



UNIVERSITAS INDONESIA

**MODEL KATASTROFE *CUSP* STOKASTIK
PADA KRISIS PASAR SAHAM**

TESIS

**FATHIN CHAMAMA
1006786101**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012**



UNIVERSITAS INDONESIA

**MODEL KATASTROFE *CUSP* STOKASTIK
PADA KRISIS PASAR SAHAM**

TESIS

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Magister Sains**

**FATHIN CHAMAMA
1006786101**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Fathin Chamama

NPM : 1006786101

Tanda Tangan :



Tanggal : 12 Juli 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :
Nama : Fathin Chamama
NPM : 1006786101
Program Studi : Magister Matematika
Judul Tesis : Model Katastrophe *Cusp* Stokastik pada Krisis Pasar Saham

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing 1 : Dra. Bevina D. Handari, Ph.D. ()
Pembimbing 2 : Dr. Hengki Tasman, M.Si. ()
Penguji : Prof. Dr. Belawati H. Widjaja ()
Penguji : Alhadi Bustamam, Ph.D. ()
Penguji : Dr. Dian Lestari ()

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 12 Juli 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan YME atas segala limpahan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Salawat dan salam kepada teladan seluruh umat manusia, Nabi Besar Muhammad SAW beserta seluruh keluarga, sahabat dan pengikutnya sampai akhir zaman.

Dalam penyusunan tesis ini, penulis mendapatkan bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua Orang Tua tercinta, Ayahanda Habib Syadzili dan Ibunda Hamidah, terima kasih atas doa, nasehat dan dukungan yang telah diberikan selama ini.
2. Ibu Dra. Bevina D Handari, Ph.D., selaku Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberikan bimbingan, nasehat dan arahan serta dorongan yang luar biasa kepada penulis.
3. Bapak Dr. Hengki Tasman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II sekaligus Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan dan arahan serta pembelajaran yang sangat bermanfaat bagi penulis.
4. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami dan Bapak Dr. rer. nat. Hendri Murfi, selaku Ketua dan Sekretaris Program Studi S2 Matematika FMIPA UI serta Ibu Dr. Dian Lestari selaku koordinator bidang pendidikan yang telah membantu dalam proses penyelesaian studi penulis.
5. Direktur Jenderal Pemberdayaan Sosial dan Penanggulangan Kemiskinan Kementerian Sosial RI beserta seluruh jajarannya yang telah memberikan ijin serta dukungan dalam studi penulis.
6. Kepala Pusat Pendidikan dan Pelatihan Kesejahteraan Sosial beserta seluruh

jajarannya yang telah memberikan dukungan dalam penyelenggaraan Beasiswa Tugas Belajar Kementerian Sosial RI Angkatan Tahun 2010.

7. Seluruh dosen pengajar Program Studi S2 Matematika dan karyawan Departemen Matematika FMIPA UI yang telah banyak membantu penulis selama proses studi.
8. Saudara-saudaraku tercinta Mbak Mut Mas Bima, Mbak Rina Mas Candra, Mbak Afroh, Mas Alfian Mbak Inung, Mas Sul Mbak Bin, Mas Misyroh Mbak Ida dan Ngamroe Itul serta seluruh keponakan yang selalu mengirimkan keceriaan.
9. *My roommate* Shantika Martha dan teman-teman angkatan 2010 yang hebat, *smart* dan dahsyat: Desti, Iif, Pak PJ, Pak Umar, Mbak Risda, Meilisa, Riedha, Teh Siti, Feni, Dewi, Mia, Pak Har, Pak Bian, Uun, Rifkos, Nurma, Pak Huda, Pak Iwan, Debby, Marthin, Mbak Tri, Mbak Ning, Bang Ayin, Pak Supri, Mbak Rina, Mbak Lia, Sagita, Mbak Endang, Dilla, Pak Endar, Pak Tarhadi, Pak Sigit, Pak Bob serta rekan-rekan mahasiswa S2 Matematika Angkatan 2009 dan 2011, terima kasih atas motivasi dan doanya.
10. Sahabat-sahabatku Mbak Nova, Mayang, serta seluruh anggota Tim Bagian Keuangan Setditjen Dayasos & PK. Terima kasih atas doa dan dukungannya.
11. Semua pihak yang telah banyak membantu dan memberikan masukan yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyambut baik saran dan kritik yang bersifat membangun demi kesempurnaan tesis ini. Penulis berharap semoga tesis ini dapat memberikan sumbangan bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Akhirnya, penulis mohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan dalam penulisan tesis ini.

Depok, 12 Juli 2012

Penulis

Universitas Indonesia

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fathin Chamama
NPM : 1006786101
Program Studi : Magister Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Model Katastrophe *Cusp* Stokastik pada Krisis Pasar Saham

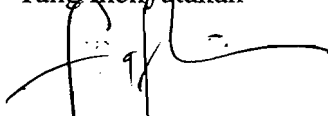
beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 12 Juli 2012

Yang menyatakan



(Fathin Chamama)

ABSTRAK

Nama : Fathin Chamama
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Model Katastrofe *Cusp* Stokastik pada Krisis Pasar Saham

Teori katastrofe menjelaskan bahwa perubahan kecil (*smooth change*) pada suatu parameter akan menyebabkan rusaknya kestabilan dan menimbulkan perubahan perilaku sistem yang drastis secara tiba-tiba. Dengan menggunakan kalkulus stokastik, fungsi delta Dirac, transformasi Fourier terhadap fungsi karakteristik serta persamaan Fokker-Planck, dapat dijelaskan hubungan antara model katastrofe *cusp* stokastik dengan suatu fungsi densitas probabilitas (FDP) stasioner. Pada tesis ini ditunjukkan bahwa model katastrofe *cusp* stokastik dapat digunakan untuk menjelaskan peristiwa krisis pasar saham, yaitu krisis *Black Monday* pada 19 Oktober 1987 di pasar saham Amerika. Estimasi parameter dengan metode momen menunjukkan bahwa terdapat perubahan nilai diskriminan Cardan dari positif ke negatif, sehingga menunjukkan adanya kasus perubahan FDP dari unimodal ke bimodal. Peristiwa katastrofe pada data *Black Monday* menunjukkan bahwa krisis ini dipengaruhi oleh faktor internal.

Kata Kunci : teori katastrofe, *cusp* stokastik, *Black Monday*
xii+81 halaman : 16 gambar; 3 tabel; 2 lampiran
Daftar Pustaka : 30 (1980-2012)

ABSTRACT

Name : Fathin Chamama
Program Study : Magister of Mathematics
Title : Stochastic Cusp Catastrophe Model on Stock Market Crash

Catastrophe theory explains that a smooth change of parameters can perturb the system stability to a sudden discontinuous state. Using stochastic calculus, Dirac delta function, Fourier transform of characteristic function, and Fokker-Planck equation we show the connection between stochastic cusp catastrophe model to a stationer probability density function (PDF). This thesis shows that stochastic cusp catastrophe model can explains U.S stock market crash in October 19, 1987 called Black Monday. Parameter estimations using momen method shows change of Cardan discriminant from positive to negative which explain the stationer PDF in unimodal case to bimodal case. Catastrophe in Black Monday data explains that the crisis influenced by internal factor.

Key Words : catastrophe theory, stochastic cusp, Black Monday
xii+81 pages : 16 pictures; 3 tables; 2 appendix
Bibliography : 30 (1980-2012)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Metodologi Penyelesaian Masalah	3
2 LANDASAN TEORI	4
2.1 Katastrofe Elementer	4
2.1.1 Fungsi Potensial	8
2.1.2 <i>Fold</i>	11
2.1.3 <i>Cusp</i>	15
2.2 Kalkulus Stokastik dan Teori Pendukung	22
2.2.1 Variabel Acak dan Proses Stokastik	23
2.2.1.1 Fungsi Distribusi Proses Stokastik	24
2.2.1.2 Fungsi Densitas Probabilitas Transisi	25
2.2.1.3 Proses Wiener	25
2.2.1.4 <i>White Noise</i>	26
2.2.2 Persamaan Diferensial Stokastik Itô	27
2.2.3 Parameter Lokasi dan Parameter Skala	27
2.2.4 Transformasi Fourier dari Fungsi Karakteristik	28
2.2.5 Delta Dirac	30

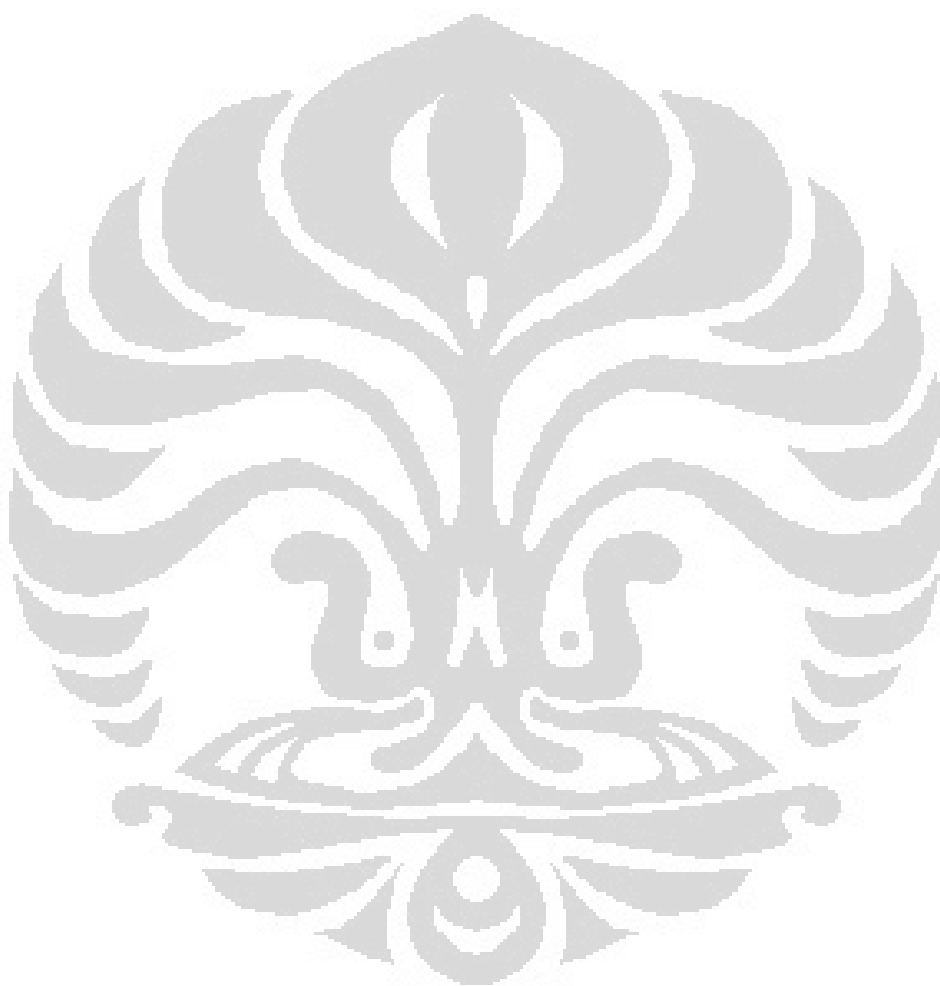
3	MODEL KATASTROFE <i>CUSP</i> STOKASTIK	33
3.1	Pembentukan Model Katastrofe <i>Cusp</i> Stokastik	34
3.2	Hubungan Katastrofe <i>Cusp</i> Stokastik dengan FDP Stasioner	38
3.3	Diskriminan Cardan	49
3.4	Estimasi Parameter	53
4	APLIKASI MODEL KATASTROFE <i>CUSP</i> STOKASTIK	60
4.1	Sejarah Peristiwa <i>Black Monday</i>	60
4.2	Variabel-variabel Acak dalam Penelitian	61
4.2.1	Indeks Saham S&P 500	62
4.2.2	<i>A/D Ratio</i>	63
4.2.3	<i>CBOE Volatility Indeks(VIX)</i>	64
4.3	Hasil Estimasi	68
5	KESIMPULAN DAN SARAN	72
5.1	Kesimpulan	72
5.2	Saran	72
	DAFTAR REFERENSI	73
	LAMPIRAN	76

DAFTAR GAMBAR

2.1	Grafik fungsi potensial $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$	9
2.2	Grafik $\frac{dx}{dt} = x - x^3$	11
2.3	Grafik $F_u(x) = x^3 + ux$ dengan $u > 0, u = 0, u < 0$	12
2.4	Grafik permukaan katastrofe (M_F) <i>fold</i>	13
2.5	Grafik permukaan katastrofe (M_F) <i>cusp</i>	16
2.6	Grafik irisan permukaan <i>cusp</i> pada bidang $v = 0$	17
2.7	Grafik irisan permukaan <i>cusp</i> pada bidang $u = 0$	17
2.8	Grafik irisan permukaan <i>cusp</i> pada bidang $u = 4$	18
2.9	Grafik irisan permukaan <i>cusp</i> pada bidang $v = 3$	18
2.10	Grafik himpunan bifurkasi (B_F) <i>cusp</i>	20
2.11	Grafik peristiwa bifurkasi <i>cusp</i>	21
3.1	Bagan peristiwa katastrofe.	33
3.2	Grafik hubungan FDP stasioner $f_s(y x)$ dan fungsi potensial $V(y_t)$	50
4.1	Grafik VXO dan PPO dari VXO	67
4.2	Grafik nilai-nilai diskriminan Cardan (1 Mei 1987 - 29 April 1988).	69
4.3	Grafik barisan FDP stasioner.	71

DAFTAR TABEL

2.1	Daftar notasi	5
2.2	Tujuh bentuk katastrofe	7
3.1	Sifat diskriminan Cardan	52



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perilaku pasar saham seringkali sulit diprediksi apakah akan mengalami kenaikan, penurunan atau cenderung stabil. Ketidakpastian kondisi pasar saham dapat mengakibatkan para investor melakukan tindakan-tindakan antisipasi agar tidak mengalami kerugian dalam berinvestasi. Terdapat dua alat analisis yang dipergunakan investor dalam berinvestasi di pasar saham, yaitu analisis teknis dan analisis fundamental.

Analisis teknis merupakan alat analisis yang sederhana, yaitu analisis harga saham dengan menggunakan grafik (*chart*) pergerakan saham pada jangka waktu tertentu. Grafik harga saham dan transaksi volume saham yang dibuat dalam jangka panjang akan memberikan arti atau informasi bagi pengguna analisis teknis untuk melihat kecenderungan (*tren*) harga saham ke depan. Kelompok investor yang menggunakan analisis teknis dalam berinvestasi dinamakan sebagai *chartist*.

Analisis fundamental merupakan analisis harga saham dengan mempelajari faktor-faktor ekonomi yang mempengaruhi pasar, seperti penawaran (*supply*) dan permintaan (*demand*). Analisis fundamental digunakan untuk memperkirakan nilai intrinsik dari suatu saham sehingga dapat digunakan sebagai alat proyeksi keuntungan berdasarkan prospek pasar di masa yang akan datang. Nilai intrinsik merupakan suatu nilai nyata dari premi sebuah opsi yang merupakan selisih antara harga kesepakatan dan harga aset acuan. Kelompok investor yang menggunakan analisis fundamental dalam berinvestasi dinamakan sebagai *fundamentalist*.

Perilaku investor *chartist* dan *fundamentalist* mempengaruhi pergerakan pasar saham. Jika kelompok *chartist* sedikit maka perilaku pasar cenderung meningkat karena pasar lebih banyak digerakkan oleh kelompok *fundamentalist* yang memiliki kemampuan analisis pasar. Sebaliknya jika jumlah investor *chartist*

besar mengakibatkan ketidakstabilan pada pasar karena banyaknya spekulasi uang pada pasar. Perilaku pasar yang tidak stabil tersebut dapat terjadi secara gradual maupun mendadak.

Perilaku pasar saham yang tidak bisa diprediksi, terutama perubahan yang mendadak merupakan hal yang menakutkan pada dunia keuangan. Teori katastrofe hadir mengurai informasi-informasi yang mungkin diperlukan untuk meneliti fenomena perubahan pasar saham yang mendadak. Teori katastrofe memberikan penjelasan bahwa perubahan kecil suatu parameter akan menyebabkan rusaknya kestabilan dan menimbulkan perubahan perilaku sistem yang drastis dan tiba-tiba. Pada tesis ini teori katastrofe digunakan untuk menjelaskan perubahan perilaku indeks pasar saham yang mendadak, yaitu krisis pasar saham Amerika pada 19 Oktober 1987 yang dikenal dengan nama *Black Monday*, dimana perdagangan pada pasar saham mengalami penurunan drastis 20,5% dalam sehari (Barunik dan Vosvrda, 2009).

Teori katastrofe dikenalkan pertama kali oleh René Thom pada awal dekade 1970. Teori katastrofe mulai dikenal luas setelah pada tahun 1975 E.C. Zeeman menciptakan mesin katastrofe yang digunakan untuk menjelaskan perilaku ketidakstabilan pasar saham. Salah satu hipotesis Zeeman adalah bahwa terdapat dua kelompok investor yang mempengaruhi perilaku pasar, yaitu kelompok *chartist* dan *fundamentalist* (Barunik dan Vosvrda, 2009). Model katastrofe *cusp* stokastik diasumsikan sesuai untuk menjelaskan perilaku pasar saham karena model katastrofe *cusp* stokastik dikendalikan oleh dua parameter kontrol yaitu faktor asimetri dan faktor bifurkasi. Dalam tesis ini *fundamentalist* diasumsikan sebagai faktor asimetri dan *chartist* diasumsikan sebagai faktor bifurkasi.

Teori katastrofe telah digunakan dalam penelitian di berbagai bidang di antaranya bidang biologi oleh Naparstek pada tahun 1974 yang disampaikan pada (Cobb dan Zacks, 1985), bidang ekonomi oleh Fischer dan Jammernegg (1986), bidang kimia oleh Kwok (1990), bidang psikologi oleh Guastello (2000), dan bidang sosial oleh van der Maas, Kolstein, dan van der Pligt (2003). Teori katastrofe merupakan cabang dari teori bifurkasi dalam studi sistem dinamik. Teori bifurkasi mempelajari dan mengklasifikasikan fenomena yang dibentuk oleh

perubahan tiba-tiba perilaku sistem yang muncul dari perubahan kecil faktor-faktor di dalamnya. Fenomena tersebut bisa membawa perubahan yang tiba-tiba dan dramatis, misalnya runtuhnya jembatan karena adanya sedikit penambahan tekanan (Barunik dan Vosvrda, 2009). Fenomena perubahan perilaku sistem yang tiba-tiba tersebut dapat terjadi pada perilaku pasar saham, misalnya krisis pasar saham *Black Monday* di Amerika.

1.2 Perumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah apakah model katastrofe *cusp* stokastik dengan variabel kontrol spekulasi (*speculative money*) pada pasar modal dan permintaan saham yang melampaui batas, mampu menjelaskan kejadian perubahan drastis yang mendadak pada indeks harga saham yang terjadi pada peristiwa *Black Monday* tanggal 19 Oktober 1987 di pasar saham Amerika.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan apakah model katastrofe *cusp* stokastik mampu menjelaskan kejadian perubahan drastis yang mendadak pada indeks harga saham pada peristiwa *Black Monday*.

1.4 Metodologi Penyelesaian Masalah

Metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah adalah sebagai berikut:

1. Studi literatur; yaitu mempelajari teori-teori yang berkaitan dengan topik penelitian, di antaranya teori katastrofe elementer, persamaan diferensial stokastik, serta teori-teori dasar tentang pasar saham dan pasar modal.
2. Estimasi; yaitu melakukan estimasi parameter-parameter pada model katastrofe *cusp* stokastik dengan menggunakan metode momen.
3. Simulasi; menunjukkan adanya peristiwa katastrofe pada perubahan indeks harga saham yang drastis dan mendadak pada peristiwa *Black Monday*.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas teori-teori yang digunakan dalam pembahasan topik utama. Pada subbab 2.1 dibahas tentang teori katastrofe elementer, beserta teori-teori yang berkaitan dengan sistem dinamik, seperti sistem gradien dan fungsi potensial. Pada subbab 2.2 ditulis teori-teori yang mendukung pembahasan model katastrofe *cusp* stokastik, seperti proses stokastik, fungsi karakteristik, delta Dirac, fungsi densitas probabilitas, dan teori-teori lain yang terkait.

2.1 Katastrofe Elementer

Castrigiano dan Hayes (1993) menyatakan bahwa teori katastrofe pertama kali dikenalkan oleh René Thom pada awal dekade 1970 dengan bukunya yang berjudul *Stabilité structurelle et morphogenèse*. Teori katastrofe menjadi populer setelah E.C. Zeeman menciptakan mesin katastrofe yaitu suatu mesin rakitan yang dapat menggambarkan adanya peristiwa katastrofe. Mesin yang kemudian dikenal sebagai mesin katastrofe Zeeman ini dikembangkan dalam format *flash* oleh Daniel J. Cross (Cross, 2011).

Berdasarkan Kamus Besar Bahasa Indonesia (*KBBI*, 2012), katastrofe mempunyai arti malapetaka besar yang datang secara tiba-tiba atau perubahan cepat dan mendadak pada permukaan bumi. Katastrofe yang dibahas pada penelitian ini adalah teori yang mengklasifikasikan fenomena perubahan mendadak pada suatu sistem dinamik yang digambarkan oleh titik kritis suatu fungsi mulus (*smooth*).

Bentuk geometrik dari suatu fungsi mulus dapat digambarkan setelah titik-titik kritisnya diperoleh karena pada titik-titik tersebut perilaku fungsi mengalami perubahan. Notasi-notasi yang digunakan dalam pembahasan titik kritis, dituliskan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Daftar notasi

Notasi	Keterangan
$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	
$D^k f(p)$	Turunan ke- k fungsi f pada titik $p \in U$, dengan k adalah bilangan bulat tak negatif dan $n = 1$. $D^0 f(p) := f(p)$ dan $D^1 f(p) := Df(p)$
$f(p), f'(p), f''(p), \dots, f^k(p)$	Fungsi turunan satu variabel, $n = 1$.
$D_i^k f(p), \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(p)$	Turunan parsial f ke- i pada titik p pada order k dengan $k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$. Untuk $k = 1, D_i f(p)$ atau $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$; dan $D_i^0 f(p) := f(p)$.
$Df(p)$	Pemetaan linear $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yang memetakan $(y_1, \dots, y_n) \mapsto D_1 f(p)y_1 + \dots + D_n f(p)y_n$. $Df(p) = (D_1 f(p), \dots, D_n f(p)) \in \mathbb{R}^n$ dan merupakan gradien f di titik p .

Untuk memahami hubungan antara fungsi mulus dengan titik kritis, berikut diberikan beberapa definisi yang bersumber dari Castrigiano dan Hayes (1993).

Definisi 2.1 Misal U adalah suatu subhimpunan buka di \mathbb{R}^n . Suatu fungsi $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan **mulus** jika f mempunyai turunan pada sembarang order.

Definisi 2.2 Suatu titik $p \in U$ disebut titik kritis atau **titik ekuilibrium** dari $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jika $Df(p) = \mathbf{0}$.

Definisi 2.3 Suatu titik kritis $p \in U$ dari $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut **terisolasi** (isolated) jika terdapat lingkungan V dari titik $p \in U$ sedemikian sehingga tidak ada titik di V selain p , yang merupakan titik kritis.

Titik-titik kritis dari suatu fungsi mulus dibedakan menjadi dua jenis yaitu titik kritis degenerasi dan titik kritis nondegenerasi. Untuk mengetahui jenis titik

kritis, berikut adalah hal-hal yang digunakan dalam pembahasan titik kritis.

Matriks Hessian dari $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ adalah

$$D^2f(p) = \begin{pmatrix} D_1^2f(p) & D_2D_1f(p) & \dots & D_nD_1f(p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_1D_nf(p) & D_2D_nf(p) & \dots & D_n^2f(p) \end{pmatrix}.$$

Matriks Hessian $D^2f(p)$ adalah matriks yang entrinya merupakan semua turunan parsial kedua dari f di p dengan

$$D_iD_jf(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p),$$

yaitu merupakan turunan parsial campuran fungsi f di titik p pada koordinat ke- i dan ke- j . Pada pembelajaran kalkulus elementer, matriks Hessian digunakan untuk menentukan apakah suatu titik kritis merupakan titik maksimum, titik minimum atau titik sadel. Pada pembelajaran katastrofe elementer, matriks Hessian digunakan untuk menentukan apakah suatu titik kritis bersifat degenerasi atau nondegenerasi berdasarkan definisi sebagai berikut:

Definisi 2.4 Suatu titik kritis $p \in U$ dari fungsi $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ adalah *nondegenerasi* jika matriks Hessian $D^2f(p)$ mempunyai balikan. Jika tidak demikian, titik p disebut *degenerasi*.

Fungsi mulus yang memiliki titik kritis degenerasi terisolasi (*isolated degenerate*) menjadi dasar bagi pembahasan teori katastrofe. Teori katastrofe diawali dengan tujuh fungsi yang mempunyai sifat tersebut. Empat fungsi di antaranya merupakan pemetaan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yaitu x^3, x^4, x^5 dan x^6 , sedangkan tiga fungsi lainnya adalah pemetaan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yaitu $x^3 - xy^2, x^3 + y^3$, dan $x^2y + y^4$. Ketujuh fungsi tersebut memiliki titik kritis tunggal yang bersifat degenerasi terisolasi yaitu pada titik pusat koordinat. Titik-titik kritis ketujuh fungsi tersebut dikenal sebagai tujuh katastrofe elementer (*7 elementary catastrophes*).

Castrigiano dan Hayes (1993) menyatakan bahwa menurut René Thom, setelah suatu perubahan kecil pada koordinat-koordinat tertentu, fungsi-fungsi katastrofe elementer f berubah menjadi jumlahan dua fungsi P dan Q , dengan P

adalah salah satu dari tujuh katastrofe elementer dan Q adalah suatu bentuk kuadratik nondegenerasi. Fungsi baru berupa jumlahan dua fungsi ini dinamakan sebagai *universal unfolding* atau bentuk gangguan dari f , dan dinotasikan sebagai $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ dengan n adalah dimensi ruang *state* dan r adalah dimensi ruang parameter. Pembahasan lebih mendalam tentang bentuk kuadratik dan *universal unfolding* terdapat pada Castrigiano dan Hayes (1993).

Berdasarkan tujuh fungsi katastrofe elementer, René Thom memperkenalkan tujuh bentuk katastrofe seperti pada Tabel 2.2 (Castrigiano dan Hayes, 1993).

Tabel 2.2: Tujuh bentuk katastrofe

Kelas Eki-valen f	Banyak Parameter	Bentuk Gangguan (F)	Nama Katastrofe
$[x^3]$	1	$[x^3 + ux]$	<i>fold</i>
$\pm [x^4]$	2	$\pm [x^4 - ux^2 + vx]$	<i>cusp</i>
$[x^5]$	3	$[x^5 + ux^3 + vx^2 + wx]$	<i>swallowtail</i>
$\pm [x^6]$	4	$\pm [x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx]$	<i>butterfly</i>
$[x^3 - xy^2]$	3	$[x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy]$	<i>elliptic umbilic</i>
$[x^3 + y^3]$	3	$[x^3 + y^3 + wxy - ux - vy]$	<i>hyperbolic umbilic</i>
$\pm [x^2y + y^4]$	4	$\pm [x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy]$	<i>parabolic umbilic</i>

Tujuh bentuk katastrofe pada Tabel 2.2 dapat digunakan untuk melihat bentuk geometrik dari suatu fungsi mulus. Pada teori katastrofe, bentuk geometrik fungsi mulus yang dikenal adalah permukaan katastrofe, himpunan katastrofe dan himpunan bifurkasi yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.5 Misal $F : W \subseteq \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}$ terdefinisi di lingkungan buka W pada titik pusat 0 dari \mathbb{R}^{n+r} . Himpunan:

$$M_F := \left\{ (x, \vec{u}) : DF_{\vec{u}}(x) = 0 \right\} \quad (2.1)$$

dinamakan sebagai **permukaan katastrofe**, yaitu himpunan semua titik kritis dari

semua fungsi parsial $F_{\bar{u}}(x) := F(\bar{u}, x)$ dari F .

$$C_F := \left\{ (x, \bar{u}) \in M_F : D^2 F_{\bar{u}}(x) = 0 \right\} \quad (2.2)$$

dinamakan sebagai **himpunan katastrofe** dari F .

$$B_F := \left\{ \bar{u} \in R^r : \exists x \in R^n, (x, \bar{u}) \in C_F \right\} \quad (2.3)$$

dinamakan **himpunan bifurkasi** dari F , yaitu proyeksi C_F terhadap ruang parameter R^r (Castrigiano dan Hayes, 1993).

Setelah bentuk geometrik dari suatu permukaan katastrofe diperoleh, maka dapat ditentukan kestabilan dan ketidakstabilan dari himpunan titik kritisnya. Pada subbab selanjutnya dibahas tentang kestabilan dari suatu permukaan katastrofe yang dapat ditentukan dengan melihat titik ekstrim fungsi potensialnya.

2.1.1 Fungsi Potensial

Kestabilan suatu permukaan katastrofe berkaitan erat dengan fungsi potensial tertentu, sehingga pada subbab ini dibahas tentang fungsi potensial dan hubungannya dengan permukaan katastrofe. Sebelum membahas fungsi potensial terlebih dahulu dibahas tentang sistem gradien. Menurut Hirsch dan Smale (2004), suatu sistem gradien pada R^n adalah suatu sistem persamaan diferensial dengan bentuk

$$\frac{dx}{dt} = -\text{grad} V(x), \quad (2.4)$$

dengan $V : R^n \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi mulus. Gradien dari V adalah

$$\text{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \text{ dengan } -\text{grad} V(x) = \text{grad}(-V(x)).$$

Sistem gradien mempunyai keterkaitan dengan fungsi potensial. Fungsi potensial merupakan salah satu metode yang bisa digunakan untuk melihat perilaku suatu persamaan diferensial. Sistem dinamik dari suatu fungsi berkaitan

dengan fungsi potensialnya, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}V(x). \quad (2.5)$$

Misal $x(t)$ adalah solusi dari persamaan (2.5) maka titik-titik ekuilibrium dari persamaan (2.5) adalah titik-titik ekstrim dari fungsi potensial V . Jika V diinterpretasikan sebagai fungsi energi potensial maka titik minimum dari fungsi potensialnya merupakan titik ekuilibrium stabil dan titik maksimumnya merepresentasikan titik ekuilibrium tak stabil (Castrigiano dan Hayes, 1993).

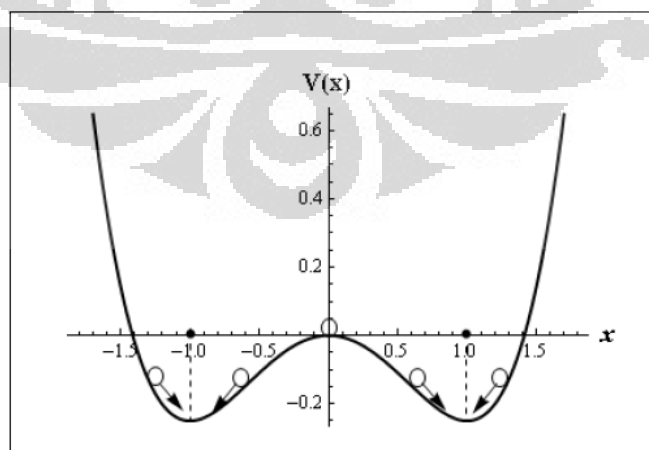
Hubungan antara suatu sistem dinamik dan fungsi potensialnya dapat dilihat pada contoh yang bersumber dari Hale dan Kocak (1991) sebagai berikut:

Diberikan suatu sistem dinamik

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3. \quad (2.6)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.5) maka fungsi potensial $V(x)$ dari persamaan (2.6) adalah :

$$V(x) = -\int_0^x \frac{ds}{dt} ds = \int_0^x s^3 - s ds = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}. \quad (2.7)$$

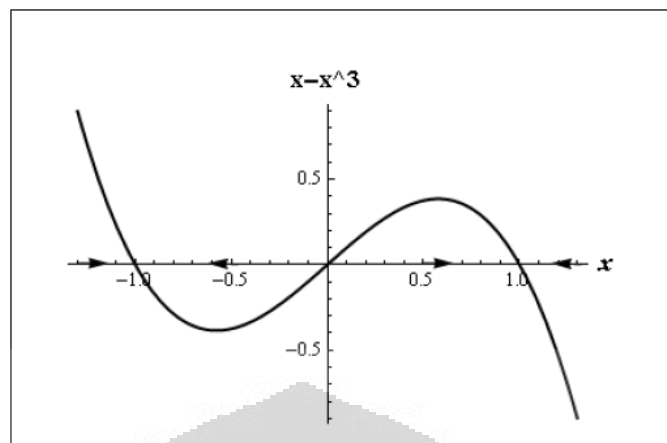


Gambar 2.1: Grafik fungsi potensial $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.

Titik-titik kritis dari $V(x)$ adalah nilai-nilai yang memenuhi $\text{grad} V(x) = 0$ yaitu pada $x = -1, 0$, dan 1 . Untuk melihat hubungan $\frac{dx}{dt}$ dengan fungsi potensial $V(x)$, dimisalkan suatu partikel diletakkan di sepanjang lintasan fungsi potensial $V(x)$ pada Gambar 2.1. Gerak partikel diumpamakan sebagai sistem dinamik dari solusi. Dengan memperhatikan gerak partikel sepanjang lintasan dapat dilihat bahwa gerak partikel selalu menurun. Dengan demikian fungsi potensial $V(x)$ mempunyai dua titik minimum di $x = -1$ dan $x = 1$ dan satu titik maksimum di $x = 0$. Menurut Castrigiano dan Hayes (1993), $V(x)$ dapat diinterpretasikan sebagai fungsi energi potensial. Dengan demikian dapat diinterpretasikan bahwa sistem dinamik (2.6) mempunyai titik ekuilibrium stabil di $x = -1$ dan $x = 1$ dan titik ekuilibrium tak stabil di $x = 0$.

Grafik sistem dinamik $\frac{dx}{dt} = x - x^3$ dapat dilihat pada Gambar 2.2. Sesuai Definisi 2.2 maka titik ekuilibrium dari $\frac{dx}{dt}$ adalah titik-titik dimana $\frac{dx}{dt}$ bernilai nol, yaitu pada titik $x = -1, 0$, dan 1 . Dengan demikian terdapat empat interval pada sumbu x yaitu $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, dan $(1, \infty)$. Pada interval $(-\infty, -1)$ dan $(0, 1)$, nilai $\frac{dx}{dt} > 0$, sehingga pergerakan variabel x akan menuju arah positif (digambarkan dengan panah ke kanan). Pada interval $(-1, 0)$ dan $(1, \infty)$, nilai $\frac{dx}{dt} < 0$, sehingga pergerakan variabel x akan menuju arah negatif (digambarkan dengan panah ke kiri).

Berdasarkan pergerakan variabel x , titik ekuilibrium $x = -1$ dan $x = 1$ pada Gambar 2.2 merupakan titik ekuilibrium stabil. Artinya jika pada titik ekuilibrium tersebut sistem mengalami sedikit gangguan maka sistem akan kembali ke titik ekuilibrium stabil. Sifat kestabilan tersebut digambarkan dengan anak panah yang menuju titik ekuilibrium stabil di titik $x = -1$ dan $x = 1$. Karena sifat ini maka titik ekuilibrium stabil disebut sebagai **penarik** (*attractor*). titik ekuilibrium tak stabil $x = 0$ disebut sebagai **pelontar** (*repellor*) karena jika pada titik $x = 0$ sistem mengalami sedikit gangguan maka sistem akan terlempar ke titik ekuilibrium stabil di $x = -1$ atau $x = 1$. Sifat pelontar ditunjukkan dengan anak panah ke arah titik ekuilibrium stabil.



Gambar 2.2: Grafik $\frac{dx}{dt} = x - x^3$.

Fungsi potensial $V(x)$ dapat dianggap sebagai fungsi parsial $F_{\bar{u}}$ dari fungsi katastrofe sehingga $\frac{dx}{dt}$ dapat dianggap sebagai $-DF_{\bar{u}}$. Dengan demikian kestabilan titik ekuilibrium $F_{\bar{u}}$ dapat ditentukan dengan titik-titik ekstrim dari $F_{\bar{u}}$. Misal $F_{\bar{u}}$ adalah fungsi mulus dan $\bar{x} \in M_F$ adalah titik ekuilibrium dari $F_{\bar{u}}$. Jika $D^2F_{\bar{u}}(\bar{x}) \neq 0$, maka titik ekuilibrium \bar{x} merupakan titik ekuilibrium stabil jika $D^2F_{\bar{u}}(\bar{x}) > 0$, dan merupakan titik ekuilibrium tak stabil jika $D^2F_{\bar{u}}(\bar{x}) < 0$. Grafik dari $V(x) = F_{\bar{u}}(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ pada Gambar 2.1 menunjukkan titik ekuilibrium $F_{\bar{u}}(x)$ adalah $x = -1, 0$, dan 1 dengan titik ekuilibrium stabil $x = -1$ dan $x = 1$ dan titik ekuilibrium tak stabil $x = 0$.

Dari pembahasan subbab fungsi potensial ini, dapat diambil kesimpulan bahwa kestabilan titik-titik ekstrim suatu fungsi potensial bersesuaian dengan kestabilan suatu permukaan katastrofe. Pada subbab berikutnya dibahas dua bentuk katastrofe yaitu katastrofe *fold* dan *cusp*. Katastrofe *fold* melibatkan satu parameter kontrol sedangkan katastrofe *cusp* melibatkan dua parameter kontrol, dengan sifat dan ciri yang dibahas pada dua subbab berikutnya.

2.1.2 *Fold*

Fold adalah bentuk katastrofe yang paling sederhana. Katastrofe *fold* berasal dari fungsi $f(x) = x^3$ yang diberikan perturbasi dengan menambahkan satu

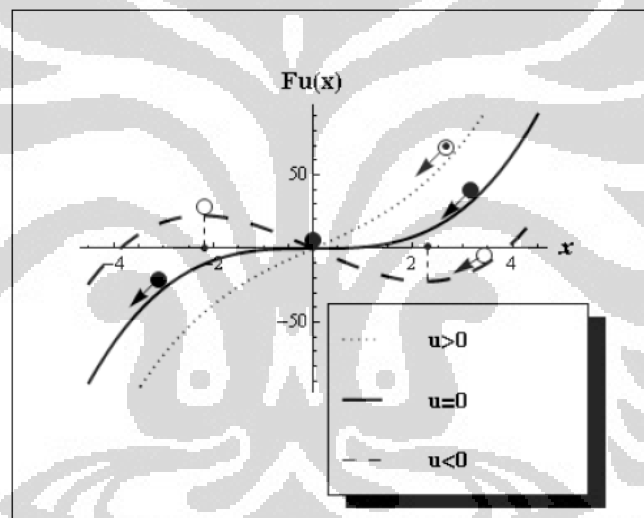
parameter kontrol u . Bentuk umum katastrofe *fold* adalah

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F(x, u) := x^3 + ux, \quad (2.8)$$

dengan x adalah variabel keadaan (*state variable*) dan u adalah parameter kontrol (Castrigiano dan Hayes, 1993).

Untuk setiap nilai parameter u , fungsi $F_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F_u(x) := x^3 + ux$, merepresentasikan gangguan terhadap $f = F_0$, sehingga $F(x, 0) = f(x) = x^3$. Fungsi $f = F_0$ mempunyai satu titik kritis degenerasi, tapi tidak demikian pada F_u jika $u \neq 0$.



Gambar 2.3: Grafik $F_u(x) = x^3 + ux$ dengan $u > 0, u = 0, u < 0$.

Gambar 2.3 menunjukkan F_u dengan tiga nilai u yang berbeda. Sesuai pembahasan pada subbab 2.1.1, F_u dapat dianggap sebagai fungsi potensial, dengan demikian jika suatu partikel diletakkan pada masing-masing lintasan kurva pada Gambar 2.3 maka akan diperoleh beberapa titik ekuilibrium sebagai berikut:

1. Jika $u > 0$, F_u tidak mempunyai titik kritis (pergerakan partikel \odot).
2. Jika $u = 0$, F_u mempunyai tepat satu titik kritis pada titik pusat 0, yang merupakan titik sadel. Titik sadel adalah titik ekuilibrium yang sekaligus bersifat penarik dan pelontar (pergerakan partikel \bullet).

3. Jika $u < 0$, F_u mempunyai dua titik kritis (pergerakan partikel \circ).

Karena $F_u(x) = x^3 + ux$ dapat dituliskan sebagai fungsi potensial, yaitu $V(x) = F_u(x) = x^3 + ux$, maka persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = -DF_u(x) = -\frac{d}{dx}(x^3 + ux). \quad (2.9)$$

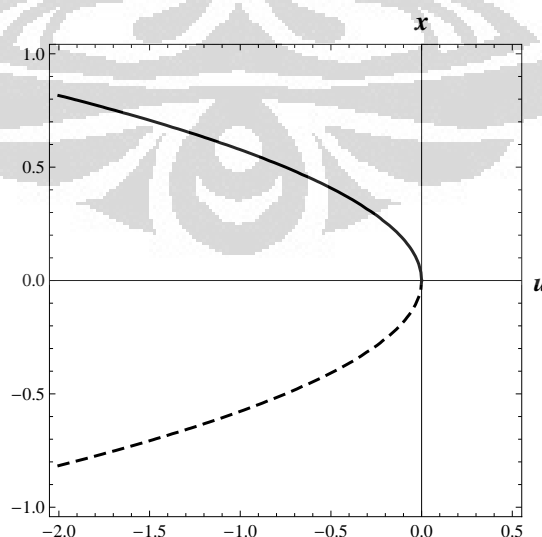
Sistem dinamik (2.9) dapat digambarkan dengan mengandaikan pergerakan suatu partikel di sepanjang lintasan kurva fungsi potensial $F_u(x)$ pada Gambar 2.3.

Dengan mengandaikan $F_u(x)$ sebagai fungsi energi potensial dapat dilihat bahwa pada saat $u < 0$ titik kritis minimum dari $F_u(x)$ terletak pada $x = \sqrt{\left|\frac{u}{3}\right|}$ yang merupakan titik ekuilibrium stabil dan titik kritis maksimum dari $F_u(x)$ terletak pada $x = -\sqrt{\left|\frac{u}{3}\right|}$ yang merupakan titik ekuilibrium tak stabil.

Permukaan katastrofe pada bentuk *fold* untuk setiap nilai u , sesuai persamaan (2.1) adalah sebagai berikut:

$$M_F := \left\{ (x, u) : D(x^3 + ux) = 0 \right\} = \left\{ (x, u) : 3x^2 + u = 0 \right\}. \quad (2.10)$$

Permukaan katastrofe *fold* dapat digambarkan dalam bentuk geometri seperti pada Gambar 2.4. Untuk $u < 0$, F_u mempunyai dua titik kritis. Kestabilan permukaan



Gambar 2.4: Grafik permukaan katastrofe (M_F) *fold*.

katastrofe dapat ditentukan berdasarkan nilai-nilai dari D^2F_u . Untuk $x = -\sqrt{\left|\frac{u}{3}\right|}$

diperoleh

$$D^2 F_u(x) = 6x = 6 \left(-\sqrt{\left| \frac{u}{3} \right|} \right) < 0, \quad (2.11)$$

dan untuk $x = \sqrt{\left| \frac{u}{3} \right|}$ diperoleh

$$D^2 F_u(x) = 6x = 6 \left(\sqrt{\left| \frac{u}{3} \right|} \right) > 0. \quad (2.12)$$

Dengan demikian diperoleh bahwa himpunan titik kritis pada sumbu x negatif merupakan titik ekuilibrium tak stabil dan himpunan titik kritis pada sumbu x positif merupakan titik ekuilibrium stabil. Hal ini sesuai dengan penentuan kestabilan titik ekuilibrium katastrofe *fold* pada paragraf sebelumnya.

Eksistensi titik ekuilibrium tak stabil pada sumbu u negatif yang digambarkan dengan garis putus-putus pada Gambar 2.4, merupakan ciri khas katastrofe *fold* (Castrigiano dan Hayes, 1993). Posisi tersebut tidak stabil dalam pengertian bahwa adanya gangguan kecil dapat menyebabkan sistem melompat ke titik ekuilibrium stabil atau bergerak menjauh secara tiba-tiba. Pemisahan titik ekuilibrium stabil dengan titik ekuilibrium tak stabil muncul pada daerah dimana turunan kedua dari F_u sama dengan 0, yang dinamakan sebagai himpunan bifurkasi.

Berdasarkan persamaan (2.2) maka himpunan katastrofe (C_F) *fold* adalah:

$$C_F := \{(x, u) \in M_F : 6x = 0\} = \{(0, 0)\}, \quad (2.13)$$

yaitu himpunan titik-titik dimana terjadi perubahan perilaku sistem. Pada katastrofe *fold*, perubahan sistem yang terjadi adalah perubahan dari titik ekuilibrium stabil pada sumbu x positif, menjadi titik ekuilibrium tak stabil pada sumbu x negatif. Perubahan perilaku ini terjadi pada titik $(0, 0)$.

Sesuai persamaan (2.3), himpunan bifurkasi (B_F) *fold* adalah:

$$B_F := \{u \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}, (x, u) \in C_F\} = \{0\}, \quad (2.14)$$

yaitu proyeksi himpunan katastrofe (C_F) pada ruang parameter $u \in \mathbb{R}$.

Tanpa memperhatikan variabel keadaan x , perubahan perilaku sistem dapat dilihat melalui ruang parameter saja, yaitu dengan himpunan bifurkasi. Himpunan bifurkasi *fold* hanya memuat titik 0 yang merupakan nilai bifurkasi dimana terjadi perubahan perilaku sistem. Dengan memperhatikan Gambar 2.3 dan Gambar 2.4, tampak bahwa terdapat titik bifurkasi pada titik pusat 0, yaitu titik dimana terjadi perubahan jumlah titik ekuilibrium dari tidak ada titik ekuilibrium ($u > 0$) menjadi dua titik ekuilibrium ($u < 0$). Perubahan jumlah titik ekuilibrium digunakan sebagai indikasi terjadinya **peristiwa katastrofe**. Setelah dibahas mengenai katastrofe yang paling sederhana yaitu *fold*, selanjutnya dibahas tentang bentuk katastrofe kedua, yaitu *cusp*.

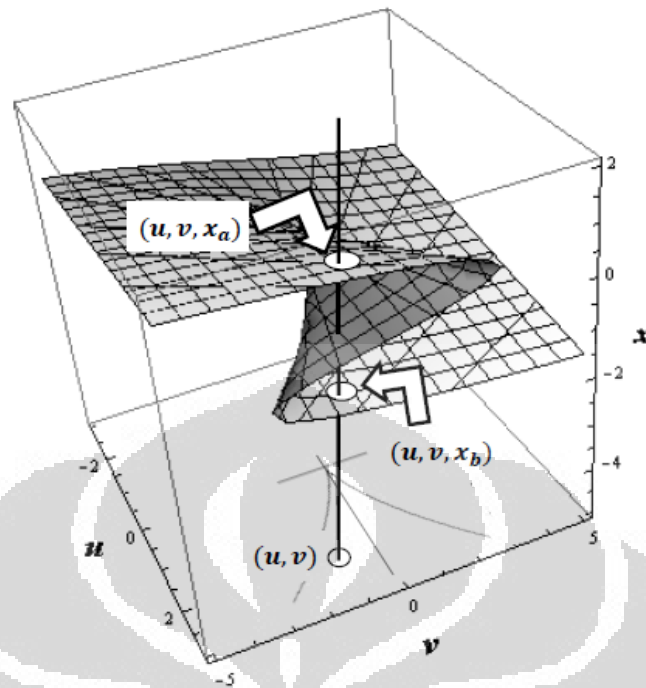
2.1.3 Cusp

Kata *cusp* mempunyai arti puncak atau ujung. Katastrofe *cusp* berasal dari fungsi $f(x) = x^4$ yang diberikan perturbasi dengan menambahkan dua parameter kontrol u dan v . Bentuk katastrofe *cusp* adalah

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ F(x; u, v) &:= x^4 - ux^2 + vx, \end{aligned} \tag{2.15}$$

dengan x adalah variabel keadaan dan (u, v) adalah pasangan parameter kontrol (Castrigiano dan Hayes, 1993).

Untuk suatu nilai parameter $\vec{u} = (u, v)$ yang tetap (*fixed*), fungsi $F_{\vec{u}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $F_{\vec{u}}(x) := x^4 - ux^2 + vx$, merepresentasikan gangguan terhadap $f = F_0$, sehingga $F(x, 0) = f(x) = x^4$.



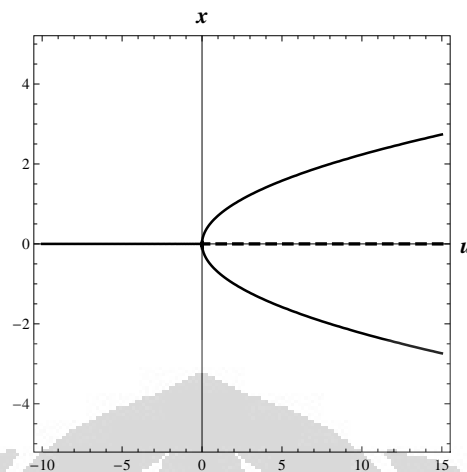
Gambar 2.5: Grafik permukaan katastrofe (M_F) *cusp* .

Sesuai persamaan (2.1), permukaan katastrofe pada *cusp* adalah

$$M_F := \{(x, u, v) : 4x^3 - 2ux + v = 0\}, \quad (2.16)$$

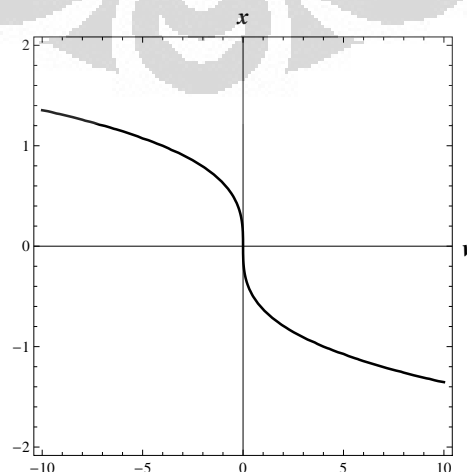
dengan bentuk geometri seperti pada Gambar 2.5. Bidang alas dari permukaan katastrofe *cusp* pada Gambar 2.5 merupakan ruang parameter $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Permukaan katastrofe *cusp* pada Gambar 2.5 berbentuk seperti kertas yang sebagian terlipat menjadi tiga lapisan. Lipatan kertas menjelaskan perilaku model *cusp* pada semua nilai variabel kontrol u dan v . Lapisan bagian atas dan bawah menjelaskan ekuilibrium stabil, sedangkan lapisan bagian tengah menjelaskan ekuilibrium tak stabil. Hal ini dapat ditunjukkan dengan gambar potongan permukaan katastrofe *cusp* pada beberapa nilai parameter u dan v yang berbeda-beda sebagai berikut:



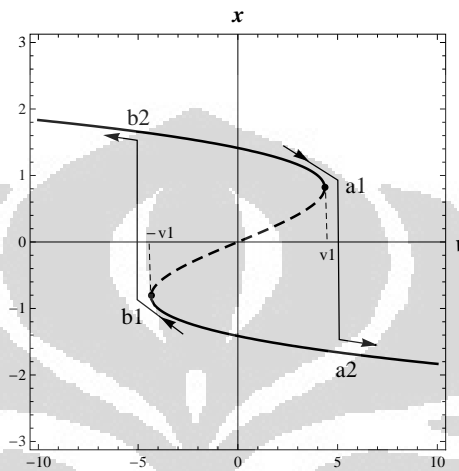
Gambar 2.6: Grafik irisan permukaan *cusp* pada bidang $v = 0$.

Himpunan titik ekuilibrium pada Gambar 2.6 diperoleh dengan mensubstitusikan nilai $v = 0$ pada persamaan (2.16) menjadi $4x^3 - 2ux = 0$ dengan nilai x yang memenuhi adalah $x = 0$ dan $x = \pm\sqrt{\frac{u}{2}}, u > 0$. Kestabilan titik ekuilibrium diperoleh dengan substitusi nilai-nilai titik ekuilibrium ke $D^2F_{\bar{u}}(x) = 6x^2 - u$, sehingga $D^2F_{\bar{u}}(0) = -u$, $D^2F_{\bar{u}}(\sqrt{\frac{u}{2}}) > 0$, dan $D^2F_{\bar{u}}(-\sqrt{\frac{u}{2}}) > 0$. Dengan demikian himpunan titik kritis pada $x = 0$ merupakan titik ekuilibrium stabil ketika $u < 0$ dan merupakan titik ekuilibrium tak stabil ketika $u > 0$ dan himpunan titik kritis pada $x = \pm\sqrt{\frac{u}{2}}, u > 0$ merupakan titik ekuilibrium stabil. Himpunan titik ekuilibrium stabil digambarkan dengan garis utuh, dan himpunan titik ekuilibrium tak stabil digambarkan dengan garis putus-putus.



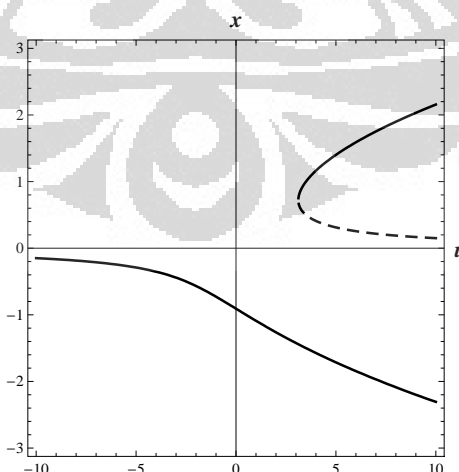
Gambar 2.7: Grafik irisan permukaan *cusp* pada bidang $u = 0$.

Himpunan titik ekuilibrium pada Gambar 2.7 diperoleh dengan substitusi nilai $u = 0$ pada persamaan (2.16) menjadi $4x^3 + v = 0$. Dengan demikian diperoleh nilai x yang memenuhi adalah $x = \sqrt[3]{-\frac{v}{4}}$. Kemudian karena $D^2F_u(x) > 0$ maka kurva $x = \sqrt[3]{-\frac{v}{4}}$ merupakan himpunan titik ekuilibrium stabil.



Gambar 2.8: Grafik irisan permukaan *cusp* pada bidang $u = 4$.

Himpunan titik ekuilibrium pada Gambar 2.8 diperoleh dengan substitusi nilai $u = 4$ pada persamaan (2.16) menjadi $4x^3 - 8x + v = 0$, dan himpunan titik ekuilibrium pada Gambar 2.9 diperoleh dengan substitusi nilai $v = 3$ pada persamaan (2.16) menjadi $4x^3 - 2ux + 3 = 0$.



Gambar 2.9: Grafik irisan permukaan *cusp* pada bidang $v = 3$.

Katastrofe *cusp* mempunyai dua fenomena, yaitu *bimodality* dan *hysteresis* yang tidak dimiliki oleh *fold* (Castrigiano dan Hayes, 1993). ***Bimodality***

merupakan suatu fenomena dimana untuk pasangan nilai parameter (u, v) yang sama, *cusp* mempunyai dua ekuilibrium stabil. Misal pada variabel-variabel keadaan x_a dan x_b sedemikian sehingga titik ekuilibrium stabil (u, v, x_a) terletak pada lapisan atas dan (u, v, x_b) terletak pada lapisan bawah permukaan katastrofe Gambar 2.5. **Hysteresis** merupakan keadaan dimana sistem bergantung pada keadaan sebelumnya. Pada katastrofe *cusp* sistem mengalami lompatan pada dua nilai (u, v) yang berbeda bergantung pada histori bagaimana sistem dijalankan, artinya nilai parameter pada saat terjadi lompatan ditentukan oleh rute yang digunakan pada bidang parameter. Peristiwa *hysteresis* dapat dijelaskan menggunakan Gambar 2.8.

Misal sistem ekuilibrium bergerak dimulai dari v negatif ke arah v positif pada Gambar 2.8. Sistem tetap stabil seiring dengan bertambahnya nilai v . Keadaan ini berlangsung sampai $v = v_1$, yaitu pada titik a_1 . Pada titik a_1 sistem akan melompat ke keadaan ekuilibrium stabil di titik a_2 . Selanjutnya dengan bertambahnya nilai v , sistem akan tetap stabil. Sebaliknya, jika pergerakan sistem dimulai dari v positif ke arah v negatif, sistem akan tetap stabil sampai dengan $v = -v_1$, yaitu pada titik b_1 . Pada titik b_1 sistem melompat ke keadaan ekuilibrium stabil di titik b_2 . Seiring dengan bertambahnya nilai v , sistem tetap stabil.

Sesuai persamaan (2.2) maka himpunan katastrofe (C_F) *cusp* adalah

$$C_F := \{(x, u, v) \in M_F : 6x^2 - u = 0\}, \quad (2.17)$$

dan diperoleh $u = 6x^2$. Karena himpunan katastrofe (C_F) adalah subhimpunan dari permukaan katastrofe (M_F), maka untuk memperoleh fungsi parameter v , $u = 6x^2$ dapat disubstitusikan ke persamaan (2.16) sehingga diperoleh $v = 8x^3$. Dengan demikian himpunan katastrofe (C_F) *cusp* dapat dituliskan kembali sebagai

$$C_F := \{(x, 6x^2, 8x^3) \in M_F : x \in \mathbb{R}\}, \quad (2.18)$$

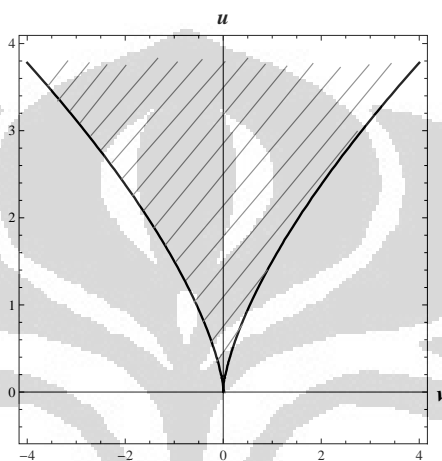
yaitu subhimpunan permukaan katastrofe yang merupakan titik-titik terjadinya perubahan perilaku sistem yaitu peristiwa *hysteresis* dan *bimodality*. Himpunan katastrofe (C_F) *cusp* dapat dilihat pada Gambar 2.5, yaitu bagian dari permukaan

katastrofe (M_F) yang terlipat menjadi tiga lapisan.

Sesuai persamaan (2.3), himpunan bifurkasi dari katastrofe *cusp* adalah

$$B_F := \{(6x^2, 8x^3) : x \in \mathbb{R}\}, \quad (2.19)$$

dengan bentuk geometri seperti pada Gambar 2.10.



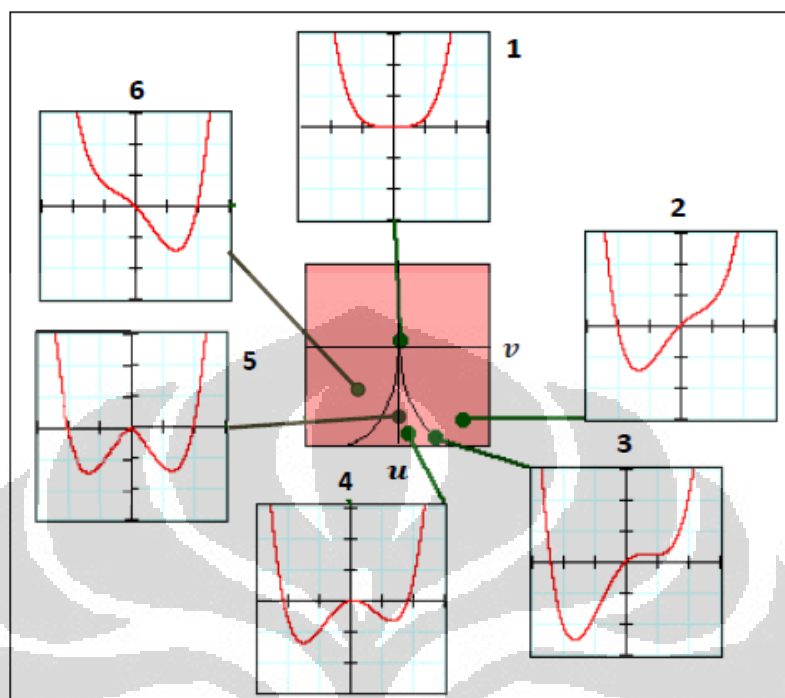
Gambar 2.10: Grafik himpunan bifurkasi (B_F) *cusp*.

Himpunan bifurkasi adalah himpunan titik-titik yang merupakan titik kritis dari ruang parameter. Himpunan bifurkasi *cusp* merupakan proyeksi himpunan katastrofe (C_F) terhadap ruang parameter yang digambarkan sebagai kurva *cuspidal cubic* pada Gambar 2.10. Kurva *cuspidal cubic* membagi ruang parameter menjadi dua daerah, yaitu daerah bagian dalam yang diarsir dan daerah diluar *cuspidal cubic*. Pada daerah diluar *cuspidal cubic* bentuk fungsi potensial tidak berubah, yaitu banyaknya titik minimum dan titik maksimum pada fungsi potensial adalah tetap. Pada daerah bagian dalam *cuspidal cubic*, fungsi potensial mempunyai tiga titik ekuilibrium.

Dari Gambar 2.10 dapat ditunjukkan sifat parameter kontrol u . Parameter kontrol u dapat menunjukkan peristiwa bifurkasi dimana sistem mengalami perubahan dari satu titik ekuilibrium menjadi tiga titik ekuilibrium saat u memasuki area yang diarsir. Kejadian ini hanya terjadi pada sumbu u positif. Sifat demikian menyebabkan parameter kontrol u disebut sebagai **faktor bifurkasi**.

Peristiwa bifurkasi *cusp* dimana sistem mengalami perubahan dari satu titik

ekuilibrium menjadi tiga titik ekuilibrium ditunjukkan pada Gambar 2.11.



[Sumber: Dujardin (2006) (telah diolah kembali)]

Gambar 2.11: Grafik peristiwa bifurkasi *cusp*

Persegi yang diarsir pada bagian tengah Gambar 2.11 merupakan ruang parameter kontrol yang memuat himpunan bifurkasi seperti pada Gambar 2.10. Di sekeliling persegi berarsir terdapat enam gambar yang menunjukkan kurva potensial untuk enam titik berbeda di ruang parameter dengan penjelasan sebagai berikut :

1. Grafik 1: Grafik fungsi potensial $V = x^4$, dengan proyeksi pada ruang parameter berupa titik $(u, v) = (0, 0)$. Grafik ini adalah grafik saat sistem tidak mengalami gangguan karena kedua parameter kontrol bernilai nol.
2. Grafik 2: Fungsi potensial mempunyai titik ekuilibrium tunggal yaitu titik ekuilibrium stabil. Perubahan kecil nilai parameter kontrol menghasilkan perubahan kecil pada keadaan ekuilibrium.
3. Grafik 3: Ketika sistem bergerak dan berada pada titik bifurkasi yaitu tepat pada kurva *cuspidal cubic*, fungsi potensial masih memiliki titik ekuilibrium

tunggal dan ketika memasuki area bagian dalam *cuspidal cubic* fungsi potensial membangun titik minimum kedua.

4. Grafik 4: Fungsi potensial mempunyai dua titik ekuilibrium stabil dan satu titik ekuilibrium tidak stabil.
5. Grafik 5: Untuk nilai-nilai parameter di garis tengah area *cuspidal cubic* ($v = 0$), fungsi potensial mempunyai dua titik ekuilibrium stabil yang saling simetris terhadap titik ekuilibrium tak stabil. Jika $v \neq 0$ maka kedua titik ekuilibrium stabil tidak simetris terhadap titik ekuilibrium tak stabil. Keadaan ini menyebabkan parameter kontrol v disebut sebagai **faktor asimetri**.
6. Grafik 6: Ketika keluar dari area *cuspidal cubic*, ekuilibrium dari sistem hilang (saat ekuilibrium baru terbentuk) yang menyebabkan sistem mengalami perubahan mendadak karena sedikit perubahan nilai parameter kontrol. Perilaku diskontinu seperti ini dinamakan peristiwa katastrofe.

Peristiwa katastrofe serupa dapat dilihat dari mesin katastrofe Zeeman dalam format *flash* oleh Daniel J. Cross yang bisa dilihat melalui jaringan internet di <http://lagrange.physics.drexel.edu/flash/zcm/>.

Aplikasi pada data keuangan yang akan dibahas pada penelitian ini melibatkan satu variabel keadaan dan dua variabel kontrol sehingga pembahasan katastrofe elementer dibatasi sampai pada katastrofe *cusp* saja. Untuk aplikasi dengan dua variabel keadaan dan variabel kontrol lebih dari dua dapat digunakan model katastrofe elementer lain sesuai dengan jenis-jenis katastrofe elementer pada Tabel 2.2.

2.2 Kalkulus Stokastik dan Teori Pendukung

Pada subbab ini dibahas teori tentang variabel acak dan teori dasar proses stokastik serta beberapa teori yang berkaitan dengan proses stokastik seperti proses Wiener, *white noise*, dan persamaan diferensial stokastik. Selain itu juga dibahas

teori-teori dasar statistika yang mendukung pembahasan utama seperti famili distribusi lokasi-skala, serta pembahasan tentang delta Dirac.

2.2.1 Variabel Acak dan Proses Stokastik

Model katastrofe *cusp* stokastik yang dibahas pada tesis ini melibatkan variabel keadaan (*state variable*) perubahan indeks saham yang dinyatakan sebagai *return* harian. *Return* harian merupakan suatu proses stokastik. Pada subbab ini dijelaskan tentang variabel acak dan proses stokastik.

Definisi 2.6 *Pandang suatu percobaan acak dengan ruang sampel C . Suatu variabel acak X adalah suatu fungsi yang memetakan setiap $c \in C$ ke satu dan hanya satu bilangan $X(c) = x$. Range dari X adalah himpunan bilangan real $\mathbb{R} = \{x : x = X(c), c \in C\}$ (Hogg, McKean dan Craig, 1995).*

Jika R himpunan terhitung maka X disebut sebagai variabel acak diskret. Jika R suatu interval pada himpunan bilangan real maka X disebut sebagai variabel acak kontinu.

Definisi 2.7 *Misal X suatu variabel acak. Fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$ dari variabel acak X didefinisikan untuk sembarang bilangan real x dengan persamaan*

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(c \in C : X(c) \leq x). \quad (2.20)$$

$P(c \in C : X(c) \leq x)$ dapat juga ditulis sebagai $P(X \leq x)$. $F_X(x)$ dapat juga disebut sebagai fungsi distribusi (Hogg, McKean dan Craig, 1995).

Definisi 2.8 *Misal X suatu variabel acak kontinu. Ditentukan suatu fungsi tak negatif $f_X(x)$ sedemikian sehingga untuk sembarang interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ fungsi distribusi probabilitas dari X , $P_X(\cdot)$ didefinisikan sebagai*

$$P_X[(a, b)] = P[c \in C : a < X(c) < b] = \int_a^b f_X(x) dx; \quad (2.21)$$

yang memenuhi $f_X(x) \geq 0$ dan $P_X(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$ (Hogg, McKean dan Craig, 1995).

Fungsi $f_X(x)$ disebut sebagai fungsi densitas probabilitas (FDP) dari variabel acak X .

Definisi 2.9 Suatu proses stokastik adalah koleksi variabel acak yang merupakan barisan variabel acak $\{X_t, t \in T\}$. Untuk setiap t anggota himpunan indeks T , X_t adalah suatu variabel acak (Ross, 1996).

Pada aplikasinya, t sering diinterpretasikan sebagai waktu dan X_t diinterpretasikan sebagai *state* dari proses stokastik pada waktu t . Jika himpunan indeks T adalah himpunan terhingga maka $\{X_t\}$ adalah proses stokastik waktu diskrit, dan jika T adalah himpunan bilangan real maka $\{X_t\}$ adalah proses stokastik waktu kontinu.

2.2.1.1 Fungsi Distribusi Proses Stokastik

Definisi 2.10 Jika pada setiap himpunan berhingga $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subseteq T$, terdapat himpunan variabel acak $X_1 = X_{t_1}, X_2 = X_{t_2}, \dots, X_n = X_{t_n}$ yang mempunyai fungsi distribusi bersama

$$\begin{aligned} & F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_{t_1} : x_{t_2} : \dots : x_{t_n}) \\ &= P\{X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2 \cap \dots \cap X_n \leq x_n\}, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

maka famili fungsi distribusi bersama ini membentuk suatu proses stokastik $X_t, t \in T$ (Soong, 1973).

Dalam teori proses stokastik, notasi yang sering digunakan pada fungsi distribusi bersama persamaan (2.22) adalah

$$F_n(x_{t_1} : x_{t_2} : \dots : x_{t_n}) = F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_{t_1} : x_{t_2} : \dots : x_{t_n}) \quad (2.23)$$

yang disebut sebagai fungsi distribusi ke n dari suatu proses stokastik $X(t)$. Fungsi densitas bersamanya (jika ada) adalah

$$f_n(x_{t_1} : x_{t_2} : \dots : x_{t_n}) = \frac{\partial^n F_n(x_{t_1} : x_{t_2} : \dots : x_{t_n})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (2.24)$$

yaitu fungsi densitas ke n dari proses stokastik X_t .

2.2.1.2 Fungsi Densitas Probabilitas Transisi

Pandang suatu relasi umum

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x_{t_1} : x_{t_2} : x_{t_3}) dx_2 = f_2(x_{t_1} : x_{t_3}). \quad (2.25)$$

Misal $t_1 < t_2 < t_3$. Berdasarkan definisi proses Markov pada (Soong, 1973), persamaan (2.25) dapat dibentuk menjadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_{t_3}|x_{t_2})f(x_{t_2}|x_{t_1})f_1(x_{t_1})dx_2 = f(x_{t_3}|x_{t_1}). \quad (2.26)$$

Relasi ini menjelaskan perubahan (transisi) dari FDP saat t_1 ke t_3 sebagai FDP bersyarat transisi dari variabel-variabel acak terurut (*consecutive random variables*). Fungsi densitas bersyarat pada persamaan (2.26) dinamakan sebagai FDP transisi (Soong, 1973).

2.2.1.3 Proses Wiener

Suatu gerak Brown standar atau proses Wiener standar pada selang waktu $[0, T]$ adalah proses stokastik kontinu W_t yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $W_0 = 0$,
2. untuk $0 \leq s < t \leq T$, variabel acak dari perubahan $W_t - W_s$ berdistribusi normal dengan *mean* nol dan variansi $t - s$ atau secara ekivalen bisa ditulis sebagai $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$,
3. $0 \leq s < t < u < v \leq T$, variabel acak dari perubahan $W_t - W_s$ dan $W_v - W_u$ saling bebas (Higham, 2001).

Penamaan proses Wiener dilakukan sebagai penghormatan untuk Norbert Wiener. Proses Wiener juga dikenal sebagai gerak Brown (dari Robert Brown). Proses Wiener menggambarkan pergerakan variabel acak yang berdistribusi normal dengan *drift* nol dan laju variansi sebesar satu per satuan waktu, artinya untuk suatu interval waktu $[0, T]$ jika nilai variabel acak pada waktu 0 adalah W_0

maka pada waktu T , variabel tersebut akan berdistribusi normal dengan *mean* W_0 dan standar deviasi \sqrt{T} (Shreve, 2004).

Proses Wiener yang diperumum (*generalized Wiener process*) dari suatu variabel acak X dapat dinyatakan dalam dW_t yaitu

$$dX = a dt + b dW_t, \quad (2.27)$$

dengan a dan b adalah konstanta. Suku $a dt$ menunjukkan bahwa X mempunyai harapan *drift* sebesar a per satuan waktu. Tanpa suku $b dW_t$ persamaan (2.27) menjadi

$$dX = a dt \text{ sehingga } \frac{dX}{dt} = a,$$

yang kemudian dapat diintegrasikan menjadi $X = X_0 + at$, artinya pada periode waktu sampai T , nilai X akan semakin bertambah dengan penambahan aT .

Suku $b dW(t)$ menunjukkan adanya penambahan *noise* atau gangguan pada lintasan X . Nilai gangguan ini atau variabilitas adalah b kali dari proses Wiener. Karena proses Wiener mempunyai standar deviasi sebesar satu per satuan waktu maka standar deviasi dari persamaan (2.27) adalah b per satuan waktu.

2.2.1.4 *White Noise*

Proses *white noise* ξ_t didefinisikan sebagai turunan dari gerak Brown,

$$\xi_t = \frac{dW_t}{dt} = W'_t. \quad (2.28)$$

Karena gerak Brown tidak mempunyai turunan di titik manapun maka ξ_t bukan merupakan fungsi dalam t seperti biasa. *White noise* digunakan dalam persamaan diferensial stokastik sebagai faktor ketidaktentuan (Klebaner, 2005).

2.2.2 Persamaan Diferensial Stokastik Itô

Definisi 2.11 Misalkan X_t suatu proses stokastik, $W_t, t \geq 0$, adalah suatu proses Wiener. Persamaan diferensial stokastik (PDS) Itô adalah suatu persamaan berbentuk

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t. \quad (2.29)$$

dengan $\mu(x_t)$ dan $\sigma(x_t)$ adalah fungsi yang diketahui. Koefisien $\mu(x_t)$ adalah koefisien drift dan $\sigma(x_t)$ adalah koefisien difusi.

Persamaan (2.29) dapat dituliskan dalam bentuk

$$X_T = X_t + \int_t^T \mu(X_t, t)dt + \int_t^T \sigma(X_t, t)dW_t, \quad (2.30)$$

$$\text{dengan nilai awal } X_t = x, \quad t \geq 0 \text{ dan } x \in R. \quad (2.31)$$

Di bawah suatu kondisi pada fungsi $\mu(X_t, t)$ dan $\sigma(X_t, t)$, terdapat suatu proses unik $X_T, T \geq t$ yang memenuhi persamaan (2.30) dan (2.31). Menurut Shreve (2004) proses tersebut sulit ditentukan secara eksplisit karena proses $X_T, T \geq t$ terjadi pada kedua ruas persamaan.

Terdapat satu faktor keacakan pada PDS (2.29) yaitu bentuk gangguan (*noise*) $\sigma_t dW_t$. PDS Itô akan digunakan pada pembahasan model katastrofe *cusp* stokastik serta perubahan model katastrofe *cusp* stokastik ke FDP stasioner pada subbab 3.1 dan 3.2.

2.2.3 Parameter Lokasi dan Parameter Skala

Suatu variabel acak X dikatakan sebagai famili lokasi-skala jika mempunyai distribusi kumulatif

$$F_X(x|a, b) := Pr(X \leq x|a, b), \quad (2.32)$$

yang merupakan suatu fungsi $(x - a)/b$ sehingga

$$F_X(x|a, b) := F\left(\frac{x-a}{b}\right); a \in R, b > 0, \quad (2.33)$$

dengan $F(\cdot)$ tidak mempunyai parameter lain (Rinne, 2010). Fungsi $F(\cdot)$ yang berbeda akan terkait dengan famili distribusi yang berbeda. Parameter dua dimensi (a, b) disebut sebagai parameter lokasi-skala, a adalah parameter lokasi dan b adalah parameter skala. Untuk suatu nilai tetap $b = 1$ terdapat subfamili yang merupakan famili lokasi dengan parameter a , dan untuk nilai tetap $a = 0$ terdapat subfamili yang merupakan famili skala dengan parameter b .

Variabel $Y := \frac{X-a}{b}$ dinamakan sebagai variabel tereduksi, dengan y adalah nilai-nilai dari Y . Parameter lokasi $a \in R$ menentukan posisi distribusi pada absis. Perubahan nilai suatu parameter lokasi berpengaruh pada pergerakan distribusi. Semakin besar (kecil) nilai parameter lokasi menyebabkan pergeseran distribusi ke arah kanan (kiri). Parameter lokasi a dapat merupakan ukuran pusat suatu distribusi.

Parameter $b, b > 0$ adalah parameter skala. Parameter skala menentukan dispersi atau variasi dari variabel X . Semakin besar nilai b maka distribusi makin menyebar sedangkan semakin kecil nilai b maka distribusi semakin memusat. Parameter skala pada suatu distribusi dapat merupakan standar deviasi (Rinne, 2010).

Parameter lokasi dan parameter skala digunakan pada proses reduksi variabel keadaan di subbab 3.1 pada persamaan (3.7).

2.2.4 Transformasi Fourier dari Fungsi Karakteristik

Pembahasan pada subbab ini mengacu pada Soong (1973). Misal X adalah variabel acak dengan fungsi densitas $f(x)$. Fungsi karakteristik dari X , $\phi_x(u)$ atau $\phi(u)$ didefinisikan sebagai

$$\phi(u) = E[e^{iux}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx, \quad (2.34)$$

dengan $u \in \mathbb{R}$. Fungsi karakteristik $\phi(u)$ pada persamaan (2.34) dan fungsi densitas $f(x)$ pada persamaan (2.35) membentuk suatu pasangan transformasi Fourier. Karena fungsi densitas $f(x)$ selalu dapat diintegrasikan, maka fungsi karakteristik $\phi(u)$ yang terkait dengannya selalu dapat ditentukan, dan merupakan fungsi kontinu dari u dengan $|\phi(u)| \leq 1$. Suatu fungsi densitas terdefinisi secara unik dalam bentuk fungsi karakteristik dengan

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \phi(u) du. \quad (2.35)$$

Sifat penting lain dari fungsi karakteristik adalah bahwa fungsi karakteristik berhubungan dengan momen-momen. Deret MacLaurin dari $\phi(u)$ adalah

$$\phi(u) = \phi(0) + \phi'(0)u + \phi''(0)\frac{u^2}{2!} + \dots, \quad (2.36)$$

dengan

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \\ \phi'(0) &= i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = i\alpha_1, \text{ momen ke-1,} \\ &\vdots \\ \phi'(n) &= i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = i^n \alpha_n, \text{ momen ke-}n. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Jika nilai $E[|X|^n]$ ada untuk suatu $n \geq 1$, persamaan (2.36) dan (2.37) mengakibatkan

$$\phi(u) = \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j}{j!} (iu)^j. \quad (2.38)$$

Transformasi Fourier, fungsi karakteristik dan deret MacLaurin digunakan pada pembahasan subbab 3.2 yaitu pada persamaan (3.15) sampai dengan persamaan (3.27).

2.2.5 Delta Dirac

Delta Dirac adalah fungsi yang digeneralisasi (*generalized function*) yang didefinisikan sebagai

$$(\delta, \psi(x)) = \int \delta(x-0)\psi(x)dx = \psi(0), \quad (2.39)$$

dengan $\delta(x)$ adalah fungsi yang digeneralisasi dan $\psi(x)$ adalah fungsi uji (*test function*) (Zauderer, 2006). Pembahasan lebih dalam tentang fungsi delta Dirac dapat ditemukan pada Zauderer (Zauderer, 2006). Pada subbab ini dibahas tentang dua sifat delta Dirac yang digunakan untuk menyelesaikan beberapa persamaan pada subbab 3.2.

Sesuai Zauderer (2006), transformasi Fourier dari fungsi delta $\delta(x)$ adalah

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.40)$$

sehingga sesuai sifat transformasi Fourier, balikan transformasi Fourier dari $\gamma(u)$ adalah

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \gamma(u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dengan mengubah variabel x pada ruas kanan persamaan (2.41) menjadi Δx , maka dapat ditentukan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\Delta x} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(x-x')} du = \delta(x-x') = \delta(\Delta x). \quad (2.42)$$

Akan dicari sifat pertama delta Dirac yang merupakan turunan dari ruas kiri persamaan (2.42)

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\Delta x} du \right), \text{ untuk } n = 0, 1, 2.$$

Untuk $n = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial^0}{\partial x^0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\Delta x} du \right) &= (-1)^0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\Delta x} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{ie^{-iu\Delta x}}{x}.\end{aligned}\quad (2.43)$$

Dengan menggunakan turunan parsial dan integral parsial dapat ditunjukkan bahwa untuk $n = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\Delta x} du \right) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-ie^{-iu\Delta x}}{x^2} + \frac{e^{-iu\Delta x} u}{x} \right) \\ &= (-1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (iu) e^{-iu\Delta x} du,\end{aligned}\quad (2.44)$$

dan untuk $n = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\Delta x} du \right) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2ie^{-iu\Delta x}}{x^3} - \frac{2e^{-iu\Delta x} u}{x^2} - \frac{ie^{-iu\Delta x} u^2}{x} \right) \\ &= (-1)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^2 e^{-iu\Delta x} du.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Dengan demikian berdasarkan persamaan (2.43), (2.44), dan (2.45) diperoleh bentuk umum sebagai berikut

$$(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\Delta x} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^n e^{-iu\Delta x} du.\quad (2.46)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (2.42), persamaan (2.46) dapat ditulis sebagai

$$(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(\Delta x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^n e^{-iu\Delta x} du.\quad (2.47)$$

yang merupakan sifat pertama delta Dirac. Persamaan (2.47) digunakan pada pembahasan subbab 3.2 yaitu pada persamaan (3.28) - (3.29).

Berikutnya dibahas sifat kedua delta Dirac. Sesuai Zauderer (2006), jika terdapat suatu fungsi $g(x)$ dan $\delta(x - y)$ adalah fungsi delta Dirac maka

$$(g(x)\delta(x - y), \psi(x)) = (\delta(x - y), g(x)\psi(x)).\quad (2.48)$$

Berdasarkan definisi delta Dirac, ruas kanan persamaan (2.48) dapat ditulis sebagai

$$(\delta(x-y), g(x)\psi(x)) = \int \delta(x-y)g(x)\psi(x)dx, \quad (2.49)$$

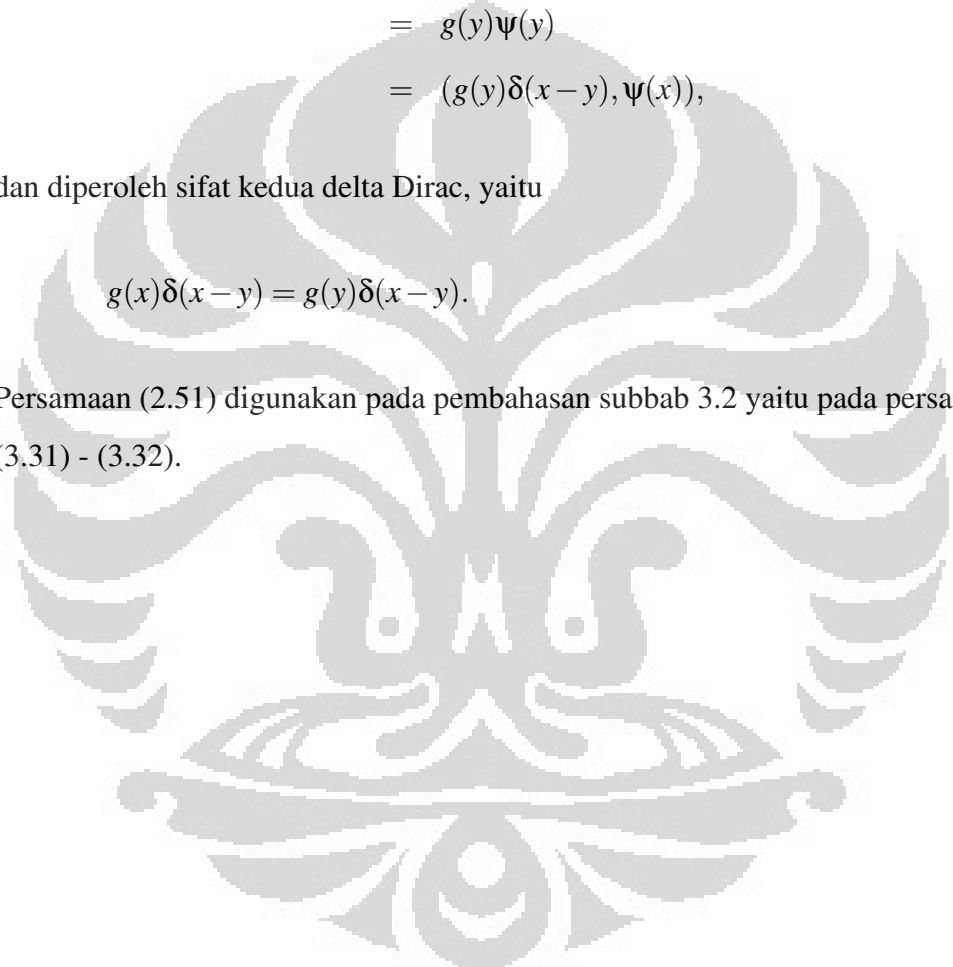
sehingga persamaan (2.48) dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} (g(x)\delta(x-y), \psi(x)) &= \int \delta(x-y)g(x)\psi(x)dx \\ &= g(y)\psi(y) \\ &= (g(y)\delta(x-y), \psi(x)), \end{aligned} \quad (2.50)$$

dan diperoleh sifat kedua delta Dirac, yaitu

$$g(x)\delta(x-y) = g(y)\delta(x-y). \quad (2.51)$$

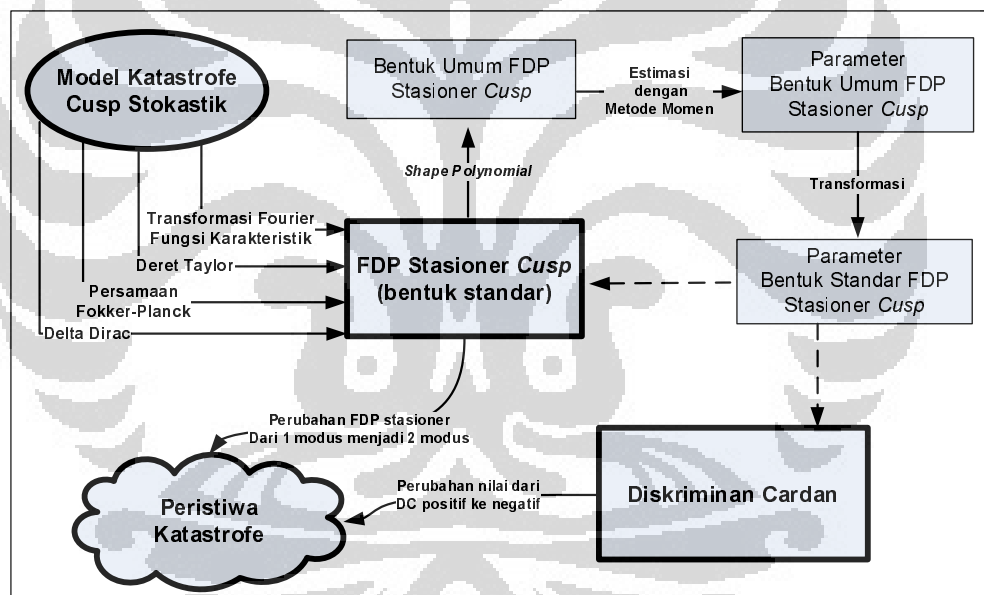
Persamaan (2.51) digunakan pada pembahasan subbab 3.2 yaitu pada persamaan (3.31) - (3.32).



BAB 3

MODEL KATASTROFE *CUSP* STOKASTIK

Tujuan dari penelitian ini adalah menjelaskan apakah model katastrofe *cusp* stokastik mampu menjelaskan kejadian perubahan drastis yang mendadak pada indeks harga saham pada peristiwa *Black Monday*, yaitu dengan menunjukkan adanya peristiwa katastrofe pada perubahan perilaku variabel keadaan. Hubungan peristiwa katastrofe dengan model katastrofe *cusp* stokastik dapat dilihat melalui bagan pada Gambar 3.1 sebagai berikut:



Keterangan:

→ : proses pembentukan

--> : substitusi parameter

Gambar 3.1: Bagan peristiwa katastrofe.

Dari Gambar 3.1 terlihat bahwa peristiwa katastrofe dapat dibentuk dari FDP stasioner dan diskriminan Cardan dengan penjelasan sebagai berikut:

1. Model katastrofe *cusp* stokastik dibentuk menjadi bentuk standar FDP stasioner *cusp* dengan menggunakan transformasi Fourier dari fungsi karakteristik, deret Taylor, persamaan Fokker-Planck, dan delta Dirac.

2. Bentuk standar FDP stasioner *cusp* kemudian diubah menjadi bentuk umum FDP stasioner *cusp*.
3. Dengan menggunakan metode momen dan Teorema 3.1 yang dibahas pada subbab 3.4, dilakukan estimasi parameter bentuk umum FDP stasioner *cusp*.
4. Parameter bentuk umum FDP stasioner *cusp* kemudian ditransformasi menjadi parameter bentuk standar FDP stasioner *cusp*.
5. Parameter yang diperoleh kemudian digunakan untuk melihat peristiwa katastrofe sesuai indikator yang sesuai. Pada statistik diskriminan Cardan, peristiwa katastrofe diindikasikan dengan perubahan dari nilai positif ke negatif. Pada bentuk standar FDP stasioner *cusp* peristiwa katastrofe diindikasikan dengan perubahan dari FDP stasioner yang mempunyai satu modus menjadi dua modus.

Pada subbab 3.1 dibahas tentang model katastrofe *cusp* stokastik dengan variabel keadaan yang merupakan suatu proses stokastik, serta parameter kontrol yang dipengaruhi oleh variabel-variabel bebas. Pada subbab 3.2 dijelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penurunan model katastrofe *cusp* stokastik menjadi suatu FDP stasioner. Pada subbab 3.3 dibahas tentang diskriminan Cardan sebagai indikator kestabilan ekuilibrium FDP stasioner. Aplikasi model katastrofe *cusp* stokastik pada penelitian ini melibatkan dua variabel bebas, sehingga terdapat delapan parameter yang diestimasi. Estimasi parameter dibahas pada subbab 3.4 dengan metode estimasi yang digunakan adalah metode momen.

3.1 Pembentukan Model Katastrofe *Cusp* Stokastik

Sebelum dibahas tentang model katastrofe *cusp* stokastik, dijelaskan beberapa variabel acak yang digunakan pada pembahasan. Misalkan Y adalah suatu variabel tak bebas. Variabel acak Y_t adalah proses stokastik pada waktu t dengan $t \in (0, T)$, sedemikian sehingga y_t adalah nilai-nilai variabel acak Y_t . Model katastrofe *cusp* melibatkan variabel-variabel dalam ruang parameter

berdimensi dua yaitu (β, α) , dengan variabel kontrol β merupakan faktor bifurkasi dan variabel kontrol α merupakan faktor asimetri.

Pada subbab ini dibahas bentuk katastrophe *cusp*, dengan fungsi potensial yang didefinisikan sebagai:

$$V(y_t; \beta, \alpha) := \frac{1}{4}y_t^4 - \frac{1}{2}\beta y_t^2 - \alpha y_t, \quad (3.1)$$

dengan y_t adalah nilai-nilai dari variabel keadaan (*state variable*) Y_t , β adalah faktor bifurkasi, dan α adalah faktor asimetri (Barunik dan Vosvrda, 2009).

Model katastrophe *cusp* yang dibahas dalam tesis ini didasarkan pada sistem dinamik nonlinear dengan fungsi potensial persamaan (3.1). Perilaku sistem dapat dilihat dari perubahan variabel keadaan sepanjang waktu t yang dapat dinyatakan sebagai (Barunik dan Vosvrda, 2009)

$$\frac{dy_t}{dt} = -\frac{dV(y_t; \beta, \alpha)}{dy_t} = -y_t^3 + \beta y_t + \alpha. \quad (3.2)$$

Permukaan katastrophe dari persamaan (3.1) diperoleh dari

$$\frac{dV(y_t; \beta, \alpha)}{dy_t} = y_t^3 - \beta y_t - \alpha = 0. \quad (3.3)$$

Dalam penerapan katastrophe *cusp* pada tesis ini, koordinat (β, α) pada ruang parameter adalah faktor-faktor yang bergantung pada variabel bebas, misal himpunan n variabel bebas $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ dengan $x_i, i = 1, \dots, n$ adalah nilai-nilai dari X_i . Permukaan katastrophe pada persamaan (3.3) memiliki titik kritis di \mathbb{R}^3 dengan koordinat (β, α) yang dapat diasumsikan sebagai fungsi variabel bebas bernilai skalar sebagai berikut (Cobb, 2010):

$$\alpha_x = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad (3.4)$$

$$\beta_x = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i. \quad (3.5)$$

Parameter $\beta_i, \alpha_i, i = 0, 1, \dots, n$ diasumsikan konstan dan $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ menjadi variabel kontrol yang baru. Fungsi-fungsi β_x dan α_x menentukan nilai y_t jika

diketahui x_i . Dengan menggunakan fungsi potensial *cusp* pada persamaan (3.1) maka prediksi nilai y_t adalah akar-akar dari persamaan

$$\frac{dV(y_t; \beta_x, \alpha_x)}{dy_t} = y_t^3 - \beta_x y_t - \alpha_x = 0, \quad (3.6)$$

yang berarti untuk setiap nilai x_i terdapat tiga nilai prediksi variabel keadaan y_t (Barunik dan Vosvrda, 2009).

Sesuai dengan pembahasan famili distribusi lokasi-skala pada subbab 2.2.3, Cobb (1999) menggunakan λ sebagai parameter lokasi dan $\sigma > 0$ sebagai parameter skala untuk mereduksi variabel keadaan y_t karena variabel y_t tidak diketahui distribusinya. Dengan demikian ekuilibrium pada persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dV(y_t; \beta_x, \alpha_x)}{dy_t} = \left(\frac{y_t - \lambda}{\sigma}\right)^3 - \beta_x \left(\frac{y_t - \lambda}{\sigma}\right) - \alpha_x = 0, \quad (3.7)$$

dengan α_x dan β_x mengikuti bentuk persamaan (3.4) dan (3.5). Dengan demikian estimasi statistik yang dilakukan adalah estimasi terhadap $2n + 4$ parameter yaitu $\{\lambda, \sigma, \alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n\}$ yang diperoleh dari N observasi pada $n + 1$ variabel $\{y, x_1, \dots, x_n\}$.

Sesuai dengan sistem dinamik (3.2), persamaan ekuilibrium (3.7) dapat ditulis sebagai

$$dy_t = -\frac{dV(y_t; \beta_x, \alpha_x)}{dy_t} dt. \quad (3.8)$$

Sesuai dengan kebutuhan aplikasi di bidang keuangan yang memiliki faktor ketidaktentuan, maka ditambahkan perilaku nondeterministik pada sistem (Barunik dan Vosvrda, 2009). Dengan menambahkan *Gaussian white noise* aditif sebagai faktor ketidaktentuan, maka sistem dinamik (3.8) dapat dinyatakan sebagai PDS

$$dy_t = -\frac{dV(y_t; \beta_x, \alpha_x)}{dy_t} dt + \sigma_{y_t} dW_t. \quad (3.9)$$

Dengan demikian model yang dibahas pada penelitian ini adalah

$$dy_t = \left(-\left(\frac{y_t - \lambda}{\sigma}\right)^3 + \beta_x \left(\frac{y_t - \lambda}{\sigma}\right) + \alpha_x \right) dt + \sigma_{y_t} dW_t, \quad (3.10)$$

dengan

dy_t : perubahan variabel keadaan (*state variable*),

α_x : faktor asimetri (fungsi dari x_i),

β_x : faktor bifurkasi (fungsi dari x_i),

σ_{y_t} : standar deviasi pada proses y_t ,

W_t : proses Wiener, $dW_t \sim N(0, dt)$,

x_i : variabel bebas, untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Model katastrofe *cusp* stokastik pada persamaan (3.10) merupakan sistem dinamik nonlinear yang solusinya sulit ditentukan secara eksplisit.

Cobb dan Watson (1980) memberikan solusi alternatif dengan menjelaskan hubungan antara solusi dari persamaan (3.9) dengan fungsi densitas probabilitas (FDP) stasioner $f_s(y|x)$. Dengan menggunakan transformasi Fourier terhadap fungsi karakteristik dari $f(y_t)$ serta menggunakan persamaan Fokker-Planck diperoleh FDP stasioner sebagai berikut (Soong, 1973):

$$\begin{aligned} f_s(y|x) &= \Psi \exp(-V_{sto}(y_t)) \\ &= \Psi \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma}\right)^4 + \frac{\beta_x}{\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma}\right)^2 + \frac{2\alpha_x}{\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

dengan V_{sto} adalah fungsi potensial stokastik. Proses perubahan model katastrofe *cusp* stokastik pada persamaan (3.9) menjadi FDP stasioner pada persamaan (3.11) diuraikan pada subbab selanjutnya.

3.2 Hubungan Katastrophe *Cusp* Stokastik dengan FDP Stasioner

Pada subbab ini dibahas langkah-langkah yang menunjukkan hubungan persamaan (3.9) dengan FDP stasioner pada persamaan (3.11). FDP stasioner pada persamaan (3.11) dapat diperoleh menggunakan dua tahapan. Tahap pertama adalah pembentukan persamaan Fokker-Planck dan tahap kedua adalah pembentukan FDP stasioner.

Tahap Pertama: Pembentukan persamaan Fokker-Planck.

Untuk memudahkan penjelasan tahap pertama, digunakan persamaan yang lebih sederhana yaitu persamaan Langevin. Persamaan Langevin untuk suatu proses Wiener adalah

$$\frac{dx}{dt} = -\theta x + f(t) \quad (3.12)$$

dengan $f(t)$ independen terhadap x (Cobb, 1999). Persamaan Langevin dapat dinyatakan dalam bentuk PDS Itô sesuai persamaan (2.29) pada subbab 2.2.2 dengan $\mu(x) = -\theta x$, $\sigma^2(x) = 1$, dan $dW_t = f(t) dt$. Dengan demikian persamaan (3.12) dapat dituliskan sebagai

$$dx_t = -\theta x_t dt + dW_t, \quad (3.13)$$

dengan W_t adalah proses Wiener dan dW_t berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi dt (Cobb, 1999).

Pembentukan persamaan Fokker-Planck dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menetapkan sifat umum transisi FDP pertama $f(x_t)$ ke FDP $f(x_{t+\Delta t})$ dari suatu proses stokastik X_t , di $t \in T$.
2. Mencari deret Taylor pada titik $u = 0$ dari fungsi karakteristik bersyarat $\phi(u_{t+\Delta t} | x')$.
3. Mencari solusi sifat umum transisi FDP pertama $f(x_t)$ dengan menggunakan

transformasi Fourier dari fungsi karakteristik.

4. Membentuk persamaan Fokker-Planck dari transisi FDP $f(x_t)$.

Langkah 1: Menetapkan sifat umum transisi FDP pertama $f(x_t)$ ke FDP $f(x_{t+\Delta t})$ dari suatu proses stokastik X_t , di $t \in T$.

Akan dicari FDP $f(x_t), t \geq 0$, dari proses stokastik X_t jika diberikan $f(x_0) = f_0(x)$.

Misal $f(x_t)$ FDP pertama dari suatu proses stokastik $X_t, t \in T$ pada saat t sedemikian sehingga transisi FDP pertama $f(x_t)$ ke FDP $f(x_{t+\Delta t})$ mempunyai sifat umum

$$f(x_{t+\Delta t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{t+\Delta t}|x')f(x')dx' \quad (3.14)$$

dengan $f(x_{t+\Delta t}|x')$ adalah fungsi densitas bersyarat dari variabel acak $X_{t+\Delta t}$ jika diberikan $X_t = x'$ (Soong, 1973).

Langkah 2: Mencari deret Taylor pada titik $u = 0$ dari fungsi karakteristik bersyarat $\phi(u_{t+\Delta t}|x')$.

Misal suatu variabel acak $\Delta X = X_{t+\Delta t} - X_t$ dengan $X_t = x'$. Sesuai dengan persamaan (2.34) pada subbab 2.2.4, maka fungsi karakteristik bersyarat dari variabel acak ΔX adalah

$$\begin{aligned} \phi(u_{t+\Delta t}|x') &= E[e^{iu\Delta x}|x'] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\Delta x} f(x_{t+\Delta t}|x')dx, \end{aligned} \quad (3.15)$$

dengan $\Delta x = x - x'$. Persamaan Langevin pada persamaan (3.13) dapat ditulis dalam bentuk persamaan beda sebagai berikut:

$$\Delta x_t = -\theta x_t \Delta t + \Delta W_t, \quad (3.16)$$

dengan $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ adalah penambahan (*increment*) dari proses Wiener.

Persamaan (3.16) memiliki fungsi karakteristik bersyarat (Soong, 1973):

$$\begin{aligned}\phi(u_{t+\Delta t}|x') &= E[e^{iu\Delta x}|x'] \\ &= E[\exp(iu(-\theta x\Delta t + \Delta W_t))|x'] \\ &= E[\exp(-iu\theta x\Delta t)|x'] + E[\exp(iu\Delta W_t)|x']. \quad (3.17)\end{aligned}$$

Persamaan (3.17) bisa diselesaikan dengan membaginya menjadi dua bagian.

Ekspektasi bersyarat pada suku pertama ruas kanan persamaan (3.17) adalah

$$E[\exp(-iu\theta x\Delta t)|x'] = \exp(-iu\theta x'\Delta t). \quad (3.18)$$

Ekspektasi bersyarat suku kedua ruas kanan persamaan (3.17) adalah

$$E[\exp(iu\Delta W_t)|x'] = E[\exp(iu\Delta W_t)] \quad (3.19)$$

karena X_t tidak bergantung terhadap ΔW_t . Kemudian karena ΔW_t merupakan variabel acak Gaussian dengan mean nol dan variansi Δt maka persamaan (3.19) menjadi

$$E[\exp(iu\Delta W_t)|x'] = \exp\left(\frac{(iu)^2}{2}\Delta t\right). \quad (3.20)$$

Dengan demikian fungsi karakteristik bersyarat persamaan (3.17) merupakan jumlahan dari persamaan (3.18) dan (3.20) yaitu

$$\phi(u_{t+\Delta t}|x') = \exp\left(-iu\theta x'\Delta t + \frac{(iu)^2}{2}\Delta t\right). \quad (3.21)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan solusi sifat umum transisi $f(x_t)$ adalah dengan ekspansi fungsi karakteristik $\phi(u_{t+\Delta t}|x')$ pada deret Taylor di sekitar $u = 0$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \phi(u_{t+\Delta t}|x') &= \phi(u_{t+\Delta t}|x')\Big|_{u=0} + \phi'(u_{t+\Delta t}|x')\Big|_{u=0} u \\
 &\quad + \phi''(u_{t+\Delta t}|x')\Big|_{u=0} \frac{u^2}{2!} \\
 &= 1 - i\theta x' \Delta t u + i^2 \Delta t \frac{u^2}{2!}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Masing-masing suku pada ruas kanan persamaan (3.22) memuat turunan-turunan fungsi karakteristik bersyarat yang didapatkan dari perhitungan sebagai berikut:

pada suku pertama,

$$\begin{aligned}
 \phi(u_{t+\Delta t}|x')\Big|_{u=0} \\
 &= \exp\left(-iu\theta x' \Delta t + \frac{(iu)^2}{2} \Delta t\right)\Big|_{u=0} = 1,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

pada suku kedua,

$$\begin{aligned}
 \phi'(u_{t+\Delta t}|x')\Big|_{u=0} \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\exp\left(-iu\theta x' \Delta t + \frac{(iu)^2}{2} \Delta t\right) \right)\Big|_{u=0} \\
 &= \left((-i\theta x' \Delta t + i^2 u \Delta t) \exp\left(-iu\theta x' \Delta t + \frac{(iu)^2}{2} \Delta t\right) \right)\Big|_{u=0} \\
 &= -i\theta x' \Delta t,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

pada suku ketiga,

$$\begin{aligned}
 \phi''(u_{t+\Delta t}|x')\Big|_{u=0} \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \left((-i\theta x' \Delta t + i^2 u \Delta t) \exp\left(-iu\theta x' \Delta t + \frac{(iu)^2}{2} \Delta t\right) \right)\Big|_{u=0} \\
 &= (i^2 \Delta t) \exp\left(-iu\theta x' \Delta t + \frac{(iu)^2}{2} \Delta t\right) + i^2 u \Delta t (-i\theta x' \Delta t + i^2 u \Delta t)\Big|_{u=0} \\
 &= (i^2 \Delta t) \left(\exp\left(-iu\theta x' \Delta t + \frac{(iu)^2}{2} \Delta t\right) \right)\Big|_{u=0} \\
 &= i^2 \Delta t,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

pada suku selanjutnya,

$$\phi^n(u_{t+\Delta t}|x') = 0, \quad n \geq 3. \quad (3.26)$$

Langkah 3: Mencari solusi sifat umum transisi FDP pertama $f(x_t)$ menggunakan transformasi Fourier dari fungsi karakteristik bersyarat $\phi(u_{t+\Delta t}|x')$ pada persamaan (3.22).

Sesuai sifat pada persamaan (2.34) dan (2.35), maka balikan transformasi Fourier dari persamaan (3.15) adalah (Soong, 1973)

$$f(x_{t+\Delta t}|x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\Delta x} \phi(u_{t+\Delta t}|x') du. \quad (3.27)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.22) ke persamaan (3.27) diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_{t+\Delta t}|x') &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu\Delta x} \phi(u_{t+\Delta t}|x') du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu\Delta x} du - \frac{\theta x' \Delta t}{2\pi} \int iu e^{-iu\Delta x} du + \frac{\Delta t}{2\pi 2!} \int (iu)^2 e^{-iu\Delta x} du \\ &= \sum_{n=0}^2 \frac{a_n(x')}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^n e^{-iu\Delta x} du, \end{aligned} \quad (3.28)$$

dengan $a_n(x') = E[\Delta X^n | x'] = E[(-\theta X \Delta t + \Delta W(t))^n | x']$ disebut sebagai momen penambahan (*incremental moments*) yang berhubungan dengan X_t . Kemudian dengan menggunakan sifat delta Dirac pada persamaan (2.47) maka persamaan (3.28) menjadi

$$f(x_{t+\Delta t}|x') = \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{n!} a_n(x') \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(\Delta x). \quad (3.29)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.29) ke persamaan (3.14) diperoleh

sifat umum transisi FDP pertama $f(x_t)$ dari proses stokastik X_t sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(x_{t+\Delta t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{t+\Delta t}|x')f(x')dx' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{n!} a_n(x') \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(\Delta x) f(x') dx' \\
 &= \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(x') \delta(\Delta x) f(x') dx'. \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Dengan menuliskan $\delta(x - x') = \delta(\Delta x)$, persamaan (3.30) menjadi

$$f(x_{t+\Delta t}) = \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(x') \delta(x - x') f(x') dx', \tag{3.31}$$

kemudian dengan menggunakan sifat delta Dirac pada persamaan (2.51), persamaan (3.31) menjadi

$$\begin{aligned}
 f(x_{t+\Delta t}) &= \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(x) \delta(x - x') f(x') dx' \\
 &= \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} a_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx'. \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

Sesuai definisi delta Dirac pada persamaan (2.39), persamaan (3.32) dapat ditulis sebagai (Soong, 1973)

$$f(x_{t+\Delta t}) = \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a_n(x) f(x)]. \tag{3.33}$$

Persamaan (3.33) merupakan solusi sifat umum transisi FDP pertama $f(x_t)$ ke FDP $f(x_{t+\Delta t})$ dari proses stokastik X_t .

Langkah 4: Membentuk persamaan Fokker-Planck dari transisi FDP $f(x_t)$.

Untuk mendapatkan formula Fokker-Planck dilakukan modifikasi aljabar terhadap persamaan (3.33) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 f(x_{t+\Delta t}) - f(x_t) &= \sum_{n=1}^2 \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a_n(x_t) f(x_t)] \\
 &= \frac{-\partial [a_1(x_t) f(x_t)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [a_2(x_t) f(x_t)]}{\partial x^2}. \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Kemudian dengan membagi persamaan (3.34) dengan Δt dan menentukan limitnya ketika $\Delta t \rightarrow 0$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (f(x_{t+\Delta t}) - f(x_t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{-\partial[a_1(x_t)f(x_t)]}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2[a_2(x_t)f(x_t)]}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial f(x_t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha_1(x_t)f(x_t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\alpha_2(x_t)f(x_t)]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Fungsi $\alpha_1(x_t)$ dan $\alpha_2(x_t)$ pada persamaan (3.35) adalah momen-momen turunan (*derivative moments*) (Soong, 1973), yaitu momen penambahan yang dibagi dengan Δt dan ditentukan limitnya ketika $\Delta t \rightarrow 0$. Berikut adalah proses perhitungan momen-momen turunan $\alpha_1(x_t)$ dan $\alpha_2(x_t)$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[X(t + \Delta t) - X(t) | X(t) = x] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[\Delta X(t) | X(t) = x] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[-\theta X_t \Delta t + \Delta W_t | X(t) = x] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (E[-\theta X_t \Delta t | X(t) = x] + E[\Delta W_t | X(t) = x]) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (-\theta X \Delta t) + 0 \\ &= -\theta X, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[(\Delta X_t)^2 | X(t) = x] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[(-\theta X_t \Delta t + \Delta W_t)^2 | X(t) = x] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[(\theta X_t \Delta t)^2 - 2\theta X_t \Delta t \cdot \Delta W_t + (\Delta W_t)^2 | X(t) = x] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(E[(\theta X_t \Delta t)^2 | X(t) = x] \right. \\ &\quad \left. - E[2\theta X_t \Delta t \cdot \Delta W_t | X(t) = x] + E[(\Delta W_t)^2 | X(t) = x] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left((\theta X \Delta t)^2 - 2\theta X \Delta t E[\Delta W_t | X(t) = x] \right. \\
&\quad \left. + E[(\Delta W_t)^2 | X(t) = x] \right) \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left((\theta X \Delta t)^2 - 2\theta X \Delta t \cdot 0 + \Delta t \right) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.36) dan (3.37) ke persamaan (3.35), maka persamaan (3.35) menjadi

$$\frac{\partial f(x_t)}{\partial t} = \theta \frac{\partial}{\partial x} [x f(x_t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f(x_t)]. \tag{3.38}$$

Persamaan (3.38) dikenal sebagai persamaan Fokker-Planck. Dalam hal ini adalah persamaan Fokker-Planck dari persamaan Langevin. Dengan demikian tahap pertama yaitu perubahan bentuk dari persamaan Langevin pada persamaan (3.13) menjadi persamaan Fokker-Planck pada persamaan (3.38) telah selesai.

Persamaan Langevin pada persamaan (3.13) mengikuti bentuk PDS Itô, sehingga proses pada tahap pembentukan persamaan Fokker-Planck yang telah dilakukan pada persamaan Langevin dapat dilakukan pada bentuk umum PDS Itô. Misal suatu persamaan diferensial stokastik mengikuti bentuk sesuai definisi PDS Itô pada subbab 2.2.2 yaitu

$$dx_t = \mu(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t, \tag{3.39}$$

dengan persamaan beda

$$\Delta x_t = \mu(x_t)\Delta t + \sigma(x_t)\Delta B_t. \tag{3.40}$$

Dengan mengikuti proses perubahan dari persamaan (3.13) menjadi persamaan (3.38), maka persamaan Fokker-Planck untuk bentuk umum PDS Itô pada persamaan (3.39) adalah

$$\frac{\partial f(x_t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [-\mu(x_t)f(x_t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x_t)f(x_t)]. \tag{3.41}$$

Tahap Kedua: Menentukan FDP stasioner untuk bentuk umum PDS Itô pada persamaan (3.39).

Di bawah kondisi momen-momen turunan $\alpha_n(x_t)$ yang tidak bergantung terhadap waktu t , ekspektasi FDP $f(x_t)$ mendekati nilai stasioner (Soong, 1973).

Dalam menentukan FDP stasioner dilakukan hal-hal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_t)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}[-\mu(x)f_s] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2(x)f_s] &= 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

kemudian dengan mengintegalkan kedua ruas persamaan (3.42), diperoleh

$$-\mu(x)f_s(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}[\sigma^2(x)f_s(x)] = c_1. \quad (3.43)$$

Dimisalkan $\sigma^2(x)f_s(x) = h(x)$ (Soong, 1973), sehingga persamaan (3.43) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{-\mu(x)}{\sigma^2(x)}h(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}h(x) &= c_1, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}h(x) - \frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}h(x) &= c_1, \\ \frac{\partial}{\partial x}h(x) - \frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)}h(x) &= 2c_1. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Persamaan (3.44) memiliki bentuk persamaan diferensial linear orde 1

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x), \quad (3.45)$$

dengan faktor pengintegral $\exp\left[\int P(x)dx\right]$. Persamaan (3.45) mempunyai solusi

$$y \exp\left[\int P(s)ds\right] = \int Q(x) \exp\left[\int P(s)ds\right] dx + c. \quad (3.46)$$

Dengan menerapkan solusi persamaan (3.45) pada persamaan (3.44), diperoleh $y = h(x)$, $P(x) = -\frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)}$ dan faktor pengintegral $\exp\left[2 \int -\frac{\mu(s)}{\sigma^2(s)} dx\right]$, sehingga

solusi dari persamaan (3.44) adalah

$$h(x) \exp \left[2 \int_0^x -\frac{\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right] = \int_0^x 2c_1 \exp \left[2 \int_x^r -\frac{\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right] dr + c,$$

$$h(x) = \exp \left[2 \int_0^x \frac{\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right] \left[c + 2c_1 \int_0^x \exp \left[2 \int_x^r -\frac{\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right] dr \right]. \quad (3.47)$$

Jika pada persamaan (3.43) diasumsikan $f_s(\pm\infty) = 0$ dan $\frac{df_s(\pm\infty)}{dx} = 0$, maka karena $f_s(x) = \frac{h(x)}{\sigma^2(x)}$ akan diperoleh $\frac{h(x)}{\sigma^2(x)} = 0$ dan $\frac{d}{dx} \frac{h(x)}{\sigma^2(x)} = 0$. Dengan demikian persamaan (3.44) bernilai 0, atau dengan perkataan lain $c_1 = 0$, sehingga persamaan (3.47) menjadi

$$h(x) = c \exp \left[2 \int_0^x \frac{\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right]. \quad (3.48)$$

Selanjutnya, karena $h(x) = \sigma^2(x)f_s(x)$ maka persamaan (3.48) menjadi

$$f_s(x) = \frac{c}{\sigma^2(x)} \exp \left[2 \int_0^x \frac{\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right], \quad (3.49)$$

dengan c adalah konstanta yang memenuhi $\int_{-\infty}^{\infty} f_s(x) dx = 1$ (Soong, 1973). Persamaan (3.49) adalah FDP stasioner dari persamaan Fokker-Planck pada persamaan (3.41). Perubahan bentuk dari persamaan (3.41) sampai persamaan (3.49) merupakan langkah-langkah proses perubahan persamaan Fokker-Planck PDS Itô menjadi FDP stasioner.

Model katastrofe *cusp* stokastik pada persamaan (3.9) di subbab 3.1 memiliki bentuk PDS Itô dengan $\mu(x) = -\frac{dV(y_t; \beta_x, \alpha_x)}{dy_t}$ dan $\sigma^2(x) = \sigma_{y_t}^2$. Dengan demikian kedua tahapan, yaitu perubahan persamaan Langevin menjadi persamaan Fokker-Planck dan pembentukan FDP stasioner dari persamaan Fokker-Planck, dapat diterapkan pada model katastrofe *cusp* stokastik.

Dengan menggunakan langkah-langkah pada tahap pertama, PDS Itô pada persamaan (3.9), yaitu

$$dy_t = -\frac{dV(y_t; \alpha_x, \beta_x)}{dy_t} dt + \sigma_{y_t} dW_t,$$

mempunyai persamaan Fokker-Planck

$$\frac{\partial f(y_t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{dV(y_t; \alpha_x, \beta_x)}{dy_t} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sigma_{y_t}^2 f(y_t) \right]. \quad (3.50)$$

Kemudian dengan menerapkan proses tahap kedua pada persamaan (3.50) seperti pada proses perubahan persamaan (3.41) menjadi persamaan (3.49), diperoleh

$$f_s(y|x) = \frac{c}{\sigma_{y_t}^2} \exp \left[2 \int_0^x \frac{-dV(y; \alpha_x, \beta_x)/dy}{\sigma_{y_t}^2} \right]. \quad (3.51)$$

Sesuai dengan model katastrofe *cusp* stokastik pada persamaan (3.10), maka persamaan (3.51) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} f_s(y|x) &= \frac{c}{\sigma_{y_t}^2} \exp \left[2 \int_0^x \frac{\left(-\left(\frac{y-\lambda}{\sigma}\right)^3 + \beta_x \left(\frac{y-\lambda}{\sigma}\right) + \alpha_x \right)}{\sigma_{y_t}^2} \right] \\ &= \Psi \exp \left[2 \frac{\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma}\right)^4 + \frac{\beta_x}{2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma}\right)^2 + \alpha_x \left(\frac{y-\lambda}{\sigma}\right) \right)}{\sigma_{y_t}^2} \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

dengan Ψ adalah konstanta yang memenuhi $\int_{-\infty}^{\infty} f_s(y|x) dy = 1$.

Karena koefisien difusi σ_{y_t} pada persamaan (3.9) merupakan fungsi konstan maka menurut Wagenmakers *et al.* (2005), fungsi potensial $V(y_t)$ memiliki hubungan dengan fungsi potensial stokastik $V_{sto}(y_t)$ yang memenuhi persamaan

$$V_{sto}(y_t) = \frac{2V(y_t)}{\sigma_{y_t}^2}. \quad (3.53)$$

Dengan demikian diperoleh bahwa FDP stasioner pada persamaan (3.52) adalah FDP stasioner pada persamaan (3.11), sehingga terbukti bahwa model katastrofe *cusp* stokastik berhubungan dengan suatu FDP stasioner. Setelah dijelaskan proses perubahan model katastrofe *cusp* stokastik menjadi FDP stasioner, pada subbab selanjutnya dibahas tentang diskriminan Cardan.

3.3 Diskriminan Cardan

Sebelum dibahas tentang diskriminan Cardan, terlebih dahulu dibahas tentang modus dan antimodus dari FDP stasioner. Nilai-nilai ekstrim dari FDP stasioner $f_s(y|x)$ adalah modus dan antimodus dari $f_s(y|x)$. Cobb dan Watson (1980) menyatakan bahwa modus dan antimodus dari FDP stasioner $f_s(y|x)$ diperoleh dengan mencari solusi dari

$$\frac{d}{dy} \log f_s(y|x) = 0. \quad (3.54)$$

Berikut dijelaskan solusi dari persamaan (3.54). Dengan menggunakan persamaan (3.52), diperoleh

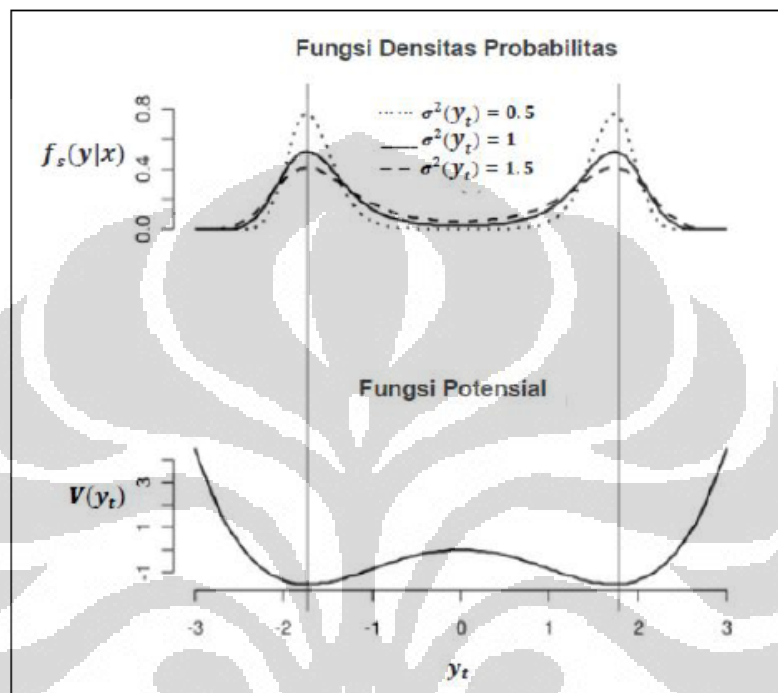
$$\begin{aligned} \log f_s(y|x) &= \log \left(\Psi \exp \left[2 \frac{\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^4 + \frac{\beta_x}{2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^2 + \alpha_x \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right) \right)}{\sigma_{y_t}^2} \right] \right) \\ &= \log \Psi + 2 \frac{\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^4 + \frac{\beta_x}{2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^2 + \alpha_x \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right) \right)}{\sigma_{y_t}^2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Tampak bahwa penggunaan log hanya merupakan pergeseran dari fungsi potensial, sehingga tidak mempengaruhi ekuilibrium fungsi potensial. Kemudian sesuai dengan persamaan (3.54) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \log f_s(y|x) &= 0 \\ \frac{d}{dy} \left(\log \Psi + 2 \frac{\left(-\frac{1}{4} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^4 + \frac{\beta_x}{2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^2 + \alpha_x \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right) \right)}{\sigma_{y_t}^2} \right) &= 0 \\ \frac{2}{\sigma_{y_t}^2} \left(-\left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^3 + \beta_x \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right) + \alpha_x \right) &= 0 \\ -\left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^3 + \beta_x \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right) + \alpha_x &= 0 \\ \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^3 - \beta_x \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right) - \alpha_x &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Diperoleh bahwa modus dan antimodus FDP stasioner pada persamaan

(3.56) merupakan permukaan katastrofe pada persamaan (3.7). Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa ekuilibrium FDP stasioner $f_s(y|x)$ berkaitan dengan titik-titik ekstrim fungsi potensial $V(y_t; \beta_x, \alpha_x)$ (Wagenmakers *et al.*, 2005). Hubungan ini dapat dilihat pada Gambar 3.2.



[Sumber: Wagenmakers *et al.* (2005)]

Gambar 3.2: Grafik hubungan FDP stasioner $f_s(y|x)$ dan fungsi potensial $V(y_t)$.

Pada Gambar 3.2 tampak bahwa titik minimum dari fungsi potensial $V(y_t)$ merupakan modus dari FDP stasioner $f_s(y|x)$ dan titik maksimum dari fungsi potensial $V(y_t)$ merupakan antimodus dari FDP stasioner $f_s(y|x)$. Dengan demikian modus dari FDP stasioner $f_s(y|x)$ merupakan titik ekuilibrium stabil dan antimodus dari FDP stasioner $f_s(y|x)$ merupakan titik ekuilibrium tak stabil. Koefisien difusi $\sigma(y_t)$ diasumsikan konstan sehingga hanya mempengaruhi ketinggian modus dan tidak mempengaruhi titik ekuilibrium. Semakin kecil nilai $\sigma(y_t)$ maka modus FDP stasioner semakin tinggi.

Dengan demikian perubahan perilaku variabel keadaan y_t dapat dilihat dari perubahan modus dan antimodus pada barisan FDP stasioner $f_s(y|x)$. Selain dengan melihat barisan FDP stasioner, perubahan modus dan antimodus pada

$f_s(y|x)$ dapat dilihat dari diskriminan Cardan δ_x (Barunik dan Vosvrda, 2009),

$$\delta_x = \left(\frac{\alpha_x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta_x}{3}\right)^3, \quad (3.57)$$

dengan δ_x adalah statistik yang membedakan apakah FDP stasioner $f_s(y|x)$ unimodal atau bimodal.

Berdasarkan (Hale dan Kocak, 1991), statistik diskriminan Cardan pada persamaan (3.57) dapat diperoleh dengan menggunakan dua persamaan

$$DV(\alpha_x, \beta_x, y_t) = 0 \text{ dan } D^2V(\alpha_x, \beta_x, y_t) = 0. \quad (3.58)$$

Dengan menggunakan fungsi potensial pada persamaan (3.1),

$V(\alpha_x, \beta_x, y_t) = \frac{1}{4}y_t^4 - \frac{1}{2}\beta_x y_t^2 - \alpha_x y_t$ diperoleh

$$DV(\alpha_x, \beta_x, y_t) = y_t^3 - \beta_x y_t - \alpha_x = 0, \quad (3.59)$$

dan

$$\begin{aligned} D^2V(\alpha_x, \beta_x, y_t) &= 3y_t^2 - \beta_x = 0, \\ \beta_x &= 3y_t^2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.60) ke persamaan (3.59) diperoleh

$$\begin{aligned} y_t^3 - 3y_t^2 \cdot y_t - \alpha_x &= 0 \\ \alpha_x &= -2y_t^3. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dengan memperhatikan variabel y_t pada ruas kanan persamaan (3.60) dan (3.61) dapat diperoleh relasi

$$\begin{aligned} (y_t^3)^2 &= (y_t^2)^3 \\ \left(\frac{\alpha_x}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\beta_x}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Kemudian berdasarkan relasi tersebut diperoleh statistik diskriminan Cardan δ_x

$$\delta_x = \left(\frac{\alpha_x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta_x}{3}\right)^3.$$

Diskriminan Cardan dapat digunakan sebagai indikator titik ekstrim dari FDP stasioner. Nilai Cardan positif menunjukkan FDP stasioner memiliki satu *modus*, yaitu titik ekuilibrium stabil. Nilai diskriminan Cardan negatif menunjukkan FDP mempunyai dua modus (bimodal). Dengan kata lain terdapat tiga titik ekuilibrium, yaitu dua titik ekuilibrium stabil dan satu titik ekuilibrium tak stabil. Perubahan FDP unimodal ke FDP bimodal merupakan penjelasan adanya peristiwa katastrofe pada perilaku y_t .

Sifat diskriminan Cardan dan sifat-sifat fungsi parameter kontrol α_x dan β_x pada kasus unimodal dan bimodal dipengaruhi oleh nilai diskriminan Cardan δ_x yang dijelaskan pada Tabel 3.1 (Cobb, 1999).

Tabel 3.1: Sifat diskriminan Cardan

Diskriminan Cardan	Sifat modus dan antimodus FDP stasioner
$\delta_x > 0$: $f_s(y x)$ unimodal	
α_x : <i>Skewness</i>	Semakin (-) semakin ke kiri. Semakin (+) semakin ke kanan.
β_x : <i>Kurtosis</i>	Semakin besar semakin landai.
$\delta_x < 0$: $f_s(y x)$ bimodal	
α_x : Ketinggian relatif 2 modus	$ \alpha_x $ semakin besar relatif semakin beda. Semakin (+) semakin tinggi modus kanan. Semakin (-) semakin tinggi modus kiri.
β_x : Pemisahan 2 modus	Semakin besar, jarak semakin jauh.

Peristiwa katastrofe ditunjukkan dengan adanya perubahan nilai diskriminan Cardan δ_x dari positif ke negatif. Indikator peristiwa katastrofe lainnya adalah adanya barisan FDP stasioner yang berubah dari unimodal ke bimodal yang terjadi dengan tiba-tiba. Barisan FDP stasioner dapat diperoleh dengan menetapkan suatu

nilai α_x tertentu dan nilai β_x yang berubah dari negatif ke positif. Sejalan dengan perubahan β_x dari negatif ke positif, FDP stasioner dari proses y_t berubah dari unimodal ke bimodal. Hal ini sesuai dengan sifat β_x sebagai faktor bifurkasi. Untuk $\alpha_x = 0$, FDP bersifat simetris (Barunik dan Vosvrda, 2009).

Pada subbab berikutnya dibahas estimasi parameter untuk mendapatkan nilai diskriminan Cardan dengan menggunakan (*shape polynomial*) yang berkaitan dengan FDP stasioner $f_s(y|x)$.

3.4 Estimasi Parameter

Parameter kontrol α_x dan β_x secara berturut-turut mengikuti bentuk persamaan (3.4) dan (3.5), sehingga perlu dilakukan estimasi terhadap $2n + 4$ parameter yaitu $\{\lambda, \sigma, \alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n\}$ dari N observasi pada $n + 1$ variabel $\{y, x_1, \dots, x_n\}$. Terdapat beberapa metode estimasi yang sering digunakan pada aplikasi, misalnya metode momen dan metode maksimum likelihood. Metode estimasi parameter yang digunakan pada tesis ini adalah metode momen yang didasarkan pada teorema berikut (Cobb, 2010; Cobb, Koppstein, dan Neng, 1983):

Teorema 3.1 *Misal fungsi pembentuk $g(x,y)$ adalah fungsi polinomial dari x dan y sedemikian sehingga*

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \int g(x,y) dy \right] < \infty, \forall x. \quad (3.62)$$

Misal $\Psi(x)$ adalah kuantitas resipokal. Anggap bahwa suatu variabel acak Y bergantung pada x dengan densitas bersyarat sebagai berikut

$$f(y|x) = \Psi(x) \exp \left[- \int g(x,y) dy \right]. \quad (3.63)$$

Asumsikan bahwa densitas bersama X dan Y mempunyai momen di semua order, dan misal $h(x)$ adalah densitas variabel acak X . Maka untuk sembarang $j \geq 0$ dan $k \geq 0$,

$$E [X^j Y^k g(X, Y)] = k E [X^j Y^{k-1}]. \quad (3.64)$$

Teorema 3.1 telah dibuktikan oleh Cobb (2010); Cobb, Koppstein, dan Neng (1983). Fungsi $\Psi(x)$ adalah kuantitas resiprokal dengan pengertian bahwa jika mempunyai $m(x)$ maka $\Psi(x) m(x) = 1$.

Fungsi $g(x,y)$ dinamakan *shape polynomial* dimana jumlah maksimum modulus dari fungsi densitas $f(y|x)$ ditentukan dari derajat polinomial $g(x,y)$ (Cobb, Koppstein, dan Neng, 1983). *Shape polynomial* katastrofe *cusp* dengan variabel keadaan y adalah $g(y) = b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3$ yang merupakan bentuk umum dari *shape polynomial cusp* standar pada persamaan (3.2).

Pada tesis ini dibahas model dengan variabel keadaan Y dan dua variabel bebas X_1 dan X_2 sehingga terdapat fungsi dari x_1, x_2 , dan y yang merupakan *shape polynomial*

$$g(x_1, x_2, y) = a + by + cx_1 + dx_1y + ex_2 + fx_2y + gy^2 + hy^3, \quad (3.65)$$

dengan ($h > 0$). Sesuai Teorema 3.1, variabel Y bergantung pada variabel-variabel X_1 dan X_2 dengan fungsi densitas

$$f(y|x_1, x_2) = \Psi \exp \left[- \left(ay + \frac{by^2}{2} + cx_1y + \frac{dx_1y^2}{2} + ex_2y + \frac{fx_2y^2}{2} + \frac{gy^3}{3} + \frac{hy^4}{4} \right) \right]. \quad (3.66)$$

Persamaan (3.66) merupakan bentuk umum dari fungsi densitas *cusp* pada persamaan (3.11), sehingga jika diperoleh nilai parameter-parameter a, b, c, d, e, f, g , dan h pada persamaan (3.66) maka dapat ditentukan nilai dari parameter pada persamaan (3.11).

Dengan menggunakan persamaan (3.66) persamaan (3.65) dapat ditulis sebagai

$$g(x_1, x_2, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \ln(f(y|x_1, x_2)) = -\frac{\partial f(y|x_1, x_2)/\partial y}{f(y|x_1, x_2)}. \quad (3.67)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.67) ke rumus momen pada persamaan (3.64), diperoleh

$$\begin{aligned}
 & E[X_1^i X_2^j Y^k g(X_1, X_2, Y)] \\
 &= \iiint x_1^i x_2^j y^k g(x_1, x_2, y) f(y|x_1, x_2) h(x_1) h(x_2) dy dx_2 dx_1 \\
 &= \iiint x_1^i x_2^j y^k (-\partial f(y|x_1, x_2)/\partial y) h(x_1) h(x_2) dy dx_2 dx_1 \\
 &= \iiint x_1^i x_2^j y^k (-\partial f(y|x_1, x_2)/\partial y) dy h(x_1) h(x_2) dx_2 dx_1 \\
 &= \iint x_1^i x_2^j h(x_2) h(x_1) \left(-\int y^k \frac{\partial f(y|x_1, x_2)}{\partial y} dy \right) dx_2 dx_1. \quad (3.68)
 \end{aligned}$$

Integralkan secara parsial integral bagian dalam ruas kanan persamaan (3.68), yaitu

$$\begin{aligned}
 -\int y^k \frac{\partial f(y|x_1, x_2)}{\partial y} dy &= -y^k \int \frac{\partial f(y|x_1, x_2)}{\partial y} dy - \int f(y|x_1, x_2) (-ky^{k-1}) dy \\
 &= -y^k f(y|x_1, x_2) \Big|_{-\infty}^{\infty} + k \int y^{k-1} f(y|x_1, x_2) dy \\
 &= 0 + k \int y^{k-1} f(y|x_1, x_2) dy,
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 & E[X_1^i X_2^j Y^k g(X_1, X_2, Y)] \\
 &= \iint x_1^i h(x_1) x_2^j h(x_2) \left(k \int y^{k-1} f(y|x_1, x_2) dy \right) dx_2 dx_1 \\
 &= k \iiint x_1^i x_2^j y^{k-1} f(y|x_1, x_2) h(x_2) h(x_1) dy dx_2 dx_1 \\
 &= k E[X_1^i X_2^j Y^{k-1}]. \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Persamaan (3.69) merupakan bentuk perluasan dari persamaan (3.64).

Dengan demikian diperoleh bahwa Teorema 3.1 dapat diterapkan pada model yang akan dibahas.

Estimasi parameter terhadap a, b, c, d, e, f, g, h diperoleh dengan menerapkan Teorema 3.1 pada fungsi densitas persamaan (3.66). Misal digunakan notasi μ_{ijk} untuk menyatakan momen ke- ijk sedemikian sehingga

$$\mu_{ijk} = E[X_1^i X_2^j Y^k].$$

Sesuai Teorema 3.1 maka momen ke- ijk dari fungsi densitas persamaan (3.66) adalah

$$E[X_1^i X_2^j Y^k g(x_1, x_2, y)] = k E[X_1^i X_2^j Y^{k-1}],$$

sehingga untuk $i = 0, 1$; $j = 0, 1$ dan $k = 0, 1, 2, 3$, diperoleh momen-momen dari fungsi densitas persamaan (3.66) sebagai berikut:

Untuk $i = j = k = 0$. Jika $E[g(X_1, X_2, Y)] = 0$, maka

$$\begin{aligned} & E[g(X_1, X_2, Y)] \\ &= E[a + bY + cX_1 + dX_1Y + eX_2 + fX_2Y + gY^2 + hY^3] \\ &= a + bE[Y] + cE[X_1] + dE[X_1Y] + eE[X_2] + fE[X_2Y] \\ &\quad + gE[Y^2] + hE[Y^3] \\ &= a + b\mu_{001} + c\mu_{100} + d\mu_{101} + e\mu_{010} + f\mu_{011} + g\mu_{002} + h\mu_{003}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Untuk $i = 0, j = 0, k = 1$. Jika $E[Y g(X_1, X_2, Y)] = 1$, maka

$$\begin{aligned} & E[Y g(X_1, X_2, Y)] \\ &= E[aY + bY^2 + cX_1Y + dX_1Y^2 + eX_2Y + fX_2Y^2 + gY^3 + hY^4] \\ &= aE[Y] + bE[Y^2] + cE[X_1Y] + dE[X_1Y^2] + eE[X_2Y] \\ &\quad + fE[X_2Y^2] + gE[Y^3] + hE[Y^4] \\ &= a\mu_{001} + b\mu_{002} + c\mu_{101} + d\mu_{102} + e\mu_{011} + f\mu_{012} + g\mu_{003} + h\mu_{004}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Untuk $i = 0, j = 0, k = 2$. Jika $E[Y^2 g(X_1, X_2, Y)] = 2E[Y]$, maka

$$\begin{aligned} & E[Y^2 g(X_1, X_2, Y)] \\ &= E[aY^2 + bY^3 + cX_1Y^2 + dX_1Y^3 + eX_2Y^2 + fX_2Y^3 \\ &\quad + gY^4 + hY^5] \\ &= aE[Y^2] + bE[Y^3] + cE[X_1Y^2] + dE[X_1Y^3] + eE[X_2Y^2] \\ &\quad + fE[X_2Y^3] + gE[Y^4] + hE[Y^5] \\ &= a\mu_{002} + b\mu_{003} + c\mu_{102} + d\mu_{103} + e\mu_{012} + f\mu_{013} + g\mu_{004} + h\mu_{005}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Untuk $i = 0, j = 0, k = 3$ Jika $E[Y^3 g(X_1, X_2, Y)] = 3E[Y^2]$, maka

$$\begin{aligned}
 & E[Y^3 g(X_1, X_2, Y)] \\
 &= E[aY^3 + bY^4 + cX_1Y^3 + dX_1Y^4 + eX_2Y^3 + fX_2Y^4 \\
 &\quad + gY^5 + hY^6] \\
 &= aE[Y^3] + bE[Y^4] + cE[X_1Y^3] + dE[X_1Y^4] + eE[X_2Y^3] \\
 &\quad + fE[X_2Y^4] + gE[Y^5] + hE[Y^6] \\
 &= a\mu_{003} + b\mu_{004} + c\mu_{103} + d\mu_{104} + e\mu_{013} + f\mu_{014} + g\mu_{005} + h\mu_{006} \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

Untuk $i = 1, j = 0, k = 0$. Jika $E[X_1 g(X_1, X_2, Y)] = 0$ maka

$$\begin{aligned}
 & E[X_1 g(X_1, X_2, Y)] \\
 &= E[aX_1 + bX_1Y + cX_1^2 + dX_1^2Y + eX_1X_2 + fX_1X_2Y \\
 &\quad + gX_1Y^2 + X_1hY^3] \\
 &= aE[X_1] + bE[X_1Y] + cE[X_1^2] + dE[X_1^2Y] + eE[X_1X_2] \\
 &\quad + fE[X_1X_2Y] + gE[X_1Y^2] + hE[X_1Y^3] \\
 &= a\mu_{100} + b\mu_{101} + c\mu_{200} + d\mu_{201} + e\mu_{110} + f\mu_{111} + g\mu_{102} + h\mu_{103} \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Untuk $i = 1, j = 0, k = 1$. Jika $E[X_1 Y g(X_1, X_2, Y)] = E[X_1]$

$$\begin{aligned}
 & E[X_1 Y g(X_1, X_2, Y)] \\
 &= E[aX_1Y + bX_1Y^2 + cX_1^2Y + dX_1^2Y^2 + eX_1X_2Y + fX_1X_2Y^2 \\
 &\quad + gX_1Y^3 + X_1hY^4] \\
 &= aE[X_1Y] + bE[X_1Y^2] + cE[X_1^2Y] + dE[X_1^2Y^2] + eE[X_1X_2Y] \\
 &\quad + fE[X_1X_2Y^2] + gE[X_1Y^3] + hE[X_1Y^4] \\
 &= a\mu_{101} + b\mu_{102} + c\mu_{201} + d\mu_{202} + e\mu_{111} + f\mu_{112} + g\mu_{103} + h\mu_{104} \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

Untuk $i = 0, j = 1, k = 0$. Jika $E[X_2 g(X_1, X_2, Y)] = 0$, maka

$$\begin{aligned}
 & E[X_2 g(X_1, X_2, Y)] \\
 &= E[aX_2 + bX_2Y + cX_1X_2 + dX_1X_2Y + eX_2^2 + fX_2^2Y \\
 &\quad + gX_2Y^2 + X_2hY^3] \\
 &= aE[X_2] + bE[X_2Y] + cE[X_1X_2] + dE[X_1X_2Y] + eE[X_2^2] \\
 &\quad + fE[X_2^2Y] + gE[X_2Y^2] + hE[X_2Y^3] \\
 &= a\mu_{010} + b\mu_{011} + c\mu_{110} + d\mu_{111} + e\mu_{020} + f\mu_{021} + g\mu_{012} + h\mu_{013} \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

Untuk $i = 0, j = 1, k = 1$. Jika $E[X_2Y g(X_1, X_2, Y)] = E[X_2]$, maka

$$\begin{aligned}
 & E[X_2Y g(X_1, X_2, Y)] \\
 &= E[aX_2Y + bX_2Y^2 + cX_1X_2Y + dX_1X_2Y^2 + eX_2^2Y + fX_2^2Y^2 \\
 &\quad + gX_2Y^3 + X_2hY^4] \\
 &= aE[X_2Y] + bE[X_2Y^2] + cE[X_1X_2Y] + dE[X_1X_2Y^2] + eE[X_2^2Y] \\
 &\quad + fE[X_2^2Y^2] + gE[X_2Y^3] + hE[X_2Y^4] \\
 &= a\mu_{011} + b\mu_{012} + c\mu_{111} + d\mu_{112} + e\mu_{021} + f\mu_{022} + g\mu_{013} + h\mu_{014} \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

Untuk mencari solusi nilai-nilai a, b, c, d, e, f, g, h , semua persamaan momen dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix}
 \mu_{000} & \mu_{001} & \mu_{100} & \mu_{101} & \mu_{010} & \mu_{011} & \mu_{002} & \mu_{003} \\
 \mu_{001} & \mu_{002} & \mu_{101} & \mu_{102} & \mu_{011} & \mu_{012} & \mu_{003} & \mu_{004} \\
 \mu_{002} & \mu_{003} & \mu_{102} & \mu_{103} & \mu_{012} & \mu_{013} & \mu_{004} & \mu_{005} \\
 \mu_{003} & \mu_{004} & \mu_{103} & \mu_{104} & \mu_{013} & \mu_{014} & \mu_{005} & \mu_{006} \\
 \mu_{100} & \mu_{101} & \mu_{200} & \mu_{201} & \mu_{110} & \mu_{111} & \mu_{102} & \mu_{103} \\
 \mu_{101} & \mu_{102} & \mu_{201} & \mu_{202} & \mu_{111} & \mu_{112} & \mu_{103} & \mu_{104} \\
 \mu_{010} & \mu_{011} & \mu_{110} & \mu_{111} & \mu_{020} & \mu_{021} & \mu_{012} & \mu_{013} \\
 \mu_{011} & \mu_{012} & \mu_{111} & \mu_{112} & \mu_{021} & \mu_{022} & \mu_{013} & \mu_{014}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 e \\
 f \\
 g \\
 h
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 \mu_{000} \\
 2\mu_{001} \\
 3\mu_{002} \\
 0 \\
 \mu_{100} \\
 0 \\
 \mu_{010}
 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

sehingga dengan melakukan operasi matriks akan diperoleh nilai-nilai dari a, b, c, d, e, f, g dan h (Cobb, Koppstein, dan Neng, 1983).

Setelah diperoleh nilai-nilai parameter a, b, c, d, e, f, g dan h pada persamaan (3.66) dapat dilakukan transformasi. Transformasi parameter dari a, b, c, d, e, f, g dan h ke himpunan parameter $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda, \sigma\}$ memenuhi persamaan-persamaan sebagai berikut (Cobb, 2010; Cobb, Koppstein, dan Neng, 1983):

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sqrt[4]{\frac{2}{\sigma_{y_t}^2 h}}, & \lambda &= -\frac{g}{3h}, \\
 \alpha_0 &= -\frac{\sigma_{y_t}^2 \sigma}{2} (a + b\lambda + g\lambda^2 + h\lambda^3), & \beta_0 &= -\frac{\sigma_{y_t}^2 \sigma^2}{2} (b + g\lambda), \\
 \alpha_1 &= -\frac{\sigma_{y_t}^2 \sigma}{2} (c + d\lambda), & \beta_1 &= -\frac{\sigma_{y_t}^2 \sigma^2}{2}, \\
 \alpha_2 &= -\frac{\sigma_{y_t}^2 \sigma}{2} (e + f\lambda), & \beta_2 &= -\frac{\sigma_{y_t}^2 \sigma^2}{2} f.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Parameter-parameter $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda, \sigma\}$ kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.11), sehingga diperoleh FDP stasioner dengan nilai-nilai parameter yang dapat diperoleh dari estimasi.

BAB 4

APLIKASI MODEL KATASTROFE *CUSP* STOKASTIK

Model katastrofe *cusp* stokastik telah banyak digunakan untuk menjelaskan perubahan perilaku sistem yang drastis dan mendadak pada berbagai bidang, di antaranya adalah van der Maas, Kolstein, dan van der Pligt (2003) yang menjelaskan perubahan mendadak sikap politis warga Belanda terhadap program pemerintah. Fischer dan Jammernegg (1986) menggunakan katastrofe *cusp* stokastik di bidang ekonomi untuk menjelaskan hubungan antara inflasi aktual, pengangguran dan inflasi ekspektasi.

Pada tesis ini, model katastrofe *cusp* stokastik digunakan untuk menjelaskan perubahan mendadak indeks harga saham yang terjadi pada peristiwa *Black Monday* di pasar saham Amerika pada 19 Oktober 1987.

4.1 Sejarah Peristiwa *Black Monday*

Tahun 1987 menjadi salah satu tahun kelabu dalam perekonomian Amerika. Pada 19 Oktober 1987 terjadi krisis pasar saham dimana indeks saham S&P 500 dan perdagangan opsi turun mencapai 20,5% dalam waktu satu hari (Barunik dan Vosvrda, 2009). Peristiwa yang terjadi pada hari Senin tersebut kemudian dikenal dengan nama *Black Monday*.

Black Monday merupakan kejadian penting dimana krisis ini terjadi tidak hanya karena kecepatan penurunan pasar tapi juga menunjukkan kelemahan sistem perdagangan pada saat itu. Masalah-masalah pada sistem perdagangan yang didukung dengan penurunan harga menjadikan krisis semakin parah. Salah satu masalah yang ditengarai menjadi penyebab adalah sulitnya mengumpulkan informasi dalam cepatnya perubahan dan ketidakpastian pasar. Sistem saat itu tidak mampu menangani begitu banyaknya transaksi dalam satu waktu (Carlson, 2006).

Ketidakpastian tentang informasi sepertinya berkontribusi pada penarikan

diri para investor *fundamentalist* yang mengakibatkan pasar lebih banyak dikendalikan oleh investor *chartist*. Penurunan harga saham yang secara terus menerus pada hari-hari sebelumnya, membuat kelompok *chartist* tertarik untuk melakukan spekulasi. Banyaknya kelompok *chartist* menyebabkan penurunan pasar menjadi ekstrem.

Pada tesis ini diteliti apakah perubahan indeks saham yang mendadak pada krisis *Black Monday* dapat dijelaskan dengan menggunakan model katastrofe *cusp* stokastik. Data yang digunakan pada aplikasi model adalah data pasar dalam satu tahun perdagangan (253 hari) mulai 1 Mei 1987 sampai dengan 29 April 1988 yang diperoleh dari (Wikiposit, 2012). Indeks saham S&P500 digunakan sebagai variabel tak bebas. Sedangkan variabel bebas yang digunakan adalah *A/D Ratio* (*Advance/Decline Ratio*) pada pasar saham *New York Stocks Exchange* (NYSE) dan *CBOE Volatility Indeks* (*VIX*) yaitu indeks volatilitas perdagangan yang dikeluarkan oleh *Chicago Board Options Exchange* (*CBOE*).

4.2 Variabel-variabel Acak dalam Penelitian

Pada subbab ini dijelaskan mengenai variabel-variabel acak yang digunakan dalam model, yaitu indeks saham S&P500, *A/D Ratio*, dan *PPO* dari indeks *VXO*.

Dua kelompok investor *fundamentalist* dan *chartist* diasumsikan sebagai variabel bebas yang mempengaruhi keadaan pasar, sehingga terdapat dua variabel, yaitu C adalah banyaknya *chartist* yang merepresentasikan spekulasi uang pada pasar modal dan F adalah banyaknya *fundamentalist* yang merepresentasikan permintaan saham yang melampaui batas. Untuk mengukur keadaan pasar saham adalah dengan menentukan suatu indeks I , pada tesis ini adalah indeks S&P 500. Misal

$$J = \dot{I} = \frac{dI}{dt}, \quad (4.1)$$

adalah laju perubahan (*rate of change*) dari indeks pasar saham I . Maka $J = 0$ merepresentasikan pasar yang statis, $J > 0$ merepresentasikan pasar saham yang optimis (*bull market*), dan $J < 0$ merepresentasikan pasar saham yang lesu (*bear*

market). Variabel keadaan y_t menunjukkan laju perubahan indeks J . Variabel F yang diasumsikan sebagai faktor penentu eksternal merupakan variabel kontrol asimetri α_x dan C yang diasumsikan sebagai mekanisme internal dari pasar saham merupakan variabel kontrol bifurkasi β_x (Barunik dan Vosvrda, 2009).

Ketika jumlah *chartist* kecil, pasar saham didominasi investor berpengetahuan baik, permintaan untuk penjualan dan pembelian saham seimbang dan perubahan yang terjadi pada J hanya disebabkan oleh permintaan atau penawaran saham yang melampaui batas. Sebaliknya jumlah *chartist* yang besar akan mengakibatkan ketidakstabilan pada pasar, sehingga *chartist* diasumsikan sebagai faktor bifurkasi. Semakin banyak *chartist*, J semakin tidak stabil (Barunik dan Vosvrda, 2009).

Pada tesis ini digunakan variabel keadaan *return* harian Indeks saham S&P500. Permintaan saham yang melampaui batas dapat diindikasikan dengan rasio dari volume saham yang naik harga terhadap volume saham yang turun harga sehingga digunakan variabel bebas *A/D Ratio*, dan untuk melihat spekulasi pasar, variabel yang paling sesuai adalah *Put/Call ratio* yaitu perbandingan antara total volume opsi jual terhadap total volume opsi beli (Barunik dan Vosvrda, 2009). Akan tetapi karena data *Put/Call Ratio* pada periode data yang diperhatikan tidak dapat ditemukan, maka digunakan variabel bebas *CBOE volatility indeks (VIX)* sebagai indikator sentimen pasar. Variabel-variabel tersebut dijelaskan lebih dalam pada subbab-subbab selanjutnya.

4.2.1 Indeks Saham S&P 500

Standard & Poor's (S&P) adalah perusahaan layanan finansial Amerika yang mempublikasikan riset finansial serta analisis saham dan obligasi. Salah satu produk S&P yang paling dikenal adalah indeks saham S&P 500 (SPX 500) yaitu berupa indeks saham dari 500 perusahaan besar yang sebagian besar berada di Amerika dan dipilih berdasarkan kapitalisasi pasar (*market capitalization*) dan faktor-faktor lainnya. Kapitalisasi pasar adalah penilaian suatu saham berdasarkan harga saham dikali dengan jumlah saham di tangan investor. Perusahaan yang termasuk di dalam S&P 500 dipilih oleh Komite S&P 500 yaitu tim analisis dan

ekonom di Standard & Poors.

S&P 500 adalah salah satu yang banyak digunakan sebagai indikator pasar saham Amerika. Sebelumnya Dow Jones Industrial Average (DJIA) lebih dikenal sebagai standar ukuran pasar saham Amerika, akan tetapi karena DJIA hanya terdiri dari 30 perusahaan, kebanyakan orang setuju bahwa S&P 500 lebih representatif dalam menggambarkan pasar saham Amerika (*Investopedia*, 2012).

Berdasarkan interpretasi Zeeman yang digunakan Barunik dan Vosvrda (2009), akan dimodelkan rata-rata perubahan indeks saham. Dengan demikian digunakan *return* harian dari S&P 500 sebagai variabel keadaan dalam sistem. *Return* harian dari S&P 500 menggambarkan karakteristik resiko dan karakteristik *return* dari perusahaan-perusahaan dengan kapitalisasi pasar yang besar. Menurut Barunik dan Vosvrda (2009), nilai-nilai *return* harian dari S&P 500 diperoleh dari persamaan

$$\text{Return harian} = \frac{\text{indeks hari ini}}{\text{indeks hari sebelumnya}} - 1. \quad (4.2)$$

4.2.2 *A/D Ratio*

Variabel bebas yang pertama adalah *A/D Ratio (Advance/Decline Ratio)*. *Advance volume* adalah jumlah saham yang ditutup dengan harga lebih tinggi dibanding harga pada saat penutupan pada hari sebelumnya. *Decline volume* adalah jumlah saham yang ditutup dengan harga lebih rendah dibanding harga pada saat penutupan pada hari sebelumnya. *A/D Ratio* yang rendah menandakan pasar mengalami penjualan yang menurun karena jumlah barang banyak dan permintaan sedikit (*oversold market*). *A/D Ratio* yang tinggi menandakan pasar yang mengalami kenaikan harga karena permintaan bertambah (*overbought market*).

A/D Ratio menyatakan rasio volume saham yang kapitalisasi pasarnya naik terhadap volume saham yang kapitalisasi pasarnya turun dalam satu hari

(*Investopedia*, 2012). Sebagai contoh:

$A/D = 3$: Volume saham yang naik 3 kali dibanding volume saham yang turun.

$A/D < 1$: Lebih banyak volume saham yang turun dibanding volume saham yang naik.

Penelitian pada tesis ini menggunakan volume saham di pasar saham *New York Stock Exchange* (NYSE).

4.2.3 CBOE Volatility Indeks(VIX)

Variabel bebas yang kedua adalah *CBOE Volatility Indeks* yang dikenal dengan *VIX*. Sebelum dibahas tentang *VIX* sebelumnya dibahas tentang opsi yang menjadi dasar bagi perhitungan *VIX*.

Opsi adalah suatu perjanjian yang memberikan hak kepada pemegangnya (pembeli opsi) untuk membeli atau menjual suatu sekuritas pada harga kesepakatan (*strike price*) dan dalam jangka waktu tertentu yang disepakati, baik pada akhir masa jatuh tempo ataupun di antara tenggang waktu masa sebelum jatuh tempo. Opsi untuk membeli disebut opsi beli (*call*) dan opsi untuk menjual disebut opsi jual (*put*). Pihak penjual opsi yang disebut sebagai penerbit opsi, harus memenuhi hak opsi dari pemegang opsi sesuai dengan ketentuan yang disepakati. Karena kasus *Black Monday* terjadi di Amerika, maka opsi yang dibahas disini adalah opsi Amerika, dimana pembeli opsi dapat melaksanakan haknya (*exercise*) ketika saham yang digunakan sebagai dasar penentuan harga (*underlying stock*) mencapai indeks yang diinginkan walaupun masa jatuh tempo belum berakhir.

Volatilitas adalah fluktuasi dari harga opsi, dan ukuran pada volatilitas dapat digunakan untuk melihat apakah ada tren sentimen pasar. Permintaan opsi jual cenderung meningkat dalam volatilitas ketika pasar saham menurun. Sebaliknya permintaan opsi beli meningkat ketika pasar saham naik. Seperti *P/C Ratio*, pembelian opsi beli menandakan optimisme pasar (*bullish*) dan pembelian opsi jual menandakan pesimisme pasar (*bearish*). Opsi jual juga digunakan sebagai media

berspekulasi, sehingga pembelian opsi jual dan opsi beli merupakan indikator yang baik untuk melihat sentimen investor dalam memperkirakan penurunan pasar. Pada saat pasar lesu, permintaan opsi jual meningkat (*Market Harmonics*, 2012).

Untuk mengukur volatilitas, *CBOE* mengembangkan *Volatility index (VIX)*. *VIX* adalah indeks volatilitas yang dihitung menggunakan *implied volatility* keranjang opsi jual dan opsi beli saham S&P 500. *Implied volatility* merepresentasikan ekspektasi volatilitas suatu saham berdasarkan masa berlaku opsi. *Implied volatility* berhubungan secara langsung dengan penawaran dan permintaan opsi dan berhubungan langsung dengan ekspektasi pasar. *Implied volatility* pada suatu kontrak opsi adalah volatilitas dari harga *underlying security* yang ditetapkan berdasarkan harga pasar suatu opsi menggunakan suatu model tertentu. Dengan perkataan lain jika digunakan suatu model *pricing*, akan diperoleh nilai teoritik opsi yang sama dengan nilai harga pasar saat ini (*StockCharts*, 2012).

VIX dibuat untuk mengukur 30 hari ekspektasi indeks volatilitas dari S&P 500. *Chartist* menggunakan *VIX* untuk mengukur sentimen pasar dan mencari nilai ekstrim dari sentimen sebagai tanda titik balik. *VIX* pada awalnya diukur berdasarkan indeks saham S&P 100 (*OEX*) yaitu saham dari 100 perusahaan terbesar di pasar saham Amerika yang dinilai berdasarkan kapitalisasi pasarnya. Saham S&P 100 adalah subhimpunan dari S&P 500. Untuk menciptakan indeks volatilitas yang dapat diperdagangkan, pada tahun 2003 *CBOE* menghitung kembali *VIX* berdasarkan saham S&P 500. *VIX* yang dihitung berdasarkan saham S&P 100 kemudian dinamakan dengan *VXO (Volatility Index-Original Formula)*. Data yang digunakan pada tesis ini adalah indeks volatilitas *VXO* karena pada periode data yang digunakan (1987-1988) belum terdapat indeks volatilitas yang didasarkan pada S&P 500 (*Market Harmonics*, 2012).

VXO menurun jika pasar saham meningkat dan naik jika pasar saham menurun. *VXO* merupakan indikator sentimen pasar yang sering disebut sebagai *fear index*. Jika nilainya tinggi menandakan pesimisme pasar, sebaliknya jika nilainya rendah menandakan optimisme pasar. Berdasarkan (*StockCharts*, 2012)

kisaran nilai yang menjadi indikasi sentimen pasar adalah

$VXO > 30$: ketidakpastian (ketakutan investor),

$VXO < 20$: investor puas.

Nilai VXO berkebalikan dengan kondisi pasar sehingga VXO digunakan oleh para investor sebagai *contrarian indicator*. Saat nilainya mencapai puncak, banyak investor yang akan menggunakannya sebagai kesempatan untuk membeli dengan pemikiran bahwa pasar sudah sampai pada batas pesimis, sehingga akan segera terjadi arah pasar yang optimis. Sebaliknya, jika nilainya sampai pada titik yang sangat rendah, para investor menggunakannya sebagai indikator untuk menjual. Puncak dan titik yang sangat rendah pada VXO sering digunakan sebagai titik balik (*turning points*) dari pasar.

VXO cenderung memiliki tren. Kecenderungan mengikuti tren dapat menyebabkan analisis menjadi kurang sesuai (*StockCharts*, 2012). Misal nilai VXO pada suatu periode waktu memiliki tren linear positif. Tren linear positif dapat menyebabkan ketidaksesuaian analisis dimana suatu nilai VXO yang rendah pada waktu tertentu pada kenyataannya merupakan nilai yang tinggi. Untuk mengatasi kecenderungan mengikuti tren dilakukan *detrending* pada VXO . *Detrending* dilakukan menggunakan *Percent Price Oscillator (PPO)*. *PPO* berperan menghilangkan tren linear dari indeks harian. Jika sekelompok data memiliki tren, maka *detrending* akan menekan rata-rata ke nilai nol dan mengurangi variasi data.

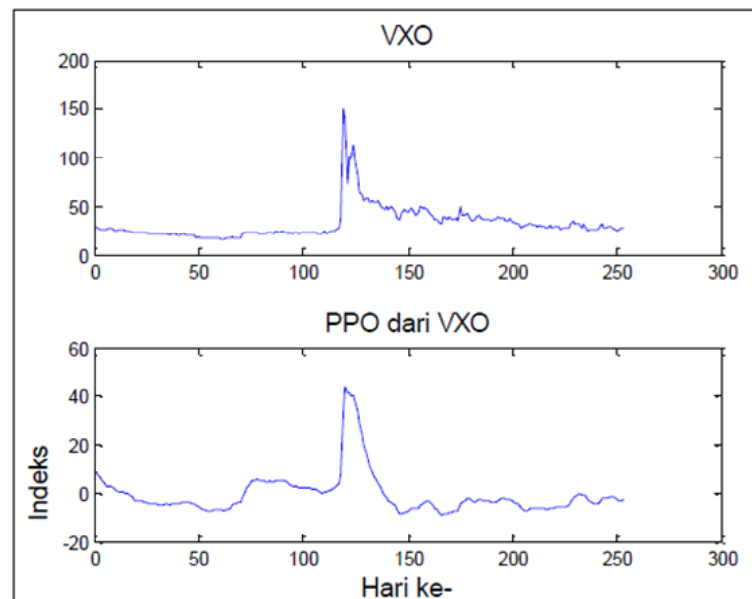
PPO adalah indikator laju teknis yang menunjukkan hubungan antara dua *moving averages*. *PPO* dihitung dengan persamaan (*StockCharts*, 2012):

$$PPO_r = \frac{EMA(12)_r - EMA(26)_r}{EMA(26)_r}, \quad (4.3)$$

dengan

$$\begin{aligned} \text{EMA}(n)_1 &= (\text{Nilai VXO}_1 - \text{SMA}(n) \times \text{Pengali} + \text{SMA}(n), \\ \text{EMA}(n)_r &= (\text{Nilai VXO}_r - \text{EMA}(n)_{r-1} \times \text{Pengali} + \text{EMA}(n)_{r-1} \\ &\text{dengan } r = 2, 3, \dots, N = 253, \\ \text{SMA}(n) &= \frac{\text{jumlah nilai VXO selama } n \text{ hari sebelum hari ke } r = 1}{n}, \\ \text{Pengali} &= \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Untuk penghitungan $\text{EMA}(n)$ (*Exponential Moving Average*) hari pertama ($r = 1$) digunakan $\text{SMA}(n)$ (*Simple Moving Average*) sebagai $\text{EMA}(n)$ hari sebelumnya. Gambar 4.1 menunjukkan indeks volatilitas VXO sebelum dan sesudah dilakukan *detrending* menggunakan PPO .



Gambar 4.1: Grafik VXO dan PPO dari VXO .

Tampak bahwa setelah dilakukan *detrending* dengan menggunakan PPO maka diperoleh bahwa rata-rata berada di sekitar nol dan variasi data berkurang. Pada subbab selanjutnya dilakukan perhitungan untuk mendapatkan estimator yang digunakan untuk menjelaskan peristiwa katastrofe pada *Black Monday*.

4.3 Hasil Estimasi

Subbab ini menjelaskan hasil estimasi parameter dengan menggunakan metode estimasi seperti yang telah dibahas pada subbab 3.4. Data masing-masing variabel acak dan program perhitungan disajikan pada Lampiran.

Estimasi parameter dari bentuk umum famili FDP eksponensial pada persamaan (3.66) adalah

$$f(y|x_1, x_2) = \Psi \exp \left[- \left(ay + \frac{by^2}{2} + cx_1y + \frac{dx_1y^2}{2} + ex_2y + \frac{fx_2y^2}{2} + \frac{gy^3}{3} + \frac{hy^4}{4} \right) \right],$$

dan dengan menggunakan momen-momen pada persamaan (3.70) sampai persamaan (3.77) dihasilkan nilai-nilai parameter berikut yang merupakan solusi dari persamaan (3.78), yaitu

$$\begin{aligned} a &= 163,2287 & e &= -3,5647 \\ b &= 1,6482 \times 10^4 & f &= -355,1207 \\ c &= -114,7724 & g &= 1,0361 \times 10^5 \\ d &= 857,3380 & h &= 4,0469 \times 10^5. \end{aligned}$$

Kemudian dengan menggunakan transformasi pada persamaan (3.79) diperoleh nilai parameter-parameter $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda, \sigma\}$ sebagai berikut:

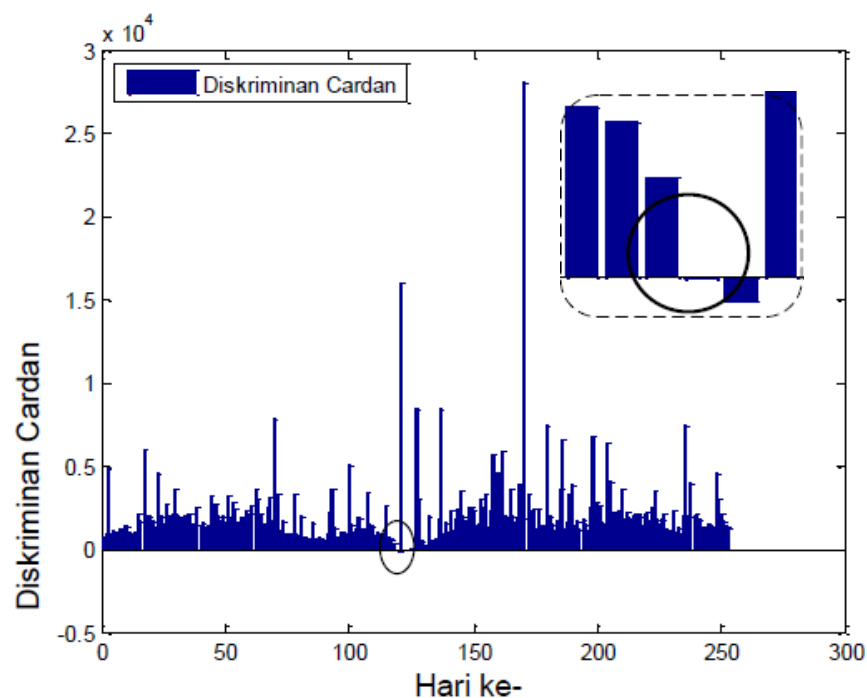
$$\begin{aligned} \sigma &= 0,0333 & \lambda &= -0,0853 \\ \alpha_0 &= 49,3605 & \beta_0 &= -16,9823 \\ \alpha_1 &= 12,5317 & \beta_1 &= -1,9059 \\ \alpha_2 &= -1,7832 & \beta_2 &= 0,7895. \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh fungsi-fungsi parameter

$$\begin{aligned} \alpha_{x_r} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{1r} + \alpha_2 x_{2r} \\ &= 49,3605 + 12,5317 x_{1r} - 1,7832 x_{2r} \\ \beta_{x_r} &= \beta_0 + \beta_1 x_{1r} + \beta_2 x_{2r} \\ &= -16,9823 - 1,9059 x_{1r} + 0,7895 x_{2r} \end{aligned}$$

dengan x_{i_r} adalah nilai-nilai variabel bebas X_i , $i = 1, 2$ pada obeservasi ke- r untuk $r = 1, 2, \dots, N = 253$: hari terakhir dalam 1 tahun perdagangan dari 1 Mei 1987 sampai dengan 29 April 1988. Variabel X_1 adalah *A/D Ratio* dan X_2 adalah *PPO* dari *VXO*.

Dengan menggunakan persamaan (3.57), $\delta_{x_r} = \left(\frac{\alpha_{x_r}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta_{x_r}}{3}\right)^3$ diperoleh nilai-nilai diskriminan Cardan yang disajikan dalam histogram pada Gambar 4.2. Perubahan nilai diskriminan Cardan pada Gambar 4.2 dari positif ke negatif pada



Gambar 4.2: Grafik nilai-nilai diskriminan Cardan (1 Mei 1987 - 29 April 1988).

hari ke 118 sampai hari ke 119 (dalam lingkaran) menunjukkan adanya peristiwa katastrofe yang terjadi yaitu pada selang waktu 16 Oktober 1987 (hari ke 118) sampai dengan 19 Oktober 1987 (hari ke 119). Dalam hari perdagangan, 16 Oktober 1987 dan 19 Oktober merupakan hari yang berurutan.

Dengan menggunakan paramater hasil perhitungan, diperoleh FDP stasioner

sesuai persamaan (3.11)

$$\begin{aligned} f_s(y|x)_r &= \Psi \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^4 + \frac{\beta_{x_r}}{\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right)^2 + \frac{2\alpha_{x_r}}{\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y-\lambda}{\sigma} \right) \right) \\ &= \Psi \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y+0,0853}{0,0333} \right)^4 + \frac{\beta_{x_r}}{\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y+0,0853}{0,0333} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha_{x_r}}{\sigma_{y_t}^2} \left(\frac{y+0,0853}{0,0333} \right) \right) \end{aligned}$$

dengan $\sigma_{y_t}^2 = 2$.

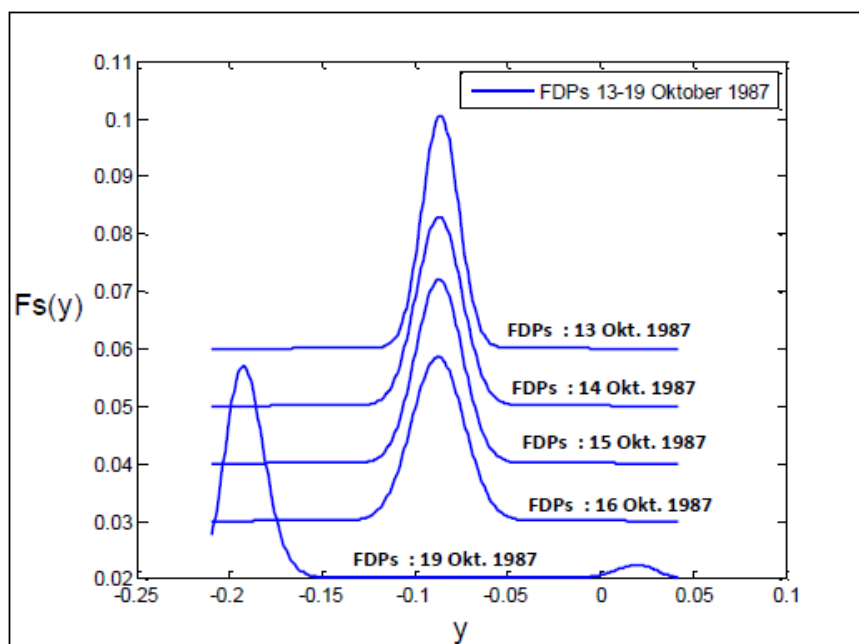
Grafik FDP stasioner pada Gambar 4.3 merupakan FDP stasioner pada persamaan (3.11) dengan parameter-parameter dari hasil perhitungan dan $\sigma_{y_t}^2 = 2$. Gambar 4.3 merupakan barisan FDP stasioner dengan nilai α_x tetap dan nilai β_x dari hari ke 115 sampai hari ke 119. Perubahan nilai faktor bifurkasi β_x menyebabkan perubahan FDP stasioner dari satu modus pada hari ke 115 sampai hari ke 118 (13-16 Oktober 1987) menjadi dua modus pada hari ke 119 (19 Oktober 1987).

Nilai diskriminan Cardan pada 19 Oktober 1987 ($r = 119$) adalah

$$\delta_{x_{119}} = -3,2735,$$

$$\text{dengan } \alpha_{x_{119}} = -11,9127 \text{ dan } \beta_{x_{119}} = 10,1520.$$

Sesuai dengan sifat diskriminan Cardan pada Tabel 3.1 ketika nilai $\delta_x < 0$, nilai α_x yang kecil menyebabkan FDP stasioner 19 Oktober 1987 pada Gambar 4.3 memiliki modus kiri yang lebih tinggi dibanding modus kanan. Sedangkan nilai β_x yang besar menyebabkan jarak antara dua modus cukup jauh.



Gambar 4.3: Grafik barisan FDP stasioner.

Dengan melihat grafik diskriminan Cardan pada Gambar 4.2 dan barisan FDP stasioner pada Gambar 4.3 diperoleh bahwa hasil pengolahan data menunjukkan adanya perubahan nilai diskriminan Cardan positif (16 oktober 1987) ke negatif (19 Oktober 1987) yang ekuivalen dengan perubahan FDP stasioner dari unimodal ke bimodal. Sesuai dengan pembahasan pada subbab 3.3, perubahan FDP stasioner dari satu modus menjadi dua modus merupakan indikasi adanya peristiwa katastrofe. Dengan demikian diperoleh kesimpulan bahwa terdapat peristiwa katastrofe *bimodality* yang disebabkan oleh faktor bifurkasi pada peristiwa *Black Monday*.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari penelitian yang dilakukan pada tesis ini diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Peristiwa perubahan drastis dan mendadak pada pasar saham Amerika yang terjadi pada 19 Oktober 1987 (*Black Monday*) dapat dijelaskan menggunakan model katastrofe *cusp* stokastik.
2. *Bimodality* yang dipengaruhi faktor bifurkasi pada peristiwa *Black Monday* memperkuat dugaan bahwa krisis terjadi karena faktor internal yaitu sistem perdagangan yang berlaku pada saat itu.

5.2 Saran

Tujuan dari penelitian yang dilakukan dalam tesis ini telah tercapai dengan menunjukkan adanya peristiwa katastrofe pada peristiwa *Black Monday*. Namun pada prosesnya terdapat kendala dalam estimasi parameter, dimana nilai observasi yang diperoleh sangat kecil sehingga menyebabkan solusi yang diperoleh bernilai sangat besar. Untuk itu pada penelitian selanjutnya disarankan digunakan metode estimasi yang lain, misalnya metode estimasi maksimum likelihood.

DAFTAR REFERENSI

- Barunik, J., & Vosvrda, M. (2009). Can a stochastic cusp catastrophe model explain stock market crashes? *Journal of Economic Dynamic & Control*, **33**, 1824-1836.
- Carlson, M. (2006). A brief history of the 1987 stock market crash with a discussion of the Federal Reserve Response. *Washington DC: Finance and Economics Discussion Series*.
- Castrigiano, D.P.L., & Hayes, S.A. (1993). *Catastrophe theory*. Canada: Addison-Wesley.
- Cobb, L., & Watson, B. (1980). Statistical catastrophe theory: An overview. *Mathematical Modelling*, **1**, 311-317.
- Cobb, L. (2010). Estimation theory for the cusp catastrophe model, revised edition. *1980 Proceedings of the American Statistical Association, Section on Survey Research Methods*, 772-776.
- Cobb, L. (1999). Stochastic differential equations for the social sciences. *Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences*, Chapter 2. Westview Press.
- Cobb, L., & Koppstein, P., & Neng, H.C. (1983). Estimation and moment recursion relations for multimodal distributions of the exponential family. *Journal of the American Statistical Association*, **78** (381), 124-130.
- Cobb, L., & Zacks, S. (1985). Applications of catastrophe theory for statistical modelling in the biosciences. *Journal of the American Statistical Association*, **80** (392), 793-802.
- Cross, D. J. Zeeman's catastrophe machine. September 2, 2011. <http://lagrange.physics.drexel.edu/flash/zcm/>.

- Dujardin, L. (2006). *Catastrophe Teacher*. Faculty of Pharmacy B.P. 83 F-59006 Lille Cedex France. October 20, 2011.
l.d.v.dujardin.pagesperso-orange.fr/ct/eng_index.html.
- Wikiposit: Daily price history (1986-1987). (April 18, 2012).
<http://www.wikiposit.org/>.
- Fischer, E.O., & Jammerneegg, W. (1986). Empirical Investigation of a catastrophe theory extension of the Phillips Curve. *The Review of Economics and Statistics*, **68** (1), 9-17.
- Guastello, S.J. (2000). Nonlinear Dynamics in Psychology. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **6**, 11-29.
- Hale, J., & Kocak, H. (1991). *Dynamics and bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- Higham, D.J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review* **43** (3), 525-546.
- Hirsch, M.W., Smale, S., & Devaney, R.L. (2004). *Differential Equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, (2nd ed). California: Academic Press.
- Hogg, R.V., McKean, J.W., & Craig, A.T. (1995). *Introduction to mathematical statistics*, (7th ed). Boston: Pearson Education.
- Investopedia. (April to June 2012). <http://www.investopedia.com/terms/>.
- KBBI, <http://kamusbahasaIndonesia.org/>. (April to June 2012).
- Klebaner, C.F. (2005). *Introduction to stochastic calculus with application*, (2nd ed). London: Imperial College Press.
- Kwok, L.S. (1990). Application of Catastrophe Theory to Corneal Swelling. *Proceedings: Biological Sciences*, **242** (1305), 141-147.

- Market harmonics: *Sentiment indicators*. (April 21, 2012)
<http://www.market-harmonics.com/free-charts/sentiment/nu.htm>.
- Rinne, H. (2010). *Location-scale distribution, Linear estimation dan probability plotting using MATLAB*. Germany: Justus-Liebig-University, Giessen.
- Ross, S.M. (1996). *Stochastic process* (2nd ed). New York: John Wiley & Sons.
- Shreve, S.E. (2004). *Stochastic calculus for finance II Continuous-time models*. New York: Springer.
- Soong, T.T. (1973). *Random differential equations in science and engineering*. New York: Academic Press.
- StockCharts: *Percentage price oscillator*. (May 11, 2012).
<http://stockcharts.com/school/>.
- van der Maas, H.L.J., Kolstein, R., & van der Pligt, J. (2003). Sudden Transitions in Attitudes. *Sociological Methods & Research*, **32** (2), 125-152.
- Wagenmakers, E.J., Molenaar, P.C.M, Hartelman, P.A.I. & van der Maas, H.L.J. (2005). Transformation invariant stochastic catastrophe theory. *Physica D*, **211**, 263-276.
- Zauderer, E. (2006). *Partial differential equations of applied mathematics* (3rd ed). New Jersey: John Wiley & Sons.

LAMPIRAN

PERINTAH PERHITUNGAN ESTIMASI PARAMETER

```

clear all; clc;

%Panggil data dari file *.xlsx
Y=xlsread('dataacusp.xlsx',1,'B3:B255');
X1=xlsread('dataacusp.xlsx',1,'C3:C255');
X2=xlsread('dataacusp.xlsx',1,'I3:I255');

%Perhitungan momen-momen
M001=Y; M010=X2; M100=X1; M002=Y.^2; M003=Y.^3; M004=Y.^4; M005=Y.^5;
M006=Y.^6; M011=X2.*Y; M012=X2.*M002;M013=X2.*M003;M014=X2.*M004;
M020=X2.^2;M021=M020.*Y;M022=M020.*M002;
M101=X1.*Y;M102=X1.*M002;M103=X1.*M003;M104=X1.*M004;
M200=X1.^2;M201=M200.*Y;M202=M200.*M002;
M110=X1.*X2;M111=X1.*X2.*Y;M112=X1.*X2.*M002;

mu_000=1; mu_001=mean(M001);mu_010=mean(M010);mu_100=mean(M100);
mu_002=mean(M002);mu_003=mean(M003);mu_004=mean(M004);mu_005=mean(M005);
mu_006=mean(M006);mu_011=mean(M011);mu_012=mean(M012);mu_013=mean(M013);
mu_014=mean(M014);mu_020=mean(M020);mu_021=mean(M021);mu_022=mean(M022);
mu_101=mean(M101);mu_102=mean(M102);mu_103=mean(M103);mu_104=mean(M104);
mu_200=mean(M200);mu_201=mean(M201);mu_202=mean(M202);mu_110=mean(M110);
mu_111=mean(M111);mu_112=mean(M112);

%Matriks dengan entri momen-momen
M=[mu_000 mu_001 mu_100 mu_101 mu_010 mu_011 mu_002 mu_003;
mu_001 mu_002 mu_101 mu_102 mu_011 mu_012 mu_003 mu_004;
mu_002 mu_003 mu_102 mu_103 mu_012 mu_013 mu_004 mu_005;
mu_003 mu_004 mu_103 mu_104 mu_013 mu_014 mu_005 mu_006;
mu_100 mu_101 mu_200 mu_201 mu_110 mu_111 mu_102 mu_103;
mu_101 mu_102 mu_201 mu_202 mu_111 mu_112 mu_103 mu_104;
mu_010 mu_011 mu_110 mu_111 mu_020 mu_021 mu_012 mu_013;
mu_011 mu_012 mu_111 mu_112 mu_021 mu_022 mu_013 mu_014];
A=[0 mu_000 2*mu_001 3*mu_002 0 mu_100 0 mu_010]';

%Mencari Solusi parameter a,b,c,d,e,f,g, dan h
Btopi=M \A
a=Btopi(1,1);b=Btopi(2,1);c=Btopi(3,1);d=Btopi(4,1);
e=Btopi(5,1);f=Btopi(6,1);g=Btopi(7,1);h=Btopi(8,1);

%Ditentukan
sigma_yt=2;

%Mencari nilai parameter FDP stasioner dengan
%transformasi dari parameter a,b,c,d,e,f,g, dan h
sigma=nthroot(2/(h*sigma_yt^2),4)
lambda=-(g/(3*h));
alpha_0=(sigma_yt^2/2)*(-sigma)*(a+b*lambda+g*(lambda^2)+h*(lambda^3));
alpha_1=(sigma_yt^2/2)*(-sigma)*(c+d*lambda);
alpha_2=(sigma_yt^2/2)*(-sigma)*(e+f*lambda);
beta_0=(sigma_yt^2/2)*(-sigma^2)*(b+g*lambda);
beta_1=(sigma_yt^2/2)*(-sigma^2)*d;
beta_2=(sigma_yt^2/2)*(-sigma^2)*f;

```

```

%Mencari nilai fungsi parameter alpha_x dan beta_x
n=size(Y,1);
for i=1:n
    Ax(i)=alpha_0+alpha_1*X1(i,1)+alpha_2*X2(i,1);
    Bx(i)=beta_0+beta_1*X1(i,1)+beta_2*X2(i,1);
end

data=linspace(-0.21, 0.042, 253);

%Standarisasi dengan parameter lokasi lambda dan parameter skala
sigma
for j=1:n
    z(j)=(data(j)-lambda)/sigma;
end

%Mencari nilai-nilai FDP stasioner
%13 Oktober 1987 (hari ke 115)
a126=Ax(126);bt=Bx(115);
for p=1:n
    pdf(p)=exp((2*(-1/4)*(z(p)^4)+(1/2)*bt*(z(p)^2)+a126*(z(p))))/(sigma_1*yt^2);
end
pdf;
for q=1:n
    F(q)=pdf(q)/sum(pdf);
end
x=data;
plot(x,F+0.06,'LineWidth',2);
hold on
xlabel('y','FontSize',15)
ylabel('Fs(y)','FontSize',15,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')

%14 Oktober 1987 (hari ke 116)
a126=Ax(126);bt=Bx(116);
for p=1:n
    pdf(p)=exp((2*(-1/4)*(z(p)^4)+(1/2)*bt*(z(p)^2)+a126*(z(p))))/(sigma_1*yt^2);
end
pdf;
for q=1:n
    F(q)=pdf(q)/sum(pdf);
end
x=data;
plot(x,F+0.05,'LineWidth',2);
hold on
xlabel('y','FontSize',15)
ylabel('Fs(y)','FontSize',15,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')

%15 Oktober 1987 (hari ke 117)
a126=Ax(126);bt=Bx(117);
for p=1:n
    pdf(p)=exp((2*(-1/4)*(z(p)^4)+(1/2)*bt*(z(p)^2)+a126*(z(p))))/(sigma_1*yt^2);
end
pdf;
for q=1:n
    F(q)=pdf(q)/sum(pdf);
end
x=data;
plot(x,F+0.04,'LineWidth',2);
hold on
xlabel('y','FontSize',15)
ylabel('Fs(y)','FontSize',15,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')

```

```

%16 Oktober 1987 (hari ke 118)
a126=Ax(126);bt=Bx(118);
for p=1:n
pdf(p)=exp((2*(-1/4)*(z(p)^4)+(1/2)*bt*(z(p)^2)+a126*(z(p))))/(sigma      _yt)^2);
end
pdf;
for q=1:n
    F(q)=pdf(q)/sum(pdf);
end
x=data;
plot(x,F+0.03,'LineWidth',2);
hold on
xlabel('y','FontSize',15)
ylabel('Fs(y)','FontSize',15,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')

%19 Oktober 1987 (hari ke 119)
a126=Ax(126);bt=Bx(119);
for p=1:n
pdf(p)=exp((2*(-1/4)*(z(p)^4)+(1/2)*bt*(z(p)^2)+a126*(z(p))))/(sigma      _yt)^2);
end
pdf;
for q=1:n
    F(q)=pdf(q)/sum(pdf);
end
x=data;
plot(x,F+0.02,'LineWidth',2);
hold off
xlabel('y','FontSize',15)
ylabel('Fs(y)','FontSize',15,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('FDPs 13-19 Oktober 1987')

%Mencari Diskriminan Cardan; Cardan < 0: bimodal, Cardan > 0
unimodal
for u=1:n
    cardan(u)=(Ax(u)/2)^2-(Bx(u)/3)^3);
    if cardan(u) < 0
        disp(cardan(u))
        disp(u)
    end
end

y=1:1:n;
figure(2)
bar(y,cardan)
legend('Diskriminan Cardan',2);
xlabel('Hari ke-', 'FontSize',13);
ylabel('Diskriminan
Cardan','FontSize',13,'Rotation',90,'HorizontalAlignment','right');

% Plot Detrending VXO menggunakan PPO
E=xlsread('datacusp.xlsx',1,'D3:D255');
X2=xlsread('datacusp.xlsx',1,'I3:I255');
figure(3)
subplot(2,1,1);
plot(E); title('VXO','FontSize',13)
subplot(2,1,2);
plot(X2); title('PPO dari VXO','FontSize',13)
xlabel('Hari ke-', 'FontSize',13)
ylabel('Indeks', 'FontSize',13,'Rotation',90,'HorizontalAlignment','right')

```

DATA PERISTIWA BLACK MONDAY

Data Peristiwa Black Monday (1 Mei 1987-29 April 1988)

<http://www.wikiposit.org/>

No	Tanggal	SPX 500	A/D Ratio	VXO
1	01-May-87	288.03	1.0925	28.22
2	04-May-87	289.36	1.7110	27.18
3	05-May-87	295.34	7.3455	25.68
4	06-May-87	295.47	1.1945	25.66
5	07-May-87	294.71	1.4068	25.45
6	08-May-87	293.37	0.8464	25.27
7	11-May-87	291.57	0.8370	27.02
8	12-May-87	293.30	1.3593	26.96
9	13-May-87	293.98	1.2476	26.33
10	14-May-87	294.24	1.6259	25.11
11	15-May-87	287.43	0.1514	25.06
12	18-May-87	286.65	0.4720	25.37
13	19-May-87	279.62	0.1880	26.57
14	20-May-87	278.21	0.5573	26.19
15	21-May-87	280.17	2.7013	25.13
16	22-May-87	282.16	1.9744	24.93
17	26-May-87	289.11	7.0764	23.92
18	27-May-87	288.73	1.2454	23.15
19	28-May-87	290.76	2.0491	22.51
20	29-May-87	290.10	1.2528	22.52
21	01-Jun-87	289.83	1.2981	22.4
22	02-Jun-87	288.46	0.6478	23.46
23	03-Jun-87	293.47	5.2232	23.14
24	04-Jun-87	295.09	1.8541	22.55
25	05-Jun-87	293.45	0.8616	22.87
26	08-Jun-87	296.72	2.8492	21.46
27	09-Jun-87	297.28	1.7572	21.65
28	10-Jun-87	297.47	1.5692	21.67
29	11-Jun-87	298.73	1.8458	22.13
30	12-Jun-87	301.62	3.8671	21.64
31	15-Jun-87	303.14	1.6945	21.24
32	16-Jun-87	304.76	1.3450	20.82
33	17-Jun-87	304.81	1.2654	21.47
34	18-Jun-87	305.69	1.6546	21.8
35	19-Jun-87	306.97	1.7353	20.8
36	22-Jun-87	309.65	1.7620	20.71
37	23-Jun-87	308.43	0.6413	21.11
38	24-Jun-87	306.86	0.7600	21.5
39	25-Jun-87	308.96	2.4847	20.76
40	26-Jun-87	307.16	0.5637	20.62
41	29-Jun-87	307.90	0.9483	20.61
42	30-Jun-87	304.00	0.3737	21.33
43	01-Jul-87	302.94	0.7689	20.99
44	02-Jul-87	305.63	3.5452	20.04
45	06-Jul-87	304.92	0.9792	20.6
46	07-Jul-87	307.40	2.7951	19.85
47	08-Jul-87	308.29	1.6682	19.3
48	09-Jul-87	307.52	1.2075	19.28
49	10-Jul-87	308.37	1.5407	17.76
50	13-Jul-87	307.63	0.7280	17.78
51	14-Jul-87	310.68	3.0969	17.1
52	15-Jul-87	310.42	1.1425	17.51
53	16-Jul-87	312.70	2.4760	17.1
54	17-Jul-87	314.59	1.6789	16.65
55	20-Jul-87	311.39	0.4436	16.75
56	21-Jul-87	308.55	0.3843	17.43
57	22-Jul-87	308.47	0.9617	17.73
58	23-Jul-87	307.81	0.7664	17.31
59	24-Jul-87	309.27	1.7573	17.12
60	27-Jul-87	310.65	1.3243	16.61
61	28-Jul-87	312.33	2.0629	15.95
62	29-Jul-87	315.65	3.4108	15.91
63	30-Jul-87	318.05	2.6599	16.4
64	31-Jul-87	318.66	1.4396	16.45
65	03-Aug-87	317.57	0.5495	17.45
66	04-Aug-87	316.23	0.6676	18.09
67	05-Aug-87	318.45	2.4591	17.67
68	06-Aug-87	322.09	3.2825	17.05
69	07-Aug-87	323.00	1.2063	17.3
70	10-Aug-87	328.00	8.1144	17.09
71	11-Aug-87	333.33	4.0324	20.91
72	12-Aug-87	332.39	0.8666	22.8
73	13-Aug-87	334.65	2.3584	22.4
74	14-Aug-87	333.99	0.7384	22.59
75	17-Aug-87	334.11	1.0657	22.41
76	18-Aug-87	329.25	0.1601	22.59
77	19-Aug-87	329.83	1.0791	22.35
78	20-Aug-87	334.84	5.4096	22.34
79	21-Aug-87	335.90	1.2714	21.37
80	24-Aug-87	333.33	0.5969	21.57
81	25-Aug-87	336.77	3.3209	21.92
82	26-Aug-87	334.57	0.6917	22.12
83	27-Aug-87	331.38	0.4252	22.5
84	28-Aug-87	327.04	0.1804	22.98
85	31-Aug-87	329.80	2.7084	22.33
86	01-Sep-87	323.40	0.2665	22.07
87	02-Sep-87	321.68	0.3996	24.01
88	03-Sep-87	320.21	0.5005	23.26
89	04-Sep-87	316.70	0.3983	23.63
90	08-Sep-87	313.56	0.1596	24.37
91	09-Sep-87	313.92	1.0873	23.7
92	10-Sep-87	317.13	3.6932	22.98

No	Tanggal	SPX 500	A/D Ratio	VXO
93	11-Sep-87	321.98	5.4730	21.68
94	14-Sep-87	323.08	1.7497	22.35
95	15-Sep-87	317.74	0.2266	21.81
96	16-Sep-87	314.86	0.2519	23.06
97	17-Sep-87	314.93	0.9296	22.89
98	18-Sep-87	314.86	0.9165	22.2
99	21-Sep-87	310.54	0.2386	22.58
100	22-Sep-87	319.50	6.7613	23
101	23-Sep-87	321.19	1.8931	23.19
102	24-Sep-87	319.72	0.8409	23.33
103	25-Sep-87	320.16	1.2537	22.83
104	28-Sep-87	323.20	2.7163	22.49
105	29-Sep-87	321.69	0.7909	22.96
106	30-Sep-87	321.83	1.2935	22.38
107	01-Oct-87	327.33	4.7703	21.83
108	02-Oct-87	328.07	1.6334	21.42
109	05-Oct-87	328.08	1.3695	21.15
110	06-Oct-87	319.22	0.1563	24.28
111	07-Oct-87	318.52	0.5436	22.09
112	08-Oct-87	314.16	0.1693	23.52
113	09-Oct-87	311.07	0.4562	23.76
114	12-Oct-87	309.39	0.3082	24.59
115	13-Oct-87	314.52	3.8865	24.32
116	14-Oct-87	305.23	0.1088	26.36
117	15-Oct-87	298.08	0.1365	27.86
118	16-Oct-87	282.70	0.0110	36.37
119	19-Oct-87	224.84	0.0019	150.19
120	20-Oct-87	236.83	1.3145	140
121	21-Oct-87	258.38	21.6909	73.91
122	22-Oct-87	248.25	0.1017	102.22
123	23-Oct-87	248.22	0.6653	98.81
124	26-Oct-87	227.67	0.0062	113.33
125	27-Oct-87	233.19	2.6768	97.51
126	28-Oct-87	233.28	0.7901	81.24
127	29-Oct-87	244.77	14.4814	64.66
128	30-Oct-87	251.79	8.2659	61.41
129	02-Nov-87	255.75	2.4413	54.9
130	03-Nov-87	250.82	0.1926	58.44
131	04-Nov-87	248.96	0.7995	58.47
132	05-Nov-87	254.48	4.4625	53.54
133	06-Nov-87	250.41	0.5806	55.78
134	09-Nov-87	243.17	0.1200	54.73
135	10-Nov-87	239.00	0.2515	54.76
136	11-Nov-87	241.90	2.9102	55.55
137	12-Nov-87	248.52	9.6942	49.21
138	13-Nov-87	245.64	0.3370	47.59
139	16-Nov-87	246.76	1.5227	46.5
140	17-Nov-87	243.04	0.2058	49.59
141	18-Nov-87	245.55	2.4239	46.53
142	19-Nov-87	240.05	0.0956	49.5
143	20-Nov-87	242.00	1.2872	47.62
144	23-Nov-87	242.99	2.1095	43.37
145	24-Nov-87	246.39	3.3813	38.11
146	25-Nov-87	244.10	0.8189	36.3
147	27-Nov-87	240.34	0.3635	42.11
148	30-Nov-87	230.30	0.0275	46.13
149	01-Dec-87	232.00	1.7786	45.73
150	02-Dec-87	233.45	1.5761	43.7
151	03-Dec-87	225.21	0.0802	47.22
152	04-Dec-87	223.92	0.3778	47.63
153	07-Dec-87	228.76	2.8625	43.68
154	08-Dec-87	234.91	2.0714	41.38
155	09-Dec-87	238.89	3.2103	43.88
156	10-Dec-87	233.57	0.2776	49
157	11-Dec-87	235.32	2.2426	48.44
158	14-Dec-87	242.19	6.2532	47.44
159	15-Dec-87	242.80	1.3113	47.01
160	16-Dec-87	248.08	5.1559	44.23
161	17-Dec-87	242.98	0.3662	42
162	18-Dec-87	249.16	6.2463	38.54
163	21-Dec-87	249.54	1.3118	36.29
164	22-Dec-87	249.95	0.9137	35.92
165	23-Dec-87	253.16	3.2498	32.81
166	24-Dec-87	252.02	0.7098	31.65
167	28-Dec-87	245.57	0.1131	38.92
168	29-Dec-87	244.59	0.6275	38.23
169	30-Dec-87	247.86	3.3852	35.66
170	31-Dec-87	247.08	0.8236	39.45
171	4-Jan-1988	255.94	18.1534	36.49
172	5-Jan-1988	258.63	3.0223	36.9
173	6-Jan-1988	258.89	1.6022	37.06
174	7-Jan-1988	261.07	1.7229	34.36
175	8-Jan-1988	243.40	0.0543	49.36
176	11-Jan-1988	247.49	2.4788	40.54
177	12-Jan-1988	245.42	0.3141	41.2
178	13-Jan-1988	245.81	0.8421	41.59
179	14-Jan-1988	245.88	0.6699	42.22
180	15-Jan-1988	252.05	8.0137	36.37
181	18-Jan-1988	251.88	1.8715	35.19
182	19-Jan-1988	249.32	0.8250	35.97
183	20-Jan-1988	242.63	0.0992	39.87
184	21-Jan-1988	243.14	1.4160	40.42
185	22-Jan-1988	246.50	4.2368	38.21
186	25-Jan-1988	252.17	7.2600	35.95
187	26-Jan-1988	249.57	0.4601	36.48
188	27-Jan-1988	249.38	1.2541	36.69
189	28-Jan-1988	253.29	3.7430	36.31
190	29-Jan-1988	257.07	4.3060	35.55

No	Tanggal	SPX 500	A/D Ratio	VXO
191	1-Feb-1988	255.04	0.6457	36.73
192	2-Feb-1988	255.57	1.3564	36.17
193	3-Feb-1988	252.21	0.3561	38.63
194	4-Feb-1988	252.21	1.6254	38.32
195	5-Feb-1988	250.96	1.2493	38.47
196	8-Feb-1988	249.10	0.3353	37.96
197	9-Feb-1988	251.72	2.8039	34.15
198	10-Feb-1988	256.66	7.4137	35.09
199	11-Feb-1988	255.95	0.8044	37.39
200	12-Feb-1988	257.63	3.1438	33.95
201	16-Feb-1988	259.83	2.7443	32.86
202	17-Feb-1988	259.21	0.9574	32.07
203	18-Feb-1988	257.91	0.7550	31.8
204	19-Feb-1988	261.61	6.4615	27.53
205	22-Feb-1988	265.64	3.9148	28.41
206	23-Feb-1988	265.02	1.1952	29.76
207	24-Feb-1988	264.43	1.3867	30.13
208	25-Feb-1988	261.58	0.7229	32.17
209	26-Feb-1988	262.46	1.8262	32.06
210	29-Feb-1988	267.82	3.6112	29.83
211	1-Mar-1988	267.22	1.0303	30.08
212	2-Mar-1988	267.98	1.5493	29.59
213	3-Mar-1988	267.88	1.1209	30.27
214	4-Mar-1988	267.30	0.9155	29.35
215	7-Mar-1988	267.38	1.3169	28.39
216	8-Mar-1988	269.43	1.3634	28.01
217	9-Mar-1988	269.06	1.2814	27.85
218	10-Mar-1988	263.84	0.2620	30.11
219	11-Mar-1988	264.94	1.4856	27.64
220	14-Mar-1988	266.37	1.7616	28.66
221	15-Mar-1988	266.13	0.8938	29.14
222	16-Mar-1988	268.65	2.3013	28.64

No	Tanggal	SPX 500	A/D Ratio	VXO
223	17-Mar-1988	271.22	3.6195	26.62
224	18-Mar-1988	271.12	1.0425	28.02
225	21-Mar-1988	268.74	0.4827	28.01
226	22-Mar-1988	268.84	1.1968	27.54
227	23-Mar-1988	268.91	1.7069	27.22
228	24-Mar-1988	263.35	0.1845	31.89
229	25-Mar-1988	258.51	0.3522	34.24
230	28-Mar-1988	258.06	0.5025	32.49
231	29-Mar-1988	260.07	2.8359	32.12
232	30-Mar-1988	258.07	0.5154	32.39
233	31-Mar-1988	258.89	1.1012	26.94
234	4-Apr-1988	256.09	0.2593	31.3
235	5-Apr-1988	258.51	2.3438	28.54
236	6-Apr-1988	265.49	8.0260	24.75
237	7-Apr-1988	266.16	1.9302	25.65
238	8-Apr-1988	269.43	4.3959	25.45
239	11-Apr-1988	270.16	1.7400	25.83
240	12-Apr-1988	271.37	1.8466	25.75
241	13-Apr-1988	271.57	1.3385	26.1
242	14-Apr-1988	259.75	0.0518	30.92
243	15-Apr-1988	259.77	0.9111	31.64
244	18-Apr-1988	259.21	0.7527	27.81
245	19-Apr-1988	257.92	1.1522	27.37
246	20-Apr-1988	256.13	0.3369	28.83
247	21-Apr-1988	256.42	0.9198	29.04
248	22-Apr-1988	260.14	5.6018	28.05
249	25-Apr-1988	262.46	3.6140	26.5
250	26-Apr-1988	263.93	2.2403	24.92
251	27-Apr-1988	263.80	1.3405	25.52
252	28-Apr-1988	262.61	0.7671	27.09
253	29-Apr-1988	261.33	0.5744	27.04