*, yakni investor memiliki keberanian untuk berinvestasi pada instrumen investasi yang memiliki risiko tinggi. Begitu pula sebaliknya, jika *market price of risk* bernilai negatif berarti investor bersifat *fear*, yakni investor hanya berani mengambil risiko jika memiliki peluang memperoleh keuntungan. Berdasarkan keterangan tersebut *market price of risk* dapat menggambarkan perilaku dari investor. Pada tesis ini akan dianalisis mengenai pergerakan *market price of risk*.

Setelah dibahas mengenai teori-teori ekonomi, selanjutnya pada subbab berikut dibahas mengenai teori probabilitas.

2.2 **Teori probabilitas**

Pergerakan acak *market price of risk* melibatkan adanya unsur probabilitas di dalamnya. *Market price of risk* maupun tingkat bunga obligasi diasumsikan merupakan suatu peubah acak. Setiap peubah acak memiliki distribusi dalam menggambarkan sifatnya. Pada subbab ini dibahas mengenai probabilitas transisi, persamaan *forward Fokker-Planck* dan beberapa distribusi yang digunakan ketika dilakukan estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor maupun model *market price of risk*.

2.2.1 Probabilitas Transisi

Probabilitas transisi merupakan probabilitas suatu peubah acak pada masa yang akan datang berada pada suatu interval nilai tertentu jika diketahui nilainya untuk saat ini. Berikut adalah definisi probabilitas transisi.

Definisi 2.1

Probability density function (pdf) transisi $p(y', t'|y, t)$ adalah

$$Prob(a < y' < b \text{ pada saat } t' | y \text{ pada saat } t) = \int_a^b p(y', t'|y, t) dy, \quad (2.8)$$

yang mempunyai arti 'probabilitas peubah acak y' pada masa yang datang berada diantara a dan b pada saat t' , diketahui y pada saat t (Wilmott, 2007).

Probabilitas transisi ini sebagai pengantar pembahasan persamaan *forward Fokker-Planck* yang dibahas pada subbab berikut ini.

2.2.2 Persamaan *Forward Fokker-Planck*

Misalkan terdapat *pdf* transisi yang memenuhi persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p u(r_t)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p w(r_t)^2)}{\partial r_t^2}, \quad (2.9)$$

persamaan tersebut disebut persamaan *forward Fokker-Planck*. Suku pertama pada ruas kanan persamaan (2.9) merupakan bagian volatilitas, suku kedua merupakan bagian drift. Persamaan *forward Fokker-Planck* ini menggambarkan bagaimana perubahan evolusi persamaan (2.9) secara probabilistik terhadap waktu. Persamaan ini biasa digunakan untuk mengetahui distribusi suatu peubah acak pada waktu yang akan datang jika diberikan nilai peubah acak untuk saat ini.

2.2.3 Distribusi *Steady-State*

Distribusi *steady-state* mengisyaratkan bahwa untuk $t' \rightarrow \infty$ distribusi dari probabilitas bersyarat $p(y, t | y', t')$ akan saling bebas dengan nilai awal y saat t .

Sehingga untuk persamaan *forward Fokker-Planck*, distribusi *steady-state* ini harus memenuhi

$$\frac{\partial p_{\infty}}{\partial t} = 0.$$

Berdasarkan persamaan (2.9), persamaan diatas dapat ditulis

$$-\frac{\partial p_{\infty} u(r_t)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p_{\infty} w(r_t)^2)}{\partial r_t^2} = 0. \quad (2.10)$$

Persamaan *Fokker-Planck* dan distribusi *steady-state* digunakan ketika melakukan estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor maupun model *market price of risk*.

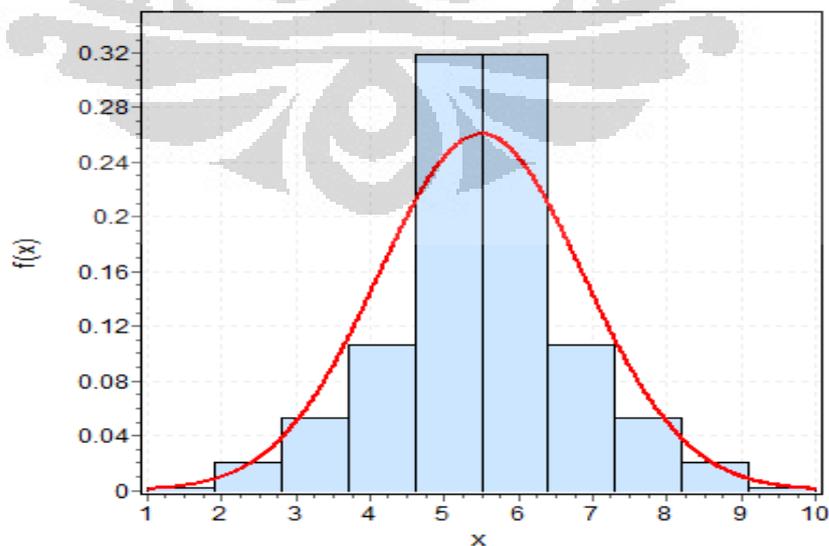
Selanjutnya pada subbab berikut ini dibahas mengenai distribusi normal dan distribusi lognormal.

2.2.4 Distribusi Normal

Distribusi normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham de Moivre pada tahun 1733. Fungsi *probability density function (pdf)* distribusi normal adalah (Hogg dan Craig, 1995)

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.11)$$

dengan *mean* μ dan standar deviasi σ . Berikut adalah salah satu contoh grafik *pdf* distribusi normal.



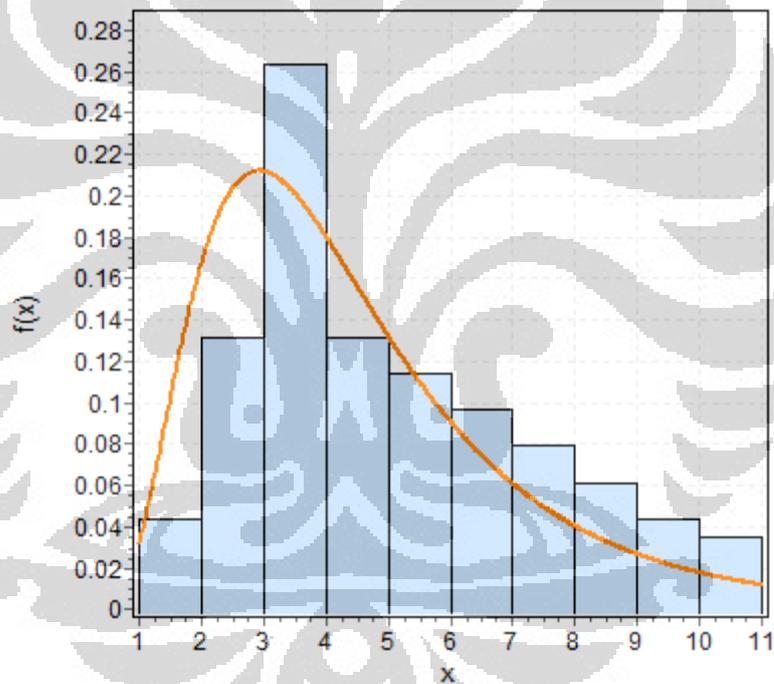
Gambar 2.4. Grafik *pdf* distribusi normal

2.2.5 Distribusi Lognormal

Peubah acak kontinu Y berdistribusi lognormal jika peubah acak $X=\ln(Y)$ berdistribusi normal dengan mean α dan variansi σ^2 . Sehingga untuk data yang berdistribusi lognormal maka logaritma data harus berdistribusi normal. Fungsi *pdf* distribusi lognormal adalah (Walpole, 1998)

$$f(Y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma Y} e^{-\frac{(\log Y-\alpha)^2}{2\sigma^2}} & , x > 0, \\ 0 & , x < 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

dengan mean e^α dan variansi $(e^{\sigma^2}-1)e^\alpha$. Berikut adalah salah satu contoh kurva *pdf* distribusi lognormal.



Gambar 2.5. Grafik *pdf* distribusi lognormal

Distribusi normal dan distribusi lognormal akan digunakan pada waktu penentuan distribusi tingkat bunga obligasi untuk memperoleh estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor yang akan dibahas pada subbab 3.3.

Selanjutnya pada subbab berikut akan dibahas mengenai proses stokastik.

2.3 Proses Stokastik

Definisi 2.2

Proses stokastik $\{X_t, t \geq 0\}$ adalah himpunan dari peubah acak yang mempunyai indeks (Ross, S.M., 1996).

Dalam hal ini, t sering diinterpretasikan sebagai waktu dan X_t sebagai *state* dari proses pada waktu t . Dengan demikian, T menunjukkan suatu himpunan beranggotakan titik waktu. Untuk masing-masing t dalam himpunan indeks T , X_t adalah peubah acak. Dengan mengasumsikan bahwa tingkat bunga merupakan peubah acak, maka pergerakan tingkat bunga merupakan suatu proses stokastik.

Salah satu contoh proses stokastik yang paling sering digunakan dalam menggambarkan pergerakan acak dari suatu peubah acak adalah proses Wiener. Proses Wiener dibahas pada subbab 2.3.1 berikut ini.

2.3.1. Proses Wiener

Proses Wiener merupakan suatu proses stokastik yang sangat penting karena berfungsi sebagai faktor acak pada model-model stokastik. Berikut adalah definisi dari proses Wiener.

Definisi 2.3

Suatu proses stokastik $\{X_t, t \geq 0\}$ adalah proses Wiener jika,

1. $X(t)$ adalah fungsi kontinu dalam t , dengan $t \geq 0$ dan memenuhi $X(0) = 0$,
2. Untuk setiap pasang interval waktu yang saling lepas $(t_1, t_2], (t_3, t_4]$, dengan $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, kenaikan $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$, adalah peubah acak yang saling bebas, dan tiap kenaikan tersebut berdistribusi normal dengan

$$E[X(t_i) - X(t_{i+1})] = 0,$$

$$\text{Var}[X(t_i) - X(t_{i+1})] = t_{i+1} - t_i.$$

(Ross, S.M., 1996).

Tesis ini menggunakan proses Wiener sebagai faktor acak model tingkat bunga satu faktor dan model *market price of risk* yang dibahas pada bab 3.

Selanjutnya pada subbab 2.3.2 berikut ini dibahas mengenai persamaan diferensial stokastik yang melibatkan proses Wiener didalamnya.

2.3.2 Persamaan Diferensial Stokastik

Pergerakan tingkat bunga dan *market price of risk* yang bersifat acak dapat dinyatakan oleh suatu persamaan diferensial stokastik berikut ini.

Definisi 2.4

Misalkan W_t menyatakan proses Wiener dengan $t \in [0, T]$. Suatu persamaan dengan bentuk

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad (2.13)$$

dengan fungsi $\mu(X_t, t)$ dan $\sigma(X_t, t)$ diketahui, maka persamaan tersebut disebut suatu persamaan diferensial stokastik (Klebaner, F.C., 1998).

Fungsi $\mu(X_t, t)$ dinamakan struktur *drift*, sedangkan fungsi $\sigma(X_t, t)$ dinamakan struktur volatilitas. Struktur *drift* dan volatilitas persamaan diferensial stokastik yang akan dibahas pada bab 3 diasumsikan bebas terhadap waktu.

Selanjutnya pada subbab 2.4 berikut ini dibahas mengenai metode numerik.

2.4 Metode Numerik

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang rumit. Model matematika yang rumit ini ada kalanya tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik untuk mendapatkan solusi sejatinya (*exact solution*). Bila metode analitik tidak dapat diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan

matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa.

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi hasil metode numerik selalu berbentuk angka. Kedua, dengan metode numerik, kita hanya memperoleh solusi aproksimasi, namun solusi aproksimasi dapat diperoleh dengan ketelitian yang diinginkan. Solusi aproksimasi jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*). *Error* yang digunakan pada simulasi model pada tesis ini adalah *root mean square error* (RMSE) yang dijelaskan pada subbab 2.4.4.

2.4.1 Metode *Least Square*

Misalkan terdapat sejumlah titik data (x_i, y_i) , dan terlihat terdapat hubungan linier antara x_i dan y_i , maka salah satu metode aproksimasi linier adalah dengan menggunakan metode *least square*. Metode *least square* merupakan salah satu pendekatan dalam menentukan aproksimasi linier terbaik dengan cara meminimasi penjumlahan kuadrat error yang dihasilkan antara nilai y_i dengan fungsi linier yang dibuat $y_i = a_i x_i + a_0$, yakni

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m |y_i - (a_i x_i + a_0)|^2 \quad (2.14)$$

dengan parameter a_0 dan a_1 .

Syarat $E(a_0, a_1)$ minimum, adalah turunan parsial persamaan (2.14) sama dengan nol, yakni

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^m (y_i - (a_i x_i + a_0))^2 &= 0, \\ -2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_i x_i + a_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^m |y_i - (a_i x_i + a_0)|^2 &= 0, \\ -2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_i x_i + a_0) (x_i) &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Persamaan (2.15) dan (2.16) diatas dapat ditulis ke dalam bentuk sistim persamaan normal menjadi

$$a_0 m + a_1 \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i, \quad (2.17)$$

dan

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m (x_i)^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i. \quad (2.18)$$

Sehingga solusi dari sistim persamaan linier normal adalah

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i)^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i y_i \sum_{i=1}^m x_i}{m(\sum_{i=1}^m (x_i)^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}, \quad (2.19)$$

dan

$$a_1 = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m y_i \sum_{i=1}^m x_i}{m(\sum_{i=1}^m (x_i)^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}. \quad (2.20)$$

(Burden, 2010).

Setelah dibahas mengenai metode *least square*, selanjutnya pada subbab 2.4.2 dibahas mengenai interpolasi Lagrange.

2.4.2 Interpolasi Lagrange

Interpolasi Lagrange diterapkan untuk mendapatkan aproksimasi fungsi polinomial $P(x)$ berderajat tertentu yang melewati sejumlah titik data. Jika x_0, x_1, \dots, x_n merupakan $n + 1$ bilangan sebarang yang berbeda dan f merupakan fungsi yang memiliki nilai untuk bilangan tersebut, maka terdapat fungsi polinomial $P(x)$ yang unik berderajat paling banyak n dengan

$$f(x_k) = P(x_k), \quad \text{untuk setiap } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Fungsi polinomial yang dimaksud adalah

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{n,k}(x), \quad (2.21)$$

dengan

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}, \quad \text{untuk setiap } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

(Burden, 2010).

2.4.3 Metode Euler-Maruyama

Metode Euler-Maruyama merupakan salah satu metode aproksimasi untuk mengestimasi solusi dari suatu persamaan diferensial stokastik. Berikut adalah solusi aproksimasi persamaan diferensial stokastik (2.13) dengan menggunakan metode Euler-Maruyama

$$x_{t+1} = x_t + \mu(x_t)\Delta t + \sigma(x_t)\Delta W_t \quad (2.22)$$

dengan $t = 0, 1, \dots, N - 1$, nilai awal x_0 dan perubahan proses Wiener $\Delta W_t = W_{\tau_{t+1}} - W_{\tau_t}$.

Implementasi pada bab IV disimulasikan aproksimasi solusi dari model tingkat bunga satu faktor dan model *market price of risk* dengan menggunakan metode Euler-Maruyama, dan dihitung *error* melalui perhitungan RMSE yang dijelaskan pada subbab 2.4.4 berikut ini.

2.4.4 Root Mean Square Error

Root mean square error (RMSE) merupakan akar dari MSE yang dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left(\overline{x_k(t)} - x_k(t) \right)^2}, \quad (2.23)$$

dimana M adalah banyaknya simulasi yang dilakukan, $\overline{x_k(t)}$ adalah rata-rata aproksimasi solusi di t dan $x_k(t)$ adalah data historis di t .

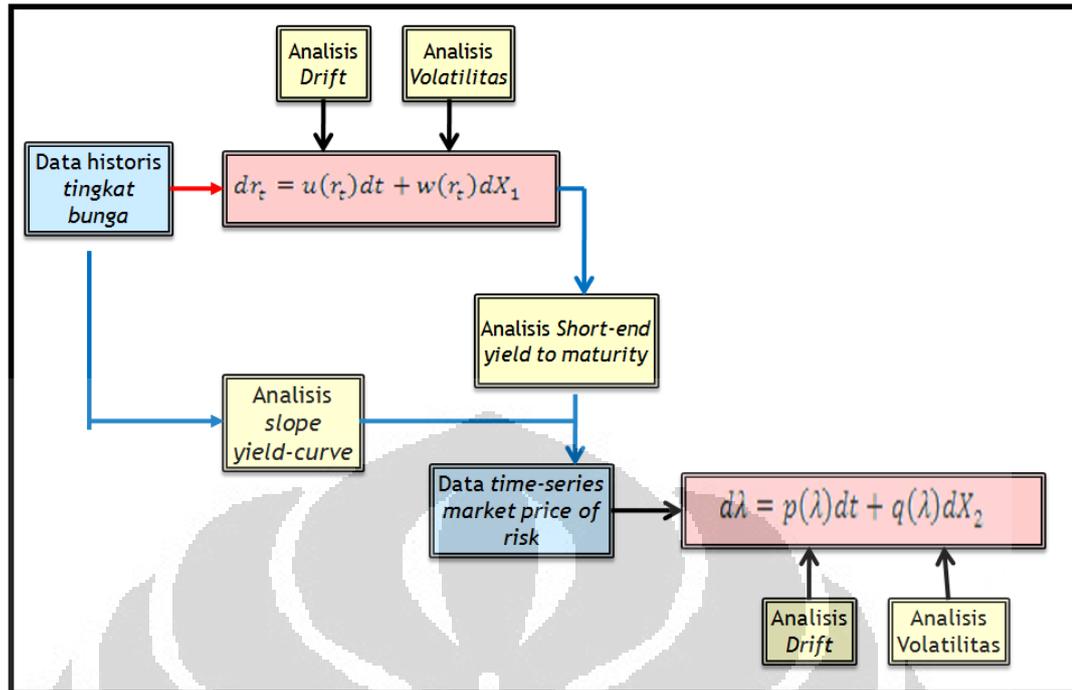
BAB III

MODEL TINGKAT BUNGA SATU FAKTOR DAN MODEL *MARKET PRICE OF RISK*

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai teori-teori yang digunakan pada pembahasan model tingkat bunga satu faktor dan model *market price of risk*. *Market price of risk* merupakan tambahan keuntungan yang diharapkan investor untuk menutupi satu unit risiko investasi. *Market price of risk* dapat menggambarkan karakteristik pasar modal, khususnya pada tesis ini dibahas *market price of risk* yang dapat menggambarkan perilaku investor obligasi. *Market price of risk* bernilai positif berarti investor bersifat *greedy*, dan jika *market price of risk* bernilai negatif berarti investor bersifat *fear* (Ahmad, & Wilmott, 2007). *Market price of risk* diperoleh melalui analisis *slope yield-curve* pada *short end* yang terkait dengan model tingkat bunga satu faktor (Wilmott, 2007). Model tingkat bunga satu faktor pada tesis ini adalah model yang lebih didasarkan pada analisis data empiris tingkat bunga obligasi.

Berdasarkan penjelasan di atas, pada subbab 3.1 dibahas terlebih dahulu mengenai model tingkat bunga satu faktor. Model tingkat bunga terdiri dari struktur volatilitas dan struktur *drift*. Selanjutnya untuk mendapatkan informasi mengenai *market price of risk* dilakukan analisis *slope yield-curve* pada *short end* yang dibahas pada subbab 3.2. Kemudian informasi tersebut dianalisis sedemikian sehingga diperoleh data *time series* untuk *market price of risk*. Pergerakan *market price of risk* bersifat acak sehingga dapat dijelaskan oleh suatu persamaan diferensial stokastik yang dibahas pada subbab 3.3.

Secara garis besar, pembahasan pada bab 3 dapat digambarkan melalui skema berikut:



Gambar 3.1. Skema pembahasan model tingkat bunga satu faktor dan model *market price of risk*.

3.1 Model Tingkat bunga satu faktor

Pada subbab ini dimulai dengan pembahasan mengenai model tingkat bunga satu faktor. Model tingkat bunga satu faktor mendeskripsikan pergerakan tingkat bunga menurut satu sumber keacakan (Hull, 2003). Tingkat bunga yang digunakan pada model tingkat bunga satu faktor ini merupakan tingkat bunga *short-rate* r_t yang mencerminkan tingkat bunga pada obligasi untuk interval waktu jatuh tempo yang sangat pendek.

Pergerakan tingkat bunga obligasi dari hari ke hari bersifat acak, sehingga perlu untuk memodelkan pergerakan dari tingkat bunga obligasi. Model tingkat bunga obligasi yang digunakan pada tesis ini adalah model tingkat bunga satu faktor. Model tingkat bunga satu faktor yang dibahas lebih didasarkan pada data historis tingkat bunga. Adapun model tingkat bunga satu faktor yang dibahas mengacu pada (Wilmott, 2007), merupakan suatu persamaan diferensial stokastik

$$dr_t = u(r_t)dt + w(r_t)dX_t, \quad (3.1)$$

dengan $w(r_t)$ merupakan struktur volatilitas dengan asumsi $w(r_t) = vr_t^\beta$, v dan β merupakan parameter-parameter pada $w(r_t)$, $u(r_t)$ merupakan struktur *drift*, dan X_t merupakan proses Wiener. Diasumsikan struktur *drift* $u(r_t)$ dan struktur volatilitas $w(r_t)$ model tingkat bunga satu faktor yang dibahas bebas terhadap waktu t . Struktur volatilitas $w(r_t)$ pada model tingkat bunga satu faktor menunjukkan gangguan atau variabilitas terhadap r .

Pada subbab 3.1.1 dibahas metode estimasi parameter struktur volatilitas v dan β , dan pada subbab 3.1.2 dibahas metode estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor.

3.1.1 Metode Estimasi Parameter Struktur Volatilitas

Berdasarkan persamaan (3.1), struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor adalah $w(r_t) = vr_t^\beta$, dengan v dan β merupakan parameter-parameter pada $w(r_t)$. Metode yang dilakukan dalam estimasi parameter pada struktur volatilitas v dan β didasarkan pada analisis pada variansi data historis tingkat bunga. Menurut (Ireland, 2005), variansi menggambarkan volatilitas atau variabilitas dari suatu peubah acak. Dengan mengasumsikan tingkat bunga obligasi sebagai peubah acak, maka untuk menggambarkan volatilitas data dapat dilakukan melalui analisis pada variansi data.

Berikut akan diuraikan penurunan formula variansi dengan tujuan untuk memperoleh suatu persamaan yang dapat digunakan pada data tingkat bunga.

$$\begin{aligned}
 \text{var}(dr_t) &= E(dr_t^2) - (E(dr_t))^2 \\
 &= E((u(r_t)dt + w(r_t)dX_t)^2) - (E(dr_t))^2 \\
 &= E\left((u(r_t)dt + vr_t^\beta dX_t)^2\right) - (E(dr_t))^2, \quad \text{karena } w(r_t) = vr_t^\beta, \\
 &= E(u(r_t)^2 dt^2) + 2u(r_t)vr_t^\beta E(dtdX_t) + (vr_t^\beta)^2 E(dX_t)^2 - \\
 &\quad ((u(r_t)dt)^2 + 0 + 0), \quad \text{sifat linier dari ekspektasi dan } E(dX_t) = 0, \\
 &= u(r_t)^2 dt^2 + 0 + (vr_t^\beta)^2 E(dX_t)^2 - (u(r_t)dt)^2 \\
 &= (vr_t^\beta)^2 E(dX_t)^2 \\
 &= (vr_t^\beta)^2 dt, \quad \text{karena } E(dX_t)^2 = dt. \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.2) di atas, maka persamaan

$$\text{var}(dr_t) = E(dr_t^2) - (E(dr_t))^2 \quad (3.3)$$

dapat dinyatakan sebagai

$$\text{var}(dr_t) = (vr_t^\beta)^2 dt. \quad (3.4)$$

Dengan asumsi bahwa nilai dari $(E(dr_t))^2$ sangat kecil, sehingga berdasarkan persamaan (3.3) dan (3.4) dapat diperoleh

$$E(dr_t^2) = (vr_t^\beta)^2 dt. \quad (3.5)$$

Untuk tujuan estimasi parameter v dan β pada struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor $w(r_t)$, persamaan (3.5) dapat dinyatakan sebagai persamaan eksponensial

$$y = ax^b,$$

dengan $y = E(dr_t^2)$, $a = v^2 dt$, $x = r_t$ dan $b = 2\beta$, dan melalui modifikasi aljabar, persamaan $y = ax^b$ dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln ax^b, \\ &= \ln a + b \ln x, \end{aligned} \quad (3.6)$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \ln E[(dr_t)^2] &= \ln(v)^2 dt + 2\beta \ln(r_t) \\ &= 2\ln(v) + \ln dt + 2\beta \ln(r_t). \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\ln E[(dr_t)^2] = 2\beta \ln(r_t) + (2\ln(v) + \ln dt). \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) yang telah diperoleh, digunakan sebagai acuan penentuan parameter struktur volatilitas v dan β pada model tingkat bunga satu faktor yang didasarkan pada data historis tingkat bunga.

Berikut adalah tahapan-tahapan yang dilakukan terhadap data historis tingkat bunga obligasi dalam estimasi parameter struktur volatilitas v dan β .

1. Kelompokkan data historis tingkat bunga menjadi beberapa kelompok data,
2. Tentukan persamaan linier data. Dengan mengacu pada persamaan (3.7), yakni $\ln E[(dr_t)^2] = 2\beta \ln(r_t) + (2\ln(v) + \ln dt)$, akan ditentukan persamaan linier untuk data. Berikut adalah langkah-langkahnya.

Selanjutnya pada subbab 3.1.2 berikut ini dibahas mengenai metode estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor.

3.1.2 Metode Estimasi Parameter Struktur *Drift*

Setelah diperoleh estimasi parameter struktur volatilitas v dan β , selanjutnya dibahas metode estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor. Berdasarkan persamaan (3.1), struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor adalah $u(r_t)$, dengan parameter-parameter yang belum diketahui. Metode yang dilakukan dalam estimasi parameter struktur *drift* didasarkan pada persamaan *forward Fokker-Planck* yang telah dibahas pada subbab 2.2.2 dan analisis distribusi pada data historis tingkat bunga.

Model tingkat bunga satu faktor merupakan suatu persamaan diferensial stokastik dan *pdf* dari tingkat bunga r_t memenuhi persamaan *forward Fokker-Planck* (2.7)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial pu(r_t)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (p v(r_t)^2)}{\partial r_t^2},$$

bukti dapat dilihat pada (Wilmott, 2007). Oleh karena asumsi model tingkat bunga satu faktor pada persamaan (3.1) parameternya tidak bergantung waktu, maka berdasarkan (Ahmad, & Wilmott, 2007), solusi persamaan *forward Fokker-Planck* berdistribusi *steady-state* p_∞ .

Distribusi *steady-state* mempunyai ciri bahwa untuk waktu menuju tak berhingga, maka nilai dari suatu peubah akan saling bebas dengan nilai awalnya. Sehingga berdasarkan persamaan (2.10) distribusi *steady-state* ini harus memenuhi

$$\frac{1}{2} v^2 \frac{d^2}{dr_t^2} (r_t^{2\beta} p_\infty) - \frac{d}{dr_t} (u(r_t) p_\infty) = 0 \quad (3.8)$$

Untuk memperoleh persamaan struktur *drift* $u(r_t)$ dilakukan pengintegralan satu kali pada persamaan (3.8), yakni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v^2 \frac{d^2}{dr_t^2} (r_t^{2\beta} p_\infty) &= \frac{d}{dr_t} (u(r_t) p_\infty), \\ \int \frac{d}{dr_t} (u(r_t) p_\infty) dr_t &= \int \frac{1}{2} v^2 \frac{d^2}{dr_t^2} (r_t^{2\beta} p_\infty) dr_t, \\ u(r_t) p_\infty &= \frac{1}{2} v^2 \frac{d}{dr_t} (r_t^{2\beta} p_\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} v^2 \left(2\beta r_t^{2\beta-1} p_\infty + r_t^{2\beta} \frac{d}{dr_t} p_\infty \right), \\
u(r_t) &= \frac{1}{2p_\infty} v^2 \left(2\beta r_t^{2\beta-1} p_\infty + r_t^{2\beta} \frac{d}{dr_t} p_\infty \right) \\
&= v^2 \beta r_t^{2\beta-1} + \frac{1}{2} v^2 r_t^{2\beta} \frac{d}{dr_t} \ln p_\infty, \quad \text{karena } \ln p_\infty = \frac{1}{p_\infty} \frac{d}{dr_t} p_\infty \\
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta + \frac{1}{2} r_t \frac{d}{dr_t} (\ln p_\infty) \right). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Pada persamaan (3.9) di atas terlihat bahwa struktur *drift* $u(r_t)$ pada model tingkat bunga satu faktor melibatkan *pdf* distribusi *steady state* p_∞ . Oleh karena estimasi struktur *drift* $u(r_t)$ didasarkan pada data historis tingkat bunga, maka distribusi *steady-state* p_∞ diperoleh dengan menentukan distribusi pada data historis tingkat bunga.

Berikut akan dibahas mengenai beberapa tahapan dalam menentukan distribusi dari data historis tingkat bunga.

1. Buat tabel distribusi frekuensi dari data.
2. Buat histogram dan kurva distribusi.
3. Tentukan parameter distribusi yang didekati.

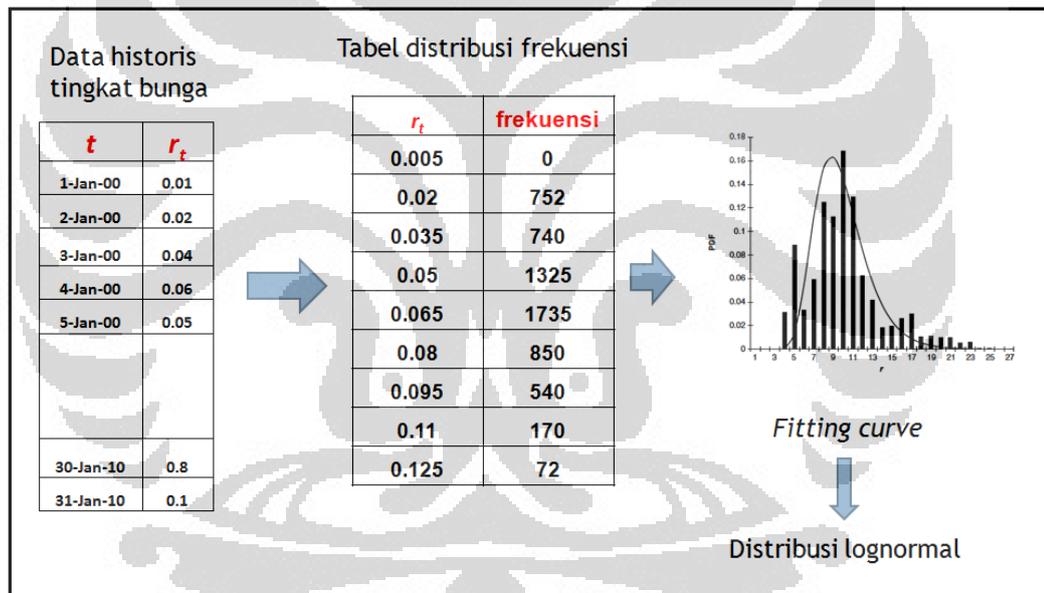
Catatan: Jika kurva mendekati distribusi lognormal, maka parameter pada *pdf* distribusi lognormal sama dengan parameter pada logaritma dari data yang berdistribusi normal.

Jika r_t berdistribusi lognormal, dengan mensubstitusikan *pdf* distribusi lognormal (2.12) pada p_∞ persamaan (3.9), maka persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned}
u(r_t) &= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta + \frac{1}{2} r_t \frac{d}{dr_t} (\ln p_\infty) \right), \\
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta + \frac{1}{2} r_t \frac{d}{dr_t} \left(\ln \left(\frac{1}{\sigma r_t \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\ln \left(\frac{r_t}{\alpha} \right) \right)^2 \right) \right) \right) \right), \\
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta + \frac{1}{2} r_t \frac{d}{dr_t} \left(\ln \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right) + \ln \frac{1}{r_t} + \ln \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\ln \left(\frac{r_t}{\alpha} \right) \right)^2 \right) \right) \right), \\
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta + \frac{1}{2} r_t \left(\frac{d}{dr_t} \ln \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right) + \frac{d}{dr_t} \ln \frac{1}{r_t} + \frac{d}{dr_t} \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\ln \left(\frac{r_t}{\alpha} \right) \right)^2 \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta + \frac{1}{2} r_t \left(0 - \frac{r_t}{r_t^2} - \frac{1}{2\sigma^2} 2 \ln \left(\frac{r_t}{\alpha} \right)^{\frac{1/\alpha}} \right) \right), \\
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta + \frac{1}{2} r_t \left(-\frac{r_t}{r_t^2} - \frac{1}{\sigma^2} \ln \left(\frac{r_t}{\alpha} \right)^{\frac{1}{r}} \right) \right), \\
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{\sigma^2} \ln \left(\frac{r_t}{\alpha} \right) \right) \right), \\
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} \ln \left(\frac{r_t}{\alpha} \right) \right), \\
&= v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\ln \frac{r_t}{\alpha} \right) \right). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Untuk lebih jelasnya, diberikan tabel ilustrasi proses penentuan struktur *drift* $u(r_t)$.



Gambar 3.3 Ilustrasi estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor

Tabel pertama pada Gambar 3.3 di atas merupakan data historis tingkat bunga. Tabel kedua dan seterusnya merupakan tahapan penentuan distribusi data yang dimulai dari penentuan tabel distribusi frekuensi data dilanjutkan dengan pembentukan histogram dan kurva distribusi yang paling merepresentasikan data. Dengan mengetahui parameter distribusi data, parameter struktur volatilitas, v dan

β , maka struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor $u(r_t)$ pada persamaan (3.9) dapat ditentukan.

Setelah dibahas mengenai metode estimasi parameter struktur *drift* $u(r_t)$ dan struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor, dalam hal ini telah terbentuk model tingkat bunga satu faktor yang didasarkan pada analisis data historis tingkat bunga, selanjutnya pada subbab 3.2 berikut ini dibahas mengenai pembentukan data *time-series market price of risk* melalui analisis *slope yield-curve* pada *short-end*.

3.2 Analisis *Slope yield-curve* pada *short-end*

Informasi mengenai *market price of risk* tidak diperoleh dari model tingkat bunga satu faktor. Oleh karena itu dilakukan analisis *slope yield-curve* pada *short-end* untuk memperoleh informasi mengenai *market price of risk* melalui analisis terhadap produk derivatif tingkat bunga yang berkaitan dengan obligasi yakni harga obligasi. Harga obligasi yang dibahas adalah harga obligasi tanpa pembayaran kupon atau yang disebut dengan harga *zero coupon-bond*.

Lemma Ito.

Misalkan suatu peubah X_t mengikuti proses Ito.

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad (3.11)$$

dan misalkan $f(X_t, t)$ merupakan fungsi dari X_t dan t yang kontinu hingga turunan kedua. Lemma Ito menunjukkan bahwa fungsi $f(X_t, t)$ mengikuti proses

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial X_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(X_t, t) \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \right) dt + \sigma(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial X_t} dW_t. \quad (3.12)$$

Diasumsikan tingkat bunga mengikuti proses *mean reverting*, yaitu kecenderungan tingkat bunga untuk kembali menuju rata-rata jangka panjang apabila tingkat bunga berada cukup jauh di atas atau di bawah rata-rata jangka panjang. Berdasarkan lemma Ito pada persamaan (3.12), harga obligasi $V = V(r_t, T)$ adalah

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu_{r_t} \frac{\partial V}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma_{r_t} \frac{\partial V}{\partial r_t} dW_t \quad (3.13)$$

$$= \tilde{\mu}(t, T) dt + \tilde{\sigma}(t, T) dW_t \quad (3.14)$$

dengan $\tilde{\mu}(t, T)$ menyatakan bagian *drift*, yakni

$$\tilde{\mu}(t, T) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu_{r_t} \frac{\partial V}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} \right), \quad (3.15)$$

sedangkan $\tilde{\sigma}(t, T)$ menyatakan bagian volatilitas dari proses stokastik V , yakni

$$\tilde{\sigma}(t, T) = \sigma_{r_t} \frac{\partial V}{\partial r_t}. \quad (3.16)$$

Hedging pada obligasi dilakukan dengan menambah investasi terhadap obligasi lain dengan jatuh tempo yang berbeda atau membentuk portofolio π dua obligasi dengan tanggal jatuh tempo yang berbeda. Portofolio π yang dibentuk dari obligasi pertama dengan jatuh tempo T_1 dan obligasi kedua dengan jatuh tempo T_2 , yakni

$$\pi = V(r_t, T_1) + \Delta V_2(r_t, T_2). \quad (3.17)$$

Investor menentukan proporsi Δ pada obligasi kedua dengan jatuh tempo T_2 untuk meminimumkan risiko. Perubahan nilai portofolio pada selang waktu dt mengakibatkan:

$$d\pi = dV_1 + \Delta dV_2, \quad (3.18)$$

berdasarkan persamaan harga obligasi (3.14), diperoleh

$$d\pi = (\tilde{\mu}_1 + \Delta \tilde{\mu}_2) dt + (\tilde{\sigma}_1 + \Delta \tilde{\sigma}_2) dW_t. \quad (3.19)$$

Bagian volatilitas pada proses stokastik persamaan (3.19) di atas menyatakan variabilitas atau risiko pada portofolio π , oleh karena itu untuk menghilangkan risiko, maka

$$\tilde{\sigma}_1 + \Delta \tilde{\sigma}_2 = 0, \quad (3.20)$$

sehingga diperoleh proporsi obligasi dengan jatuh tempo yang berbeda

$$\Delta = -\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_2}, \quad (3.21)$$

dan berdasarkan persamaan (3.21) nilai dari portofolio yang telah di *hedging* dari persamaan (3.19) adalah

$$d\pi = \left(\tilde{\mu}_1 - \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_2} \tilde{\mu}_2 \right) dt. \quad (3.22)$$

Oleh karena portofolio π ini ditujukan memiliki risiko yang kecil, maka persamaan (3.19) disesuaikan dengan risiko kecil dari tingkat bunga (*risk free*) membentuk relasi

$$d\pi = r_t \pi dt. \quad (3.23)$$

Dengan membandingkan persamaan (3.22) dan persamaan (3.23) pada perubahan waktu dt , diperoleh

$$r_t \pi dt = \left(\tilde{\mu}_1 - \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_2} \tilde{\mu}_2 \right) dt,$$

$$r_t \pi \tilde{\sigma}_2 = \tilde{\mu}_1 \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\mu}_2.$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.17) dan (3.21) pada persamaan di atas diperoleh

$$\begin{aligned} r_t \tilde{\sigma}_2 (V_1 + \Delta V_2) &= \tilde{\mu}_1 \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\mu}_2, \\ r_t \tilde{\sigma}_2 \left(V_1 - \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_2} V_2 \right) &= \tilde{\mu}_1 \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\mu}_2, \\ r_t \tilde{\sigma}_2 V_1 - r_t \tilde{\sigma}_1 V_2 &= \tilde{\mu}_1 \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\mu}_2, \\ r r_{t_2} V_1 - \tilde{\mu}_1 \tilde{\sigma}_2 &= r_t \tilde{\sigma}_1 V_2 - \tilde{\sigma}_1 \tilde{\mu}_2, \\ \frac{r_t V - \tilde{\mu}_1}{\tilde{\sigma}_1} &= \frac{r_t V_2 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{\sigma}_2}, \\ \frac{\tilde{\mu}_1 - r r_{t_2}}{\tilde{\sigma}_1} &= \frac{\tilde{\mu}_2 - r_t V_2}{\tilde{\sigma}_2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Persamaan (3.24) ini berlaku untuk semua waktu jatuh tempo, sehingga diperoleh suatu relasi

$$\tilde{\lambda}(r_t, t) = \frac{\tilde{\mu}(t, T) - r_t(t)V(t, T)}{\tilde{\sigma}(t, T)} \quad (3.25)$$

yang bebas terhadap waktu jatuh tempo T . Ratio $\tilde{\lambda}(r_t, t)$ dinamakan *market price of risk*.

Dari uraian di atas telah ditunjukkan bahwa untuk mengurangi risiko investasi pada obligasi dapat dilakukan dengan melakukan strategi *hedging* pada obligasi lain dengan jatuh tempo berbeda. Hal ini akan menimbulkan adanya faktor *market price of risk* λ_t .

Selanjutnya, ditentukan persamaan harga obligasi yang melibatkan faktor *market price of risk* λ_t . Berdasarkan persamaan (3.25)

$$\tilde{\mu}(t, T) = \tilde{\sigma}(t, T) \lambda_t(r_t, t) + r_t(t)V(t, T), \quad (3.26)$$

sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.26) pada persamaan (3.14) diperoleh

$$dV = (\tilde{\sigma} \lambda_t + r_t V) dt + \tilde{\sigma} dW_t. \quad (3.27)$$

Dengan membandingkan $\tilde{\mu}(t, T)$ persamaan (3.26) dengan $\tilde{\mu}(t, T)$ persamaan (3.15) diperoleh persamaan

$$\lambda_t \sigma_{r_t} \frac{\partial V}{\partial r_t} + r_t V = \frac{\partial V}{\partial t} + \mu_{r_t} \frac{\partial V}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma_{r_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}.$$

Maka persamaan harga *zero coupon-bond* adalah

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu_{r_t} - \lambda \sigma_r) \frac{\partial V}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma_{r_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} - r_t V = 0. \quad (3.28)$$

Model tingkat bunga satu faktor yang dibahas memiliki struktur *drift* $u(r_t)$, dan struktur volatilitasnya $w(r_t)$, maka berdasarkan persamaan (3.25) persamaan harga *zero coupon-bond* adalah

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)) \frac{\partial V}{\partial r_t} + \frac{1}{2} w(r_t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} - r_t V = 0, \quad (3.29)$$

dengan $t \in (0, T)$ dan $r_t > 0$, memenuhi harga obligasi saat jatuh tempo sebesar satu, $V(r_t, T) = 1$.

Persamaan harga *zero coupon-bond* (3.29) di atas, melibatkan faktor *market price of risk* λ_t , namun untuk memperoleh nilai *market price of risk* yang didasarkan pada data historis tingkat bunga, perlu dilakukan analisis terhadap *slope yield-curve* pada *short-end*. Selanjutnya *slope yield-curve* pada *short-end* ini akan disesuaikan dengan *slope* pada data historis tingkat bunga untuk memperoleh informasi mengenai *market price of risk*.

Berikut dibahas tahapan bagaimana menentukan *market price of risk* λ_t melalui analisis *slope yield-curve* pada *short-end* terkait harga *zero coupon-bond*.

1. Tentukan persamaan *yield to maturity* berdasarkan persamaan harga *zero coupon-bond*.
2. Tentukan *slope yield to maturity* untuk masa jatuh tempo yang pendek atau dengan perkataan lain *slope yield-curve* pada *short-end*.
3. Tentukan *slope yield-curve* dari data.
4. Tentukan *market price of risk* melalui penyetaraan *slope yield-curve* pada *short-end* dengan *slope yield-curve* dari data.

Berikut adalah implementasi langkah-langkah di atas.

1. Tentukan persamaan *yield to maturity* seperti yang telah dibahas pada subbab 2.1.4 yang terkait dengan harga *zero coupon-bond* melalui pendekatan ekspansi deret Taylor harga *zero coupon bond*.

Deret Taylor untuk persamaan harga *zero coupon bond*, adalah

$$V(r_t, t) \sim V(r_t, T) - (T - t)V'(r_t, t) - \frac{1}{2!}(T - t)^2V''(r_t, t) - \dots, \quad (3.30)$$

dan karena waktu jatuh tempo T , $V(r_t, T) = 1$, maka persamaan (3.30) dapat ditulis sebagai

$$V(r_t, t) \sim 1 - (T - t)V'(r_t, t) - \frac{1}{2!}(T - t)^2V''(r_t, t) - \dots. \quad (3.31)$$

Misalkan terdapat suatu fungsi $a(r_t) = -V'(r_t, t)$ dan $b(r_t) = -\frac{1}{2!}V''(r_t, t)$, maka deret Taylor persamaan harga *zero coupon-bond* (3.31) dapat ditulis sebagai

$$V(r_t, t) \sim 1 + a(r_t)(T - t) + b(r_t)(T - t)^2 + \dots. \quad (3.32)$$

Untuk menentukan fungsi $a(r_t)$, $b(r_t)$ pada persamaan (3.32) di atas, substitusikan persamaan (3.32) ke dalam persamaan harga *zero coupon-bond* (3.29). Namun akan ditentukan suku-suku $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial r_t}$, dan $\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}$ pada persamaan (3.29) terlebih dahulu

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= -a(r_t) - 2b(r_t)(T - t) - \dots, \\ \frac{\partial V}{\partial r_t} &= a'(r_t)(T - t) + b'(r_t)(T - t)^2 + \dots, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} &= a''(r_t)(T - t) + b''(r_t)(T - t)^2 + \dots. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial r_t}$, dan $\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2}$ ke dalam persamaan harga *zero coupon-bond* (3.29), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w(r_t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} + (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)) \frac{\partial V}{\partial r_t} - r_t V = \\ -a(r_t) - 2b(r_t)(T - t) + \frac{1}{2}w(r_t)^2(a''(r_t)(T - t) + b''(r_t)(T - t)^2) + \\ (u(r_t) - \lambda_t w(r_t))(a'(r_t)(T - t) + b'(r_t)(T - t)^2) - r_t(1 + a(r_t)(T - t) + \\ b(r_t)(T - t)^2) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Untuk $t = T$, diperoleh

$$-a(r_t) - r_t = 0,$$

sehingga

$$a(r_t) = -r_t. \quad (3.34)$$

Kumpulkan koefisien suku $(T - t)$ pada persamaan (3.33) sehingga diperoleh

$$\left[-2b(r_t) + \frac{1}{2}w(r_t)^2 a''(r_t) + (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)) a'(r_t) - a(r_t) r_t \right] (T - t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
-2b(r_t) + \frac{1}{2}w^2a''(r_t) + (u(r_t) - \lambda_t w(r_t))a'(r_t) - a(r_t)r_t &= 0, \\
-2b(r_t) + 0 + (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)) + r_t^2 &= 0, \\
2b(r_t) &= r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)), \\
b(r_t) &= \frac{1}{2}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t))). \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Persamaan harga *zero coupon-bond* (3.32) berdasarkan persamaan (3.34) dan (3.35) adalah

$$\begin{aligned}
V(r_t, t) &\sim 1 + a(r_t)(T - t) + b(r_t)(T - t)^2 + \dots, \\
V(r_t, t) &\sim 1 - r_t(T - t) + \frac{1}{2}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)))(T - t)^2 + \dots. \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Setelah diperoleh aproksimasi persamaan *zero coupon-bond* dalam bentuk deret Taylor, selanjutnya berdasarkan persamaan (3.33), akan diaproksimasi persamaan *yield to maturity*, yakni $-\frac{\ln V}{T-t}$.

Pertama bentuk persamaan (3.33) ke dalam pendekatan logaritma natural

$$\begin{aligned}
\ln V(r_t, t) &\sim \ln \left(1 - r_t(T - t) + \frac{1}{2}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)))(T - t)^2 + \dots \right), \\
\ln V(r_t, t) &\sim \ln \left(1 - \left(r_t(T - t) - \frac{1}{2}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)))(T - t)^2 - \dots \right) \right). \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan (Purcell, 1997) diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
-\ln(1 - x) &= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\
\ln(1 - x) &= -x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Dengan menganalogikan persamaan (3.38) ke dalam persamaan (3.37) diperoleh

$$\ln V(r_t, t) \sim \ln(1 - x)$$

dengan

$$x = r_t(T - t) + \frac{1}{2}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)))(T - t)^2 + \dots.$$

Maka berdasarkan persamaan (3.37) diperoleh

$$\begin{aligned}
\ln V(r_t, t) &\sim -r_t(T - t) + \frac{1}{2}(r_t r^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)))(T - t)^2 \\
&\quad - \left(r_t(T - t) - \frac{1}{2}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)))(T - t)^2 - \dots \right)^2 \\
&\quad - \left(r_t(T - t) - \frac{1}{2}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)))(T - t)^2 - \dots \right)^3 - \dots.
\end{aligned}$$

Aproksimasi persamaan *yield to maturity* dapat ditulis kembali menjadi

$$-\frac{\ln V}{T-t} \sim r_t - \frac{1}{2!}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t))) + \frac{1}{2!}\left(r_t - \frac{1}{2!}(r_t^2 - (u(r_t) - \lambda_t w(r_t)))\right)^2 \dots$$

$$-\frac{\ln V}{T-t} \sim r_t + \frac{1}{2}(u(r_t) - \lambda_t w(r_t))(T-t) + \dots \quad (3.39)$$

Setelah diperoleh persamaan *yield to maturity* melalui deret Taylor, selanjutnya akan ditentukan *slope yield-curve* pada *short-end*.

2. Tentukan *slope yield-curve* pada *short-end*.

Setelah diperoleh persamaan *yield to maturity* pada (3.39), untuk memperoleh nilai *market price of risk* yang didasarkan pada data historis tingkat bunga dilakukan analisis terhadap *slope* dari *yield-curve* pada *short-end*.

Berdasarkan order tertinggi *yield-curve* pada *short-end* pada persamaan (3.39) diperoleh

$$-\frac{\ln V}{T-t} \sim r_t + \frac{1}{2}(u(r_t) - \lambda_t w(r_t))(T-t)$$

dengan *slope*: $\frac{1}{2}(u(r_t) - \lambda_t w(r_t))$.

Sehingga *slope yield to maturity* atau *slope yield-curve* pada *short-end* adalah

$$\text{slope} = \frac{1}{2}(u(r_t) - \lambda_t w(r_t)). \quad (3.40)$$

3. Tentukan *slope yield-curve* dari data.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Antonio Afonso pada tahun 2010, dihasilkan bahwa *slope yield-curve* untuk data tingkat bunga merupakan selisih antara tingkat bunga jangka panjang (*long-term*) dengan tingkat bunga jangka pendek (*short-term*)

$$\text{slope} = |r_{\text{long-term}} - r_{\text{short-term}}|. \quad (3.41)$$

4. Tentukan *market price of risk*.

Menentukan *market price of risk* melalui penyetaraan *slope yield-curve* pada *short-end* persamaan (3.40) dengan *slope yield-curve* dari data pada persamaan (3.41) yaitu

$$\begin{aligned} slope &= \frac{1}{2}(u(r_t) - \lambda_t w(r_t)) \\ \lambda_t &= \frac{1}{w(r_t)}(u(r_t) - 2slope) \end{aligned} \quad (3.42)$$

dengan $slope = |r_{long-term} - r_{short-term}|$.

Setelah diperoleh data *time-series market price of risk* λ_t , selanjutnya untuk menggambarkan pergerakannya, pada subbab 3.3 berikut akan dibahas mengenai model *market price of risk*.

3.3 Model Market Price of risk

Data *market price of risk* λ_t yang telah diperoleh kemudian divisualisasikan dalam bentuk gambar untuk menentukan perilaku dari pergerakan *market price of risk* apakah bersifat acak, suatu fungsi konstan, atau fungsi terhadap waktu. Jika pergerakan *market price of risk* bersifat acak, maka untuk mengetahui dan memahami perilaku dari *market price of risk* diperlukan suatu model matematika. Model *market price of risk* dapat dinyatakan oleh suatu persamaan diferensial stokastik

$$d\lambda_t = p(\lambda_t)dt + q(\lambda_t)dX_2 \quad (3.43)$$

dengan $p(\lambda_t)$ dan $q(\lambda_t)$ merupakan struktur *drift* dan struktur volatilitas dari *market price of risk*. Struktur *drift* $p(\lambda_t)$ dan struktur volatilitas $q(\lambda_t)$ diasumsikan bebas terhadap tingkat bunga, r .

3.3.1 Metode Estimasi Parameter Struktur Volatilitas

Metode yang digunakan dalam estimasi parameter struktur volatilitas model *market price of risk* tidak jauh berbeda ketika estimasi parameter struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor. Perbedaannya hanya pada struktur volatilitas pada model *market price of risk* masih bersifat umum yakni $q(\lambda_t)$. Estimasi parameter struktur volatilitas model *market price of risk* didasarkan pada analisis pada variansi data *time-series market price of risk* λ_t yang telah diperoleh berdasarkan persamaan (3.42). Seperti sudah dijelaskan pada bab sebelumnya,

menurut (Ireland, 2005) variansi menggambarkan volatilitas dari suatu peubah acak. Dengan menganggap *market price of risk* λ_t sebagai peubah acak, maka untuk menggambarkan volatilitas *market price of risk* dapat dilakukan melalui analisis pada variansi data.

Berikut akan dibahas persamaan *market price of risk* yang diperoleh dari hasil analisis variansi *market price of risk*.

$$\begin{aligned}
 var(d\lambda_t) &= E(d\lambda_t^2) - (E(d\lambda_t))^2 \\
 &= E((p(\lambda_t)dt + q(\lambda_t)dX_t)^2) - (E(d\lambda_t))^2 \\
 &= E(p(\lambda_t)^2 dt^2 + 2p(\lambda_t)q(\lambda_t)E(dtdX_t) + (q(\lambda_t))^2 E(dX_t)^2 - \\
 &\quad (p(\lambda_t)dt)^2) \\
 &= p(\lambda_t)^2 dt^2 + 0 + (q(\lambda_t))^2 E(dX_t)^2 - (p(\lambda_t)dt)^2 \\
 &= (q(\lambda_t))^2 E(dX_t)^2.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Berdasarkan persamaan (3.44) maka persamaan

$$var(d\lambda_t) = E(d\lambda_t^2) - (E(d\lambda_t))^2 \tag{3.45}$$

dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 var(d\lambda_t) &= (q(\lambda_t))^2 E(dX_t)^2. \\
 &= (q(\lambda_t))^2 dt, \quad E(dX_t)^2 = dt.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Dengan asumsi t yang kecil maka nilai dari $(E(d\lambda_t))^2$ akan sangat kecil.

Berdasarkan order tertinggi, maka persamaan (3.45) dan (3.46) dapat ditulis menjadi

$$E(d\lambda_t^2) = (q(\lambda_t))^2 dt. \tag{3.47}$$

Persamaan (3.47) merupakan suatu bentuk persamaan eksponensial $y = ax^b$.

Untuk mempermudah analisis persamaan yang berbentuk eksponensial, berdasarkan (Purchell, 1997) dilakukan pendekatan logaritma, sehingga persamaan (3.47) menjadi

$$\begin{aligned}
 \ln E[(d\lambda_t)^2] &= \ln(q(\lambda_t))^2 dt \\
 &= 2\ln(q(\lambda_t)) + \ln dt.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Berdasarkan persamaan (3.48), akan ditentukan struktur volatilitas model *market price of risk* $q(\lambda_t)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 2\ln(q(\lambda_t)) + \ln dt &= \ln E[(d\lambda_t)^2], \\
 2\ln(q(\lambda_t)) &= \ln E[(d\lambda_t)^2] - \ln dt,
 \end{aligned}$$

$$\ln(q(\lambda_t)) = \frac{1}{2}(\ln E[(d\lambda_t)^2] - \ln dt),$$

$$q(\lambda_t) = \exp\left(\frac{\ln E[(d\lambda_t)^2] - \ln dt}{2}\right). \quad (3.49)$$

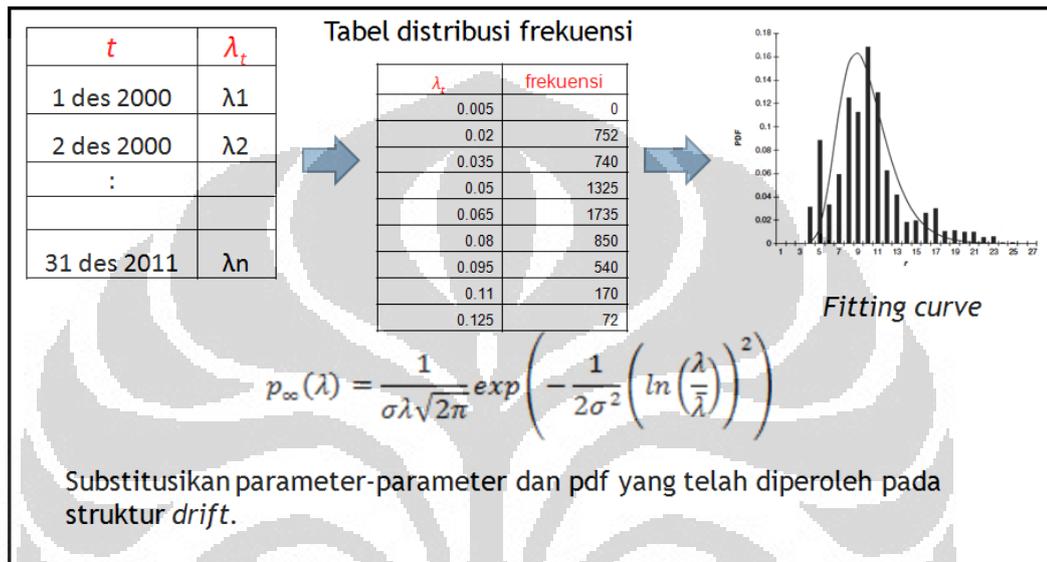
Persamaan (3.49) yang diperoleh berdasarkan analisis pada variansi akan digunakan sebagai acuan dalam estimasi struktur volatilitas *market price of risk* $q(\lambda_t)$ yang didasarkan pada data *time-series market price of risk*.

Selanjutnya berikut akan diberikan tahapan-tahapan yang dilakukan terhadap data *time-series market price of risk* λ_t dalam estimasi parameter struktur volatilitas model *market price of risk* $q(\lambda_t)$, antara lain:

1. Kelompokkan data *market price of risk* λ_t menjadi beberapa kelompok data.
2. Tentukan $q(\lambda_t)$. Penentuan aproksimasi fungsi $q(\lambda_t)$ dilakukan dengan metode Lagrange sehingga diperlukan beberapa titik $(\lambda_t, q(\lambda_t))$, dimana λ_t menyatakan nilai *market price of risk* saat ke- t , sedangkan $q(\lambda_t)$ menyatakan nilai $q(\lambda_t)$ untuk λ_t . Penentuan λ_t dilakukan dengan melakukan pemilihan beberapa titik yang merepresentasikan data *market price of risk* λ_t . Sedangkan $q(\lambda_t)$ ditentukan berdasarkan persamaan (3.49), yakni $q(\lambda_t) = \exp\left(\frac{\ln E[(d\lambda_t)^2] - \ln dt}{2}\right)$. Berikut adalah langkah-langkahnya.
 - Pilih beberapa nilai (λ_t) yang merepresentasikan data.
 - Tentukan $\ln E[(d\lambda_t)^2]$ dan $q(\lambda_t)$ untuk masing-masing nilai λ_t yang terpilih.
3. Lakukan interpolasi terhadap titik-titik $(\lambda_t, q(\lambda_t))$ dengan menggunakan pendekatan numerik.

Persamaan polinomial hasil dari metode Lagrange merupakan struktur volatilitas pada *model market price of risk*. Untuk mempermudah memahami tahapan dalam estimasi struktur volatilitas model *market price of risk* yang didasarkan pada data *market price of risk* λ_t , berikut akan disajikan ilustrasi dalam bentuk tabel.

Tahapan estimasi parameter struktur *drift model market price of risk* persis sama dengan tahapan estimasi parameter struktur *drift model tingkat bunga satu faktor*. Untuk mempermudah memahami tahapan dalam estimasi struktur *drift model market price of risk* yang didasarkan pada data *market price of risk* λ_t , berikut akan disajikan ilustrasi dalam bentuk tabel.



Gambar 3.5. Ilustrasi estimasi parameter struktur *drift market price of risk*.

Tabel pertama pada Gambar 3.5 merupakan data *time-series market price of risk* λ_t yang telah diperoleh pada subbab 3.2. Tabel selanjutnya merupakan ilustrasi tahapan dalam menentukan distribusi *market price of risk* dimulai dari pembentukan tabel distribusi frekuensi data dilanjutkan dengan pembentukan histogram dan kurva distribusi yang merepresentasikan data. Dengan mengetahui parameter pada distribusi data, dan struktur volatilitas model *market price of risk* maka struktur *drift* $p(\lambda_t)$ model *market price of risk* pada persamaan (3.50) dapat ditentukan.

BAB IV

ANALISIS MODEL *MARKET PRICE OF RISK* TERKAIT MODEL TINGKAT BUNGA SATU FAKTOR

Pada bab ini dibahas estimasi parameter model tingkat bunga satu faktor dan model *market price of risk* yang telah dijelaskan pada bab 3 dalam menganalisis pergerakan *market price of risk*. Pada subbab 4.1 dibahas mengenai estimasi parameter model tingkat bunga satu faktor yang terdiri dari struktur volatilitas $w(r_t)$ dan struktur *drift* $u(r_t)$.

Setelah diperoleh parameter struktur volatilitas dan struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor, ditentukan data *time-series market price of risk* pada subbab 4.2. Data tersebut direpresentasikan dalam bentuk grafik untuk menggambarkan pergerakan acak *market price of risk* yang merepresentasikan perilaku investor bersifat *greedy* atau *fear*. *Market price of risk* bernilai positif menyatakan investor bersifat *greedy* sedangkan *market price of risk* bernilai negatif mewakili sifat *fear* investor. Pergerakan *market price of risk* yang direpresentasikan dalam suatu persamaan diferensial stokastik dibahas pada subbab 4.3. Pembahasan diakhiri dengan analisis model *market price of risk*.

Data yang digunakan adalah data tingkat bunga obligasi pemerintah Jepang dengan masa jatuh tempo satu tahun dan sepuluh tahun selama lima belas tahun mulai dari tanggal 1 September 1996 hingga 31 Agustus 2011. Data dapat diunduh dari <http://www.economagic.com/em-cgi/data.exe/bjap/day-intrate01>. Semua perhitungan dilakukan menggunakan perangkat lunak, sedangkan simulasi model menggunakan *software* Octave.

4.1 Estimasi Parameter Model Tingkat Bunga Satu Faktor

Berdasarkan persamaan (3.1), pergerakan tingkat bunga obligasi dapat direpresentasikan oleh suatu model tingkat bunga satu faktor dalam bentuk persamaan diferensial stokastik

$$dr_t = u(r_t)dt + w(r_t)dX_t,$$

dengan r_t merupakan tingkat bunga obligasi saat t , $w(r_t)$ merupakan struktur volatilitas dan diasumsikan $w(r_t) = \nu r_t^\beta$, dimana ν dan β merupakan konstanta-konstanta bernilai positif, $u(r_t)$ merupakan struktur *drift*, dan X_t merupakan proses Wiener. Estimasi parameter ini akan digunakan untuk membentuk data *time-series market price of risk* dengan data yang digunakan adalah data tingkat bunga obligasi pemerintah Jepang masa jatuh tempo satu tahun mulai dari 1 September 1996 hingga 31 Agustus 2011.

Pada subbab 4.1.1 berikut ini diestimasi parameter struktur volatilitas ν dan β , dilanjutkan dengan estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor pada subbab 4.1.2.

4.1.1 Estimasi Parameter Struktur Volatilitas

Berikut ini dibahas tahapan estimasi parameter struktur volatilitas ν dan β model tingkat bunga satu faktor berdasarkan metode estimasi yang telah dibahas pada subbab 3.1.1. Tahap-tahap tersebut adalah sebagai berikut.

1. Kelompokkan data historis tingkat bunga obligasi menjadi beberapa kelompok data,
2. Tentukan persamaan linier berdasarkan persamaan (3.7), yakni $\ln E[(dr_t)^2] = 2\beta \ln(r_t) + (2\ln(\nu) + \ln dt)$ pada kelompok data.
3. Tentukan parameter ν dan β .

Berikut hasil implementasi langkah-langkah di atas :

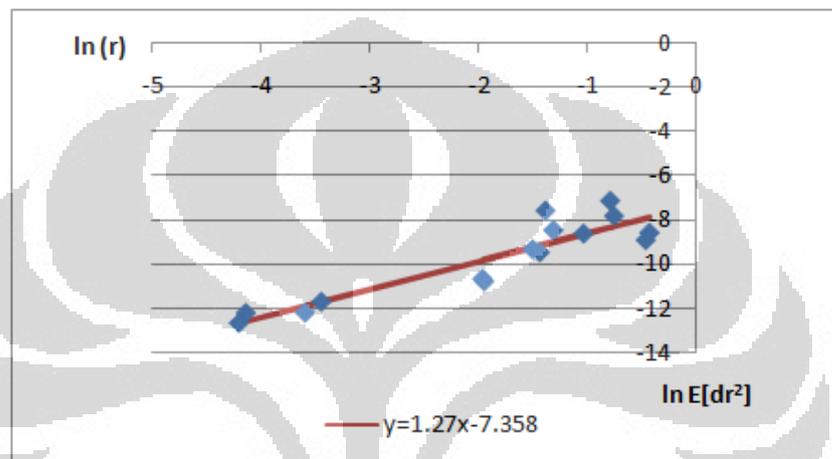
Langkah 1: Data yang digunakan adalah data tingkat bunga obligasi selama 15 tahun sehingga dibentuk data tahunan sebanyak 15 kelompok.

Langkah 2: Menentukan persamaan linier dengan tahap-tahap sebagai berikut:

- Menentukan nilai rata-rata r_t dan nilai rata-rata dr_t^2 untuk masing-masing kelompok data.
- Menentukan $\ln E[(dr_t)^2]$ dan $\ln(r_t)$.
- Menentukan aproksimasi linier dari data. Misalkan $y = \ln E[dr_t^2]$ dan $x = \ln(r_t)$, dengan menggunakan metode *least*

square diperoleh aproksimasi persamaan linier $y = 1,27x - 7,358$.

Berikut ini akan ditampilkan gambar lima belas titik (x_i, y_i) , dimana x_i menyatakan $\ln(r_i)$ dan y_i menyatakan $\ln E[dr_i^2]$, dengan aproksimasi *least square* $y = 1,27x - 7,358$.



Gambar 4.1. Aproksimasi *least square* $y = 1,27x - 7,358$ terhadap lima belas titik (x_i, y_i) , dimana x_i menyatakan $\ln(r_i)$ dan y_i menyatakan $\ln E[dr_i^2]$.

Langkah 3 : Menentukan parameter v dan β dilakukan dengan membandingkan persamaan (3.4) dengan persamaan *least square* $y = 1,27x - 7,358$, sehingga diperoleh

$$2\beta = 1,27,$$

$$\beta = 0,635,$$

dan berdasarkan banyaknya *bussiness day* dalam satu tahun adalah 252 hari (Wilmott, 2007), maka

$$2\ln(v) + \ln dt = -7,358$$

$$2\ln(v) = -7,358 - \ln dt, \quad dt = \frac{1}{252}, \ln dt = -5,529,$$

$$= -7,358 + 5,529$$

$$= -1,829,$$

$$v = 0,4.$$

Selanjutnya berdasarkan parameter-parameter yang telah diperoleh, struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor adalah

$$w(r_t) = 0,4r_t^{0,635}. \quad (4.1)$$

Setelah diperoleh parameter struktur volatilitas v dan β , selanjutnya diestimasi parameter-parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor.

4.1.2 Estimasi Parameter Struktur *Drift*

Berikut ini dibahas tahapan estimasi parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor berdasarkan metode estimasi yang telah dibahas pada subbab

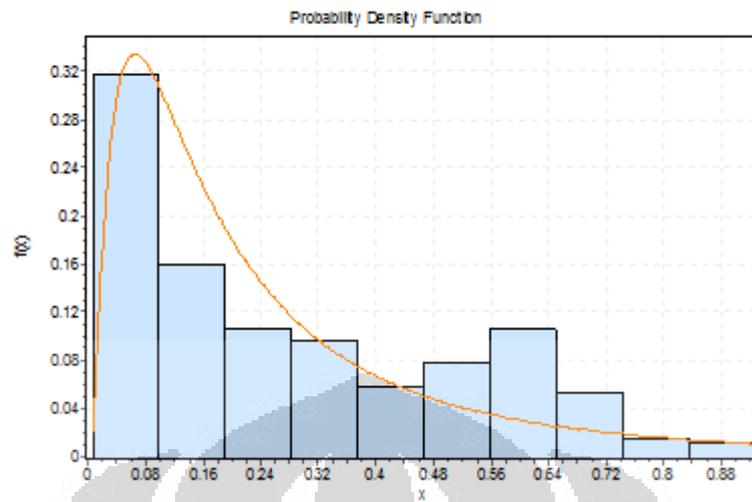
3.1. Tahap-tahap tersebut adalah sebagai berikut.

1. Tentukan tabel distribusi frekuensi data.
2. Tentukan histogram dan kurva distribusi yang didekati.
3. Tentukan parameter distribusi.
4. Substitusikan parameter distribusi dan parameter struktur volatilitas v dan β pada struktur *drift*.

Hasil implementasi yang diperoleh dari langkah-langkah di atas adalah sebagai berikut:

Langkah 1 : Panjang interval yang digunakan dalam menentukan tabel distribusi frekuensi data adalah 0,04. Tabel distribusi frekuensi data yang diperoleh dapat dilihat pada tabel 4.1.

Langkah 2 : Histogram dan kurva distribusi yang dihasilkan menggunakan perangkat lunak dapat dilihat pada Gambar 4.2 berikut.

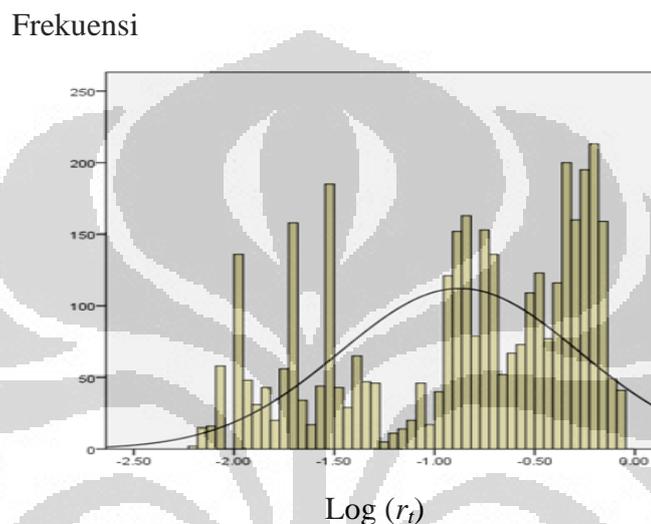


Gambar 4.2. Histogram dan kurva distribusi lognormal data tingkat bunga.

Tabel 4.1 Tabel distribusi frekuensi data tingkat bunga obligasi pemerintah Jepang

Tingkat bunga	Frekuensi
0,006	2
0,046	1023
0,086	144
0,126	230
0,166	354
0,206	284
0,246	109
0,286	99
0,326	158
0,366	96
0,406	90
0,446	126
0,486	173
0,526	115
0,566	152
0,606	93
0,646	143
0,686	119
0,726	76
0,766	32
0,806	23
0,846	34
0,886	9
0,926	0

Berdasarkan Gambar 4.2, data yang digunakan ternyata mendekati distribusi Lognormal. Berdasarkan persamaan (3.10) parameter struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor terdiri dari ν , β , σ dan α . Data dikatakan berdistribusi lognormal jika logaritma data berdistribusi normal. Dengan menggunakan bantuan *software* SPSS, berikut ini akan ditunjukkan apakah logaritma data berdistribusi normal.



Gambar 4.3. Histogram dan kurva distribusi normal logaritma data tingkat bunga obligasi

Berdasarkan Gambar 4.3 di atas masih perlu diuji apakah logaritma data berdistribusi normal. Uji dilakukan menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov* (K-S). Hipotesis pada uji K-S adalah sebagai berikut.

H_0 : Data berdistribusi normal

H_1 : Data tidak berdistribusi normal

Tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$.

Statistik uji

$$D = \max |S(x) - F(x)|$$

dengan $S(x)$ merupakan fungsi distribusi frekuensi kumulatif data, $F(x)$ merupakan fungsi distribusi frekuensi teoritis.

Pengambilan Keputusan : Jika $\hat{\alpha} > \alpha$ maka H_0 diterima, dan jika $\hat{\alpha} < \alpha$ maka H_0 ditolak, dengan $\hat{\alpha}$ merupakan signifikansi atau peluang nilai kritis D.

Uji K-S dilakukan menggunakan *software* SPSS dengan langkah-langkah sebagai berikut. Setelah data dimasukkan ke dalam *worksheet* SPSS, selanjutnya pilih *analyze-Non Parametric Test-1 Sample K-S*. Berikut adalah Tabel 4.2 berupa *output* yang dihasilkan pada *One-sample K-S* pada SPSS.

Tabel 4.2. *One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test*

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test		logr
N		3684
Normal Parameters ^a	Mean	-.8740
	Std. Deviation	.59558
Most Extreme Differences	Absolute	.117
	Positive	.092
	Negative	-.117
Kolmogorov-Smirnov Z		7.085
Asymp. Sig. (2-tailed)		.070

a. Test distribution is Normal.

Berdasarkan tabel 4.2, diperoleh $\hat{\alpha} = 0.07 > \alpha = 0,05$, maka dengan kepercayaan 95% data berdistribusi normal. Sehingga dapat dinyatakan bahwa data berdistribusi lognormal.

Langkah 3 : Tentukan parameter distribusi. Berikut adalah tabel parameter data yang berdistribusi lognormal yang diperoleh dari parameter logaritma data yang berdistribusi normal.

Tabel 4.3. Tabel Parameter distribusi lognormal dari logaritma data

log alpha	0,87
alpha(%)	7,41
alpha	0,074
Sigma	0,596

Langkah 4 : Setelah parameter distribusi lognormal dan parameter struktur volatilitas v dan β diketahui, selanjutnya parameter tersebut disubstitusikan pada persamaan (3.10), yakni

$$u(r_t) = v^2 r_t^{2\beta-1} \left(\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\ln \frac{r_t}{\alpha} \right) \right). \text{ Sehingga untuk } v = 0,4, \\ \beta = 0,635, \sigma = 0,596 \text{ dan } \alpha = 0,074 \text{ diperoleh struktur } \textit{drift} \text{ data}$$

$$u(r_t) = 0,4^2 r_t^{2(0,635)-1} \left(0,635 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(0,596)^2} \left(\ln \frac{r_t}{0,074} \right) \right). \quad (4.2)$$

Setelah diperoleh parameter-parameter struktur volatilitas v dan β , dan struktur *drift* v , β , σ dan α model tingkat bunga satu faktor dari data, selanjutnya parameter tersebut akan digunakan untuk mensimulasikan pergerakan tingkat bunga obligasi.

Simulasi tingkat bunga obligasi ini dilakukan dengan membentuk lintasan tingkat bunga menggunakan skema Euler-Maruyama yang telah dibahas pada subbab 2.3.3. Model tingkat bunga satu faktor yang dibahas memiliki bentuk PDS

$$dr_t = u(r_t)dt + w(r_t)dX_1,$$

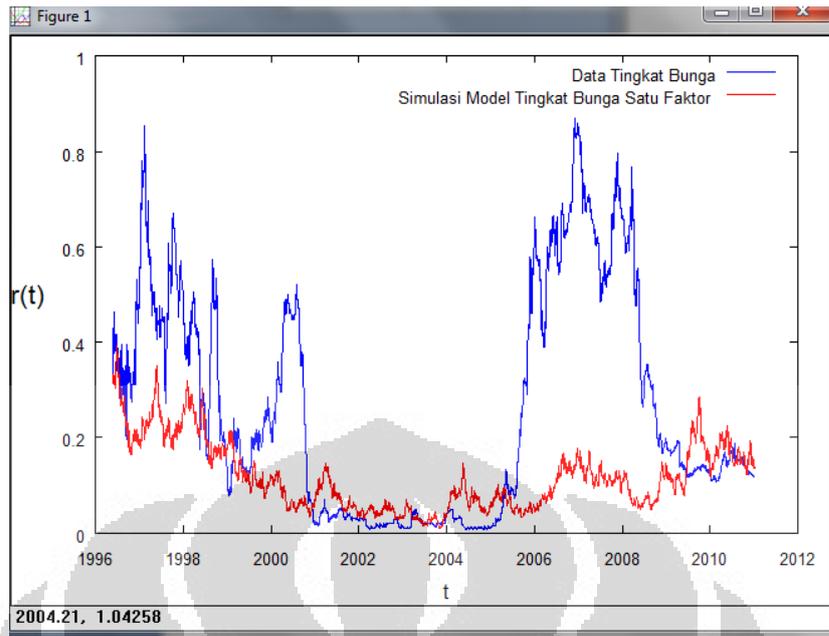
dan pada interval waktu $[0, T]$ memiliki skema Euler-Maruyama

$$r_{n+1} = r_n + u(r_n)\Delta t + w(r_n)\Delta W_n$$

dengan $n = 0, 1, \dots, N - 1$, nilai awal r_0 , perubahan proses Wiener $\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$, $u(r_n)$ merupakan struktur *drift* persamaan (4.2) dan $w(r_n)$ merupakan struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor persamaan (4.1).

Simulasi dilakukan sebanyak 100 kali menggunakan *software* Octave, dengan nilai awal dari masing-masing simulasi adalah data tingkat bunga pada obligasi per tanggal 1 september 1996. Dari hasil simulasi, kemudian ditentukan berapa besar RMSE (*root mean square error*). RMSE merupakan akar dari MSE (*mean square error*) dan penjelasannya telah dibahas pada subbab 2.3.4. *Source code* simulasi solusi model tingkat bunga satu faktor ini diberikan dalam Lampiran 2.

Untuk memperjelas hasil simulasi model tingkat bunga satu faktor hasil simulasi dibandingkan dengan data historis dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 4.4. Grafik lintasan data historis tingkat bunga obligasi dan lintasan model tingkat bunga satu faktor tahun 1996-2011 dengan menggunakan skema Euler-Maruyama.

Hasil simulasi pergerakan tingkat bunga dari obligasi dengan menggunakan *software* Octave, diperoleh RMSE sebesar 0,27747.

Selanjutnya dengan menggunakan struktur *drift* $u(r_t)$ dengan v , β , σ dan α , dan struktur volatilitas $w(r_t)$ dengan parameter v dan β yang telah diperoleh pada subbab 4.1.1 dan subbab 4.1.2, dan analisis *slope* dari *yield-curve* yang telah dibahas pada subbab 3.2, pada subbab 4.2 berikut ini akan disimulasikan pergerakan *market price of risk* melalui analisis *slope yield-curve* pada *short-end*.

4.2 Data Time-Series Market Price of Risk

Berdasarkan pembahasan pada subbab 3.2, data *time series market price of risk* diperoleh dari analisis *slope yield-curve* pada *short-end*. Analisis tersebut menghasilkan persamaan (3.42) yang merupakan penyetaraan antara *slope yield-curve* pada *short-end* persamaan (3.40) dengan *slope* yang merupakan selisih dari tingkat bunga obligasi *long-term* dengan *short-term* persamaan (3.41). Tingkat bunga obligasi *long-term* pada pemerintah Jepang yang digunakan adalah 10

tahun ($r_t(10)$), sedangkan tingkat bunga obligasi *short-term* memiliki jatuh tempo 1 tahun ($r_t(1)$), sehingga berdasarkan persamaan (3.42) diperoleh

$$\lambda_t = \frac{1}{w(r_t)}(u(r_t) - 2 \text{ slope}) \quad (4.3)$$

dengan $\text{slope} = r_t(10) - r_t(1)$.

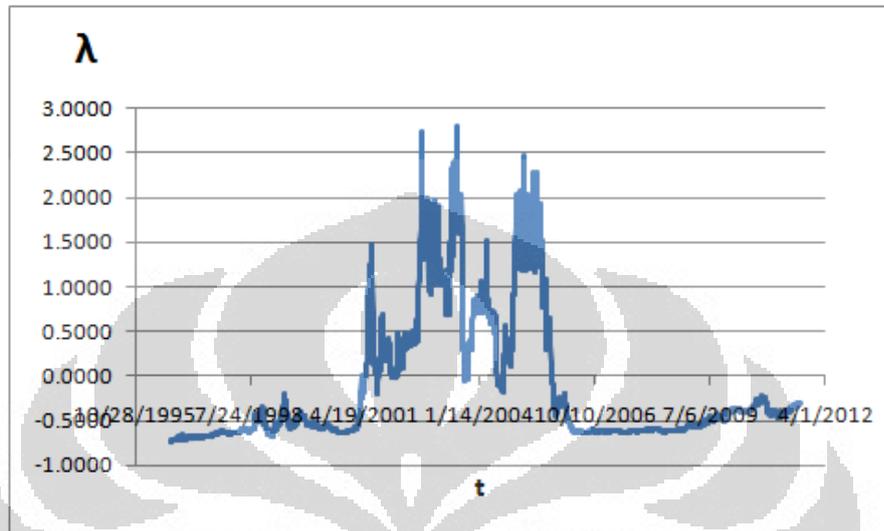
Dengan menggunakan parameter struktur volatilitas v dan β dan parameter struktur *drift* v , β , σ dan α yang telah diperoleh, beserta slope data historis pemerintah Jepang, selanjutnya akan ditentukan data *time series market price of risk* λ_t . Berikut adalah tabel perhitungan proses penentuan data *time-series market price of risk* λ_t .

Tabel 4.4. Tabel perhitungan data *time-series market price of risk*

t	$r_t(1)$.	$r_t(10)$	$\text{slope} = r_t(10) - r_t(1)$.	$w(r_t)$	$u(r_t)$	λ_t
9/2/1996	0,311	3,006	0,0270	0,1894	(0,08511)	-0,734
9/3/1996	0,387	3,043	0,0266	0,2179	(0,10687)	-0,734
...
8/30/2011	0,117	1,05	0,01	0,1013	(0,01229)	-
8/31/2011	0,117	1,06	0,01	0,1013	(0,01229)	0,30663

Kolom pertama hingga kolom ketiga merupakan data historis tingkat bunga obligasi pemerintah Jepang dari tanggal 1 September 1996 hingga 31 Agustus 2011, dimana untuk masa jatuh tempo satu tahun ($r_t(1)$) berada pada kolom ke dua, dan untuk masa jatuh tempo sepuluh tahun ($r_t(10)$) pada kolom ke tiga. Kolom ke empat merupakan *slope yield-curve* yang merupakan selisih dari $r_t(10)$ dengan $r_t(1)$. Selanjutnya pada kolom ke lima menyatakan substitusi $r_t(1)$ pada struktur volatilitas model tingkat bunga satu faktor $w(r_t)$ pada persamaan (4.1), dan kolom ke enam menyatakan substitusi $r_t(1)$ pada struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor $u(r_t)$ pada persamaan (4.2). Kolom terakhir menyatakan data *time-series market price of risk* λ_t yang merupakan hasil substitusi data pada kolom ke empat, ke lima dan ke enam pada persamaan (4.3).

Selanjutnya untuk melihat pergerakan *market price of risk* berdasarkan data *time series market price of risk* λ_t yang telah diperoleh, disajikan grafiknya pada Gambar 4.7 di bawah ini.



Gambar 4.5. Grafik *market price of risk* obligasi pemerintah Jepang 1 September 1996 hingga 31 Agustus 2011.

Berdasarkan Gambar 4.5, terlihat bahwa untuk rentang waktu antara tahun 2001 hingga 2010 sebagian besar *market price of risk* obligasi pemerintah Jepang bernilai positif. Namun secara teknis dan berdasarkan pembahasan pada subbab 2.6 *market price of risk* umumnya bernilai negatif. Hal ini menunjukkan bahwa umumnya sebagian besar perilaku investor pada saat itu di Jepang bersifat *greedy* atau *overconfident* dalam arti memiliki keberanian yang tinggi dalam berinvestasi. Hasil tersebut didukung oleh penelitian yang telah dilakukan oleh Kenneth A. Kima dan John R. Nofsingerb dengan judul “*The Behavior and Performance of Individual Investors in Japan*”.

Menurut Kenneth A. Kima dan John R. Nofsingerb (2003), perilaku investor Jepang berbeda dengan perilaku investor pada umumnya. Berdasarkan penelitian tersebut, para investor Jepang memiliki keberanian yang tinggi dalam berinvestasi pada instrumen investasi yang berisiko tinggi. Selain itu para investor Jepang senang melakukan transaksi, baik itu melakukan penjualan terhadap aset yang telah dimiliki maupun melakukan pembelian. Para investor Jepang juga

seringkali memutuskan untuk melakukan investasi dengan analisis yang singkat. Semua hasil penelitian ini menyimpulkan bahwa perilaku investor Jepang bersifat *overconfident* dalam arti memiliki keberanian yang tinggi dalam berinvestasi.

Menurut Gervais dan Odean (2001), investor Jepang belajar untuk menjadi *overconfident* dengan mengasosiasikan tingkat pengembalian yang tinggi dengan keahlian investasi mereka pada saat *bull market*, yaitu saat pasar mengalami pertumbuhan yang pesat. Bahkan model tersebut menekankan bahwa *bull market* dalam periode yang panjang akan membentuk investor yang *overconfident*. Untuk kasus Jepang, menurut Kang dan Stulz (1996, 2000), *bull market* ini terjadi pada awal periode tahun 1984 hingga akhir tahun 1989. Pada saat itu TOPIX (*Tokyo stock Price Index*) mengalami kenaikan hingga 294%, dengan pertumbuhan dua digit setiap tahunnya dan rata-rata *annual return* mencapai 26.3% (Tokyo Stock Exchange (TSE) Fact Book (1997)), sehingga hal ini membentuk investor Jepang yang *overconfident* untuk tahun-tahun selanjutnya.

Bull market di Jepang terjadi pada awal periode tahun 1984 hingga akhir tahun 1989, sedangkan berdasarkan hasil simulasi mulai tahun 2000 menunjukkan perilaku investor Jepang yang *overconfident*. Hasil ini sesuai dengan Gervais dan Odean yang menyatakan bahwa *bull market* dalam periode yang panjang akan membentuk investor yang *overconfident*.

Selanjutnya untuk menggambarkan pergerakan *market price of risk*, berikut dibahas mengenai model *market price of risk*.

4.3 Estimasi Parameter Model *Market Price of risk*

Berdasarkan persamaan (3.18), pergerakan acak *market price of risk* dapat dijelaskan dalam bentuk persamaan differensial stokastik

$$d\lambda_t = p(\lambda_t)dt + q(\lambda_t)dX_2,$$

dengan λ_t menyatakan *market price of risk* saat t , $p(\lambda_t)$ merupakan struktur *drift*, $q(\lambda_t)$ dan merupakan struktur volatilitas, dan X_2 merupakan proses Wiener.

Metode yang digunakan dalam mengestimasi parameter struktur volatilitas dan struktur *drift* model *market price of risk* hampir sama dengan metode estimasi parameter struktur volatilitas dan struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor.

Estimasi parameter struktur volatilitas dibahas pada subbab 4.3.1 dan estimasi parameter struktur *drift* dibahas pada subbab 4.3.2.

4.3.1 Estimasi Parameter Struktur Volatilitas

Berikut ini dibahas tahapan estimasi parameter struktur volatilitas model *market price of risk* berdasarkan metode estimasi yang telah dibahas pada subbab 3.3.1 untuk data *time-series market price of risk* yang telah diperoleh pada subbab 4.2. Tahap-tahap tersebut adalah sebagai berikut.

1. Kelompokkan data *market price of risk* menjadi beberapa kelompok data.
2. Tentukan $q(\lambda_t)$ berdasarkan persamaan (3.50). Penentuan aproksimasi fungsi $q(\lambda_t)$, dilakukan dengan metode Lagrange sehingga diperlukan beberapa titik $(\lambda_t, q(\lambda_t))$, dimana λ_t menyatakan nilai *market price of risk* saat ke- i , sedangkan $q(\lambda_t)$ menyatakan nilai $q(\lambda_t)$ untuk λ_t . Penentuan λ_t dilakukan dengan melakukan pemilihan beberapa nilai *market price of risk*. Sedangkan $q(\lambda_t)$ ditentukan berdasarkan persamaan (3.49), yakni
$$q(\lambda_t) = \exp\left(\frac{\ln E[(d\lambda_t)^2] - \ln dt}{2}\right)$$
, dengan langkah-langkah sebagai berikut.
 - Pilih beberapa nilai (λ_t) yang merepresentasikan data.
 - Tentukan $\ln E[d\lambda_t^2]$ dan $q(\lambda_t)$ untuk masing-masing nilai yang terpilih.
3. Lakukan interpolasi terhadap titik-titik $(\lambda_t, q(\lambda_t))$ dengan menggunakan interpolasi Lagrange.

Berikut adalah implementasi tahapan estimasi struktur volatilitas terhadap data *time-series market price of risk* yang telah diperoleh pada subbab 4.2.

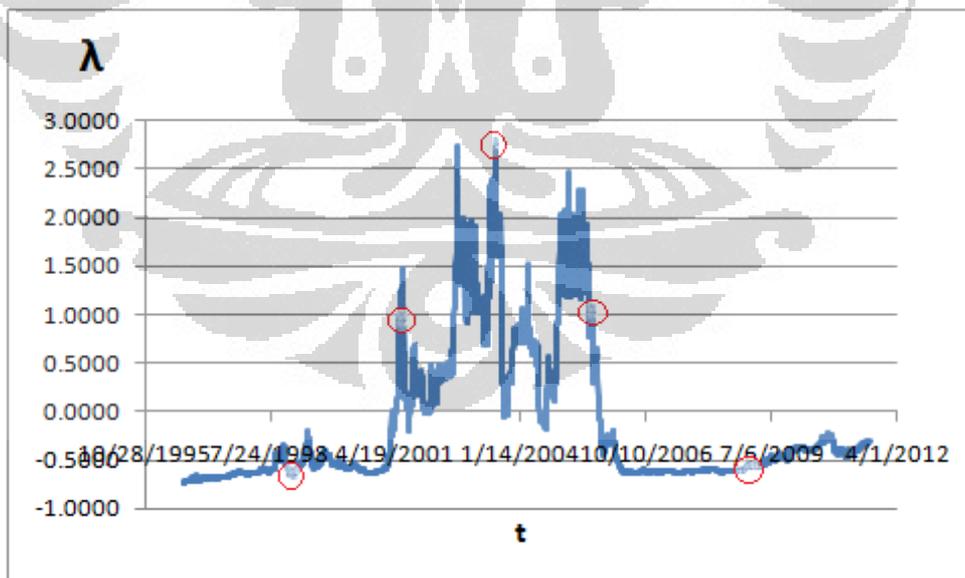
- Langkah 1 : Kelompokkan data *market price of risk* menjadi beberapa kelompok data. Pengelompokkan data berdasarkan data tahunan. Data yang digunakan selama 15 tahun sehingga dibentuk 15 kelompok.
- Langkah 2 : Tentukan $q(\lambda_t)$. Berikut adalah tahap-tahap pengolahan data hingga diperoleh $q(\lambda_t)$.

1. Pilih beberapa nilai (λ_t) yang merepresentasikan data. Pemilihan nilai λ_t telah dilakukan beberapa kali, namun yang ditampilkan dalam tesis adalah hasil pemilihan lima nilai dengan interval yang sama dan enam nilai yang kira-kira dapat merepresentasikan keseluruhan data. Alasan pengambilan lima dan enam nilai λ_t karena RMSE yang diperoleh lebih kecil dari pemilihan sejumlah titik-titik lainnya. Pada tabel 4.4 berikut ini merupakan hasil pemilihan lima nilai λ_t dengan interval waktu t yang sama.

Tabel 4.5 Lima nilai *market price of risk*

t	λ_t
12/22/1998	(0,636)
5/24/2001	0,960
6/26/2003	2,740
8/15/2005	0,568
11/25/2008	(0,395)

Pemilihan nilai tersebut didasarkan pada titik-titik yang diharapkan dapat merepresentasikan keseluruhan data. Pada Gambar 4.8 berikut ditunjukkan posisi pengambilan lima nilai λ_t .



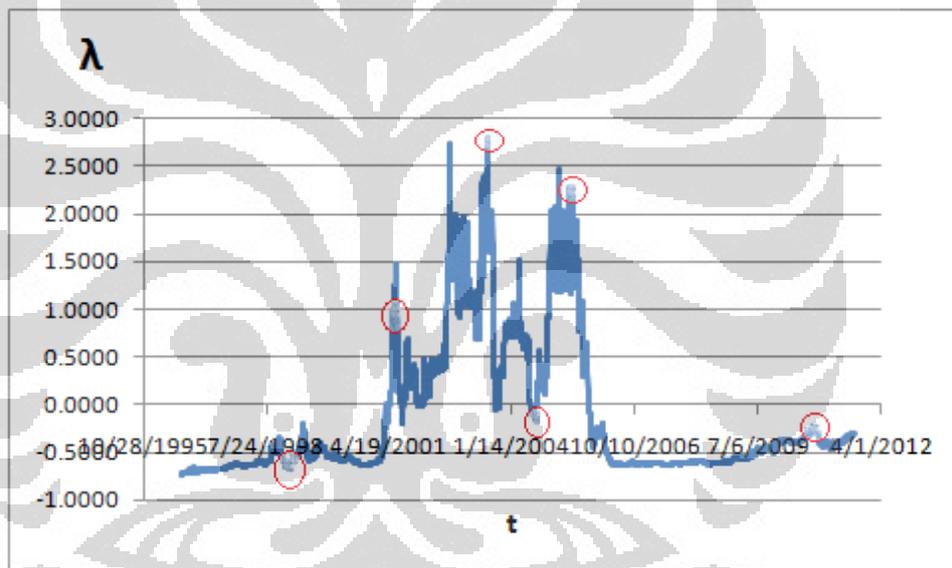
Gambar 4.6 Grafik *market price of risk* dengan pemilihan lima buah nilai λ_t (tanda \circ).

Selanjutnya Tabel 4.6 berikut ini adalah hasil pemilihan enam nilai λ_t

Tabel 4.6 Enam nilai *market price of risk*

t	λ_t
12/22/1998	(0,64)
6/5/2001	1,25
6/26/2003	2,74
7/21/2004	(0,14)
1/28/2005	2,20
2/12/2008	(0,60)

Pemilihan nilai tersebut didasarkan pada titik-titik yang diharapkan dapat merepresentasikan keseluruhan data. Berikut pada Gambar 4.7 ditunjukkan enam posisi pengambilan nilai λ_t .



Gambar 4.7 Grafik *market price of risk* dengan pemilihan enam buah nilai λ_t (tanda \circ).

2. Tentukan $\ln E[d\lambda_t^2]$ untuk masing-masing titik yang terpilih. Perhitungan dapat dilihat pada Tabel 4.7 dan Tabel 4.8.
3. Tentukan struktur volatilitas model *market price of risk* $q(\lambda_t)$ berdasarkan persamaan (3.50) untuk masing-masing nilai λ_t yang terpilih dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.8 kolom ke enam.

Tabel 4.7. Tabel nilai $q(\lambda_t)$ untuk pemilihan lima titik

Tanggal	λ_t	$E[d\lambda_t^2]$	$\ln E[d\lambda_t^2]$	$q(\lambda_t)$
12/22/1998	(0,636)	0,0005	(7,511)	0,023
5/24/2001	0,960	0,0072	(4,932)	0,085
6/26/2003	2,740	0,0480	(3,036)	0,219
8/15/2005	0,568	0,0270	(3,610)	0,164
11/25/2010	(0,395)	0,0001	(9,066)	0,011

Tabel 4.8. Tabel nilai $q(\lambda_t)$ untuk pemilihan enam titik

Tanggal	λ_t	$E[d\lambda_t^2]$	$\ln E[d\lambda_t^2]$	$q(\lambda_t)$
12/22/1998	(0,64)	0,0005	(7,511)	0,023
6/5/2001	1,25	0,0072	(4,932)	0,085
6/26/2003	2,74	0,0480	(3,036)	0,219
7/21/2004	(0,14)	0,0063	(5,072)	0,079
1/28/2005	2,20	0,0270	(3,610)	0,164
2/12/2008	(0,60)	0,000	(12,081)	0,002

Selanjutnya dengan menggunakan metode Lagrange yang telah dibahas pada subbab 2.5, akan ditentukan aproksimasi fungsi yang melalui lima dan enam titik λ_t yang terpilih.

Untuk pemilihan lima nilai λ_t , diperoleh

$$q(\lambda_t) = -0,33 \lambda^3 + 0,09 + 0,118 \lambda^4 + 0,242 \lambda^2 + 0,4495917997 \lambda + 0,1440508586, \quad (4.4)$$

Sedangkan pemilihan untuk enam nilai λ_t , diperoleh

$$q(\lambda_t) = -0,09022495674 \lambda^5 + 0,4764992606 \lambda^4 - 0,6105303182 \lambda^3 - 0,2026125676 \lambda^2 + 0,4495917997 \lambda + 0,1440508586. \quad (4.5)$$

Setelah diperoleh struktur volatilitas $q(\lambda_t)$, selanjutnya pada subbab berikut akan diestimasi struktur *drift* $p(\lambda_t)$ model *market price of risk*.

4.3.2 Estimasi Parameter Struktur *Drift*

Metode yang digunakan dalam mengestimasi struktur *drift* model *market price of risk* $p(\lambda_t)$ sama dengan metode estimasi struktur *drift* model tingkat bunga satu faktor $u(r_t)$, yakni dengan menentukan distribusi yang paling merepresentasikan data. Namun di sini yang digunakan sebagai data adalah data *time-series market price of risk* λ_t .

Berikut adalah langkah-langkah implementasinya.

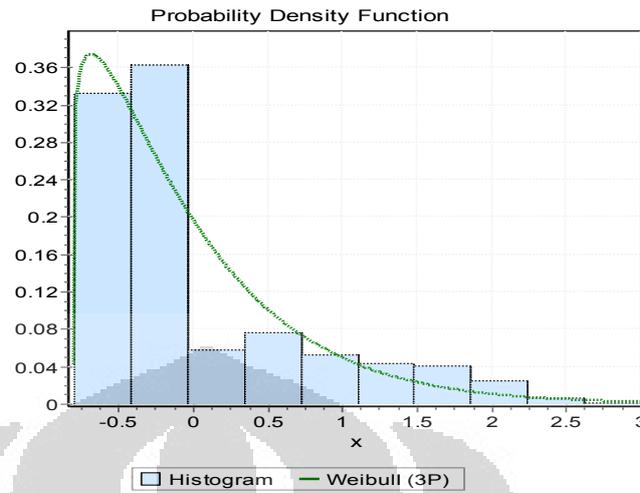
Langkah 1 : Tentukan tabel distribusi frekuensi data *time-series market price of risk*. Tabel yang dimaksud dapat dilihat pada Tabel 4.9 berikut ini.

Tabel 4.9. Tabel distribusi frekuensi data *time-series market price of risk*

<i>Market price of risk</i>	Frekuensi
-0,8	0
-0,6	1226
-0,4	937
-0,2	399
0	88
0,2	125
0,4	232
0,6	50
0,8	129
1	67
1,2	92
1,4	69
1,6	72
1,8	80
2	69
2,2	21
2,4	17
2,6	7
2,8	3
3	1

Langkah 2 : Berdasarkan hasil menggunakan perangkat lunak untuk menentukan distribusi data, maka distribusi yang paling merepresentasikan data adalah distribusi Weibull, Gumbel Max, Lognormal 3 parameter, dan distribusi Exponensial. Pada tesis ini menggunakan dua distribusi terbaik yaitu distribusi Weibull dan Gumbel-Max. Pemilihan distribusi ini dikarenakan RMSE yang dihasilkan pada saat simulasi lebih kecil dibandingkan dengan distribusi lainnya. Berikut adalah implementasinya.

1. Distribusi Weibull



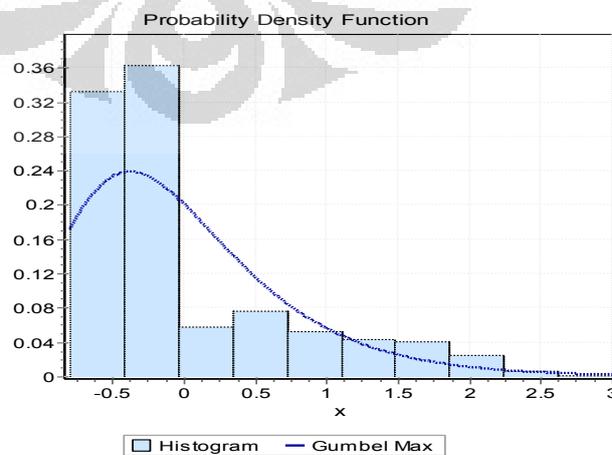
Gambar 4.8. Histogram data *time-series market price of risk* dan kurva distribusi Weibull

dengan parameter-parameter sebagai berikut.

Tabel 4.10. Parameter distribusi Weibull

Weibull	
α	1.127348762
β	0.8001212634
γ	-0.8000000015

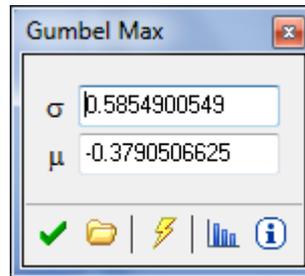
2. Distribusi Gumbel-Max



Gambar 4.9. Histogram dan kurva distribusi Gumbel-Max

diperoleh parameter

Tabel 4.11. Parameter distribusi Gumbel-Max



Berdasarkan persamaan (3.51) yakni $p(\lambda_t) = \frac{1}{2p_\infty} \frac{d}{d\lambda} (q(\lambda_t)^2 p_\infty)$, struktur drift model market price of risk jika data market price of risk berdistribusi Weibul adalah

$$\begin{aligned}
 p(\lambda_t) = & -0.2 \cdot 10^{-1} (0.7204885720 \cdot 10^{12} \lambda^3 - 0.1188895428 \cdot 10^{13} \lambda^5 + 0.1729633490 \\
 & \cdot 10^{12} \lambda^2 - 0.3342262072 \cdot 10^{12} \lambda^4 - 0.1174943886 \cdot 10^{12} \lambda + 0.5399595695 \cdot 10^{12} \lambda^7 \\
 & + 0.7654488830 \cdot 10^{12} \lambda^6 + 0.2248671330 \cdot 10^{12} \lambda^9 - 0.6629094135 \cdot 10^{12} \lambda^8 - 0.2575925 \\
 & 678 \cdot 10^{11} \lambda^{10} + 0.6570456910 \cdot 10^{11} (1,249810555\lambda + 0,9998484459)^{(63674381/5000 \\
 & 00000)} \lambda^5 + 0,1076538183 \cdot 10^{12} (1,249810555\lambda + 0,9998484459)^{(63674381/500000 \\
 & 000)} \lambda^2 - 0,1486634443 \cdot 10^{12} (1,249810555\lambda + 0,9998484459)^{(63674381/5000 \\
 & 00000)} * \lambda^7 - 0,2881784052 \cdot 10^{12} (1,249810555\lambda + 0,9998484459)^{(63674381/500 \\
 & 000000)} \lambda^4 + 0,1181747429 \cdot 10^{12} (1,249810555\lambda + 0,9998484459)^{(63674381/50000 \\
 & 0000)} \lambda^9 - 0,3320281260 \cdot 10^{11} + 0,5475369540 \cdot 10^{11} (1,249810555\lambda + 0,9998484459) \\
 & ^{(63674381/500000000)} \lambda + 0,3207971836 \cdot 10^{12} (1,249810555\lambda + 0,9998484459) \\
 & ^{(63674381/500000000)} \lambda^6 - 0,6282396495 \cdot 10^{11} (1,249810555\lambda + 0,9998484459) \\
 & ^{(63674381/500000000)} \lambda^3 + 0,9998484459)^{(63674381/500000000)} \lambda^8 - 0,3498 \\
 & 644490 \cdot 10^{11} (1,249810555\lambda + 0,9998484459)^{(63674381/500000000)} \lambda^{10} + 0,358376 \\
 & 9279 \cdot 10^{10} (1,249810555\lambda + 0,9998484459)^{(63674381/500000000)} \lambda^1 + 0,73081653 \\
 & 90 \cdot 10^{10} (1,249810555\lambda + 0,9998484459)^{(63674381/500000000)} / (0,1249810555 \\
 & \cdot 10^{11} \lambda + 0,9998484459 \cdot 10^{10}), \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Sedangkan jika dipilih distribusi Gumbel Max diperoleh

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) = & 0,01772075349 \exp(-1,707970941\lambda - 0,6474075167) + 0,0331445830\lambda - \\
 & 0,4354977413\lambda^3 - 0,2593913572\lambda^5 - 0,6598898406\lambda^2 + 1,941198397\lambda^4 + 0,1106 \\
 & 151748\lambda \exp(-1,707970941\lambda - 0,6474075167) - 0,4656552792\lambda^7 \exp(-1,707970941\lambda - \\
 & 0,6474075167) - 0,3057957414\lambda^3 \exp(-1,707970941\lambda - 0,6474075167) + 0,55497 \\
 & 83302\lambda^5 \exp(-1,707970941\lambda - 0,6474075167) + 0,1227687443\lambda^2 \exp(-1,707970941\lambda - \\
 & 0,6474075167) - 0,3165269316\lambda^4 * \exp(-1,707970941\lambda - 0,6474075167) + 0,084142 \\
 & 32656\lambda^6 \exp(-1,707970941\lambda - 0,6474075167) - 0,07342930046\lambda^9 \exp(-1,707970 \\
 & 941\lambda - 0,6474075167) + 0,2879824222\lambda^8 \exp(-1,707970941\lambda - 0,6474075167) + 0,006 \\
 & 951905290\lambda^{10} \exp(-1,707970941\lambda - 0,6474075167) + 0,04704333127 + 1,8145 \\
 & 42033\lambda^7 - 1,992598073\lambda^6 + 0,1141320145\lambda^9 - 0,6749115487\lambda^8 - 0,006951905290\lambda^{10}. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Setelah diperoleh parameter-parameter struktur volatilitas pada subbab 4.3.1 dan struktur *drift* pada subbab 4.3.2, selanjutnya pada bab berikut ini akan disimulasikan solusi model *market price of risk*.

4.3.3 Analisis Model *Market Price of Risk*

Sebelum dilakukan analisis terhadap model *market price of risk* pada subbab ini disimulasikan lintasan *market price of risk* terhadap data *time-series market price of risk*. Model terbaik dipilih berdasarkan RMSE terkecil.

Pada subbab 4.3.1 telah diperoleh 2 macam struktur volatilitas yakni berdasarkan pemilihan lima dan enam nilai λ_t , dan pada subbab 4.3.2 telah diperoleh 2 macam struktur *drift* yakni untuk data *market price of risk* yang berdistribusi Weibull dan Gumbel-Max. Untuk mengetahui model mana yang terbaik, terlebih dahulu akan ditentukan RMSE dari kombinasi pemilihan titik struktur volatilitas dengan pemilihan distribusi pada struktur *drift*, yakni apakah kombinasi struktur volatilitas berdasarkan pemilihan lima nilai λ_t dan distribusi Weibull, kombinasi struktur volatilitas berdasarkan pemilihan enam nilai λ_t dan distribusi Weibull, kombinasi struktur volatilitas berdasarkan pemilihan lima nilai λ_t dan distribusi Gumbel-Max atau kombinasi struktur volatilitas berdasarkan pemilihan enam nilai λ_t dan distribusi Gumbel-Max yang menghasilkan RMSE terbaik. Selanjutnya akan disimulasikan pergerakan *market price of risk* dengan menggunakan metode *Euler-Maruyama*.

Simulasi dilakukan sebanyak 100 kali dengan menggunakan *software* Octave, dan nilai awal dari masing-masing simulasi adalah data *time-series market price of risk* per tanggal 1 September 1996. Dari hasil simulasi, kemudian ditentukan berapa besar RMSE (*root mean square error*) dari tiap kombinasi.

Dari perhitungan RMSE dan simulasi *market price of risk* dengan menggunakan metode *Euler-Maruyama*, hasil yang terbaik adalah struktur volatilitas dengan pengambilan enam titik λ_t dengan struktur *drift* menggunakan distribusi Gumbel-Max.

Berikut adalah simulasi skema Euler-Maruyama pada model *market price of risk* untuk data yang berdistribusi Gumbel-Max dan dengan menggunakan

pemilihan enam nilai dalam menentukan struktur volatilitas model *market price of risk*.

Model *market price of risk* yang dibahas memiliki bentuk PDS

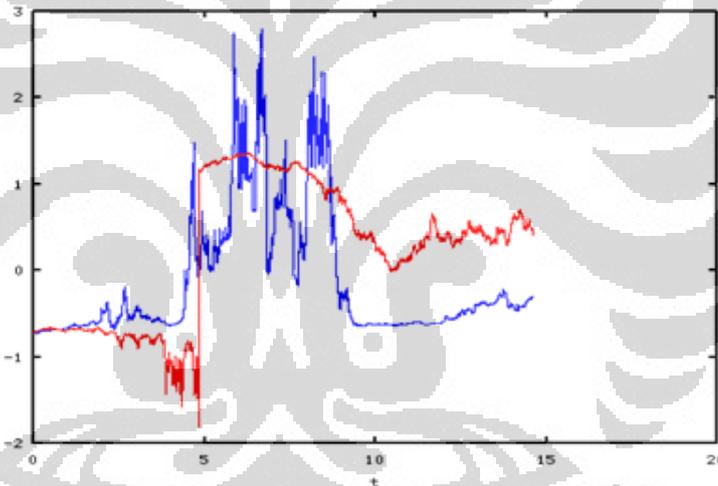
$$d\lambda_t = p(\lambda_t)dt + q(\lambda_t)dX_2,$$

dan pada interval waktu $[0, T]$ memiliki skema Euler-Maruyama

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + p(\lambda_n)\Delta t + q(\lambda_n)\Delta W_n$$

dengan $n = 0, 1, \dots, N - 1$, nilai awal λ_0 yaitu 0.7734, perubahan proses Wiener $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$, $p(\lambda_n)$ merupakan struktur *drift* persamaan (4.7) dan $q(\lambda)$ merupakan struktur volatilitas model *market price of risk* persamaan (4.5).

Untuk lebih memperjelas hasil simulasi model *market price of risk* dibandingkan dengan data *time-series market price of risk* dapat dilihat pada gambar berikut ini dan *source code* simulasi ini diberikan dalam Lampiran 3.

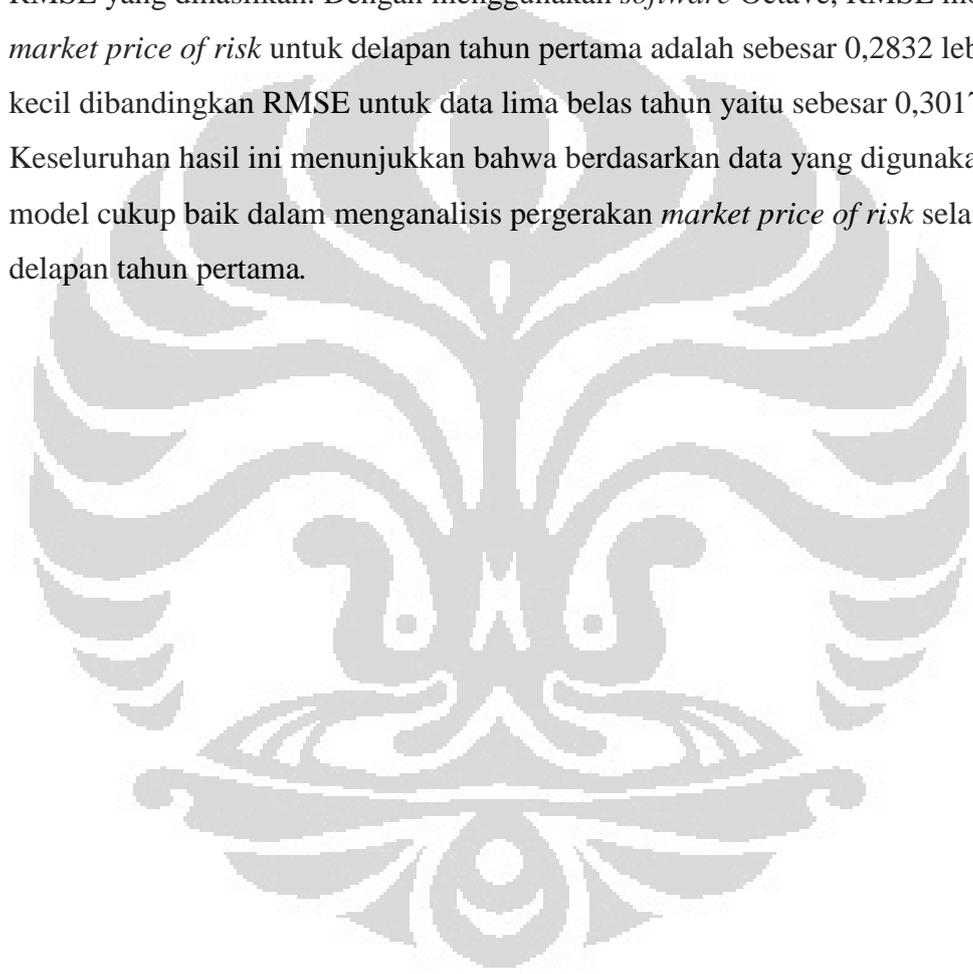


Gambar 4.10. Grafik rata-rata simulasi model *market price of risk* (biru) terhadap data *time series market price of risk* untuk data tingkat bunga yang berdistribusi lognormal dan *market price of risk* yang berdistribusi Gumbel Max (merah).

Pada Gambar 4.10 terlihat bahwa pola pergerakan *market price of risk* memiliki *trend* yang baik sekitar delapan tahun pertama dalam menganalisis pergerakan *market price of risk*. Hal ini dapat dijelaskan karena pada delapan tahun pertama ketika data *time-series menunjukkan* angka yang positif maka nilai rata-rata aproksimasi pada simulasi model *market price of risk* juga menunjukkan

angka yang positif. Begitu pula sebaliknya ketika data *time-series* menunjukkan angka yang negatif maka nilai rata-rata aproksimasi pada simulasi model *market price of risk* juga menunjukkan angka yang negatif. Dengan perkataan lain model *market price of risk* yang dibahas dapat menggambarkan perilaku *greedy* atau *fear* dari investor selama delapan tahun pertama.

Selain itu alasan lain dikatakan model cukup baik menganalisis pergerakan *market price of risk* pada delapan tahun pertama adalah dengan melihat jumlah RMSE yang dihasilkan. Dengan menggunakan *software* Octave, RMSE model *market price of risk* untuk delapan tahun pertama adalah sebesar 0,2832 lebih kecil dibandingkan RMSE untuk data lima belas tahun yaitu sebesar 0,3017. Keseluruhan hasil ini menunjukkan bahwa berdasarkan data yang digunakan model cukup baik dalam menganalisis pergerakan *market price of risk* selama delapan tahun pertama.



BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan data yang digunakan, *market price of risk* untuk negara Jepang pada umumnya bernilai positif sehingga dapat dikatakan bahwa perilaku investor Jepang pada umumnya bersifat *overconfident*. Hasil tersebut didukung oleh penelitian yang telah dilakukan oleh Kenneth A. Kim dan John R. Nofsingerb [5]. Selain itu, berdasarkan data yang digunakan, model *market price of risk* dapat digunakan untuk membantu investor mengambil keputusan investasi. *Market price of risk* pada model bernilai positif berarti bahwa tingkat pengembalian yang diharapkan lebih besar dari tingkat bebas risiko setiap satu unit risiko, sehingga tidak perlu mencari tambahan pengembalian pada investasi lain. Namun jika *market price of risk* bernilai negatif berarti tingkat pengembalian yang diharapkan lebih kecil dari tingkat bebas risiko setiap satu unit risiko, sehingga perlu dilakukan investasi lain guna mendapatkan tambahan keuntungan untuk menutupi satu unit risiko. Dengan mengetahui nilai *market price of risk*, dapat membantu investor untuk membuat keputusan investasi dalam jangka waktu tertentu.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian lebih lanjut adalah sebagai berikut:

1. Pada tesis ini dilakukan penelitian sampai analisis model *market price of risk*. Pada penelitian selanjutnya diharapkan penelitian *market price of risk* diaplikasikan pada harga obligasi.
2. Diharapkan penelitian selanjutnya menganalisis *market price of risk* negara lain untuk mengetahui karakteristik investor di negara tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, Riaz dan Paul Wilmott. (2007). The Market Price of Interest-rate Risk: Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets. *Wilmott magazine*, 64-70.
- Brigo, D., & Mercurio, F. (2001). *Interest rate models – theory and practice*. New York: Springer.
- Darmadji, dkk. (2001). *Pasar Modal di Indonesia*. Jakarta: Salemba Empat.
- Husnan, Suad. (2005). *Teori Portofolio dan Analisis Sekuritas*. Yogyakarta : UPP AMP YKPN.
- Ireland, Peter N. (2007). Money, Banking And Financial Markets. 26 Desember 2011. <http://www2.bc.edu/~irelandp/ec261.html>.
- Luenberger, D.G. (1998). *Investment Science*. New York: Oxford University Press.
- Kellison, Stephen G. (1991). *The Theory of interest*. United States of America: Irwin-McGraw-Hill.
- Kim, Kenneth A. and John R. Nofsinger. (2003). The Behaviour and Performance of Individual Investor in Japan. 8 Mei 2012. <http://www.acsu.buffalo.edu>.
- Klebaner, F.C. (1998). *Introduction to stochastic calculus with applications*. London: Imperial College Press.
- Kloeden, P.E., & Platen, E. (1992). *Numerikal solution of stochastic differential equations*. New York: Springer.
- Purcell, Edwin J. & Dale Varberg. (1997). *Calculus With Analytic Geometry* (5th Edition). Jakarta: Airlangga.
- Ross, S.M. (1996). *Stochastic Process* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons Inc.
- Shreve, S.E. (2004). *Stochastic calculus for finance II continuous–time models*. New York: Springer.
- Wilmott, Paul. (2007). *Paul Willmott on Quantitative Finance II*. England: Wiley. <http://www.economagic.com/em-cgi/data.exe/bjap/day-intrate01>. 10 April 2012.

LAMPIRAN 1

Data Tingkat Bunga Obligasi Pemerintah Jepang

Tanggal	%r(t)	10/3/1996	0.355	11/7/1996	0.334
8/30/1996	0.272	10/4/1996	0.336	11/8/1996	0.373
9/2/1996	0.311	10/7/1996	0.356	11/11/1996	0.391
9/3/1996	0.387	10/8/1996	0.355	11/12/1996	0.396
9/4/1996	0.406	10/9/1996	0.339	11/13/1996	0.33
9/5/1996	0.454	10/11/1996	0.347	11/14/1996	0.305
9/6/1996	0.464	10/14/1996	0.387	11/15/1996	0.305
9/9/1996	0.392	10/15/1996	0.385	11/18/1996	0.323
9/10/1996	0.401	10/16/1996	0.386	11/19/1996	0.328
9/11/1996	0.401	10/17/1996	0.367	11/20/1996	0.344
9/12/1996	0.373	10/18/1996	0.365	11/21/1996	0.328
9/13/1996	0.383	10/21/1996	0.366	11/22/1996	0.317
9/17/1996	0.382	10/22/1996	0.364	11/25/1996	0.344
9/18/1996	0.402	10/23/1996	0.362	11/26/1996	0.342
9/19/1996	0.391	10/24/1996	0.324	11/27/1996	0.323
9/20/1996	0.389	10/25/1996	0.321	11/28/1996	0.289
9/24/1996	0.416	10/28/1996	0.334	11/29/1996	0.287
9/25/1996	0.404	10/29/1996	0.332	12/2/1996	0.305
9/26/1996	0.392	10/30/1996	0.282	12/3/1996	0.312
9/27/1996	0.412	10/31/1996	0.28	12/4/1996	0.319
9/30/1996	0.416	11/1/1996	0.278	12/5/1996	0.295
10/1/1996	0.405	11/5/1996	0.29	12/6/1996	0.294
10/2/1996	0.38	11/6/1996	0.313	12/9/1996	0.323

12/10/1996	0.332
12/11/1996	0.351
12/12/1996	0.325
12/13/1996	0.304
12/16/1996	0.312
12/17/1996	0.3
12/18/1996	0.286
12/19/1996	0.215
12/20/1996	0.193
12/24/1996	0.241
12/25/1996	0.259
12/26/1996	0.281
12/27/1996	0.276
12/30/1996	0.306
1/6/1997	0.394
1/7/1997	0.374
1/8/1997	0.325
1/9/1997	0.328
1/10/1997	0.31
1/13/1997	0.325
1/14/1997	0.333
1/16/1997	0.325
1/17/1997	0.327
1/20/1997	0.342
1/21/1997	0.345

1/22/1997	0.349
1/23/1997	0.329
1/24/1997	0.314
1/27/1997	0.328
1/28/1997	0.331
1/29/1997	0.334
1/30/1997	0.306
1/31/1997	0.293
2/3/1997	0.315
2/4/1997	0.32
2/5/1997	0.287
2/6/1997	0.289
2/7/1997	0.272
2/10/1997	0.289
2/12/1997	0.308
...	...
...	...
...	...
	Dst

LAMPIRAN 2

Source Code Implementasi Model Tingkat Bunga Satu Faktor

```

% EM Euler-Maruyama method on nonlinear SDE
% one factor interest rate model, data with two parameter
Lognormal distribution
% SDE is  $dr=u(r) dt + w(r) dX$ ,  $r(0)=rzero$ 
% where  $w(r)=vr^b$ , and  $Xzero=1$ 
%
% Discretized Brownian path over [0,1]
% Euler-Maruyama uses timestep  $R*dt$ .

%randn('state',100) % set the state of randn
randn('state',sum(100*clock))

rates=csvread("japanbond9611.csv");
rate=rate; n=252; N=3684/3; % data parameters
r1=rate(1:N); % Discrete Solution
r2=rate(N+1:2*N); % Discrete Solution
r3=rate(2*N+1:3*N); % Discrete Solution

v=0.4; b=0.64; % problem parameters
R1=0.311 % data : 1
R2=0.041 % data : 1229
R3=0.425 % data : 2457

T = N/n; dt = 1/n;
R=1; Dt=R*dt; L=(n*T)/R; % L EM steps of size Dt = R*dt
L0 = L*3; N0 = N*3; T0 = T*3;
M=1000;
year0 = 1996.4;

%errMutlak0 = zeros(1,M);

```

```

Xerr0      = zeros (M,N0);
XerrAbs0   = zeros (1,N0);

%errMutlak1 = zeros (1,M);
Xerr1      = zeros (M,N);
XerrAbs1   = zeros (1,N);

%errMutlak2 = zeros (1,M);
Xerr2      = zeros (M,N);
XerrAbs2   = zeros (1,N);

%errMutlak3 = zeros (1,M);
Xerr3      = zeros (M,N);
XerrAbs3   = zeros (1,N);

for q = 1:M
    % -----
    -----
    Rem0 = zeros (1,L0);           % preallocate for efficiency
    Rem1 = zeros (1,L);           % preallocate for efficiency
    Rtemp = R1;

    dX = sqrt(dt)*randn(1,N0);    % brownian increments

    for j = 1:L0
        Xinc=sum(dX(R*(j-1)+1:R*j));

        % Euler-Maruyama
        Ur = -0.1920000000*10^(-
8)*Rtemp^(7/25)*(0.293744945*10^9+0.117299521*10^9*log(Rtemp));
        Wr = v*(Rtemp^b);
        Rtemp = Rtemp + Ur * Dt + Wr * Xinc;

        Rem0(j)= Rtemp;
        Xerr0(q,j) = abs(Rem0(j) - rate(j));

        if j <= L
            Rem1(j)= Rtemp;
            Xerr1(q,j) = abs(Rem1(j) - r1(j));
        end
    end
    if q==1
        V0=Rem0;
        V1=Rem1;
    else
        V0=[V0;Rem0];
        V1=[V1;Rem1];
    end
    end

    Rem2 = zeros (1,L);           % preallocate for
efficiency
    Rtemp = R2;

    dX = sqrt(dt)*randn(1,N);    % brownian
increments

    for j = 1:L
        Xinc=sum(dX(R*(j-1)+1:R*j));

```

```

    % Euler-Maruyama
    Ur = -0.1920000000*10^(-
8)*Rtemp^(7/25)*(0.293744945*10^9+0.117299521*10^9*log(Rtemp));
    Wr = v*(Rtemp^b);
    Rtemp = Rtemp + Ur * Dt + Wr * Xinc;
    Rem2(j)= Rtemp;

    Xerr2(q,j) = abs(Rem2(j) - r2(j));
end
if q==1
    V2=Rem2;
else
    V2=[V2;Rem2];
end

Rem3 = zeros(1,L); % preallocate for efficiency
Rtemp = R3;

dX = sqrt(dt)*randn(1,N); % brownian increments

for j = 1:L
    Xinc=sum(dX(R*(j-1)+1:R*j));

    % Euler-Maruyama
    Ur = -0.1920000000*10^(-
8)*Rtemp^(7/25)*(0.293744945*10^9+0.117299521*10^9*log(Rtemp));
    Wr = v*(Rtemp^b);
    Rtemp = Rtemp + Ur * Dt + Wr * Xinc;
    Rem3(j)= Rtemp;

    Xerr3(q,j) = abs(Rem3(j) - r3(j));
end
if q==1
    V3=Rem3;
else
    V3=[V3;Rem3];
end

%errMutlak3(q) = norm(r3 - Rem3', inf);

end

Vmean0=mean(V0);
Vmean1=mean(V1);
Vmean2=mean(V2);
Vmean3=mean(V3);

% Error Absolute
XerrAbs0 = mean(Xerr0);
XerrAbs1 = mean(Xerr1);
XerrAbs2 = mean(Xerr2);
XerrAbs3 = mean(Xerr3);

% RMSE from absolute
LambdaRSME0=sqrt(mean(XerrAbs0.^2))
LambdaRSME1=sqrt(mean(XerrAbs1.^2))
LambdaRSME2=sqrt(mean(XerrAbs2.^2))
LambdaRSME3=sqrt(mean(XerrAbs3.^2))

```

```

% Error mutlak Max
%ErrMutlakMax = mean(errMutlak)

%Data dan Simulasi Tingkat Bunga
figure(1);
%plot([0:Dt:T-Dt],r,'b',[0:Dt:T],[R1,Vmean],'r-'),hold off
plot([year0:Dt:year0+T0-
Dt],rate,'b',[year0:Dt:year0+T0],[R1,Rem0],'r-');
axis([1996 2012 0 1]);
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('r(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('Data Tingkat Bunga','Simulasi Model Tingkat Bunga Satu
Faktor ');

figure(2);
subplot(3, 1, 1);
plot([year0:Dt:year0+T-Dt],r1,'b',[year0:Dt:year0+T],[R1,Rem1],'r-');
axis([1996 2002 0 1]);
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('r(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('Data Tingkat Bunga','Simulasi Model Tingkat Bunga Satu
Faktor ');

subplot(3, 1, 2);
plot([year0+5:Dt:year0+5+T-
Dt],r2,'b',[year0+5:Dt:year0+5+T],[R2,Rem2],'r-');
axis([2001 2007 0 1]);
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('r(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('Data Tingkat Bunga','Simulasi Model Tingkat Bunga Satu
Faktor ');

subplot(3, 1, 3);
plot([year0+10:Dt:year0+10+T-
Dt],r3,'b',[year0+10:Dt:year0+10+T],[R3,Rem3],'r-');
axis([2006 2012 0 1]);
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('r(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('Data Tingkat Bunga','Simulasi Model Tingkat Bunga Satu
Faktor ');

```

LAMPIRAN 3

Source Code Implementasi Model Market Price of Risk

```

% EM Euler-Maruyama method on nonlinear SDE market price of risk
model
% using one factor interest rate model which is data lognormal
distributed
% 6 point on lagrange methods, with market price of risk data
Gumbel-Max distributed
% SDE is dLambda=P(lambda) dt + Q(lambda) dX, L(0)=Lzero
% Discretized Brownian path over [0,1]
% Euler-Maruyama uses timestep R*dt.

%randn('state',100) % set the state of randn
randomVal = sum(100*clock)
randn('state',randomVal)

rates=csvread("mpr5.csv");
N=3684; n=252; % data parameters
r=rates(1:N); % Discrete Solution

Lzero=-0.733847264;
year0 = 1996.4;

T = N/n; dt = 1/n; M=100;
R=1; Dt=R*dt; L=(n*T)/R; % L EM steps of size Dt =
R*dt

rsmeLambda = zeros(1,M);

RTemp = zeros(M,N);

Xerr = zeros(M,N);
XerrAbs = zeros(1,N);

Rlambda = zeros(1,N); % preallocate for efficiency

for j = 1:L
    dX = sqrt(dt)*randn(1,N); % brownian increments

    errLambda = zeros(1,L);
    for q = 1:M
        Xinc=sum(dX(R*(j-1)+1:R*j));
        if j == 1
            Ltemp = Lzero;
        else
            Ltemp = RTemp(q, (j-1));
        end

        % Euler-Maruyama
        Plambda = 0.01772075349*exp(-1.707970941*Ltemp-
0.6474075167)+0.0331445830*Ltemp-0.4354977413*Ltemp^3-
0.2593913572*Ltemp^5-
0.6598898406*Ltemp^2+1.941198397*Ltemp^4+0.1106151748*Ltemp*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)-0.4656552792*Ltemp^7*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)-0.3057957414*Ltemp^3*exp(-

```

```

1.707970941*Ltemp-0.6474075167)+0.5549783302*Ltemp^5*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)+0.1227687443*Ltemp^2*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)-0.3165269316*Ltemp^4*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)+0.08414232656*Ltemp^6*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)-0.07342930046*Ltemp^9*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)+0.2879824222*Ltemp^8*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)+0.006951905290*Ltemp^10*exp(-
1.707970941*Ltemp-0.6474075167)+0.04704333127+1.814542033*Ltemp^7-
1.992598073*Ltemp^6+0.1141320145*Ltemp^9-0.6749115487*Ltemp^8-
0.006951905290*Ltemp^10;
    Qlambda =-0.6105303182*Ltemp^3-
0.09022495674*Ltemp^5+0.1440508586-
0.2026125676*Ltemp^2+0.4764992606*Ltemp^4+0.4495917997*Ltemp;
    RTemp(q, j) = Ltemp + Plambda * Dt + Qlambda * Xinc;
    Xerr(q,j) = abs(RTemp(q, j) - r(j));
    %errLambda(j) = (Rlambda(j) - r(j))^2;
end

    %rsmeLambda(q) = sqrt(mean(errLambda));
end

% Output RSME
%LambdaRSME=mean(rsmeLambda)

% Error Absolute
XerrAbs = mean(Xerr);

% complete data
Rlambda = mean(RTemp);

% RMSE
LambdaRSME=sqrt(mean(XerrAbs.^2))

%Data dan Simulasi Tingkat Bunga
figure(3);
%plot([0:Dt:T-Dt],r,'b',[0:Dt:T],[Lzero,Vmean],'r-');
plot([year0:Dt:year0+T-
Dt],r,'b',[year0:Dt:year0+T],[Lzero,Rlambda],'r-');
axis([1996 2012]);
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('r(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','ri
ght')
legend('Data Time Series Market Price of Risk','Simulasi Model
Market Price of Risk ');

```