UNIVERSITAS INDONESIA

GRUP DARI SIMETRI PADA *POLYHEX CARBON NANOTORUS ARMCHAIR* DAN *ZIG-ZAG*

SKRIPSI

HENDRY TANUWIJAYA
0806452186

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

GRUP DARI SIMETRI PADA *POLYHEX CARBON NANOTORUS ARMCHAIR* DAN *ZIG-ZAG*

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

HENDRY TANUWIJAYA
0806452186

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Hendry Tanuwijaya
NPM	: 0806452186
Tanda Tangan	:
Tanggal	: Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh	:
Nama	: Hendry Tanuwijaya
NPM	: 0806452186
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Grup dari Simetri pada *Polyhex Carbon Nanotorus Armchair* dan *Zig-zag*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra. Nora Hariadi, M.Si.	( )
Pembimbing	: Dra. Suarsih Utama, M.Si.	( )
Penguji	: Dr. Kiki Ariyanti S, M.Si.	( )
Penguji	: Drs. Frederik M P, M.Kom.	( )

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: Juni 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak antara lain:

(1) Tuhan Yesus Kristus yang telah memberi penulis kekuatan dan juga atas rahmat yang diberikan-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini.

(2) Pembimbing tugas akhir penulis, Dra. Nora Hariadi, M.Si, dan Dra. Suarsih Utama, M.Si yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan serta membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini. Terima kasih juga untuk kesabaran, nasehat, doa, dan dukungan yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini.

(3) Dra. Saskya Mary S., M.Si, selaku pembimbing akademik penulis yang telah memberikan masukan dan dukungan selama 4 tahun masa perkuliahan penulis.

(4) Dr. Yudi Satria dan Rahmi Rusin, M.ScTech, selaku ketua dan sekretaris Departemen Matematika, atas segala bantuan dan dukungan yang telah diberikan.

(5) Keluarga penulis yaitu kedua orang tua penulis dan kedua adik penulis, yang telah memberikan bantuan material maupun dukungan selama penulis menjalani masa perkuliahan. Terima kasih atas segala doa, perhatian, kasih sayang, kesabaran, dan berbagai nasehat yang telah diberikan kepada penulis.

(6) Teman-teman Matematika angkatan 2008 yang telah memotivasi penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

(7) Resti, Agy, Luthfir, Ines, Sita, dan May yang telah meminjamkan laptop kepada penulis untuk mengerjakan skripsi maupun presentasi.

(8) Seluruh staf Tata Usaha, staf Perpustakaan, serta karyawan Departemen Matematika, terima kasih atas segala bantuannya.

(9) Teman-teman penulis lainnya baik yang di depatemen Matematika, MIPA, maupun UI yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah mendoakan penulis.

Akhir kata, penulis berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, penulis yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Hendry Tanuwijaya
NPM	: 0806452186
Program Studi	: Sarjana
Departemen	: Matematika
Fakultas	: MIPA (Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam)
Jenis karya	: Skripsi

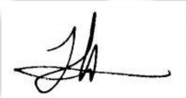
demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah penulis yang berjudul :

Grup dari Simetri pada *Poyhex Carbon Nanotorus Armchair* dan *Zig-zag*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir penulis selama tetap mencantumkan nama penulis sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini penulis buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : Juni 2012
Yang menyatakan



(Hendry Tanuwijaya)

ABSTRAK

Nama : Hendry Tanuwijaya
Program Studi : Matematika
Judul : Grup dari Simetri pada *Poyhex Carbon Nanotorus Armchair* dan *Zig-zag*

Carbon nanotorus adalah struktur yang diperoleh dengan menekuk sebuah *carbon nanotube* hingga kedua ujungnya bertemu. Jika yang ditekuk adalah *armchair nanotube*, maka yang terbentuk adalah *armchair nanotorus*. Jika yang ditekuk adalah *zig-zag nanotube*, maka yang terbentuk adalah *zig-zag nanotorus*. Operasi simetri pada *nanotorus* adalah rotasi dan refleksi. Operasi-operasi simetri dari *armchair* atau *zig-zag nanotorus*, dapat dinyatakan dalam bentuk permutasi, membentuk sebuah grup yang disebut grup dari simetri pada *nanotorus armchair* atau *zig-zag*. Pada skripsi ini, dibuktikan bahwa grup ini isomorfik dengan *semidirect product* dari grup dihedral D_n dengan grup $\mathbb{Z}_2$.

Kata Kunci : *polyhex carbon nanotorus armchair*, *polyhex carbon nanotorus zig-zag*, grup dari simetri, grup dihedral
xi+46 halaman ; 19 gambar
Daftar Pustaka : 12 (1974-2012)

ABSTRACT

Name : Hendry Tanuwijaya
Program Study : Mathematics
Title : The Group of Symmetries on Polyhex Carbon Nanotorus Armchair and Zig-zag

A carbon nanotorus is a structure that is obtained by bending a carbon nanotube untl both ends meet. If the bended nanotube is an armchair one, it become an armchair nanotorus. If the bended nanotube is a zig-zag one, it become zig-zag nanotorus.
There are two types of symmetrical operations on nanotorus, which are rotation and reflection types. The operations, that can be expressed by permutations, form a group called group of symmetry on armchair or zig-zag nanotorus. In this *skripsi* it is proved that this group is isomorphic to the semidirect product of dihedral group D_n and group $\mathbb{Z}_2$.

Keywords : polyhex carbon nanotorus armchair, polyhex carbon nanotorus zig-zag, group of symmetries, dihedral group.
xi+46 pages ; 19 pictures
Bibliography : 12 (1974-2012)

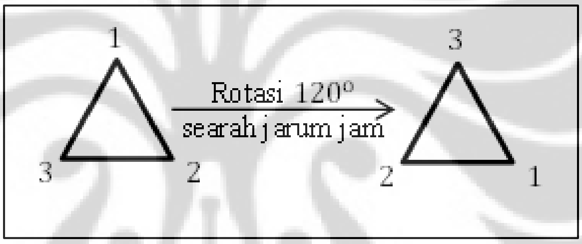
DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

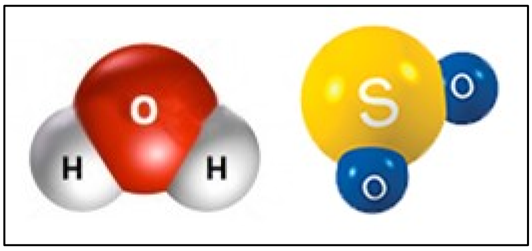
1.1 Latar Belakang

Suatu obyek dikatakan simetris jika suatu pergerakan atau operasi mengakibatkan obyek tersebut berada pada posisi yang tidak dapat dibedakan dengan posisi asal. Pergerakan atau operasi tersebut dinamakan simetri. Contohnya adalah suatu segitiga sama sisi yang dirotasi sejauh $120°$ searah jarum jam. Dari Gambar 1.1 dapat dilihat bahwa posisi pada segitiga setelah dirotasi tidak dapat dibedakan dengan posisi segitiga sebelum dirotasi. Sehingga rotasi 120^o merupakan simetri pada segitiga sama sisi.



Gambar 1.1 Rotasi 120^o searah jarum jam pada segitiga

Kesimetrisan dari suatu benda banyak digunakan dalam aplikasi. Salah satu aplikasi dari kesimetrisan yang banyak digunakan adalah kesimetrisan dari suatu molekul. Kesimetrisan pada molekul dan zat padat adalah salah satu cara untuk memahami sifat-sifat ikatan dan sifat fisis yang selanjutnya akan digunakan untuk memprediksi sifat dari orbital molekul. Ahli kimia dan fisika mengklasifikasikan molekul berdasarkan kesimetrisan molekul tersebut. Molekul-molekul yang memiliki bentuk yang sama akan memiliki sifat-sifat yang sama (Yavari & Ashrafi, 2009). Sebagai contoh molekul air, H_2O, dan molekul sulfur dioksida, SO_2, yang memiliki simetri yang sama dan kedua molekul tersebut juga memiliki 3 jenis *vibration* yang sama dimana ketiganya IR *active* dan Raman *active*. (Housecroft, 2008)

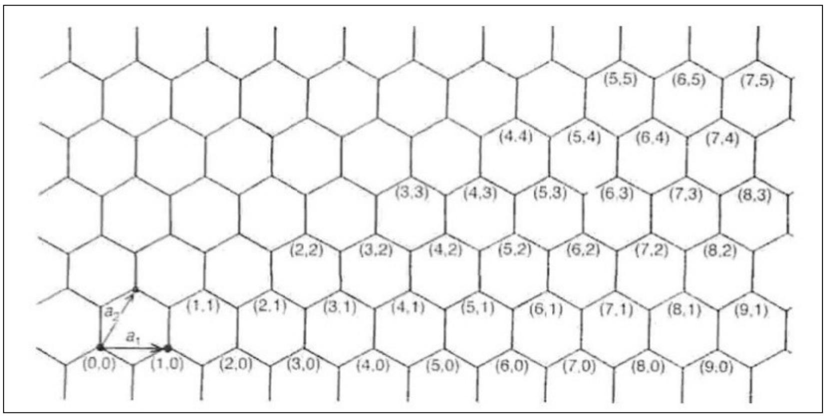


[Sumber : "Science Fair Water" dan "Sulfur Dioxide (Department of Environment and Resource Managament)"]

Gambar 1.2 Molekul $\mathrm{H_2O}$ dan molekul $\mathrm{SO_2}$

Salah satu materi yang banyak digunakan adalah *carbon nanotube. Carbon nanotube* merupakan materi yang mempunyai daya renggang yang besar dan ringan.Sehingga *nanotube* banyak digunakan untuk kegiatan di luar angkasa. Selain itu, *nanotube* juga bisa bersifat semikonduktor ataupun bersifat metalik tergantung dari strukturnya. *Nanotube* dapat digunakan sebagai bahan untuk membuat alat-alat berukuran *nano*, tapi hingga saat ini pembuatannya belum bisa dilakukan. Namun saat ini *nanotube* sudah digunakan untuk mikroskop dan alat pendeteksi.

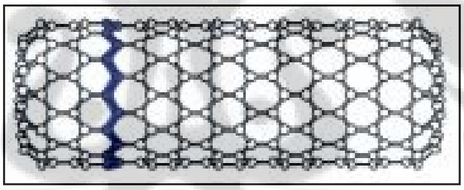
Carbon nanotube adalah suatu lembaran grafit yang digulung dengan arah tertentu. Jika *nanotube* ini ditekuk hingga ujung-ujungnya tersambung, maka terbentuk suatu *nanotorus*. ("Nanotorus nets giant magnetic moment"). Arah penggulungan, atau *chiral vector*, biasa dinyatakan sebagai $C_h = na_1 + ma_2$, dimana n, m bilangan bulat nonnegatif dan a_1, a_2 adalah vektor seperti pada Gambar 1.1 di bawah ini. *Chiral vector* biasa ditulis sebagai (n, m).



[Sumber : "Carbon Nanotubes"]

Gambar 1.3 Lembaran *nanotorus*

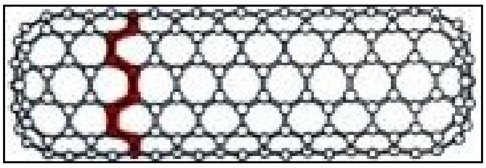
Jika *chiral vector* adalah (n, m), maka lembaran grafit digulung sehingga verteks dengan label $(0,0)$ berada tepat di atas verteks dengan label (n, m). Jika *chiral vector* adalah $(n, 0)$, maka yang terbentuk adalah *zig-zag nanotube*. Contoh *zig-zag nanotube* dapat dilihat pada Gambar 1.4 di bawah ini.



[Sumber : "Type of Nanotubes"]

Gambar 1.4 *Zig-zag nanotube*

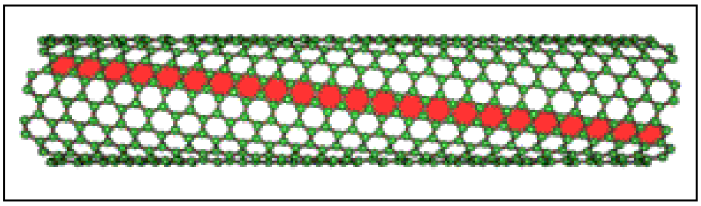
Jika *chiral vector* adalah (n, n), maka yang terbentuk adalah *armchair nanotube*. Contoh *armchair nanotube* dapat dilihat pada Gambar 1.5 di bawah ini.



[Sumber : "Type of Nanotubes"]

Gambar 1.5 *Armchair nanotube*

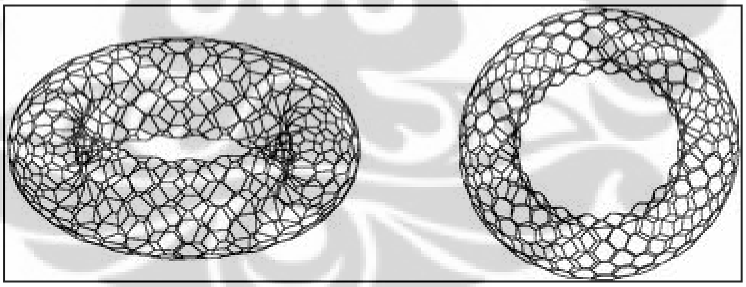
Selain dari cara penggulungan di atas, maka yang terbentuk adalah *chiral nanotube* (“Carbon Nanotubes”). Contoh *chiral nanotube* dapat dilihat pada Gambar 1.6 di bawah ini.



[Sumber : “Type of Nanotubes”]

Gambar 1.6 *Chiral nanotube*

Ketiga nanotube di atas, yaitu *zig-zag nanotube*, *armchair nanotube*, dan *chiral nanotube*, memiliki arah penggulungan yang berbeda-beda. Jika *nanotube* ini ditekuk hingga ujung-ujungnya tersambung, maka terbentuk suatu *nanotorus*. *Nanotorus* yang terbentuk tergantung dari jenis *nanotube* yang ditekuk. Sebagai contoh, gambar di bawah ini adalah gambar *zig-zag nanotorus* yang diperoleh dari *zig-zag nanotube* yang ditekuk.



[Sumber : “(IUCr) Full Symmetry of Nanotori”]

Gambar 1.7 *Zig-zag nanotorus*

Simetri dari *nanotorus* dapat diperoleh dengan merotasi *nanotorus* ataupun merefleksi *nanotorus* terhadap sumbu tertentu. Kumpulan simetri dari suatu molekul membentuk grup dari simetri molekul tersebut. (Faghani & Ashrafi, 2009) Sehingga kumpulan simetri dari *nanotorus* juga akan membentuk grup. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai grup dari simetri pada *nanotorus armchair* dan *zig-zag*.

1.2 Rumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Dari latar belakang di atas, dapat dirumuskan masalah sebagai berikut:

1.2.1 Bagaimanakah mengkonstruksi grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* dan grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus zig-zag*?

1.2.2 Grup apakah yang isomorfik dengan grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* dan grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus zig-zag*?

Ruang lingkup dari penelitian ini hanya membahas mengenai struktur aljabar grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* dan *zig-zag* namun tidak membahas mengenai sifat-sifat fisis dari *polyhex carbon nanotorus armchair* maupun *zig-zag*.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1.3.1 Menunjukkan cara mengkonstruksi grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* dan grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus zig-zag*.

1.3.2 Menentukan grup yang isomorfik dengan grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* dan grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus zig-zag*.

1.4 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Skripsi ini membahas grup dari simetri pada *nanotorus*. Oleh karena itu diperlukan pembahasan mengenai grup dan teori-teorinya terlebih dahulu yang dibahas di Bab 2 ini. Pada Subbab 2.1 terlebih dahulu dibahas mengenai grup abstrak. Setelah itu pada Subbab 2.2 akan dibahas mengenai grup yang lebih spesifik, yaitu grup dihedral.

2.1 Grup

Subbab 2.1 dibagi menjadi 4 bagian. Definisi grup, subgrup, dan subgrup normal yang dibahas pada Subbab 2.1.1. Pada Subbab 2.1.2 dibahas mengenai grup permutasi dan pada Subbab 2.1.3 dibahas mengenai homomorfisma. Subbab 2.1.4 membahas mengenai pemfaktoran grup.

2.1.1 Pendahuluan grup

Pertama-tama diberikan definisi grup.

Definisi 2.1 *Suatu himpunan tak kosong G disebut* **grup** *jika di G terdefinisi suatu operasi, disebut perkalian dan dilambangkan dengan $*$, dimana*

1. *Untuk setiap a dan b anggota G, maka $a * b$ anggota G (sifat tertutup)*
2. *Untuk setiap $a, b,$ dan c anggota G, maka $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat asosiatif)*
3. *Ada e anggota G dimana $a * e = e * a = a$ untuk setiap a anggota G (keberadaan elemen identitas di G)*
4. *Untuk setiap a anggota G, ada a^{-1} anggota G dimana $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (keberadaan invers di G)*

(Herstein, 1996)

Untuk mempersingkat penulisan $a * b$ akan ditulis sebagai ab saja. Berikut diberikan contoh grup.

Beberapa contoh sederhana, misalnya, himpunan bilangan real tanpa nol membentuk grup terhadap perkalian. Kemudian himpunan bilangan bulat terhadap penjumlahan juga merupakan grup. Contoh lainnya, misalkan $A(S)$ adalah himpunan semua pemetaan bijekif dari himpunan S ke S, maka $A(S)$ ini membentuk grup terhadap operasi komposisi.

Apabila banyaknya elemen pada grup adalah hingga, maka grup tersebut disebut **grup hingga**. Banyaknya elemen pada grup hingga G disebut **order** dari G. Suatu grup G dikatakan **komutatif** apabila memenuhi sifat $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in G$.

Jika S adalah $\{1, \dots, n\}$, maka $A(S)$, seperti contoh sebelumnya, disebut grup simetri dengan operasi komposisi dan dinyatakan dengan S_n. Banyaknya elemen $A(S)$ adalah hingga. Grup S_n akan dibahas lebih lanjut pada Subbab 2.1.2.

Contoh grup hingga lain adalah himpunan bilangan bulat modulo n, $\mathbb{Z}_n$, dengan n adalah bilangan bulat. Operasi pada $\mathbb{Z}_n$ adalah penjumlahan modulo n. $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ adalah grup hingga karena banyak anggotanya hingga. Selain itu, grup $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan grup $\mathbb{Z}_n$ terhadap operasi penjumlahan modulo n adalah grup komutatif.

Subhimpunan tak kosong dari suatu grup G juga dapat membentuk grup terhadap operasi yang sama dengan G. Subhimpunan yang demikian disebut dengan subgrup. Berikut diberikan definisi dari subgrup.

Definisi 2.2 *Himpunan tak kosong H dari suatu grup G disebut* **subgrup** *dari G jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama di G.* (Herstein, hal 51)

Salah satu contoh dari subgrup adalah himpunan bilangan genap yang membentuk subgrup dari $\mathbb{Z}$. Ini karena himpunan bilangan genap membentuk grup dengan operasi yang sama dengan operasi di $\mathbb{Z}$ yaitu penjumlahan.

Untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan bagian dari grup G membentuk subgrup dapat digunakan Lemma berikut.

Lemma 2.3 *Himpunan bagian tidak kosong H dari grup G adalah subgrup di G jika dan hanya jika H tertutup terhadap operasi di G dan tiap anggota H memiliki invers di H.* (Herstein, 1996)

Dari cara pembentukkan subgrup, dikenal suatu subgrup yang disebut **subgrup siklik**. Misal G grup dan $a \in G$, maka himpunan $\langle a \rangle = \{a^i, i \in \mathbb{Z}\}$ membentuk grup terhadap operasi di G dan disebut sebagai subgrup siklik. Elemen a disebut sebagai **generator** dari $\langle a \rangle$. Contoh subgrup siklik adalah himpunan bilangan genap dengan operasi penjumlahan. Himpunan ini merupakan subgrup siklik dari $\mathbb{Z}$ karena semua elemennya dapat ditulis sebagai $2^n = 2 + 2 + \cdots + 2$ sebanyak n kali. (Herstein, 1996)

Suatu grup G juga dapat dibangkitkan oleh lebih dari satu generator. Misalkan S adalah subhimpunan dari G. S disebut membangkitkan G atau S hipunan generator untuk G, jika setiap $x \in G$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x = x_1 x_2 \dots x_n$, dimana $x_i \in S$ atau $x_i^{-1} \in S$. Jika G dibangkitkan oleh S maka G dinotasikan $G = \langle S \rangle$. (Lang, 2002)

Berikut ini akan diberikan definisi dari suatu subgrup yang lebih khusus yaitu subgrup normal.

Definisi 2.4 *Suatu subgrup N dari grup G disebut* **subgrup normal** *jika untuk setiap $g \in G$, maka $gNg^{-1} \subset N$.* (Herstein, 1996)

Misalkan N adalah himpunan bilangan genap. N merupakan subgrup normal di $\mathbb{Z}$ karena untuk setiap bilangan genap x dan bilangan bulat y selalu berlaku $yxy^{-1} = y + x + (-y) = x$. Karena x adalah anggota N, maka N subgrup normal di $\mathbb{Z}$.

2.1.2 Grup simetri

Permutasi dari suatu himpunan X adalah suatu pemetaan bijektif dari X ke dirinya sendiri. Definisi formal dari permutasi adalah sebagai berikut.

Definisi 2.5 Permutasi *dari himpunan X adalah pemetaan bijektif dari X ke dirinya sendiri.* (Rotman, 2002)

Pada skripsi ini hanya dikaji permutasi pada himpunan X yang hingga.

Jika $X = \{1, 2, \dots, n\}$, maka permutasi α pada X didefinisikan sebagai berikut

$$\alpha: X \to X$$

dengan $\alpha(1) = i_1, \alpha(2) = i_2, \dots, \alpha(n) = i_n$. Permutasi ini biasa ditulis sebagai

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Himpunan permutasi pada X yang dilengkapi dengan operasi komposisi membentuk suatu grup yang disebut grup permutasi. Pada skripsi ini, komposisi dilakukan dari kanan ke kiri. Sehingga $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Sebagai contoh, misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $\alpha: X \to X$, dimana $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 2$. Permutasi α pada X adalah

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \alpha(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Misalkan pula $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ adalah permutasi lain pada X.

Komposisi dari α dan β, yaitu $\beta\alpha$ dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.

$$\beta\alpha(1) = \beta(\alpha(1)) = \beta(1) = 2,$$
$$\beta\alpha(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta(3) = 4,$$
$$\beta\alpha(3) = \beta(\alpha(3)) = \beta(4) = 3,$$
$$\beta\alpha(4) = \beta(\alpha(4)) = \beta(2) = 1.$$

Sehingga,

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang serupa didapat juga bahwa

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dapat dilihat bahwa $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

Pada contoh di Subbab 2.1.1 telah dibahas mengenai grup $A(S)$ yaitu himpunan semua pemetaan bijektif dari S ke S. Jika $S = \{1, \dots, n\}$, maka $A(S)$ akan membentuk grup yang disebut **grup simetri** dan ditulis sebagai S_n. Berdasarkan definisi dari permutasi di atas maka masing-masing anggota dari S_n disebut sebagai permutasi. Masing-masing permutasi adalah pemetaan yang mengubah urutan dari himpunan $\{1, \dots, n\}$ sehingga banyak kemungkinan permutasi yang terjadi adalah $n!$.

Misalkan $S = \{1, 2, 3\}$, maka S_3 adalah himpunan semua permutasi dari S. Permutasi dari S adalah sebagai berikut.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Identitas pada S_3 adalah f_1 yaitu permutasi identitas atau id. Permutasi identitas dapat juga ditulis sebagai (1). Pada contoh S_3 di atas, jumlah anggotanya adalah $3! = 6$.

2.1.3 Homomorfisma grup

Jika diketahui dua buah grup $(G,*)$ dan $(G',\circ)$, maka dapat didefinisikan pemetaan f dari G ke G'. Jika $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ untuk setiap $a, b \in G$, maka pemetaan f tersebut disebut homomorfisma grup. Selanjutnya akan disebut homomorfisma saja. Berikut diberikan definisi formal dari homomorfisma.

Definisi 2.7 *Misalkan* $(G,*)$ *dan* $(H,\circ)$ *adalah grup, maka fungsi* $f: G \to H$ *disebut* **homorfisma** *jika* $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ *untuk setiap* a *dan* b *anggota* G. *Jika* f *adalah bijeksi maka* f *disebut* **isomorfisma**. *Grup* G *dan* H *disebut* **isomorfik**, *dinotasikan dengan* $G \cong H$, *jika terdapat isomorfisma dari* G *ke* H. (Rotman, 2002)

Jika f adalah homomorfisma satu-satu, maka f disebut **monomorfisma**. (Herstein, 1996) Relasi isomorfik membentuk relasi ekivalen, sehingga jika G isomorfik dengan G' maka G' isomorfik dengan G juga.

Contoh dari homomorfisma, misalkan $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ dengan $\varphi(a) = [a]$. Pemetaan ini merupakan homomorfisma, karena $\varphi(a + b) = [a + b] = [a] + [b] = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Contoh isomorfisma adalah sebagai berikut. Misalkan a adalah anggota dari suatu grup G dimana $a^2 = e$, tapi $a \neq e$. Sehingga didapatkan subgrup siklik yang dibangkitkan oleh a yaitu $\langle a \rangle = \{e, a\}$. Misalkan $\varphi: \langle a \rangle \to \mathbb{Z}_2$ dimana $\varphi(a^i) = [i]$. Dapat dilihat bahwa $\varphi(a^i a^j) = \varphi(a^{i+j}) = [i + j] = [i] + [j] = \varphi(a^i)\varphi(a^j)$. Sehingga φ adalah homomorfisma. Lebih lanjut pemetaan φ adalah pemetaan1-1 karena jika $\varphi(a^i) = \varphi(a^j)$, maka $[i] = [j]$. Akibatnya $i = j + 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Sehingga

$$a^i = a^{j+2k} = a^j a^{2k} = a^j (a^2)^k = a^j e = a^j.$$

Pemetaan φ juga pemetaan pada, karena untuk setiap $[i] \in \mathbb{Z}_2$, bisa didapatkan $a^i \in \langle a \rangle$ dimana $\varphi(a^i) = [i]$. Karena φ merupakan homorfisma yang bijektif, maka φ merupakan isomorfisma. Oleh karena itu $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

Beberapa sifat yang dimiliki oleh homomorfisma grup adalah sebagai berikut.

Lemma 2.8 *Jika φ adalah homomorfisma dari G ke G', maka*

1. $\varphi(e) = e'$*, identitas di G'*
2. $\varphi\,(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

(Herstein, 1996)

2.1.4 Faktorisasi grup

Dari grup yang sudah ada, dapat dibentuk grup baru. Salah satu cara pembentukannya akan dijelaskan sebagai berikut. Dari dua buah grup N dan H, dapat dibentuk grup yang baru yaitu grup G. Pembentukan ini dapat dilakukan dengan menggunakan *Cartesian product,* yaitu

$$G = N \times H = \{(n,h), n \in N, h \in H\}$$

dengan perkaliannya didefinisikan sebagai perkalian antar komponen yaitu

$$(n_1,h_1)(n_2,h_2) = (n_1n_2,h_1h_2).$$

Selain cara pembentukan di atas, suatu grup G dapat juga difaktorkan menjadi perkalian dua buah subgrup N dan H dari G. Grup G seperti ini disebut sebagai *product* dari dua buah subgrup N dan H atau

$$G = NH = \{\, nh \mid n \in N, h \in H\}.$$

Product yang dikenal adalah *semidirect product* dan *direct product*. Di bawah ini akan diberikan definisi dari *semidirect product.*

Definisi 2.9 Misalkan *G grup, H subgrup di G, dan N subgrup normal di G. G disebut* **semidirect product** *dari H dan N jika $G = NH$ dan $N \cap H = \{e\}$.* (Algebra; Lang, hal 76)

Semidirect product G dari N dan H biasa dinotasikan dengan $N \ltimes H$. Jika H juga subgrup normal di G, maka G disebut ***direct product*** dari N dan H. *Direct product* dinotasikan dengan $N \times H$.

Seperti disebutkan di atas, salah satu cara pembentukan grup dari dua buah grup adalah dengan menggunakan *Cartesian product*. Lemma di bawah ini menyatakan bahwa jika $A \cong C$ dan $B \cong D$, maka $A \times B \cong C \times D$.

Lemma 2.10 *Jika A isomorfik dengan C, dan B isomorfik dengan D, maka $A \times B$ isomorfik dengan $C \times D$*

Bukti. Diketahui $A \cong C$, maka ada isomorfisma f dari A ke C. Karena $B \cong D$, maka ada isomorfisma g dari B ke D. Misalkan $h: A \times B \to C \times D$ dimana $h\big((a,b)\big) = \big(f(a), g(b)\big)$ dengan $(a,b) \in A \times B$. Akan dibuktikan bahwa pemetaan ini merupakan isomorfisma.

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa h adalah fungsi. Misalkan $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in A \times B$ dimana $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$. Karena itu $a_1 = a_2$ dan

$b_1 = b_2$. Berdasarkan definisi pemetaan h diperoleh $h\big((a_1, b_1)\big) = (f(a_1), g(b_1))$ dan $h\big((a_2, b_2)\big) = (f(a_2), g(b_2))$. Karena $a_1 = a_2$ dan f fungsi, maka $f(a_1) = f(a_2)$. Dengan cara yang serupa didapat juga bahwa $g(b_1) = g(b_2)$. Oleh karena itu $h\big((a_1, b_1)\big) = \big(f(a_1), g(b_1)\big) = \big(f(a_2), g(b_2)\big) = h((a_2, b_2))$. Sehingga terbukti bahwa pemetaan h merupakan fungsi.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa pemetaan h merupakan homomorfisma. Misalkan $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, maka $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$. Jadi

$$\begin{aligned} h((a_1, b_1)(a_2, b_2)) &= h\big((a_1 a_2, b_1 b_2)\big) \\ &= \big(f(a_1 a_2), g(b_1 b_2)\big) \\ &= \big(f(a_1) f(a_2), g(b_1) g(b_2)\big) \\ &= \big(f(a_1), g(b_1)\big)\big(f(a_2), g(b_2)\big) \\ &= h(a_1, b_1) h(a_2, b_2). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $h((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = h(a_1, b_1)h(a_2, b_2)$ untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$. Sehingga h adalah homomorfisma dari $A \times B$ ke $C \times D$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa h adalah fungsi 1-1. Misalkan $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ dimana $h((a_1, b_1)) = h((a_2, b_2))$. Karena $h\big((a_1, b_1)\big) = (f(a_1), g(b_1))$, $h\big((a_2, b_2)\big) = (f(a_2), g(b_2))$, dan $h((a_1, b_1)) = h((a_2, b_2))$, maka $f(a_1) = f(a_2)$ dan $g(b_1) = g(b_2)$. Karena f dan g adalah fungsi 1-1, maka $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$. Sehingga $(a_1, b_1), = (a_2, b_2)$. Karena jika $h((a_1, b_1)) = h((a_2, b_2))$, maka $(a_1, b_1), = (a_2, b_2)$, terbukti bahwa h adalah fungsi 1-1.

Berikutnya akan dibuktikan bahwa h adalah fungsi pada. Misalkan $(c, d) \in C \times D$. Akan dicari $(a, b) \in A \times B$ dimana $h\big((a, b)\big) = (c, d)$. Karena f dan g adalah fungsi pada, maka ada $a_1 \in A$ dan $b_1 \in B$ dimana $f(a_1) = c$ dan $g(b_1) = d$. Dengan memilih $(a, b) = (a_1, b_1)$, maka didapatkan bahwa $h\big((a, b)\big) = \big(f(a), g(b)\big) = (c, d)$. Terbukti bahwa h adalah fungsi pada.

Sehingga terbukti bahwa h merupakan isomorfisma dari $A \times B$ ke $C \times D$. Maka $A \times B \cong C \times D$. ■

Lemma berikutnya menyatakan bahwa jika $G = HK$ dimana H, K subgrup dari G dengan $H \cap K = \{e\}$ dan $xy = yx, x \in H, y \in K$, maka *Cartesian product* dari dua buah subgrup tersebut, $H \times K$, isomorfik dengan *product* dari dua buah grup, HK, yaitu $HK \cong H \times K$.

Lemma 2.11 *Misalkan G grup, H, K subgrup G dimana $H \cap K = \{e\}, HK = G$, dan $xy = yx$ untuk setiap $x \in H, y \in K$. Pemetaan $\varphi: H \times K \to G$ dengan $\varphi\big((x, y)\big) = xy$ adalah isomorfisma.* (Lang, 2002)

Bukti. Akan dibuktikan bahwa pemetaan $g: H \times K \to HK$ adalah pemetaan 1-1. Misalkan $(a, b), (c, d) \in H \times K$ dengan $\varphi((a, b)) = \varphi\big((c, d)\big)$. Karena $\varphi((a, b)) = \varphi\big((c, d)\big)$ maka $ab = cd$. Dengan mengalikan kedua ruas ini dengan c^{-1} dari kiri dan b^{-1} dari kanan, maka diperoleh $c^{-1}abb^{-1} = c^{-1}cdb^{-1}$. Akibatnya $c^{-1}a = db^{-1}$.

Karena c dan a adalah elemen di H, maka $c^{-1}a$ elemen H juga. Begitu juga dengan db^{-1} adalah elemen K. Karena $c^{-1}a = db^{-1}$ dan $db^{-1} \in K$, maka $c^{-1}a \in K$ juga. Tapi, karena $H \cap K = \{e\}$, maka $c^{-1}a = e$ dan $db^{-1} = c^{-1}a = e$. Sehingga dari $c^{-1}a = e$ didapat bahwa $a = c$ dan dari $db^{-1} = e$ didapat bahwa $b = d$. Karena itu $(a, b) = (c, d)$. Terbukti bahwa φ adalah pemetaan 1-1.

Berikutnya akan dibuktikan bahwa φ adalah pemetaan pada. Misalkan $x \in G$. Karena $G = HK$ maka terdapat $h \in H$ dan $k \in K$ sehingga $x = hk$. Akan dicari $(a, b) \in H \times K$ sehingga $\varphi\big((a, b)\big) = x$. Pilih $a = h$ dan $b = k$, maka $(a, b) = (h, k) \in H \times K$ dan $\varphi\big((a, b)\big) = \varphi\big((h, k)\big) = hk = x$. Terbukti bahwa φ adalah pemetaan pada.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa φ adalah homomorfisma. Diketahui bahwa $xy = yx$ untuk setiap $x \in H, y \in K$. Misalkan $(a, b), (c, d) \in H \times K$, maka $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$. Berdasarkan definisi pemetaan φ, maka $\varphi\big((a, c)(b, d)\big) = \varphi\big((ac, bd)\big) = acbd$ dengan $a, c \in H$ dan $b, d \in K$. Karena $xy = yx$, untuk setiap $x \in H, y \in K$, maka $cb = bc$. Sehingga

$$\varphi\big((a, c)(b, d)\big) = \varphi\big((ac, bd)\big) = acbd = abcd = \varphi((a, b))\varphi((c, d))$$

Terbukti bahwa φ adalah homomorfisma. Karena sudah diketahui bahwa φ adalah pemetaan bijektif dari $H \times K$ ke G, maka φ adalah isomorfisma dari $H \times K$ ke G atau $H \times K \cong G$.■

2.2 Grup Dihedral

Pada subbab ini dibahas mengenai grup yang dibangun dari simetri suatu benda dan grup dihedral.

Seperti pada pembahasan di Subbab 2.1.2 mengenai grup $A(S)$, jika $S = \{1, 2, \dots, n\}$, maka $A(S)$ dapat dinyatakan sebagai S_n dengan anggotanya adalah permutasi dari S. Operasi pada S_n adalah komposisi dan bersifat tidak komutatif.

Salah satu permutasi di S_n adalah

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

dan

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Lemma di bawah ini akan menyatakan sifat dari a dan b.

Lemma 2.12 *Misalkan* $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ *dan* $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$, *maka* $a^n = b^2 = (1)$ *dan* $a^{-1}b = ba$. (Hungerford, 1974)

Dari *a* dan b ini, dapat dibentuk suatu grup yang disebut grup dihedral. Berikut definisi dari grup dihedral.

Definisi 2.13 Misalkan $D_n = \{a^i b^j : i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1\}$ atau $D_n = \langle a, b \rangle$. D_n *disebut sebagai* **grup dihedral** *derajat n.* (Hungerford, 1974)

Grup dihedral D_n isomorfik dengan suatu grup yang dibentuk oleh dua elemen yang memiliki sifat yang sama dengan a dan b seperti pada Lemma 2.12.

Lemma 2.14 *Misalkan* $G = \langle a_1, b_1 \rangle$ *dimana* $a_1^n = b_1^2 = e$ *dan* $a_1^{-1} b_1 = b_1 a_1$, *maka* G *isomorfik dengan* D_n. (Hungerford, 1974)

Bukti. Definisikan pemetaan $\varphi: G \to D_n$, dimana $\varphi\left(a_1^i b_1^j\right) = a^i b^j$. Pertama-tama akan dibuktikan bahwa pemetaan ini adalah suatu fungsi. Ambil $x, y \epsilon G$. Karena G dibangkitkan oleh a_1 dan b_1, maka ada bilangan bulat i, j, m, n sehingga $x = a_1^i b_1^j$ dan $y = a_1^m b_1^n$. Misalkan $x = y$, maka $i = m$ dan $j = n$. Sehingga $\varphi(x) = \varphi\left(a_1^i b_1^j\right) = a^i b^j = a^m b^n = \varphi(a_1^m b_1^n) = \varphi(y)$. Karena untuk $x = y$ didapatkan $\varphi(x) = \varphi(y)$, maka φ adalah fungsi.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa pemetaan ini adalah homomorfisma. Misalkan $x, y \epsilon G$. Ada bilangan bulat i, j, m, n sehingga $x = a_1^i b_1^j$ dan $y = a_1^m b_1^n$. Karena $b_1^2 = e$, maka nilai j yang mungkin adalah 0 atau 1.

$\varphi(x) = \varphi\left(a_1^i b_1^j\right) = a^i b^j$ dan $\varphi(y) = \varphi(a_1^m b_1^n) = a^m b^n$. Akan dibuktikan bahwa $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Ada 2 kasus untuk nilai *j* yaitu 0 atau 1.

<u>Kasus 1 (*j* = 0)</u>

Jika $j = 0$, maka $xy = a_1^i a_1^m b_1^n = a_1^{i+m} b_1^j$. Maka

$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= \varphi\left(a_1^{i+m} b_1^n\right) \\
&= a^{i+m} b^n \\
&= a^i a^m b^n \\
&= \varphi\left(a_1^i\right)\varphi(a_1^m b_1^n) \\
&= \varphi(x)\varphi(y)
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa untuk $j = 0$, φ merupakan homomorfisma.

<u>Kasus 2 (*j* = 1)</u>

Jika $j = 1$, maka $xy = a_1^i b_1 a_1^m b_1^n = a_1^i a_1^{-m} b_1^1 b_1^n = a_1^{i-m} b_1^{n+1}$ berdasarkan sifat yang dimiliki oleh a_1 dan b_1. Maka

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= \varphi\left(a_1^{i-m}b_1^{n+1}\right)\\ &= a^{i-m}b^{n+1}\\ &= a^i a^{-m} b b^n\\ &= a^i b a^m b^n\\ &= \varphi\left(a_1^i b\right)\varphi(a_1^m b_1^n)\\ &= \varphi(x)\varphi(y).\end{aligned}$$

Terbukti bahwa untuk $j = 1$, φ juga merupakan homomorfisma.
Karena untuk kedua kasus nilai j terbukti bahwa φ homomorfisma dari G ke D_n.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa φ adalah fungsi 1-1. Misalkan $\varphi(x) = \varphi(y)$ untuk sembarang x dan y anggota G, akan ditunjukkan bahwa $x = y$. Karena G dibangkitkan oleh a_1 dan b_1, maka ada bilangan bulat i, j, m, n sehingga $x = a_1^i b_1^j \; dan \; y = a_1^m b_1^n$. Maka $\varphi(x) = \varphi\left(a_1^i b_1^j\right) = a^i b^j$ dan $\varphi(y) = \varphi(a_1^m b_1^n) = a^m b^n$. Karena $\varphi(x) = \varphi(y)$, maka $a^i b^j = a^m b^n$. Dari persamaan ini, dapat disimpulkan bahwa $i = m, j = n$. Karena itu $x = a_1^i b_1^j = a_1^m b_1^n = y$. Terbukti bahwa φ adalah pemetaan 1-1.

Akan ditunjukkan bahwa φ adalah fungsi bersifat pada. Misalkan $y \in D_n$. Karena D_n dibangkitkan oleh a dan b, maka ada bilangan bulat i dan j sehingga $y = a^i b^j$. Akan dicari $x \in G$, sehingga $\varphi(x) = y$. Misal $x = a_1^i b_1^j$, maka $\varphi(x) = \varphi(a_1^i b_1^j) = a^i b^j = y$. Karena x dibangun oleh a_1 dan b_1, maka x anggota G. Karena untuk sebarang y anggota D_n dapat dicari x anggota G sehingga $\varphi(x) = y$, maka φ adalah fungsi pada.

Karena terbukti bahwa φ adalah homomorfisma yang bijektif, maka φ adalah isomorfisma dari G ke D_n. Sehingga terbukti bahwa G isomorfik dengan D_n. ■

Selanjutnya akan dilihat bahwa grup dihedral D_n isomorfik dengan grup dari simetri pada poligon P_n. Suatu pemetaan disebut simetri jika pemetaan tersebut mempertahankan jarak verteks dan sifat kebertetanggan antar verteks. Pada poligon P_n, verteks adalah titik sudut. Verteks u dan v pada P_n dikatakan bertetangga jika ada sisi yang kedua titik ujungnya adalah verteks u dan v.

Definisi 2.15 *Misalkan P_n adalah poligon beraturan sisi-n.* **Simetri** *pada P_n adalah bijeksi $P_n \rightarrow P_n$ yang mempertahankan jarak antar verteks dan memetakan verteks yang bertetangga pada verteks yang bertetangga juga.* (Hungerford, 1974)

Salah satu simetri dari persegi adalah rotasi sejauh 90^o searah jarum jam. Rotasi ini akan mempertahankan jarak antar verteks pada segiempat dan juga sifat kebertetanggan dari verteks-verteks tersebut.

Semua simetri pada P_n membentuk suatu himpunan yang dinyatakan oleh D_n^*. Apabila pada himpunan ini didefinisikan operasi komposisi maka akan membentuk grup seperti dinyatakan pada Lemma 2.17.

Definisi 2.16 *D_n^* adalah himpunan semua simetri dari P_n.* (Hungerford, 2002)

Lemma 2.17 *D_n^* dengan operasi komposisi adalah grup.* (Hungerford, 2002)

Bukti. Untuk membuktikan bahwa D_n^* adalah grup, maka perlu dibuktikan bahwa D_n^* bukan himpunan kosong, memenuhi sifat tertutup terhadap operasi komposisi, operasinya memenuhi sifat asosiatif, memiliki identitas, dan setiap anggotanya memiliki invers di dalam D_n^*.

Pemetaan identitas, id, adalah pemetaan bijektif dan merupakan simetri untuk P_n. Karena itu $id \in D_n^*$. Terbukti bahwa D_n^* tidak kosong.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa D_n^* tertutup. Misalkan $f, g \in D_n^*$, akan ditunjukkan bahwa $fg \in D_n^*$. Karena f dan g adalah pemetaan bijektif, maka fg juga pemetaan bijektif. Selanjutnya, misalkan $d(x, y)$ menyatakan jarak antara verteks x dan y. Karena f dan g mempertahankan jarak antar verteks maka

$$d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y) = d\big(g(x), g(y)\big)$$

Maka

$$d\big(fg(x), fg(y)\big) = d\Big(f\big(g(x)\big), f\big(g(y)\big)\Big) = d\big(g(x), g(y)\big) = d(x, y)$$

untuk x, y sembarang verteks di P_n. Terbukti bahwa fg mempertahankan jarak antar verteks.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa fg mempertahankan sifat kebertetanggan verteks pada P_n. Telah diketahui bahwa f dan g mempertahankan sifat kebertetanggan verteks. Misalkan x bertetangga dengan y, maka $f(x)$ akan bertetangga dengan $f(y)$. Begitu juga dengan $g(x)$ dan $g(y)$. Karena $g(x)$ bertetangga dengan $g(y)$, maka $f(g(x))$ juga akan bertetangga dengan $f(g(y))$. Karena $f\big(g(x)\big) = fg(x)$, maka didapatkan bahwa jika x bertetangga dengan y, maka $fg(x)$ juga bertetangga dengan $fg(y)$. Sehingga fg mempertahankan sifat kebertetanggan verteks.

Karena fg merupakan pemetaan bijektif yang mempertahankan jarak antar verteks, dan mempertahankan sifat kebertetanggan verteks, maka fg juga simetri pada P_n atau $fg \in D_n^*$. Karena untuk sembarang f dan g anggota D_n^* didapat $fg \in D_n^*$, maka terbukti D_n^* tertutup terhadap operasi komposisi.

Pemetaan identitas, id, adalah identitas terhadap operasi komposisi. id juga merupakan anggota D_n^*. Sehingga terbukti bahwa D_n^* mempunyai identitas yaitu id.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap anggota D_n^* memiliki invers di D_n^*. Ambil $f \in D_n^*$. Karena f bijektif, maka sudah dijamin bahwa ada f^{-1} yang bijektif sedemikian sehingga $ff^{-1} = f^{-1}f = id$. Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $f^{-1} \in D_n^*$. Misal x dan y adalah verteks pada P_n. Karena f adalah fungsi pada, maka ada verteks u dan v di P_n sehingga $f(u) = x$ dan $f(v) = y$. Sehingga didapat $f^{-1}(x) = u$ dan $f^{-1}(y) = v$. Karena f mempertahankan jarak, maka

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(u, v) = d\big(f(u), f(v)\big) = d(x, y)$$

Karena x dan y adalah sembarang verteks pada P_n, maka f^{-1} merupakan pemetaan yang mempertahankan jarak. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f^{-1} juga mempertahankan sifat kebertetanggaan.

Misal x dan y adalah verteks P_n yang bertetangga. Karena f adalah fungsi pada, maka ada verteks u dan v di P_n sehingga $f(u) = x$ dan $f(v) = y$. Karena f adalah pemetaan yang mempertahankan sifat kebertetanggan verteks, maka u bertetangga juga dengan v. Karena $u = f^{-1}(x)$ dan $v = f^{-1}(y)$, maka didapatkan jika x dan y adalah verteks P_n yang bertetangga, maka $f^{-1}(x)$

bertetangga juga dengan $f^{-1}(y)$. Jadi f^{-1} mempertahankan sifat kebertetanggan verteks.

Karena f^{-1} pemetaan bijektif yang mempertahankan jarak antar verteks dan juga sifat kebertetanggaan verteks, maka $f^{-1} \in D_n^*$. Sehingga terbukti bahwa untuk sembarang $f \in D_n^*$, terdapat $f^{-1} \in D_n^*$ sehingga $ff^{-1} = f^{-1}f = id$.

Operasi komposisi adalah operasi yang memenuhi sifat asosiatif. Karena terbukti D_n^* memenuhi kriteria grup, maka D_n^* adalah grup terhadap operasi komposisi. ■

Lemma berikut memberikan hubungan antara D_n^* dengan S_n.

Lemma 2.18 *Untuk setiap f anggota D_n^* terdapat $\sigma_f \in S_n$ yang tunggal dan pemetaan $f \longmapsto \sigma_f$ mendefinisikan monomorfisma $\varphi: D_n^* \to S_n$.* (Hungerford, 1974)

Bukti. Misalkan f anggota D_n^*. f adalah fungsi bijektif yang memetakan himpunan verteks P_n ke dirinya sendiri. Karena himpunan verteks pada P_n adalah himpunan hingga yaitu hanya terdiri dari n verteks, maka himpunan verteks tersebut dapat dinyatakan sebagai $\{1, 2, \dots, n\}$. Karena itu f dapat dinyatakan sebagai permutasi σ_f , yang merupakan anggota S_n dan $f = \sigma_f$.

Misalkan σ_f' adalah permutasi yang lain bagi f. Karena $\sigma_f'(i) = f(i) = \sigma_f(i)$, untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ maka $\sigma_f' = \sigma_f$. Dengan kata lain σ_f tunggal.

Relasi $\varphi: D_n^* \to S_n$ dimana $\varphi(f) = \sigma_f$ merupakan suatu fungsi. Ini karena untuk masing-masing f, diperoleh σ_f yang tunggal.

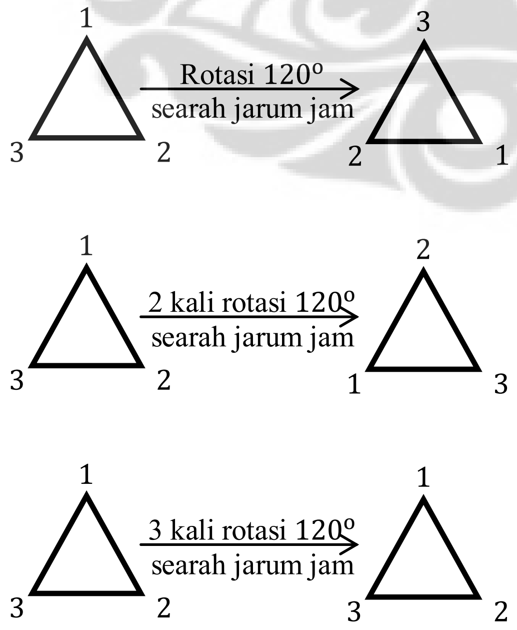
Akan dibuktikan bahwa pemetaan $\varphi: D_n^* \to S_n$ dimana $\varphi(f) = \sigma_f$ adalah homomorfisma. Ambil $f, g \in D_n^*$, maka $fg \in D_n^*$ dan $\varphi(fg) = \sigma_{fg}$. Karena $fg(i) = f(g(i))$, maka $\sigma_{fg}(i) = \sigma_f\left(\sigma_g(i)\right)$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Karena itu $\varphi(fg) = \sigma_{fg} = \sigma_f\sigma_g = \varphi(f)\varphi(g)$. Terbukti bahwa φ adalah suatu homomorfisma.

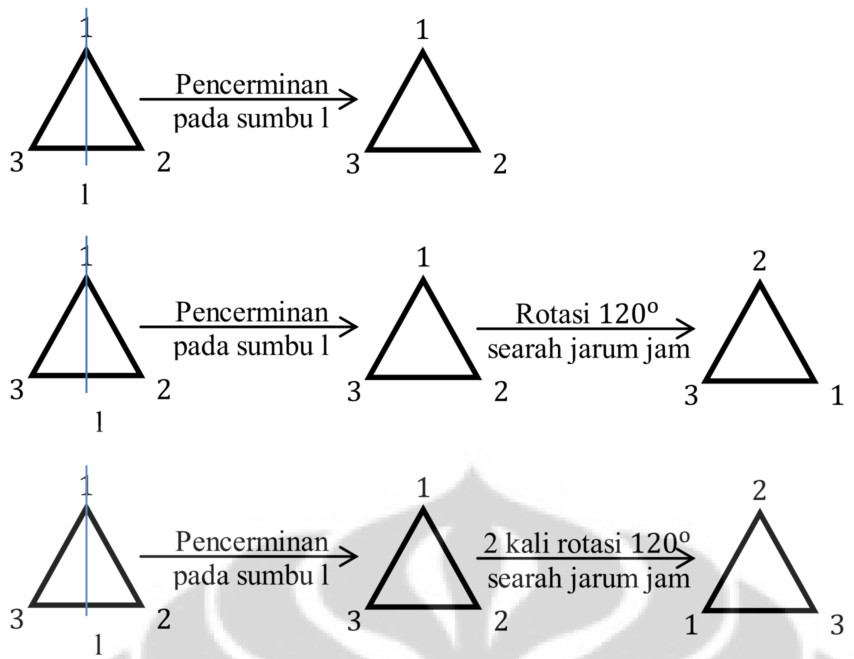
Berikutnya akan ditunjukkan bahwa φ merupakan monomorfisma. Ambil $f, g \in D_n^*$, dimana $\varphi(f) = \varphi(g)$. Maka didapat bahwa $\sigma_f = \sigma_g$. Karena $\sigma_f = \sigma_g$, maka $f(i) = \sigma_f(i) = \sigma_g(i) = g(i)$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sehingga didapat $f = g$. Terbukti bahwa φ adalah monomorfisma.■

Dari Lemma 2.18 di atas terlihat bahwa semua anggota D_n^* dapat dinyatakan sebagai permutasi yang merupakan anggota di S_n. Lemma 2.19 berikut menyatakan bahwa semua simetri dari suatu poligon P_n hanya dapat diperoleh dengan melakukan refleksi dengan sumbu simetri adalah garis yang melalui verteks 1 dan titik pusat poligon P_n, rotasi sejauh $2\pi/n$ searah jarum jam, atau komposisi dari keduanya.

Lemma 2.19 *D_n^* dibangkitkan oleh f dan g, dimana f adalah rotasi dengan derajat $2\pi/n$ searah jarum jam dan g adalah refleksi pada sumbu yang melalui verteks* 1 *dan pusat P_n.* (Hungerford, 1974)

Berikut ini diberikan ilustrasi Lemma 2.19 untuk simetri-simetri pada segitiga sama sisi atau P_3. Dalam hal ini f adalah rotasi sejauh $2\pi/3 = 120^{\circ}$ dan g adalah refleksi dengan sumbu refleksi adalah garis l yang melalui verteks 1 dan pusat segitiga sama sisi.





Rotasi dan refleksi yang disebutkan di Lemma 2.19 dapat dinyatakan sebagai permutasi a dan b seperti pada persamaan (2.1) dan (2.2), yaitu $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & n & \dots & 2 \end{pmatrix}$. Sehingga $\sigma_f = a$ dan $\sigma_g = b$. Karena D_n^* dibangkitkan oleh rotasi dan refleksi yang memiliki sifat yang sama dengan a dan b pada D_n, maka menurut Lemma 2.14 D_n^* isomorfik dengan D_n.

Teorema 2.20 $\sigma_f = a$ dan $\sigma_g = b$, $Im\ \varphi = D_n$, dan $D_n^* \cong D_n$. (Algebra; Hungerford, hal 52)

Bukti. Setiap anggota D_n^*, menurut Lemma 2.18, dapat dinyatakan sebagai permutasi. Rotasi yang disebut pada Lemma 2.19, yaitu f, jika dinyatakan sebagai permutasi diperoleh bahwa $\sigma_f = a$. Refleksi yang disebut pada Lemma 2.20, yaitu g, jika dinyatakan sebagai suatu permutasi diperoleh $\sigma_g = b$. Karena D_n^* dibangkitkan oleh f dan g, dan juga karena representasi f dan g sebagai permutasi adalah a dan b, maka $Im\ \varphi$ dibangkitkan oleh a dan b. Dengan kata lain $Im\ \varphi = D_n$. Karena $Im\ \varphi = D_n$, maka pemetaan $\varphi: D_n^* \to D_n$ adalah pemetaan yang pada. Berdasarkan Lemma 2.18, pemetaan ini juga monomorfisma. Sehingga pemetaan ini merupakan isomorfisma dari D_n^* ke D_n. ∎

BAB 3
GRUP DARI SIMETRI PADA *POLYHEX CARBON NANOTORUS ARMCHAIR* DAN *ZIG-ZAG*

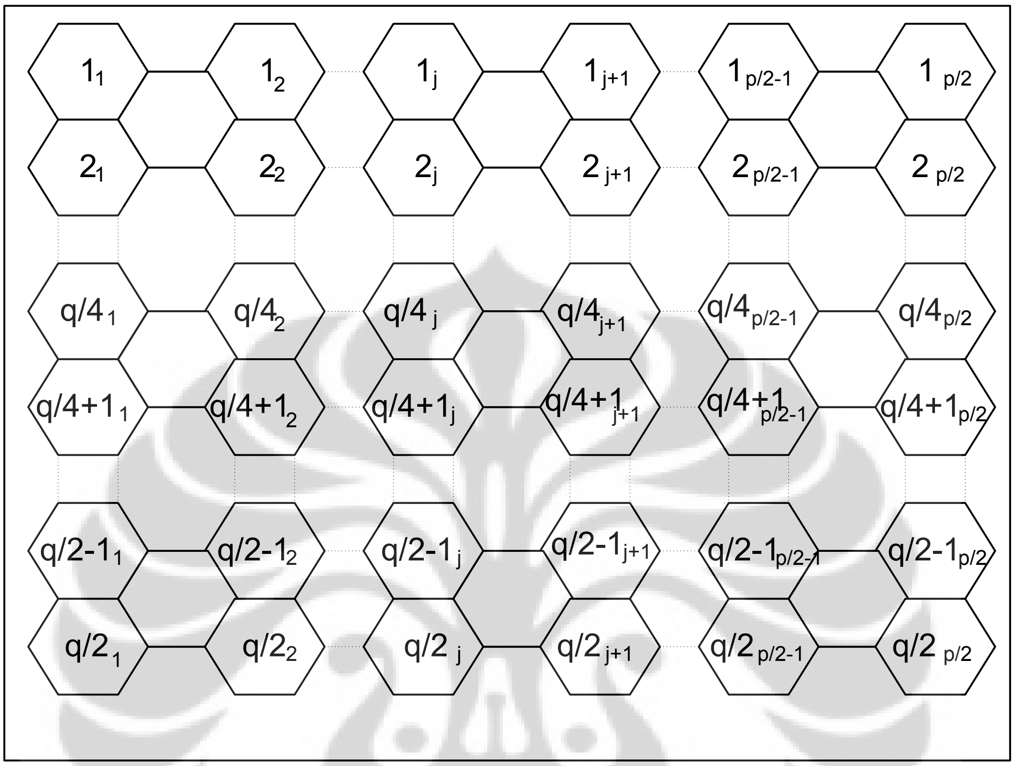
Pada bab ini dibahas mengenai grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* dan *zig-zag*. Pada Subbab 3.1 dibahas mengenai konstruksi dari simetri pada *nanotorus armchair* dan *zig-zag*, yaitu rotasi dan refleksi. Pada Subbab 3.2 dibahas mengenai grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* dan *zig-zag*.

3.1 Simetri-simetri dari *Polyhex Carbon Nanotorus Armchair* dan *Zig-zag*

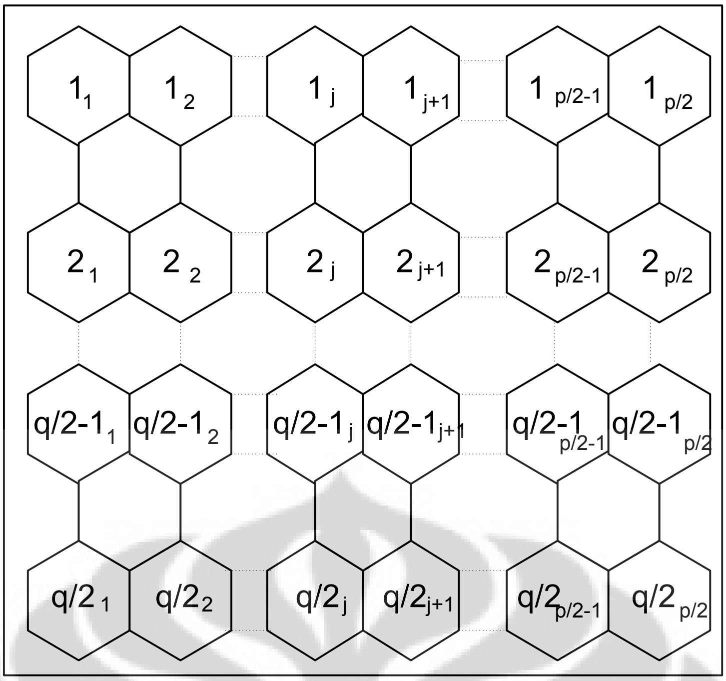
Suatu *nanotorus armchair* atau *zig-zag* dapat dikembalikan menjadi *nanotube armchair* atau *zig-zag. Nanotube* tersebut juga dapat dikembalikan menjadi lembaran grafit. Misalkan p adalah banyak kolom pada lembaran dan q adalah banyak baris pada lembaran, maka p dan q haruslah bilangan genap. Ini dikarenakan jika salah satu ganjil maka, saat lembaran digulung, ada verteks yang berimpitan verteks lain.

Berdasarkan Definisi 2.15, simetri adalah pemetaan bijektif yang mempertahankan jarak antar verteks dan memetakan verteks yang bertetangga pada verteks yang bertetangga juga. Pada *nanotorus*, verteks yang dimaksud adalah atom karbon pada *nanotorus*. Himpunan simetri-simetri dari *nanotorus armchair* atau *zig-zag* akan membentuk grup V dengan operasi komposisi. Misalkan f adalah simetri pada *nanotorus*. Jika *nanotorus* tersebut dikembalikan menjadi lembaran, maka f akan memetakan verteks-verteks pada lembaran *nanotorus* ke verteks pada lembaran tersebut juga. Karena setiap simetri adalah pemetaan bijektif antar verteks, maka simetri bisa dinyatakan sebagai permutasi antar verteks. Sehingga f dapat dinyatakan sebagai permutasi antar verteks pada lembaran *nanotorus*. Namun, karena f juga harus mengawetkan jarak antar verteks dan juga sifat kebertetanggaan pada verteks di *nanotorus*, maka f dapat dipandang sebagai permutasi antar heksagon pada lembaran *nanotorus*. Misalkan i_j menyatakan heksagon pada baris ke-i dan kolom ke-j dengan $i = 1, 2, \dots, q/2$

dan $j = 1, 2, \dots, p/2$. Penomoran pada lembaran *nanotorus* dapat dilihat pada Gambar 3.1 untuk *nanotorus zig-zag* dan Gambar 3.2 untuk *nanotorus armchair* dengan $q/2$ genap.



Gambar 3.1 Penomoran pada lembaran *nanotorus zig-zag*

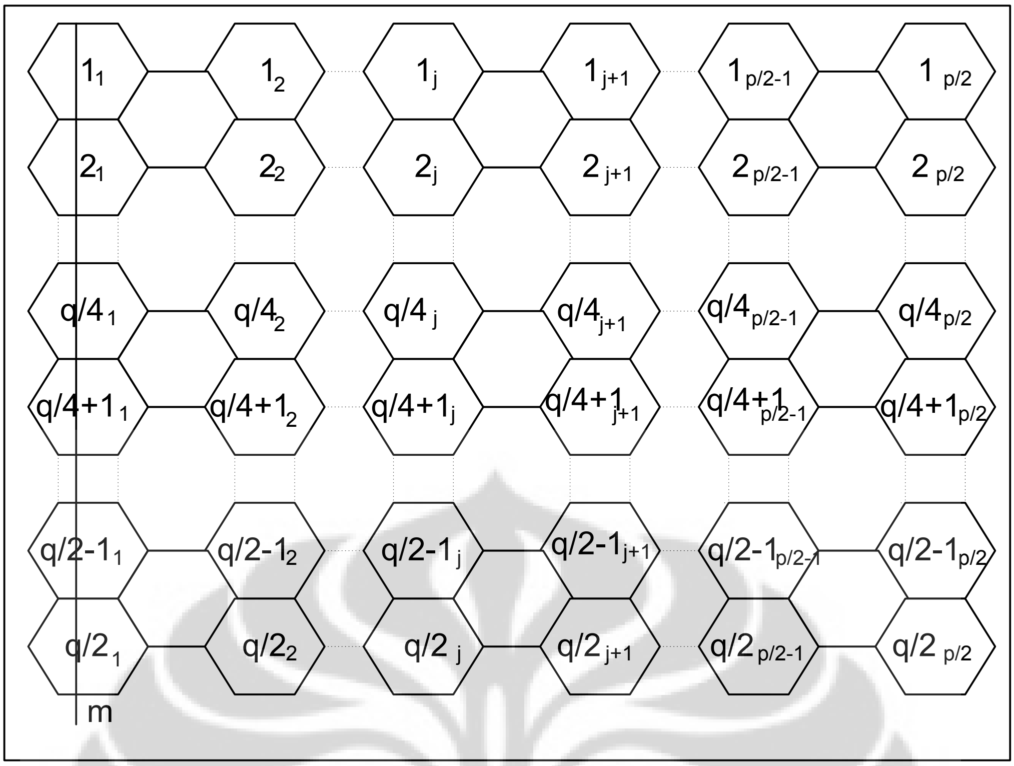


Gambar 3.2 Penomoran pada lembaran *nanotorus armchair*

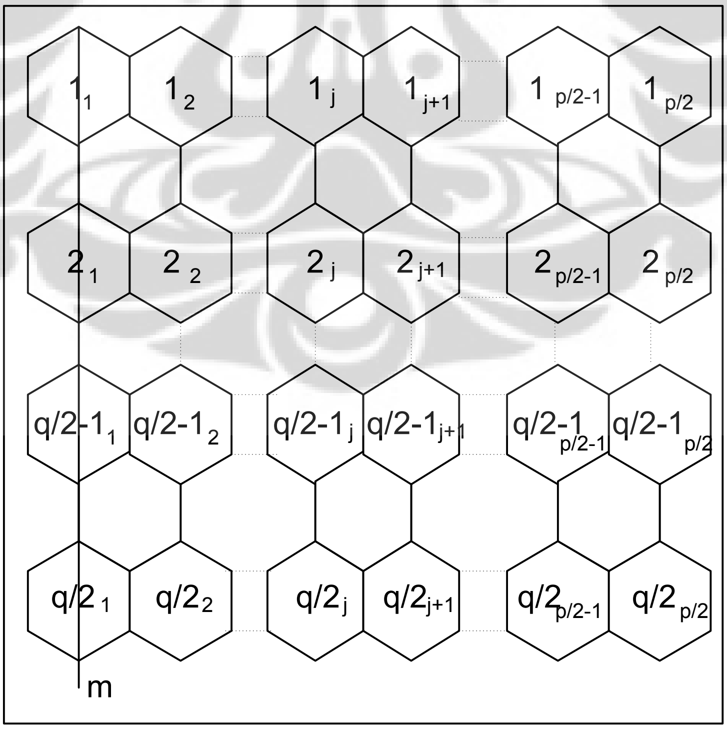
Salah satu simetri pada *nanotorus zig-zag* atau *armchair* dapat diperoleh dengan cara melakukan rotasi sejauh $2\pi/(p/2)$ searah jarum jam pada *nanotorus*. Dengan cara seperti ini, maka pada baris pertama, heksagon 1_1 akan berpindah ke heksagon 1_2, heksagon 1_2 akan berpindah ke heksagon 1_3, dan seterusnya hingga heksagon $1_{p/2}$ berpindah ke heksagon 1_1. Sedangkan pada baris kedua, heksagon 2_1 akan berpindah ke heksagon 2_2, heksagon 2_2 akan berpindah ke heksagon 2_3, dan seterusnya hingga heksagon $2_{p/2}$ berpindah ke heksagon 2_1. Pada baris ke-i, heksagon i_1 akan berpindah ke heksagon i_2, heksagon i_2 akan berpindah ke heksagon i_3, dan seterusnya hingga heksagon $i_{p/2}$ berpindah ke heksagon i_1. Dapat dilihat bahwa heksagon pada masing-masing baris di lembaran akan berpindah ke heksagon di sebelah kanannya. Jika rotasi ini dinyatakan sebagai permutasi, misalkan sebagai a, maka

$$a = \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{p/2} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Selanjutnya perhatikan Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 di bawah ini untuk refleksi lembar grafit pada sumbu horizontal m.



Gambar 3.3 Lembaran *nanotorus zig-zag* dengan sumbu refleksi *m*

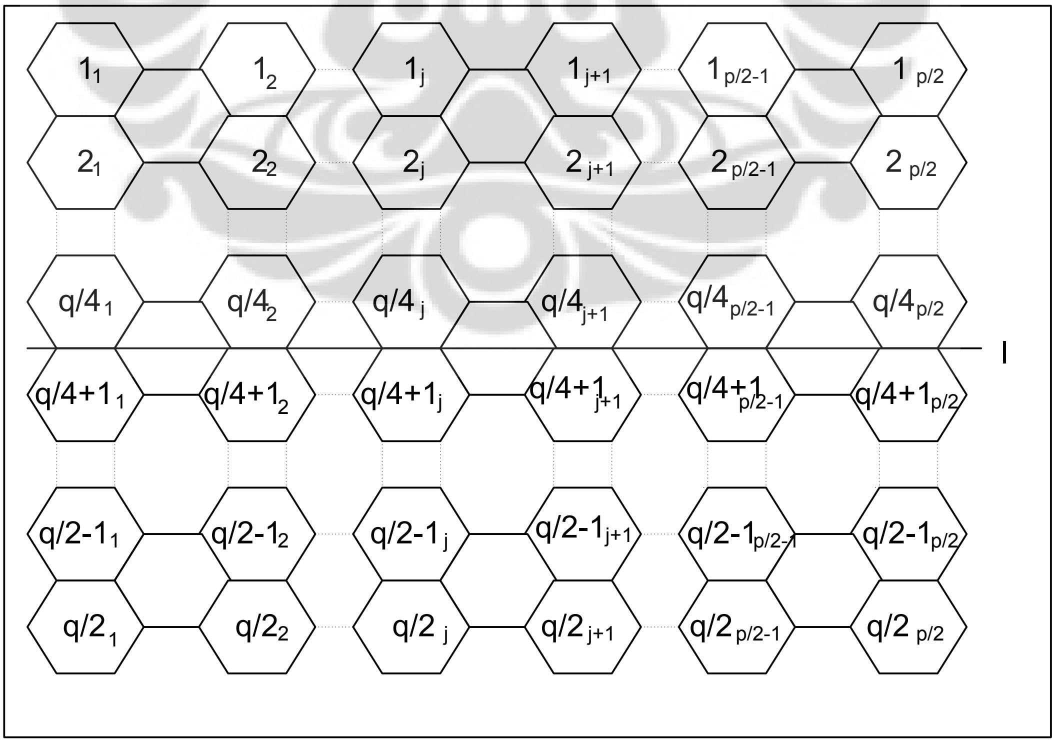


Gambar 3.4 Lembaran *nanotorus armchair* dengan sumbu refleksi *m*

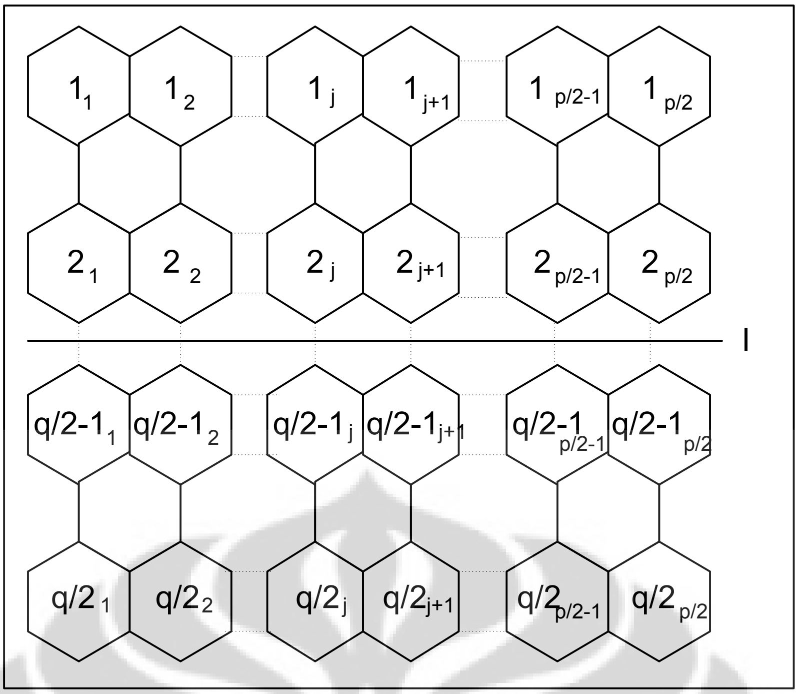
Apabila dilakukan refleksi pada lembaran *nanotorus* dengan sumbu refleksi adalah garis *m*, yaitu garis vertikal yang melalui kolom 1, seperti pada Gambar 3.3 dan 3.4 di atas, maka dapat diperoleh simetri pada *nanotorus*. Setelah dilakukan refleksi tersebut, maka pada baris pertama, heksagon 1_1 tidak akan berpindah tempat, heksagon 1_2 bertukar tempat dengan $1_{p/2}$, heksagon 1_3 bertukar tempat dengan heksagon $1_{p/2-1}$, dan seterusnya. Pada baris kedua, heksagon 2_1 tidak akan berpindah tempat, heksagon 2_2 bertukar tempat dengan $2_{p/2}$, heksagon 2_3 bertukar tempat dengan heksagon $2_{p/2-1}$, dan seterusnya. Pada baris ke-i, heksagon i_1 tidak akan berpindah tempat, heksagon i_2 bertukar tempat dengan $i_{p/2}$, heksagon i_3 bertukar tempat dengan heksagon $i_{p/2-1}$, dan seterusnya. Jika refleksi terhadap garis *m* ini dinyatakan sebagai permutasi, misalkan b, maka

$$b = \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{p/2} \\ i_1 & i_{p/2} & i_{p/2-1} & \cdots & i_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Selanjutnya perhatikan Gambar 3.5 dan 3.6 di bawah ini untuk refleksi pada lembar grafit terhadap sumbu horizontal *l*.



Gambar 3.5 Lembaran *nanotorus zig-zag* dengan sumbu refleksi *l*



Gambar 3.6 Lembaran *nanotorus armchair* dengan sumbu refleksi *l*

Dengan melakukan refleksi pada lembaran *nanotorus* dengan sumbu refleksi adalah garis *l*, yaitu garis yang melewati tengah lembaran *nanotorus*, seperti pada Gambar 3.5 dan 3.6, maka diperoleh simetri lainnya dari *nanotorus*. Setelah dilakukan refleksi tersebut, maka pada kolom pertama, heksagon 1_1 akan bertukar tempat dengan $q/2_1$, heksagon 2_1 bertukar tempat dengan heksagon $q/2-1_1$, dan seterusnya. Pada kolom kedua, heksagon 1_2 akan bertukar tempat dengan $q/2_2$, heksagon 2_2 bertukar tempat dengan heksagon $q/2-1_2$, dan seterusnya. Pada kolom ke-j, heksagon 1_j akan bertukar tempat dengan $q/2_j$, heksagon 2_j bertukar tempat dengan heksagon $q/2-1_j$, dan seterusnya. Jika refleksi ini dinyatakan sebagai permutasi, misalkan c, maka

$$c = \prod_{j=1}^{p/2} \begin{pmatrix} 1_j & 2_j & \dots & q/2_j \\ q/2_j & q/2-1_j & \dots & 1_j \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Untuk lembaran *nanotorus armchair* dan *nanotorus zig-zag* dengan p dan q yang sama maka permutasi $a, b,$ dan c pada *nanotorus armchair* sama dengan permutasi $a, b,$ dan c pada *nanotorus zig-zag*. Dapat ditunjukkan bahwa permutasi $a, b,$ dan c memenuhi sifat berikut,

$$a^{p/2} = b^2 = e, \tag{3.4a}$$

$$ab = ba^{-1}, \tag{3.4b}$$

$$c^2 = e. \tag{3.4c}$$

V adalah grup dari simetri pada *nanotorus armchair* atau *zig-zag*. Misalkan H adalah himpunan bagian dari V yang dibangkitkan oleh a dan b, atau dapat ditulis $H = \langle a, b\rangle = \{a^i b^j : 0 \le i < p/2, j = 0,1\}$. Karena c adalah permutasi yang dilakukan pada masing-masing kolom lembaran dan anggota H merupakan permutasi yang dilakukan pada masing-masing baris lembaran, maka $c \notin H$. Lebih lanjut H membentuk subgrup dari V. Ini dibuktikan pada lemma di bawah ini.

Lemma 3.1 *Jika H adalah himpunan yang dibangkitkan oleh* a *dan b dengan*

$$a = \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{p/2} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 \end{pmatrix}$$

dan

$$b = \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{p/2} \\ i_1 & i_{p/2} & i_{p/2-1} & \dots & i_2 \end{pmatrix},$$

atau dapat ditulis $H = \langle a, b\rangle = \{a^i b^j : 0 \le i < p/2, j = 0,1\}$, *maka H adalah subgrup dari V*. (Yavari & Faghani, 2009)

Bukti. Untuk membuktikan H subgrup di V, maka cukup dibuktikan H tidak kosong, tertutup, dan setiap anggota H mempunyai invers di H.

a. H tidak kosong

   a dan b adalah anggota H, maka H tidak kosong.

b. H tertutup terhadap operasi komposisi

   Misalkan sembarang $f, g \in H$. Karena H dibangun dari a dan b maka terdapat bilangan bulat i, j, m, n sedemikian sehingga $f = a^i b^j$ dan $g = a^m b^n$, dimana $0 \le i, m < p/2$ dan $j, n = 0$ atau 1. Maka $fg = a^i b^j a^m b^n$. Terdapat 2 kasus untuk nilai j, yaitu $j = 0$ dan $j = 1$.

   <u>Kasus 1</u>

   Misal $j = 0$, maka

$$fg = a^i a^m b^n = a^{i+m} b^n$$

Karena $0 \leq i, m < p/2$, maka $0 \leq i + m < p$. Jika $0 \leq i + m < p/2$, maka $fg \in H$. Sedangkan jika $p/2 \leq i + m < p$, maka $i + m = p/2 + r$ dimana $0 \leq r < p/2$. Sehingga dengan sifat pada persamaan (3.4a) diperoleh

$$fg = a^{i+m} b^n = a^{p/2+r} b^n = a^{p/2} a^r b^n = e a^r b^n = a^r b^n.$$

Karena $0 \leq r < p/2$ maka diperoleh $fg \in H$. Sehingga fg dibangun dari a dan b untuk $j = 0$, maka $fg \in H$.

<u>Kasus 2</u>

Misal $j = 1$, maka

$$fg = a^i b a^m b^n$$

Menurut sifat pada persamaan (3.4b), maka persamaan di atas menjadi

$$fg = a^i a^{-m} b b^n = a^{i-m} b^{n+1}$$

Karena $0 \leq i, m < p/2$, maka $-p/2 < i - m < p/2$. Jika $0 \leq i - m < p/2$, maka $fg \in H$. Sedangkan untuk $-p/2 < i - m < 0$, maka dengan sifat pada persamaan (3.4a) diperoleh

$$fg = a^{i-m} b^{n+1} = e a^{i-m} b^{n+1} = a^{p/2} a^{i-m} b^{n+1} = a^{p/2+i-m} b^{n+1}.$$

Karena $-p/2 < i - m < 0$, maka $0 < p/2 + i - m < p/2$. Sehingga $fg \in H$. Karena untuk nilai $j = 1, fg$ dibangun dari a dan b, maka $fg \in H$.

Karena untuk kedua kasus j didapat $fg \in H$, maka H tertutup terhadap operasi komposisi.

c. Setiap anggota H mempunyai invers di H

Misalkan $f \in H$, maka ada bilangan bulat i, j, sehingga $f = a^i b^j$ dimana $0 \leq i < p/2$ dan $j = 0$ atau 1.

<u>Kasus 1</u>

Misal $j = 0$, maka $f = a^i$. Dengan memisalkan $f^{-1} = a^{-i}$, didapat $ff^{-1} = a^i a^{-i} = e$ dan $f^{-1} f = a^{-i} a^i = e$. Sehingga f^{-1} adalah invers dari f. Dengan sifat dari persamaan (3.4a) diperoleh bahwa

$$f^{-1} = a^{-i} = ea^{-i} = a^{p/2}a^{-i} = a^{p/2-i}.$$

Untuk $0 < i < p/2$, maka $0 < p/2 - i < p/2$. Oleh karena itu $f^{-1} \in H$ untuk $0 < i < p/2$. Sedangkan untuk $i = 0$, maka $f = a^0 = e$ dan $f^{-1} = e \in H$. Sehingga diperoleh $f^{-1} \in H$ untuk kasus $j = 0$.

Kasus 2

Misal $j = 1$, maka $f = a^i b$. Misalkan $f^{-1} = ba^{-i}$, maka $f^{-1}f = ba^{-i}a^i b = beb = e$, dan $ff^{-1} = a^i bba^{-i} = a^i ea^{-i} = e$. Sehingga f^{-1} adalah invers dari f. Berdasarkan sifat pada persamaan (3.4b) maka $f^{-1} = ba^{-i} = a^i b = f \in H$.

Terbukti bahwa invers dari sembarang f anggota H ada di H juga. Karena itu terbukti bahwa H subgrup dari V. ■

Diketahui $c^2 = e$ berdasarkan persamaan (3.4c), maka himpunan bagian dari V yang dibangkitkan oleh c yaitu $\langle c \rangle = \{e, c\}$. Himpunan $\langle c \rangle$ membentuk subgroup dari V. Ini dibuktikan pada teorema di bawah ini. Diketahui sebelumnya bahwa $c \notin H$, maka $H \cap \langle c \rangle = \{e\}$.

Lemma 3.2 *Jika $\langle c \rangle$ adalah himpunan yang dibangkitkan oleh c dengan*

$$c = \prod_{j=1}^{p/2} \begin{pmatrix} 1_j & 2_j & \dots & q/2_j \\ q/2_j & q/2 - 1_j & \dots & 1_j \end{pmatrix},$$

maka $\langle c \rangle$ subgrup dari V. (Herstein, 1996)

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\langle c \rangle$ adalah subgrup di V, maka cukup ditunjukkan bahwa $\langle c \rangle$ tidak kosong, tertutup, dan setiap anggotanya mempunyai invers di dalam $\langle c \rangle$ juga.

a. $\langle c \rangle$ tidak kosong

   $\langle c \rangle \neq \emptyset$ karena e dan c berada di $\langle c \rangle$.

b. $\langle c \rangle$ tertutup terhadap operasi komposisi

   Semua kemungkinan operasi yang dapat dilakukan dengan anggota $\langle c \rangle$ adalah $ee = e$, $ec = c$, $ce = c$,dan $cc = e$. Dapat dilihat bahwa hasil operasinya hanya e dan c yang merupakan anggota $\langle c \rangle$ juga. Maka $\langle c \rangle$ tertutup

c. Tiap anggota $\langle c \rangle$ mempunyai invers di $\langle c \rangle$

Dari pembahasan pada (b), dapat dilihat bahwa $cc = e$ dan $ee = e$. Sehingga invers dari c adalah c sendiri dan invers dari e adalah e. Karena anggota $\langle c \rangle$ hanya ada e dan c, maka invers dari masing-masing anggotanya ada di dalam $\langle c \rangle$.

Terbukti bahwa $\langle c \rangle$ adalah subgrup di V. ■

Lemma di bawah ini menunjukkan hubungan antara permutasi a dan c, dan permutasi b dan c.

Lemma 3.3 *Dengan $a, b,$ dan c dengan*

$$a = \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{p/2} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 \end{pmatrix},$$

$$b = \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{p/2} \\ i_1 & i_{p/2} & i_{p/2-1} & \dots & i_2 \end{pmatrix},$$

dan

$$c = \prod_{j=1}^{p/2} \begin{pmatrix} 1_j & 2_j & \dots & q/2_j \\ q/2_j & q/2 - 1_j & \dots & 1_j \end{pmatrix},$$

maka $ac = ca$ dan $bc = cb$.

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $ac = ca$

$$ac = \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{p/2} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 \end{pmatrix} \prod_{j=1}^{p/2} \begin{pmatrix} 1_j & 2_j & \dots & q/2_j \\ q/2_j & q/2 - 1_j & \dots & 1_j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & \dots & 1_{p/2} \\ 1_2 & 1_3 & \dots & 1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2_1 & 2_2 & \dots & 2_{p/2} \\ 2_2 & 2_3 & \dots & 2_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q/2_1 & q/2_2 & \dots & q/2_{p/2} \\ q/2_2 & q/2_3 & \dots & q/2_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1_1 & 2_1 & \dots & q/2_1 \\ q/2_1 & q/2 - 1_1 & \dots & 1_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1_{p/2} & 2_{p/2} & \dots & q/2_{p/2} \\ q/2_{p/2} & q/2 - 1_{p/2} & \dots & 1_{p/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & \dots & 1_{p/2} \\ q/2_2 & q/2_3 & \dots & q/2_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q/2_1 & q/2_2 & \dots & q/2_{p/2} \\ 1_2 & 1_3 & \dots & 1_1 \end{pmatrix}.$$

$$ca = \prod_{j=1}^{p/2} \begin{pmatrix} 1_j & 2_j & \dots & q/2_j \\ q/2_j & q/2-1_j & \dots & 1_j \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{p/2} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_1 & 2_1 & \dots & q/2_1 \\ q/2_1 & q/2-1_1 & \dots & 1_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1_{p/2} & 2_{p/2} & \dots & q/2_{p/2} \\ q/2_{p/2} & q/2-1_{p/2} & \dots & 1_{p/2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & \dots & 1_{p/2} \\ 1_2 & 1_3 & \dots & 1_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q/2_1 & q/2_2 & \dots & q/2_{p/2} \\ q/2_2 & q/2_3 & \dots & q/2_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & \dots & 1_{p/2} \\ q/2_2 & q/2_3 & \dots & q/2_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q/2_1 & q/2_2 & \dots & q/2_{p/2} \\ 1_2 & 1_3 & \dots & 1_1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga terbukti bahwa $ac = ca$.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $bc = cb$

$$bc = \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{p/2} \\ i_1 & i_{p/2} & i_{p/2-1} & \dots & i_2 \end{pmatrix} \prod_{j=1}^{p/2} \begin{pmatrix} 1_j & 2_j & \dots & q/2_j \\ q/2_j & q/2-1_j & \dots & 1_j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & 1_3 & \dots & 1_{p/2} \\ 1_1 & 1_{p/2} & 1_{p/2-1} & \dots & 1_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q/2_1 & q/2_2 & q/2_3 & \dots & q/2_{p/2} \\ q/2_1 & q/2_{p/2} & q/2_{p/2-1} & \dots & q/2_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1_1 & 2_1 & \dots & q/2_1 \\ q/2_1 & q/2-1_1 & \dots & 1_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1_{p/2} & 2_{p/2} & \dots & q/2_{p/2} \\ q/2_{p/2} & q/2-1_{p/2} & \dots & 1_{p/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & 1_3 & \dots & 1_{p/2} \\ q/2_1 & q/2_{p/2} & q/2_{p/2-1} & \dots & q/2_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q/2_1 & q/2_2 & q/2_3 & \dots & q/2_{p/2} \\ 1_1 & 1_{p/2} & 1_{p/2-1} & \dots & 1_2 \end{pmatrix}.$$

$$cb = \prod_{j=1}^{p/2} \begin{pmatrix} 1_j & 2_j & \dots & q/2_j \\ q/2_j & q/2-1_j & \dots & 1_j \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{q/2} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{p/2} \\ i_1 & i_{p/2} & i_{p/2-1} & \dots & i_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_1 & 2_1 & \dots & q/2_1 \\ q/2_1 & q/2-1_1 & \dots & 1_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1_{p/2} & 2_{p/2} & \dots & q/2_{p/2} \\ q/2_{p/2} & q/2-1_{p/2} & \dots & 1_{p/2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & 1_3 & \dots & 1_{p/2} \\ 1_1 & 1_{p/2} & 1_{p/2-1} & \dots & 1_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q/2_1 & q/2_2 & q/2_3 & \dots & q/2_{p/2} \\ q/2_1 & q/2_{p/2} & q/2_{p/2-1} & \dots & q/2_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & 1_3 & \dots & 1_{p/2} \\ q/2_1 & q/2_{p/2} & q/2_{p/2-1} & \dots & q/2_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q/2_1 & q/2_2 & q/2_3 & \dots & q/2_{p/2} \\ 1_1 & 1_{p/2} & 1_{p/2-1} & \dots & 1_2 \end{pmatrix}.$$

Terbukti bahwa $bc = cb$. ■

3.2 Grup dari Simetri pada *Polyhex Carbon Nanotorus Armchair* dan *Zig-zag*

Dari pembahasan di atas, diperoleh bahwa rotasi nanotorus sejauh $2\pi/(p/2)$ searah jarum jam yang dilambangkan dengan a, refleksi terhadap garis vertikal m yang dilambangkan dengan b, dan refleksi terhadap garis horizontal l yang dilambangkan dengan c merupakan simetri pada nanotorus. Grup dari simetri pada *nanotorus armchair* atau *zig-zag* dikonstruksi dari simetri $a, b,$ dan c tersebut.

Teorema 3.4 *Jika V adalah grup dari simetri pada nanotorus dan $H = \langle a, b\rangle$, maka $V = H\langle c\rangle$.* (Yavari & Faghani, 2009)

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa $V = H\langle c\rangle$, akan ditunjukkan bahwa $H\langle c\rangle \subseteq V$ dan $V \subseteq H\langle c\rangle$. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $H\langle c\rangle \subseteq V$. Misalkan sembarang $f \in H, g \in \langle c\rangle$. Karena H dan $\langle c\rangle$ adalah subgrup di V, maka $fg \in V$. Karena untuk sembarang $f \in H, g \in \langle c\rangle$ didapatkan bahwa $fg \in V$, maka $H\langle c\rangle \subseteq V$.

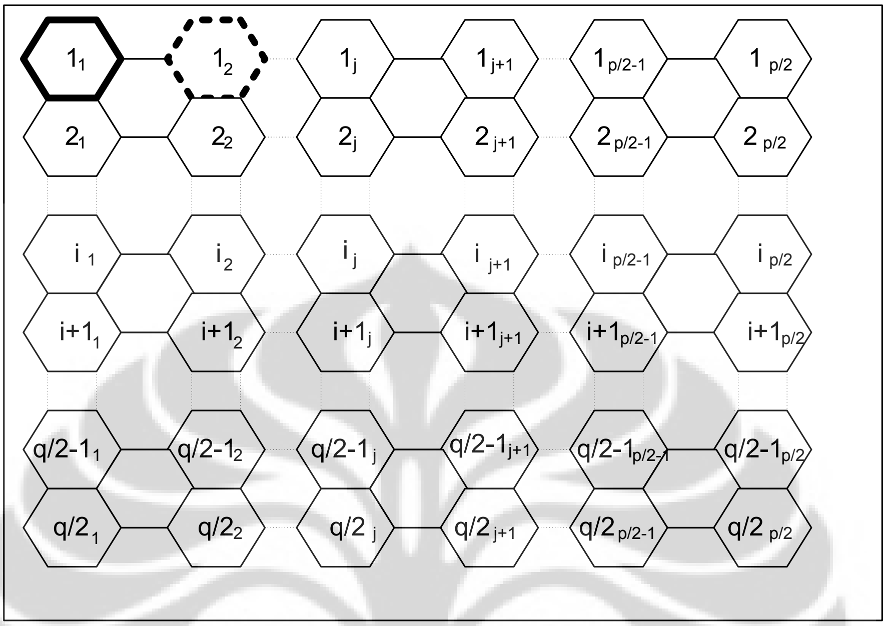
Akan dibuktikan juga bahwa $V \subseteq H\langle c\rangle$. Misalkan $f \in V$. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan hasil komposisi dari anggota-anggota di H dan $\langle c\rangle$. Ini dapat ditunjukkan dengan mencari $g \in H\langle c\rangle$ dimana $gf = e$. Ini artinya mencari elemen di $H\langle c\rangle$ yang mengembalikan *nanotorus* ke posisi semula. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $f = g^{-1} \in H\langle c\rangle$.

Jika $f \in H$ atau $f \in \langle c\rangle$, maka $f = fe = ef$. Karena $e \in H$ dan $e \in \langle c\rangle$ juga, maka $f \in H\langle c\rangle$.

Misalkan $f \notin H$ dan $f \notin \langle c\rangle$ dan f memindahkan heksagon 1_1 ke i_j. Maka $f(1_1) = i_j$. Karena $f \notin H$, maka heksagon 1_1 tidak akan dipindahkan ke baris-1 lagi. Artinya $i \neq 1$. Berikutnya karena $f \notin \langle c\rangle$, maka heksagon 1_1 tidak akan dipindahkan ke kolom-1 lagi. Artinya $j \neq 1$. Karena f adalah permutasi simetri yang dan mempertahankan sifat kebertetanggan pada verteks, maka $f(1_2) = i_{j-1}$ atau $f(1_2) = i_{j+1}$.

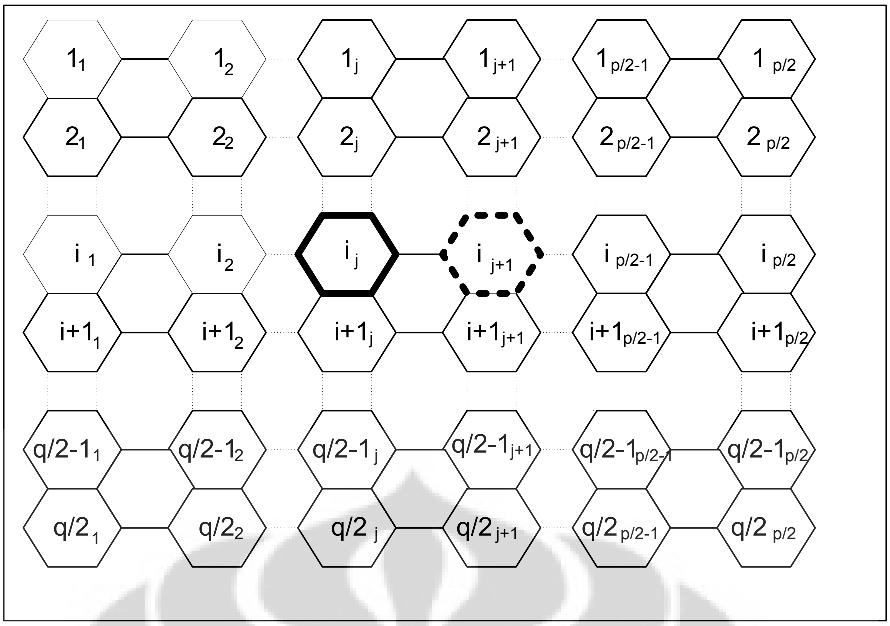
<u>Kasus 1</u>

Misalkan $f(1_2) = i_{j+1}$. Pandang lembaran awal *nanotorus* sebelum dilakukan permutasi.



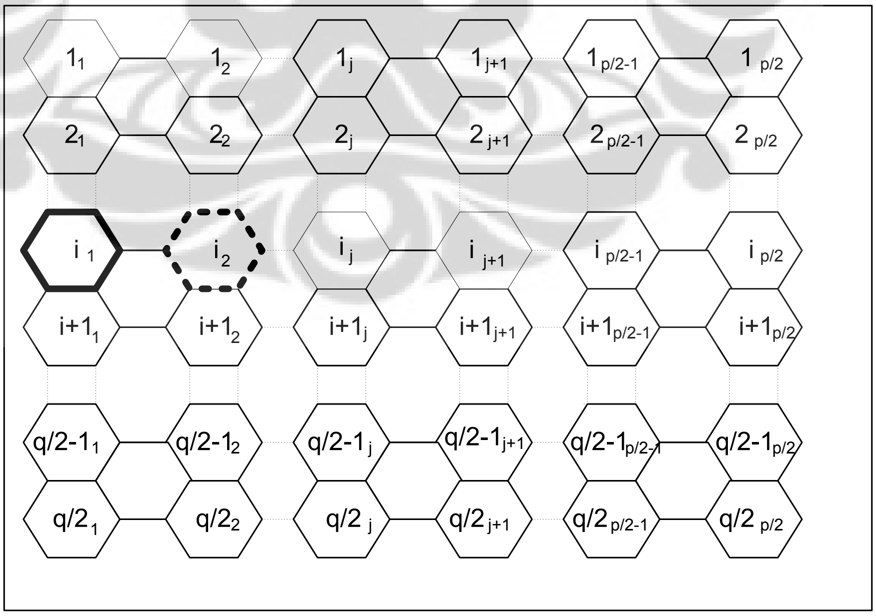
Gambar 3.7 Lembaran awal *nanotorus*

Heksagon 1_1 dan 1_2 diberi tanda untuk memperlihatkan pergerakan dari heksagon tersebut. Jika dari lembaran awal tersebut dilakukan permutasi f, dihasilkan lembaran seperti di bawah ini.



Gambar 3.8 Lembaran *nanotorus* setelah dikenakan f

Dari lembaran tersebut, jika dilakukan permutasi $a^{-(j-1)}$, yaitu rotasi berlawana arah jarum jam yang membawa heksagon i_j ke heksagon i_1, maka didapatkan lembaran sebagai berikut.

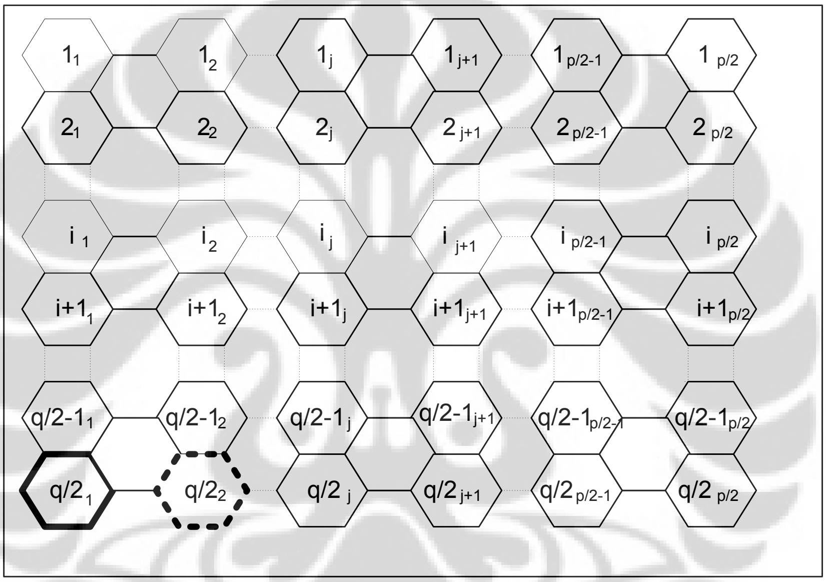


Gambar 3.9 Lembaran *nanotorus* setelah dikenakan $a^{-(j-1)}f$

Sehingga didapat $a^{-(j-1)}f(1_1) = i_1$ dan $a^{-(j-1)}f(1_2) = i_2$. Karena $a, f \in V$ dan V grup maka $a^{-(j-1)}f \in V$. Karena $a^{-(j-1)}f$ suatu simetri, maka jarak antar heksagon dipertahankan, yaitu

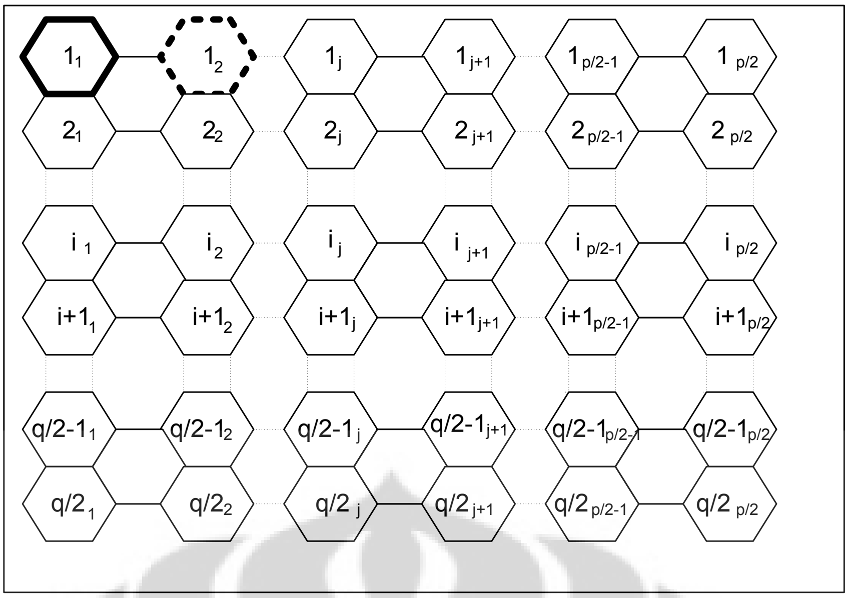
$$d(1_1, 1_2) = d\left(a^{-(j-1)}f(1_1), a^{-(j-1)}f(1_2)\right) = d(i_1, i_2)$$

Tapi karena heksagon 1_1 dan 1_2 berada pada lingkaran luar dari *nanotorus*, maka $d(1_1, 1_2) = d(i_1, i_2)$ hanya terpenuhi jika $i = 1$ atau $i = q/2$. Namun karena $i \neq 1$, maka haruslah $i = q/2$. Sehinggaa lembaran tersebut seharusnya berbentuk seperti berikut.



Gambar 3.10 Lembaran *nanotorus* setelah dikenakan $a^{-(j-1)}f$ yang seharusnya

Untuk mengembalikan heksagon ke posisi awal, yaitu mengembalikan heksagon $q/2_1$ ke heksagon 1_1 maka dilakukanlah permutasi c terhadap lembaran tersebut. Sehingga didapat lembaran sebagai berikut yaitu latice yang sama dengan posisi awal sebelum dilakukan permutasi.



Gambar 3.11 Lembaran *nanotorus* setelah dikenakan $ca^{-(j-1)}f$

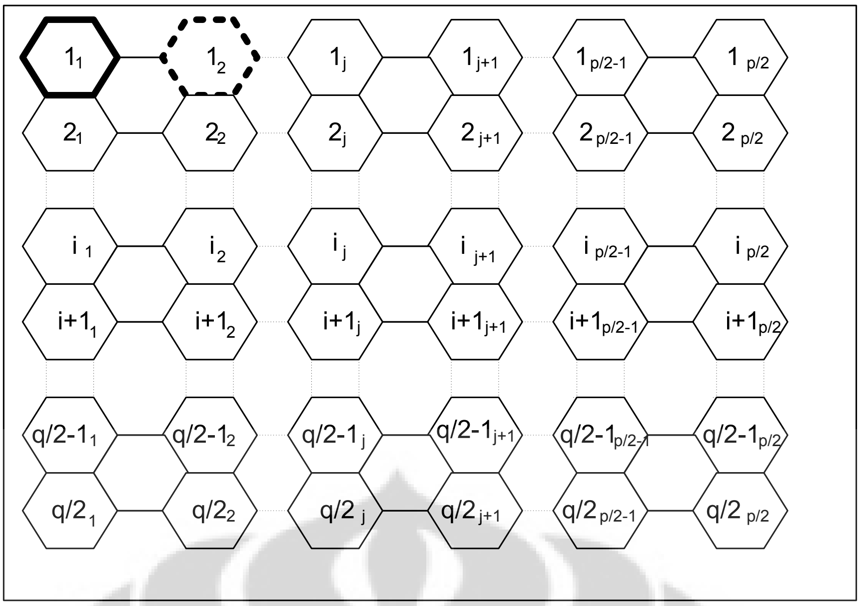
Komposisi dari permutasi-permutasi ini dapat dituliskan sebagai $ca^{-(j-1)}f = e$ atau dengan kata lain

$$f = \left(ca^{-(j-1)}\right)^{-1} = a^{(j-1)}c$$

Karena $a^{(j-1)} \in H$ dan $c \in \langle c \rangle$, maka $f \in H\langle c \rangle$.

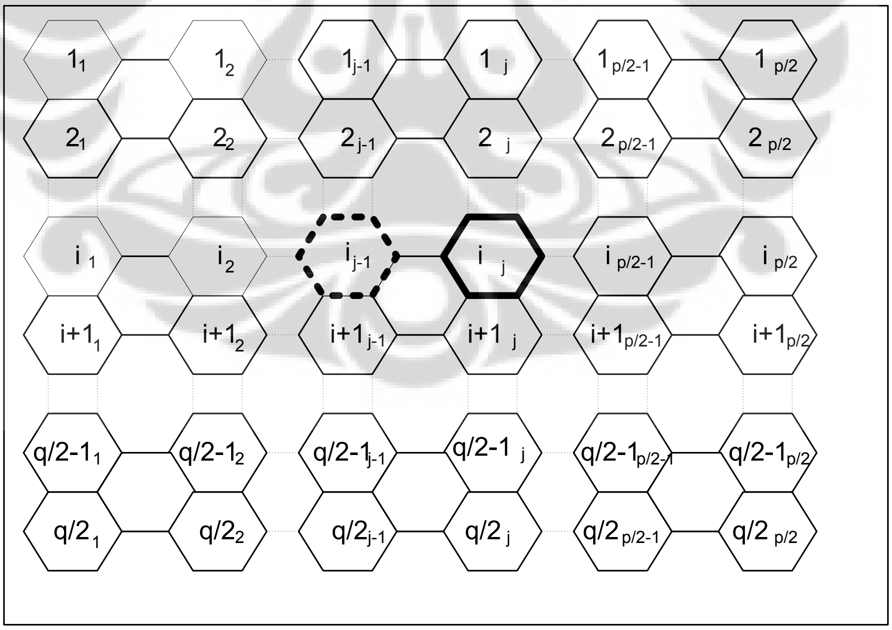
<u>Kasus 2</u>

Misalkan $f(1_2) = i_{j-1}$. Seperti pembuktian di atas, pandang lembaran awal sebelum dilakukan permutasi.



Gambar 3.12 Lembaran awal *nanotorus*

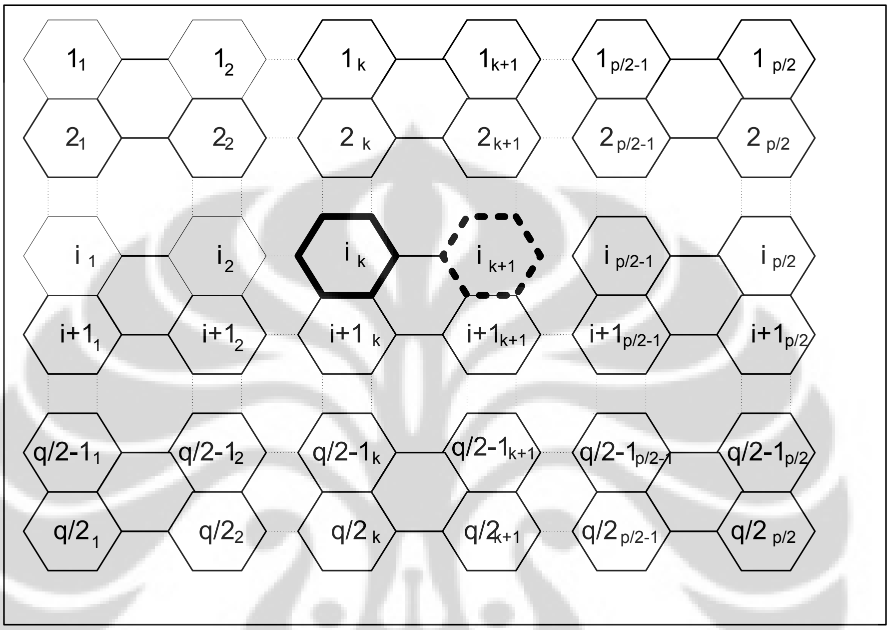
Setelah dilakukan permutasi f terhadap lembaran tersebut, dihasilkan lembaran seperti di bawah ini.



Gambar 3.13 Lembaran *nanotorus* setelah dikenakan f

Pada lembaran awal, dapat dilihat bahwa 1_2 adalah tetangga sebelah kanan dari 1_1. Sedangkan setelah dilakukan permutasi f, dapat dilihat bahwa heksagon

$i_{j-1} = f(1_2)$ adalah tetangga sebelah kiri dari $i_j = f(1_1)$. Untuk mengembalikan urutan kebertetanggan dari kedua heksagon tersebut, maka dilakukan permutasi b (pencerminan pada lembaran terhadap sumbu m) pada lembaran tersebut. Sehingga didapatkan $bf(1_1) = b(i_j) = i_k$ dan $bf(1_2) = b(i_{j-1}) = i_{k+1}$ untuk suatu bilangan asli k. Sehingga akan didapatkan lembaran seperti berikut.



Gambar 3.14 Lembaran *nanotorus* setelah dikenakan bf

Dengan memisalkan $g = bf$, didapatkan bahwa $g(1_1) = bf(1_1) = i_k$ dan $g(1_2) = bf(1_2) = i_{k+1}$. Berdasarkan kasus 1 di atas, maka $g = a^{(k-1)}c$ dengan $g = bf$. Maka berdasarkan Lemma 3.3 dan sifat pada persamaan (3.4b), $f = bg = ba^{(k-1)}c = a^{-(k-1)}bc$. Karena $a^{-(k-1)}b \in H$ dan $c \in \langle c \rangle$, maka $f \in H\langle c \rangle$.

Karena untuk kedua kasus terbukti bahwa jika $f \in V$ maka $f \in H\langle c \rangle$, maka terbukti bahwa $V \subseteq H\langle c \rangle$.

Karena $V \subseteq H\langle c \rangle$ dan $H\langle c \rangle \subseteq V$ maka terbukti bahwa $V = H\langle c \rangle$. ■

Dari Teorema 3.4, maka V dikonstruksi oleh $a, b,$ dan c, atau dapat ditulis $V = H\langle c \rangle = \{a^i b^j c^k : 0 \leq i < p/2, j = 0,1, k = 0,1\}$. Untuk lembaran *nanotorus armchair* dan *nanotorus zig-zag* dengan banyak verteks kolom, yaitu p, dan banyak verteks baris, yaitu q, yang sama maka permutasi $a, b,$ dan c pada *nanotorus armchair* sama dengan permutasi $a, b,$ dan c pada *nanotorus zig-zag*. Sehingga grup dari simetri pada *nanotorus armchair* sama dengan grup dari simetri pada *nanotorus zig-zag*. Setelah didapatkan bahwa V dikonstruksi oleh a, b, dan c, berikutnya akan dibuktikan bahwa H adalah subgrup normal di V.

Lemma 3.5 $H = \langle a, b\rangle = \{a^i b^j : 0 \le i < p/2, j = 0,1\}$ *adalah subgrup normal dari* V. (Yavari & Faghani, 2009)

Bukti. Misalkan $f \in V$ dan $g \in H$. Karena $V = H\langle c\rangle$ menurut Teorema 3.4, maka terdapat bilangan bulat i, j, k sehingga $f = a^i b^j c^k$. Karena $g \in H$ dan H dibangun oleh a dan b, maka terdapat bilangan bulat m, n sehingga $g = a^m b^n$.

$$fgf^{-1} = (a^i b^j c^k)(a^m b^n)(a^i b^j c^k)^{-1}$$

Karena $b^2 = e$ dan $c^2 = e$, maka nilai $j, k,$ dan n adalah 0 atau 1. Terdapat beberapa kasus untuk nilai k dan j.

<u>Kasus 1</u>

Misalkan $j = k = 0$, maka $f = a^i$ adalah anggota H. Karena $g \in H$, maka $fgf^{-1} \in H$.

<u>Kasus 2</u>

Misalkan $k = 1,\ j = 0$, maka berdasarkan sifat (3.4b) dan Lemma 3.3 diperoleh

$$\begin{aligned} fgf^{-1} &= a^i c a^m b^n (a^i c)^{-1} \\ &= a^i c a^m b^n c^{-1} a^{-i} \\ &= a^i a^m b^n a^{-i} c c^{-1} \\ &= a^{i+m} a^i b^n \\ &= a^{2i+m} b^n. \end{aligned}$$

Karena $0 \le i, m < p/2$, maka $0 \le 2i + m < 3p/2$. Untuk $0 \le 2i + m < p/2$, maka $fgf^{-1} \in H$. Untuk $p/2 \le 2i + m < p$, maka

$$2i + m = p/2 + r, \text{ dengan } 0 \le r < p/2.$$

Sehingga diperoleh

$$fgf^{-1} = a^{2i+m} b^n = a^{p/2+r} b^n = a^{p/2} a^r b^n = e a^r b^n = a^r b^n \in H.$$

Sedangkan untuk $p \le 2i + m < 3p/2$, maka

$$2i + m = p + r = 2p/2 + r, \text{ dengan } 0 \le r < p/2$$

Sehingga diperoleh

$$fgf^{-1} = a^{2i+m}b^n = a^{2p/2+r}b^n = \left(a^{p/2}\right)^2 a^r b^n = e^2 a^r b^n = a^r b^n \in H.$$

Terbukti $fgf^{-1} \in H$ untuk $k = 1, j = 0$.

Kasus 3

Misalkan $k = 0$ dan $j = 1$. Maka $f = a^i b^j \in H$. Sehingga $fgf^{-1} \in H$ karena $f, g \in H$ dan H subgrup di V.

Kasus 4

Misalkan $j = k = 1$, maka berdasarkan sifat (3.4b) dan Lemma 3.3 diperoleh

$$\begin{aligned} fgf^{-1} &= \left(a^i bc\right)(a^m b^n)\left(a^i bc\right)^{-1} \\ &= a^i bca^m b^n c^{-1} b^{-1} a^{-i} \\ &= a^i ba^m b^n b^{-1} a^{-i} cc^{-1} \\ &= a^i a^{-m} bb^n b^{-1} a^{-i} \\ &= a^{i-m} b^n a^{-i} \\ &= a^{i-m} a^i b^n \\ &= a^{2i-m} b^n. \end{aligned}$$

Karena $0 \le i, m < p/2$, maka $-p/2 < 2i - m < p$. Untuk $-p/2 < 2i - m < 0$, maka dengan sifat pada persamaan (3.4a) diperoleh

$$fgf^{-1} = a^{2i-m}b^n = ea^{2i-m}b^n = a^{p/2}a^{2i-m}b^n = a^{p/2+2i-m}b^n.$$

Karena $-p/2 < 2i - m < 0$, maka $0 < p/2 + 2i - m < p/2$. Sehingga $fgf^{-1} = a^{p/2+2i-m}b^n \in H$. Untuk $0 \le 2i - m < p/2$, maka $fgf^{-1} = a^{2i-m}b^n \in H$. Untuk $p/2 \le 2i - m < p$, maka $2i - m = p/2 + r$ dimana $0 \le r < p/2$. Sehingga

$$fgf^{-1} = a^{2i-m}b^n = a^{p/2+r}b^n = a^{p/2}a^r b^n = ea^r b^n = a^r b^n \in H.$$

Sehingga diperoleh $fgf^{-1} \in H$ untuk kasus $j = k = 1$.

Terbukti untuk setiap kasus nilai j dan k yang mungkin, didapat bahwa $fgf^{-1} \in H$. Sehingga H adalah subgrup normal di V. ■

Dari Lemma 3.1 dan Lemma 3.2, diperoleh bahwa H dan $\langle c \rangle$ adalah subgrup dari V. Dari Lemma 3.5 diketahui bahwa H subgrup normal dari V. Diketahui juga bahwa $H \cap \langle c \rangle = \{e\}$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.9, maka V adalah *semidirect product* dari H dan $\langle c \rangle$, atau dapat ditulis $V = H \ltimes \langle c \rangle$. (Yavari & Faghani, 2009)

Selanjutnya akan ditunjukkan untuk f di $\langle c \rangle$, maka $fg = gf$. Sifat ini dibuktikan pada Lemma berikut.

Lemma 3.6 *Untuk setiap* $f \in \langle c \rangle, g \in H,$ *maka* $fg = gf$.

Bukti. Karena $g \in H$ dan H dibangun oleh a dan b, maka terdapat $i, j \in \mathbb{Z}$ sehingga $g = a^i b^j$. Karena $f \in \langle c \rangle$, maka $f = c$ atau $f = e$. Untuk $f = e$, maka $fgf^{-1} = ege^{-1} = g$. Sehingga $fg = gf$.

Sedangkan untuk $f = c$, maka $fgf^{-1} = ca^i b^j c^{-1}$. Berdasarkan Lemma 3.3 diperoleh $ca^i b^j c^{-1} = a^i b^j cc^{-1} = a^i b^j = g$. Sehingga $fg = gf$.
Terbukti bahwa $fg = gf$ untuk setiap $f \in \langle c \rangle, g \in H$ ∎

Sifat pada Lemma 3.6 akan digunakan untuk membuktikan Teorema 3.7 yang menyatakan V isomorfis dengan $H \times \langle c \rangle$.

Teorema 3.7 *V isomorfik dengan* $H \times \langle c \rangle$.

Bukti Menurut Lemma 3.1, Teorema 3.2, dan Teorema 3.5 didapatkan bahwa H dan $\langle c \rangle$ subgrup di V dan $V = H\langle c \rangle$. Karena $c \notin H$, maka $H \cap \langle c \rangle = \{e\}$. Dari Teorema 3.6, didapat $fg = gf, f \in H, g \in \langle c \rangle$. Misalkan $\varphi: H \times \langle c \rangle \to V$ dimana $\varphi((f, g)) = fg$. Berdasarkan Teorema 2. 11, φ adalah isomorfisma dari $H \times \langle c \rangle$ ke V. Maka V isomorfik dengan $H \times \langle c \rangle$. ∎

Setelah diketahui bahwa V isomorfik dengan $H \times \langle c \rangle$, maka berikutnya akan dibuktikan bahwa V isomorfik dengan $D_{p/2} \times \mathbb{Z}_2$.

Lemma 3.8 $\langle c \rangle = \{e, c\}$ *isomorfik dengan* $\mathbb{Z}_2$.

Bukti Misalkan $\varphi: \langle c \rangle \to \mathbb{Z}_2$, dimana $\varphi(e) = [0]$ dan $\varphi(c) = [1]$. Karena $\varphi(ee) = \varphi(e) = [0] = [0] + [0] = \varphi(e) + \varphi(e)$, $\varphi(ec) = \varphi(c) = [1] = [0] +$

$[1] = \varphi(e) + \varphi(c), \varphi(ce) = \varphi(c) = [1] = [1] + [0] = \varphi(c) + \varphi(e), \varphi(cc) = \varphi(e) = [0] = [1] + [1] = \varphi(c) + \varphi(c)$ dan $\langle c \rangle = \{e, c\}$, maka pemetaan φ adalah homomorfisma. Karena $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ dan $\varphi(e) = [0]$ serta $\varphi(c) = [1]$, maka setiap anggota $\mathbb{Z}_2$ memiliki prapeta di $\langle c \rangle$. Sehingga φ adalah pemetaan pada. Lebih lanjut lagi, karena untuk masing-masing anggota $\langle c \rangle$ yang berbeda memiliki hasil pemetaan yang berbeda, maka φ pemetaan 1-1. Sehingga φ isomorfisma dari $\langle c \rangle$ ke $\mathbb{Z}_2$. Maka $\langle c \rangle$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_2$. ■

Lemma 3.9 *H isomorfik dengan $D_{p/2}$.*

Bukti H dibangun oleh a dan b yang memiliki sifat $a^{p/2} = b^2 = e$ dan $ab = ba^{-1}$. Berdasarkan Lemma 2.14, maka H isomorfik dengan $D_{p/2}$. ■

Teorema 3.10 *V isomorfik dengan $D_{p/2} \times \mathbb{Z}_2$.* (Yavari & Faghani, 2009)

Bukti Berdasarkan Lemma 3.8 dan Lemma 3.9, $H \cong D_{p/2}$ dan $\langle c \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, maka berdasarkan Lemma 2.10, $H \times \langle c \rangle \cong D_{p/2} \times \mathbb{Z}_2$. Karena dari Teorema 3.7 diketahui bahwa $V \cong H \times \langle c \rangle$, maka $V \cong D_{p/2} \times \mathbb{Z}_2$. ■

Dari pembahasan di atas pada Teorema 3.4, diperoleh bahwa V dikonstruksi oleh $a, b,$ dan c yang diberikan oleh persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3). Grup V tersebut isomorfik dengan $D_{p/2} \times \mathbb{Z}_2$ menurut Teorema 3.10.

BAB 4
PENUTUP

Suatu *polyhex carbon nanotorus armchair* atau *zig-zag* dibentuk dari lembaran grafit dengan p verteks kolom dan q verteks baris. Operasi-operasi simetri pada *nanotorus* adalah rotasi sejauh $2\pi/(p/2)$, yang dilambangkan oleh a, refleksi terhadap sumbu refleksi vertikal m, yang dilambangkan oleh b, dan refleksi terhadap sumbu refleksi horizontal l, yang dilambangkan oleh c. Himpunan V yang terdiri dari semua simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* atau *zig-zag* ini membentuk grup yang disebut sebagai grup dari simetri pada *polyhex carbon nanotorus armchair* atau *zig-zag*. Himpunan rotasi dan refleksi terhadap garis vertikal membentuk subgrup dari V yaitu $H = \langle a, b\rangle$ (Lemma 3.1) dan himpunan refleksi terhadap sumbu horizontal juga membentuk subgrup V yaitu $\langle c\rangle$ (Lemma 3.2). Menurut Teorema 3.4, grup V yang terdiri dari simetri-simetri pada *nanotorus* merupakan *product* dari H dan $\langle c\rangle$, yaitu $H\langle c\rangle$. Lebih lanjut, V adalah *semidirect product* dari H dan $\langle c\rangle$.

Menurut Teorema 3.7, V isomorfik dengan $H \times \langle c\rangle$. Lebih lanjut, karena $\langle c\rangle$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_2$ (Lemma 3.8), dan H isomorfik dengan $D_{p/2}$ (Lemma 3.9), maka menurut Teorema 3.10 grup dari simetri pada *nanotorus armchair* dan *zig-zag*, yaitu V isomorfik dengan *semidirect product* $D_{p/2} \times \mathbb{Z}_2$.

DAFTAR REFERENSI

Faghani, M., & Ashrafi, A. R. (2009). The Symmetry Group of Nanotubes. *Digest Journal of Nanomaterials and Biostructures*, Vol. 4, No 3, 593-596.

Herstein, I. N. (1996). *Abstract Algebra 3rd edition*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Housecroft, Catherine E., & Alan G. Sharpe. (2008). *Inorganic Chemistry, third edition,* London: Pearson Education Limited.

Hungerford, Thomas W., (1974). *Algebra*, New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Lang, Serge., (2002). *Algebra Revised 3rd edition*, New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Rotman, Joseph J., (2002). *Advanced Modern Algebra,* Upper Saddle River, New Jersey: Pearson, Inc.

Yavari, M., & Ashrafi, A. R. (2009). On the Symmetry Group of a Zig-zag and an Armchair Polyhex Carbon Nanotorus. *Symmetry*, 145-152.

"(IUCr) Full Symmetry of Nanotori", http://journals.iucr.org/a/issues/2009/03/00/pz5061/pz5061fig1.html, (diakses tanggal 29 Februari 2012)

"Science Fair Water", http://sciencefairwater.com/ (diakses tanggal 24 Mei 2012)

"Sulfur Dioxide (Department of Environment and Resource Managament)", http://www.derm.qld.gov.au/air/pollution/pollutants/sulfur-dioxide.html (diakses tanggal 24 Mei 2012)

"Type of Nanotubes", http://www.ncnr.nist.gov/staff/taner/nanotube/types.html, (diakses tanggal 23 Januari 2012)

"Carbon Nanotubes", http://www.personal.reading.ac.uk/~scsharip/tubes.htm, (diakses tanggal 23 Januari 2012)