UNIVERSITAS INDONESIA

ALJABAR *MAX-PLUS* YANG SIMETRI

TESIS

RISDAYANTI
1006786253

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

ALJABAR *MAX-PLUS* YANG SIMETRI

TESIS

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar magister sains

RISDAYANTI
1006786253

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Risdayanti
NPM	:	1006786253
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	20 Juni 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh	:	
Nama	:	Risdayanti
NPM	:	1006786253
Program Studi	:	Magister Matematika
Judul Tesis	:	Aljabar *Max-Plus* yang Simetri

Telah berhasil dipertahankan di hadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dr. Sri Mardiyati, M. Kom.	(Sri Mardiyati)
Penguji	:	Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	:	Alhadi Bustamam, Ph. D.	( )
Penguji	:	Dra. Siti Aminah, M.Kom.	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Pada tanggal	:	20 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Segala puji hanya bagi Allah SWT, Robb Semesta Alam, yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dan menyelesaikan tugas belajar ini. Salawat dan salam tercurahkan untuk nabi akhir zaman, Rasulullah Muhammad SAW, pembawa syafaat bagi seluruh alam, sang teladan bagi umat manusia.

Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar magister sains pada Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis sadar bahwa dalam penulisan tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Sri Mardiyati, M.Kom. selaku dosen pembimbing yang telah banyak memberikan ilmu dan motivasi;
2. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami selaku Ketua Program Studi Magister Matematika;
3. Bapak Dr. rer. nat. Hendri Murfi, M.Kom. selaku pembimbing akademik yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama mengikuti perkuliahan hingga selesai;
4. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T. selaku ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia;
5. seluruh staf pengajar pada Program Magister Matematika FMIPA Universitas Indonesia yang telah memberikan arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan selama perkuliahan;
6. staf tata usaha Departemen Matematika yang telah membantu urusan administrasi sejak menjadi mahasiswa sampai lulus;
7. Bapak Dekan FMIPA UI beserta jajarannya yang telah menjalin kerja sama pendidikan dengan Pemerintah Propinsi Jambi;
8. Bapak Gubernur Propinsi Jambi beserta jajarannya dalam hal ini Dinas Pendidikan yang telah memberikan beasiswa hingga penulis mendapat kesempatan untuk melanjutkan studi ke jenjang strata dua;

9. suami tercinta, Lasfitri, S.E., yang sejak awal ketika penulis mengikuti seleksi masuk Universitas Indonesia (simak UI) telah memberikan dukungan penuh hingga ikut hijrah ke Jakarta demi menemani penulis dan bersama-sama mengikuti program strata dua;
10. kedua orang tua serta keluarga besar yang telah memberikan dukungan spritual dan moral tanpa henti;
11. keluarga di *SIE* (*small Islamic environment*) yang selalu memberikan *taushiyah Robbani*, spirit spritual yang tinggi. Mudah-mudahan semua istiqomah di jalan ini;
12. semua teman-teman magister matematika angkatan 2010 terimakasih atas kerjasama dan kebersamaannya di ruang kuliah dan di laboratorium 312. Ini adalah kenangan manis yang tak pernah dilupakan;
13. semua pihak yang telah memberikan sumbangan pemikiran dalam penulisan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu.

Penulis sangat meyakini bahwa setiap kebaikan akan dibalas dengan kebaikan pula sehingga penulis yakin bahwa Allah akan membalas semua kebaikan ini. Sebuah asa pun terurai, semoga tesis ini memberikan manfaat untuk pengembangan ilmu pengetahuan baik pada masa sekarang maupun pada masa yang akan datang.

Depok, 20 Juni 2012

Penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Risdayanti
NPM	:	1006786253
Program Studi	:	Magister Matematika
Departeman	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia hak bebas royalti noneksklusif (*non-exclusive royalty free right*) atas karya ilmiah saya berjudul

Aljabar *Max-Plus* yang Simetri

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan hak bebas biaya royalti noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalihmediakan/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai hak cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 20 Juni 2012
Yang menyatakan

(Risdayanti)

ABSTRAK

Nama : Risdayanti
Program studi : Magister Matematika
Judul tesis : Aljabar *Max-Plus* yang Simetri

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi $+$ dan operasi $\times$ merupakan suatu lapangan real $(\mathbb{R}, +, \times)$. Pada himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ diberikan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ di mana untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$, $a \oplus b = maksimum(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$. Sistem matematika $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut aljabar *max-plus*, dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{maks}$. Perbedaan utama antara $(\mathbb{R}, +, \times)$ dan $\mathbb{R}_{maks}$ adalah pada $\mathbb{R}_{maks}$ tidak terdapat invers $\oplus$ untuk setiap elemen $\mathbb{R}_\varepsilon$ yang tak nol. Selanjutnya dilakukan perluasan dari $\mathbb{R}_{maks}$ dengan mendefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon = \mathcal{P}_\varepsilon$. Pada himpunan $\mathcal{P}_\varepsilon$ diberikan relasi seimbang ∇ dan relasi $\mathcal{B}$ di mana $\mathcal{B}$ merupakan relasi ekivalen sehingga dapat digunakan untuk membangun kelas ekivalen dan himpunan kuosien $\mathcal{P}_\varepsilon / \mathcal{B} = \mathbb{S}$. Jelas bahwa elemen himpunan $\mathbb{S}$ adalah kelas-kelas ekivalen yang kemudian setiap kelas ekivalen tersebut diasosiasikan dengan skalar atau skalar bertanda $\ominus$ dan $(.)^\bullet$ di $\mathbb{R}_\varepsilon$. Kemudian dengan menggunakan definisi operasi $\oplus$, $\otimes$ dan relasi seimbang ∇ pada $\mathcal{P}_\varepsilon$ terbentuk sistem $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$. Pada penelitian ini ditunjukkan sifat-sifat operasi pada $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$ yang disertai dengan relasi ∇ sehingga membentuk aljabar *max-plus* yang simetri.

Kata kunci : aljabar *max-plus*, aljabar *max-plus* yang simetri
x+41 hal; 8 tabel
Daftar pustaka : 7 (1996-2009)

ABSTRACT

Name : Risdayanti
Program study : Master Mathematics
Title of thesis : The Symmetrized Max-Plus Algebra

The set of real number with addition and multiplication operation is said as field with a notation $(\mathbb{R},+,\times)$. At set of $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ is given two binary operations that is $\oplus$ and $\otimes$, are defined as follow: for all $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$, $a\oplus b = maximum(a, b)$ and $a\otimes b = a + b$. The structure $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ is called max-plus algebra , which denote as $\mathbb{R}_{maks}$. The main different between $(\mathbb{R},+,\times)$ and $\mathbb{R}_{maks}$ that is there is no invers $\oplus$ for all element $\mathbb{R}_\varepsilon$ except the zero elemen ε. Futhermore are introduced extended of $\mathbb{R}_{maks}$ with define $\oplus$ and $\otimes$ at $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon = \mathcal{P}_\varepsilon$. In set of $\mathcal{P}_\varepsilon$ are given balance relation, denote ∇, and relation $\mathcal{B}$ whereas $\mathcal{B}$ is equivalence relation since its compatible for generate equivalence class and quosien set $\mathcal{P}_\varepsilon/\mathcal{B} = \mathbb{S}$. Clearly, the elements of set of $\mathbb{S}$ is equivalence classes and than for all equivalenve class are assosiated with scalar or signed scalar $\ominus$ dan $(.)^\bullet$ in $\mathbb{R}_\varepsilon$. By using definision of $\oplus$, $\otimes$ and balance relation ∇ in $\mathcal{P}_\varepsilon$ for design the system of $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$. In this research are performed properties of $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$ and than are defined the symmetrized max-plus algebra.

Key words : max-plus algebra, the symmetrized max-plus algebra
x+41 page; 8 table
Bibliography : 7 (1996-2009)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem matematika adalah suatu himpunan tak kosong dengan suatu operasi biner (Arifin, 2000). Salah satu sistem matematika yang selama ini dipelajari dan digunakan dalam kehidupan sehari-hari adalah himpunan bilangan real dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian.

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan, $+$, dan operasi perkalian, $\times$, merupakan suatu sistem matematika yang disebut dengan lapangan real $(\mathbb{R}, +, \times)$. Jika himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ digabung dengan $\{-\infty\}$ maka dapat dibentuk himpunan baru yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_\varepsilon$. Pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ diberikan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan dan perkalian yang secara berturut-turut dinotasikan dengan $\oplus$ dan $\otimes$. Kedua operasi tersebut memiliki definisi yang berbeda dengan operasi $+$ dan operasi $\times$ pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, sehingga antara $(\mathbb{R}, +, \times)$ dan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ memiliki beberapa sifat yang berbeda pula.

Untuk setiap a, b elemen himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ maka dapat dibentuk pasangan terurut (a, b) di mana a disebut komponen pertama dan b disebut komponen kedua. Kumpulan dari pasangan terurut tersebut membentuk himpunan pasangan terurut yang disebut dengan hasil kali silang $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (*Cartesian product)*. Jika beberapa elemen pada hasil kali silang memiliki hubungan yang sama antara komponen pertama dengan komponen kedua maka beberapa elemen ini membentuk himpunan bagian dari hasil kali silang yang disebut dengan relasi (Hungerford, 2000).

Seperti halnya di himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, pada himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon$ dapat juga dibentuk pasangan terurut, hasil kali silang, dan relasi. Jika pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ maka pada hasil kali silang $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ dapat juga didefinisikan $\oplus$ dan $\otimes$ tentu dengan pengertian yang berbeda. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada hasil kali silang $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ memiliki beberapa sifat yang sama dengan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$.

Relasi yang memiliki sifat refleksif, simetris dan transitif disebut dengan relasi ekivalen. Relasi ekivalen dapat digunakan untuk membangun kelas ekivalen dan himpunan kuosien (Hungerford, 2000).

Pada hasil kali silang $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ dapat didefinisikan suatu relasi ekivalen sehingga bisa dibentuk himpunan kuosien. Pada himpunan kuosien ini diberikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang belaku pada hasil kali silang $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ sehingga terbentuk suatu sistem matematika yang disebut dengan aljabar *max-plus* yang simetri.

Pada penelitian ini penulis tertarik untuk membahas dan menelaah tentang aljabar *max-plus* yang simetri meliputi himpunan dan elemen-elemennya, operasi, relasi, dan sifat-sifat operasi dan sifat-sifat relasi pada aljabar *max-plus* yang simetri tersebut.

1.2 Masalah Penelitian

Adapun masalah pada penelitian ini adalah bagaimana bentuk elemen-elemen, operasi, dan sifat-sifat operasi pada aljabar *max-plus* yang simetri.

1.3 Tujuan Penelitian

Secara umum tujuan penelitian ini adalah memberikan penjelasan tentang aljabar *max-plus* yang simetri meliputi:

(i) menjelaskan himpunan yang membentuk aljabar *max-plus* yang simetri dan elemen-elemen himpunan tersebut;

(ii) menjelaskan operasi pada aljabar *max-plus* yang simetri;

(iii) menjelaskan suatu relasi yang membentuk aljabar *max-plus* yang simetri;

(iv) menjelaskan sifat-sifat operasi yang disertai dengan suatu relasi pada aljabar *max-plus* yang simetri.

1.4 Metode Penelitian

Pada penelitian ini penulis menggunakan metode studi atau kajian terhadap literatur berupa buku-buku referensi dan artikel ilmiah yang terkait dengan topik penelitian. Hasil pengkajian dilanjutkan dengan membuat perbandingan antara aljabar *max-plus* yang simetri dengan $(\mathbb{R}, +, \times)$ dan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$.

BAB 2

TEORI-TEORI PADA ALJABAR DAN ALJABAR *MAX-PLUS*

Pada bab ini dijelaskan teori-teori mendasar yang akan dijadikan acuan pada Bab 3. Teori-teori tersebut meliputi hasil kali silang, relasi, relasi ekivalen, kelas ekivalen, himpunan kuosien, operasi biner, dan lapangan. Selain itu, bab ini akan menjelaskan konsep dasar aljabar *max-plus* meliputi notasi, definisi, operasi dan sifat-sifatnya. Bab ini juga dilengkapi dengan contoh-contoh operasi pada aljabar *max-plus*.

2.1 Relasi dan Lapangan

Pembahasan relasi antara dua himpunan akan dimulai dengan pengertian hasil kali silang dari dua himpunan tersebut.

Definisi 2.1.1 Pandang A dan B adalah himpunan tak kosong. Himpunan semua pasangan terurut pada himpunan A dan B disebut hasil kali silang, dinotasikan dengan

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

(Bhattacharya, et al., 1994).

Definisi 2.1.2 Pandang R himpunan bagian dari $A \times B$. R disebut relasi dari A ke B jika untuk setiap $(a,b) \in R$ terdapat relasi antara a dan b sehingga dapat dikatakan a berrelasi ke b, ditulis aRb. Suatu relasi dari A ke A disebut dengan relasi pada A (Bhattacharya, et al., 1994).

Definisi 2.1.3 Pandang R adalah relasi pada A. R disebut relasi ekivalen jika untuk setiap $a, b, c \in A$ maka R memenuhi sifat:

(i) refleksif : $(a,a) \in R$;

(ii) simetris : jika $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$;

(iii) transitif: jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \in R$.

Jika R adalah relasi ekivalen pada A dan $(a,b) \in R$ maka dikatakan a ekivalen ke b di bawah R, ditulis dengan $a \sim b$ atau aRb (Bhattacharya, et al., 1994).

Definisi 2.1.4 Pandang R adalah relasi ekivalen pada A. Himpunan semua elemen di A yang berrelasi ke $a \in A$ disebut kelas ekivalen dari a di bawah relasi R, dinotasikan dengan

$$\bar{a} = \{b \in A \mid aRb\}$$

(Bhattacharya, et al., 1994).

Definisi 2.1.5 Himpunan dari semua kelas ekivalen di A di bawah relasi R disebut dengan himpunan kuosien dinotasikan dengan

$$A/R = \{\bar{a} \mid \text{untuk beberapa } a \in A\}.$$

(Bhattacharya, et al., 1994).

Definisi 2.2.1 sampai dengan Definisi 2.2.5 akan digunakan pada Subbab 3.1-3.3. Selanjutnya akan diterangkan terkait operasi biner dan lapangan.

Definisi 2.1.6 Operasi biner pada himpunan tak kosong F adalah fungsi $f: F \times F \to F$ (Hungerford, 2000).

Berdasarkan Definisi 2.1.6 dapat dijelaskan bahwa setiap operasi biner pada suatu himpunan bersifat tertutup pada himpunan tersebut. Definisi berikut menjelaskan suatu sistem yang memuat suatu himpunan dan suatu operasi biner.

Definisi 2.1.7 Suatu himpunan tak kosong dengan suatu operasi biner disebut dengan sistem matematika (Arifin, 2000).

Berikut ini akan diterangkan suatu lapangan sebagai suatu sistem matematika dengan dua operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi agar sistem matematika disebut dengan lapangan.

Definisi 2.1.8 Lapangan adalah himpunan tak kosong F bersama-sama dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan, dinotasikan dengan $+$, dan operasi perkalian, dinotasikan dengan $\times$, dan dua elemen yaitu $0,1 \in F$, sedemikian sehingga untuk setiap $a, b, c \in F$ maka

(i) $(F,+)$ memiliki sifat:

- $a+b \in F$
- asosiatif: $a+(b+c)=(a+b)+c$;
- komutatif: $a+b=b+a$;
- $a+0=0+a=a$. 0 disebut unsur nol;

(ii) $(F,\times)$ memiliki sifat:

- $a \times b \in F$;
- asosiatif: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$;
- komutatif: $a \times b = b \times a$;
- $a \times 1 = 1 \times a = a$. 1 disebut unsur satuan;

(iii) distributif $\times$ terhadap $+$: $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$;

(iv) untuk setiap $a \in F$, terdapat x tunggal di F sehingga $a + x = 0$;

(v) untuk setiap $a \in F$ dengan $a \neq 0$ terdapat y tunggal di F sehingga $a \times y = 1$

(Jacob, 1999).

Berdasarkan Definisi 2.1.7, jelas bahwa $(\mathbb{R},+,\times)$ merupakan salah satu contoh lapangan. Setelah diterangkan lapangan dan sifat-sifatnya, subbab berikut akan dijelaskan tentang suatu sistem matematika yang dibentuk dari himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan $-\infty$ dan operasi-operasinya.

2.2 Aljabar *Max-Plus*

Pada subbab ini akan diterangkan aljabar *max-plus* meliputi notasi, definisi, operasi, dan sifat-sifat operasi pada aljabar *max-plus*.

Definisi 2.2.1 Pandang $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. Pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan dua operasi biner yaitu $\oplus$ (dibaca: o tambah) dan $\otimes$ (dibaca: o kali) sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$

(i) $a \oplus b = maks\,(a,b)$ (dibaca: maksimum a,b);

(ii) $a \otimes b = a + b$

(Baccelli, et al., 2001).

Pada $(\mathbb{R},+,\times)$ memenuhi sifat-sifat lapangan seperti yang tersebut pada Definisi 2.1.7. Berikut ini akan dijelaskan sifat-sifat operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon$.

Sifat 2.2.2 Pandang $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon$ maka

(i) $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ memiliki sifat:

- asosiatif: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
- komutatif: $a \oplus b = b \oplus a$;
- $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$. ε disebut unsur nol;
- idempoten: $a \oplus a = a$;

(ii) $(\mathbb{R}_\varepsilon, \otimes)$ memiliki sifat:

- asosiatif: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$;
- komutatif: $a \otimes b = b \otimes a$;
- $a \otimes 0 = 0 \otimes a = a$. 0 disebut elemen satuan. Selanjutnya 0 dinotasikan dengan e;
- untuk $a \neq \varepsilon$ terdapat $-a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ sehingga $a \otimes -a = -a \otimes a = e$. Elemen $-a$ dikatakan invers dari a;
- $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$. ε disebut penyerap pada operasi $\otimes$;

(iii) distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$: $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$

(Farlow, 2009).

Berdasarkan Sifat 2.2.2 terdapat beberapa perbadaan antara $(\mathbb{R},+,\times)$ dan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus \otimes)$. Tabel di bawah ini memberikan persamaan dan perbedaan sifat-sifat antara $(\mathbb{R},+,\times)$ dan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus \otimes)$.

Tabel 2.2.1 Sifat-sifat pada $(\mathbb{R},+,\times)$ dan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus \otimes)$

Nomor	$(\mathbb{R},+,\times)$	$(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus \otimes)$
Persamaan sifat antara $(\mathbb{R},+,\times)$ dan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus \otimes)$		
1	$+$ dan $\times$ bersifat komutatif	$\oplus$ dan $\otimes$ bersifat komutatif
2	$+$ dan $\times$ bersifat asosiatif	$\oplus$ dan $\otimes$ bersifat asosiatif
3	$\times$ besifat distributif terhadap $+$	$\otimes$ bersifat distributif terhadap $\oplus$

(Sambungan)

4	Terdapat elemen nol yaitu 0	Terdapat elemen nol yaitu $\varepsilon = -\infty$
5	Terdapat elemen satuan yaitu 1	Terdapat elemen satuan yaitu $e = 0$
6	$\forall a \neq 0$ terdapat elemen invers terhadap operasi $\times$	$\forall a \neq \varepsilon$ terdapat elemen invers terhadap operasi $\otimes$
	Perbedaan sifat antara $(\mathbb{R}, +, \times)$ dan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus\ \otimes)$	
7	$\forall a$ terdapat elemen invers terhadap operasi $+$	$\forall a \neq \varepsilon$ tidak terdapat elemen invers terhadap operasi $\oplus$
8	-	$\forall a$ terdapat elemen penyerap yaitu ε
9	-	Idempoten terhadap operasi $\oplus$

Berdasarkan Tabel 2.2.1 dapat dilihat bahwa $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ tidak memenuhi salah satu sifat lapangan, seperti yang telah dijelaskan pada Definisi 2.1.7, yaitu untuk setiap $a \neq \varepsilon \in \mathbb{R}_\varepsilon$ tidak terdapat elemen invers terhadap operasi $\oplus$. Tetapi $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ memiliki sifat lain yang tidak dimiliki oleh $(\mathbb{R}, +, \times)$ yaitu sifat idempoten terhadap operasi $\oplus$ dan terdapat elemen penyerap pada operasi $\otimes$. Jika $(\mathbb{R}, +, \times)$ merupakan suatu lapangan maka $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dinamakan semilapangan idempoten dengan elemen penyerap ε (Baccelli, et al., 2001).

Definisi 2.2.3 Sistem matematika $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan aljabar *max-plus*, dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$ (Baccelli, et al., 2001).

Operasi $+$ dan $\times$ pada $\mathbb{R}$ memiliki operasi balikan yang secara berturut-turut dikenal dengan operasi pengurangan dan pembagian. Sedangkan pada $\mathbb{R}_{max}$, $\oplus$ tidak memiliki operasi balikan. Sementara itu, untuk operasi $\otimes$ yang merupakan operasi $+$ di $\mathbb{R}$, memiliki operasi balikan yaitu operasi ϕ (dibaca: o bagi) dengan definisi sebagai berikut:

$$\forall\ a, b\ \in\ \mathbb{R}_{max}, a \phi b = a - b. \qquad (2.2.1)$$

Selain operasi yang terdapat pada Definisi 2.2.1 dan Persamaan (2.2.1), pada $\mathbb{R}_{max}$ terdapat operasi pangkat dan sifat-sifatnya seperti yang akan didefinisikan berikut.

Definisi 2.2.4 Untuk $x \in\ \mathbb{R}_{max}$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{n\ kali} = nx.$$

Akibat dari definisi di atas didapat

(i) untuk $x \neq e, x^{\otimes 0} = 0 = e$;

(ii) untuk $\alpha \in \mathbb{R}, x^{\otimes \alpha} = \alpha x$

(iii) untuk $k > 0$ maka $e^{\otimes k} = e$ (untuk $k \leq 0$ tidak didefinisikan)

(Farlow, 2009).

Selain dari akibat di atas, diperoleh akibat lain yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{max}$ maka persamaan 2.2.1 dapat diformulasi menjadi

$$a \phi\, b = a \otimes b^{\otimes^{-1}} . \qquad (2.2.2)$$

Lemma 2.2.5 Untuk $m, n \in \mathbb{N}$ dan $x \in {}_{max}$ maka

(i) $x^{\otimes m} \otimes x^{\otimes n} = x^{\otimes (m \otimes n)}$;

(ii) $(x^{\otimes m})^{\otimes n} = x^{\otimes (m^{\otimes n})}$;

(iii) $x^{\otimes 1} = x$;

(iv) $x^{\otimes m} \otimes y^{\otimes m} = (x \otimes y)^{\otimes m}$

(Farlow, 2009).

Jika pada suatu persamaan matematika pada $\mathbb{R}_{max}$ terdapat beberapa operasi maka dalam melakukan operasi, dilakukan operasi dengan hirarki berikut: pangkat, $\otimes / \phi$, dan $\oplus$ (Schutter, 1996).

Contoh 2.2.6

(i) $3 \oplus 2 = maks\,(3,2) = 3$

(ii) $7 \oplus \varepsilon = maks\,(7, -\infty) = 7$

(iii) $e \otimes 9 = 0 + 9 = 9$

(iv) $(2 \otimes 3) \phi (2 \oplus 3) = (2 + 3) - maks(2,3) = 5 - 3 = 2$

(v) $5 \oplus 6 \otimes 4 \phi 3 = maks(5, 6 + 4 - 3) = maks(5,7) = 7$

(vi) $4^{\otimes^2} = 2 \times 4 = 8$

(vii) $2^{\otimes^4} \otimes 3^{\otimes^4} = (4 \times 2) + (4 \times 3) = 2.$

Untuk melihat analogi antara $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}_{maks}$, dapat ditemukan pada tabel di bawah ini.

Tabel 2.2.2 Beberapa analogi antara $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}_{maks}$

No	Kategori	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{max}$
1	Operasi penjumlahan	$+$	$\oplus = maksimum$
2	Operasi perkalian	$\times$	$\otimes = +$
3	Operasi pengurangan	$-$	Tidak ada
4	Operasi pembagian	$\div$	$\phi = -$
5	Unsur nol	0	$\boldsymbol{\varepsilon} = -\infty$
6	Unsur satuan	1	$\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$
7	Invers penjumlahan	$-a$	Tidak ada
8	Invers perkalian	$\frac{1}{a}$	$-a$
9	Operasi pangkat	a^n	$a^{\otimes^n} = n \times a = na$
10	Formula pembagian	$\frac{a}{b} = a \times b^{-1}$	$a\phi b = a \otimes b^{\otimes^{-1}}$

Setelah mempelajari notasi, definisi, operasi, sifat-sifat operasi pada aljabar *max-plus*, bab berikut akan menjelaskan tentang perluasan dari aljabar *max-plus*, yang disebut dengan aljabar *max-plus* yang simetri. Perluasan ini bisa dibandingkan dengan mengkonstruksi $\mathbb{Z}$ sebagai perluasan dari $\mathbb{N}$, di mana $\mathbb{Z}$ adalah bilangan bulat dan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan bulat taknegatif. (Baccelli, et al., 2001).

BAB 3
ALJABAR *MAX-PLUS* YANG SIMETRI

Bahasan utama pada bab ini adalah definisi dari aljabar *max-plus* yang simetri meliputi elemen-elemen, operasi , dan sifat-sifat operasi pada aljabar *max-plus* yang simetri tersebut. Sebelumnya akan dijelaskan tentang hasil kali silang $\mathbb{R}_\varepsilon$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada hasil kali silang $\mathbb{R}_\varepsilon$, dan operator minus, operator seimbang, serta operator nilai mutlak. Selanjutnya akan diterangkan tentang himpunan kuosien pada hasil kali silang $\mathbb{R}_\varepsilon$ dan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan kuosien tersebut.

3.1 Hasil Kali Silang $\mathbb{R}_\varepsilon$

Telah diketahui bahwa $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ di mana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan $\varepsilon = -\infty$. Sesuai Definisi 2.1.1 diperoleh

$$\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon = \left\{(a,b), \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R}_\varepsilon\right\}.$$

Selanjutnya $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ dinotasikan dengan $\mathcal{P}_\mathcal{E}$. Dengan menggunakan definisi operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_\varepsilon$, maka berikut ini didefinisikan $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathcal{P}_\mathcal{E} = \mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$.

Definisi 3.1.1 Untuk setiap $(a,b),(c,d) \in \mathcal{P}_\mathcal{E}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ sebagai berikut:

(i) $(a,b) \oplus (c,d) = (a \oplus c, b \oplus d)$ dan

(ii) $(a,b) \otimes (c,d) = (a \otimes c \oplus b \otimes d\ ,\ a \otimes d \oplus b \otimes c)$

(Baccelli, et al., 2001).

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ di ruas kanan pada Definisi 3.1.1 di atas memiliki pengertian yang sama dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_\varepsilon$, seperti yang telah diterangkan pada Definisi 2.2.1. Jika pada Sifat 2.2.2 telah dijelaskan sifat-sifat operasi $\oplus$ dan $\otimes$ di $\mathbb{R}_\varepsilon$ maka berikut ini akan diberikan lemma yang menjelaskan sifat-sifat operasi $\oplus$ dan $\otimes$ di $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Lemma 3.1.2 Untuk setiap $u = (a,b), v = (c,d), w = (e,f) \in \mathcal{P}_\varepsilon$ maka

(i) $(\mathcal{P}_\varepsilon, \oplus)$ memiliki sifat:

- asosiatif: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$;
- komutatif: $u \oplus v = v \oplus w$;
- $u \oplus (\varepsilon, \varepsilon) = (\varepsilon, \varepsilon) \oplus u = u$. $(\varepsilon, \varepsilon)$ disebut elemen nol;
- idempoten: $u \oplus u = u$;

(ii) $(\mathcal{P}_\varepsilon, \otimes)$ memiliki sifat:

- asosiatif: $u \otimes (v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$;
- komutatif: $u \otimes v = v \otimes u$;
- $u \otimes (e, \varepsilon) = (e, \varepsilon) \otimes u = u$. (e, ε) disebut elemen satuan;
- $u \otimes (\varepsilon, \varepsilon) = (\varepsilon, \varepsilon) \otimes u = (\varepsilon, \varepsilon)$. $(\varepsilon, \varepsilon)$ disebut penyerap

(iii) distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$: $u \otimes (v \oplus w) = u \otimes v \oplus u \otimes w$

(Schutter, 1996).

Lemma 3.1.2 menunjukkan bahwa $(\mathcal{P}_\varepsilon, \oplus)$ memiliki sifat yang sama dengan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus)$ dan $(\mathcal{P}_\varepsilon, \otimes)$ memiliki suatu sifat yang berbeda dengan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \otimes)$ di mana setiap elemen pada $(\mathcal{P}_\varepsilon, \otimes)$ tidak memiliki invers. Selain operasi $\oplus$ dan $\otimes$, pada $\mathcal{P}_\varepsilon$ terdapat operator nilai mutlak, operator minus, dan operator seimbang, secara berturut-turut dinotasikan dengan $|.|$, $\ominus$, dan $(\cdot)^\bullet$. Berikut ini diberikan definisi dan sifat-sifat serta contoh ketiga operasi tersebut.

Definisi 3.1.3 Untuk setiap $u = (a,b) \in \mathcal{P}_\varepsilon$ maka:

(i) $|u| = a \oplus b$;

(ii) $\ominus u = (b,a)$;

(iii) $u^\bullet = u \oplus (\ominus u) = u \ominus u = (|u|, |u|)$

(Schutter, 1996).

Lemma 3.1.4 Untuk setiap $u = (a,b), v = (c,d) \in \mathcal{P}_\varepsilon$ maka:

(i) $u^\bullet = (\ominus u)^\bullet = u^{\bullet\bullet}$

(ii) $u \otimes v^\bullet = (u \otimes v)^\bullet$

(iii) $\ominus (\ominus u) = u$

(iv) $\ominus (u \oplus v) = (\ominus u) \oplus (\ominus v)$

(v) $\ominus (u \otimes v) = (\ominus u) \otimes v = u \otimes (\ominus v)$

(Schutter, 1996).

Contoh 3.1.5 Diketahui $u = (2,3)$, $v = (4,1) \in \mathcal{P}_\varepsilon$ maka:

(i) $|u| = |(2,3)| = 2 \oplus 3 = 3$;

(ii) $\ominus u = \ominus (2,3) = (3,2)$;

(iii) $u^\bullet = (2,3)^\bullet = (2,3) \oplus \big(\ominus (2,3)\big) = (2,3) \oplus (3,2) = (3,3) = (|u|, |u|)$;

(iv) $u \oplus v = (2,3) \oplus (4,1) = (4,3)$

(v) $\ominus (u \oplus v) = \ominus (2,3) \oplus \big(\ominus (4,1)\big) = (3,2) \oplus (1,4) = (3,4)$.

3.2 Relasi Seimbang pada $\mathcal{P}_\varepsilon$

Pada $(\mathbb{R}, +, \times)$ berlaku bahwa $a + (-a) = a - a = 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$. Sedangkan pada pada $\mathcal{P}_\varepsilon$, $u \oplus (\ominus u) = u \ominus u = (\varepsilon, \varepsilon)$ hanya berlaku untuk $u = (\varepsilon, \varepsilon)$ dan untuk setiap u yang lain berlaku $u \oplus (\ominus u) = u \ominus u = u^\bullet \neq (\varepsilon, \varepsilon)$. Oleh karena itu pada $\mathcal{P}_\varepsilon$ akan diperkenalkan suatu relasi berikut ini.

Definisi 3.2.1 Pandang $u = (a,b), v = (c,d) \in \mathcal{P}_\varepsilon$. u dikatakan seimbang dengan v, dinotasikan dengan $u \nabla v$, jika $a \oplus d = b \oplus c$ (Baccelli, et al., 2001).

Akibat 3.2.2 Untuk setiap $u \in \mathcal{P}_\varepsilon$ maka $u \ominus u \nabla (\varepsilon, \varepsilon)$, $\forall\, u = (a,b) \in \mathcal{P}_\varepsilon$ (Baccelli, et al., 2001).

Bukti Ambil $u = (a,b)$ dan $(\varepsilon, \varepsilon)$ di $\mathcal{P}_\varepsilon$. Sesuai Definisi 3.1.3 (iii) maka $u \ominus u = (|u|, |u|) = (|(a,b)|, |(a,b)|) = (a \oplus b, a \oplus b)$.

Tulis $a \oplus b$ sebagai

$$(a \oplus b) \oplus \varepsilon = (a \oplus b) \oplus \varepsilon. \tag{3.2.1}$$

Persamaan 3.2.1 mendefinisikan bahwa

$$(a \oplus b, a \oplus b) \nabla (\varepsilon, \varepsilon) \tag{3.2.2}$$

sehingga $u \ominus u \nabla (\varepsilon, \varepsilon)$ atau $u^\bullet \nabla (\varepsilon, \varepsilon)$. ■

Contoh 3.2.3

(i) $(4,2) \nabla (4,1)$ karena $4 \oplus 1 = 4 = 2 \oplus 4$

(ii) $(4,1) \not\nabla (2,4)$ karena $4 \oplus 2 = 4 \neq 2 = 1 \oplus 2$

(iii) $(1,\varepsilon)\nabla\,(2{,}2)$ karena $1\oplus 2\ = 2 = \varepsilon\oplus 2$

(iv) $(\varepsilon,\varepsilon)\nabla\,(\varepsilon,4)$ karena $\varepsilon\oplus 4\ = 4\ \ \neq \varepsilon\oplus\varepsilon = \varepsilon$

(v) $(2{,}2)\ \nabla(\varepsilon,\varepsilon)$ karena $2\oplus\varepsilon = 2 = 2\oplus\varepsilon$.

Pada Definisi 2.2.3 telah dijelaskan bahwa suatu relasi dikatakan relasi ekivalen jika relasi tersebut bersifat refleksif, simetri, dan transitif. Selanjutnya akan diberikan lemma yang menunjukkan apakah relasi seimbang merupakan relasi ekivalen atau bukan relasi ekivalen.

Lemma 3.2.4 Relasi seimbang ∇ bukan relasi ekivalen pada $\mathcal{P}_\varepsilon$ (Schutter, 1996).

Bukti Ambil sebarang $(a,b),(c,d)\ (e,f)\in\mathcal{P}_\varepsilon$.

(i) Akan ditunjukkan relasi seimbang ∇ bersifat refleksif.

Oleh karena $a,b\in\mathbb{R}_\varepsilon$ dan operasi $\oplus$ pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ bersifat komutatif maka

$$a\oplus b = b\oplus a. \tag{3.2.3}$$

Sesuai Definisi 3.2.1 maka Persamaan 3.2.3 memiliki pengertian bahwa

$$(a,b)\nabla(a,b). \tag{3.2.4}$$

Keseimbangan (3.2.4) menunjukkan relasi seimbang bersifat refleksif.

(ii) Akan ditunjukkan relasi seimbang bersifat simetris.

Misal $(a,b)\nabla(c,d)$ akan dibuktikan $(c,d)\nabla(a,b)$.

$(a,b)\nabla(c,d)$ sehingga

$$a\oplus d = b\oplus c. \tag{3.2.5}$$

Karena $a,b,c,d\in\mathbb{R}_\varepsilon$ dan $\oplus$ bersifat komutatif maka (3.2.5) dapat dinyatakan sebagai $c\oplus b = d\oplus a$ sehingga memenuhi definisi $(c,d)\nabla(a,b)$. Karena $(a,b)\nabla(c,d)$ mengakibatkan $(c,d)\nabla(a,b)$ maka relasi seimbang bersifat simetris.

(iii) Akan ditunjukkan relasi seimbang bersifat transitif.

Misal $(a,b)\nabla(c,d)$ dan $(c,d)\nabla(e,f)$. Akan dibuktikan $(a,b)\nabla(e,f)$. $(a,b)\nabla(c,d)$ memiliki definisi bahwa $a\oplus d = b\oplus c$. sehingga berdasar definisi operasi $\oplus$ di $\mathbb{R}_\varepsilon$ diperoleh

$$maks(a,b) = maks(c,d). \tag{3.2.6}$$

Pada Persamaan 3.2.6 berlaku minimal satu dari kondisi berikut:

(i) $a = b$, (ii) $a = c$, (iii) $d = b$, (iv) $d = c$. Asumsikan $a = c$ sehingga $(c,d)\nabla(e,f)$ dapat dinyatakan sebagai

$$(a,d)\nabla(e,f). \tag{3.2.7}$$

Kondisi (3.2.7) menunjukkan $(a,b)\not\nabla(e,f)$. Karena $(a,b)\nabla(c,d)$ dan $(c,d)\nabla(e,f)$ tidak mengakibatkan $(a,b)\nabla(e,f)$ maka relasi seimbang tidak transitif.

Relasi ∇ bersifat refleksif dan simetri tetapi tidak bersifat transitif. Terbukti relasi ∇ bukan relasi ekivalen pada $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$.■

Oleh karena relasi ∇ bukan relasi ekivalen pada $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ maka relasi ∇ tidak bisa digunakan untuk mendefinisikan kelas ekivalen dan himpunan kuosien. Terdapat relasi lain yang hampir sama dengan relasi seimbang dan dinotasikan dengan $\mathcal{B}$.

Definisi 3.2.5 Diberikan $(a,b),(c,d)\in\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$.

$$(a,b)\mathcal{B}\,(c,d) \text{ jika dan hanya jika } \begin{cases}(a,b)\nabla(c,d)\ , & \text{untuk } a \neq b \text{ dan } c \neq d\\ (a,b)=(c,d), & \text{untuk yang lain}\end{cases}$$

(Baccelli, et al., 2001).

Definisi 3.2.5 menyatakan bahwa relasi $\mathcal{B}$ merupakan relasi ∇ pada $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ yang elemen-elemennya memiliki kritria tertentu. Sementara itu, relasi ∇ itu sendiri berlaku untuk sembarang elemen $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ yang memenuhi Definisi 3.2.1. Di bawah ini diberikan beberapa elemen $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ yang memenuhi dan tidak memenuhi relasi $\mathcal{B}$.

Contoh 3.2.6 Diberikan $(2,5),(1,5),(3,3),(1,3)\in\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ maka:

(i) $(2,5)\ \mathcal{B}\ (2,5)$ karena $(2,5) = (2,5)$;

(ii) $(2,5)\ \mathcal{B}\ (1,5)$ karena $(2,5)\ \nabla\ (1,5)$ untuk $2 \neq 5$ dan $1 \neq 5$;

(iii) $(1,3)\not\mathcal{B}(3,3)$ karena $(1,3)\ \nabla\ (3,3)$, $1 \neq 3$ tetapi $3 = 3$;

(iv) $(3,3)\not\mathcal{B}\ (\varepsilon,\varepsilon)$ karena $(3,3)\ \nabla\ (\varepsilon,\varepsilon)$, $3 = 3$ dan $\varepsilon = \varepsilon$.

Lemma 3.2.7 $\mathcal{B}$ adalah relasi ekivalen pada $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ (Schutter, 1996).

Bukti Ambil sebarang elemen $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}$.

Akan dibuktikan $\mathcal{B}$ bersifat refleksif.

Karena $(a,b)=(a,b)$ maka sesuai Definisi 3.2.5 jelas bahwa

$$(a,b)\mathcal{B}(a,b). \tag{3.2.8}$$

Keseimbangan (3.2.8) menunjukkan $\mathcal{B}$ bersifat refleksif.

Selanjutnya akan dibuktikan $\mathcal{B}$ bersifat simetris.

Misal $(a,b)\mathcal{B}(c,d)$. Akan ditunjukkan $(c,d)\mathcal{B}(a,b)$. Sesuai Definisi 3.2.4

(i) berlaku $(a,b)\nabla(c,d)$ di mana $a \neq b$ dan $c \neq d$ sehingga sesuai Definisi 3.2.1 diperoleh $a \oplus d = b \oplus c$. Karena $a,b,c,d \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan $\oplus$ pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ bersifat komutatif maka $a \oplus d = b \oplus c$ dapat ditulis $c \oplus b = a \oplus d$ sehingga berdasarkan Definisi 3.2.1 didapat $(c,d)\nabla(a,b)$. Karena $a \neq b$ dan $c \neq d$ maka $(c,d)\nabla(a,b)$ memberikan pengertian bahwa $(c,d)\mathcal{B}(a,b)$.

(ii) berlaku $(a,b) = (c,d)$ atau dapat juga dinyatakan dengan $(c,d) = (a,b)$. Sesuai Definisi 3.2.4 maka $(c,d) = (a,b)$ memberikan pengertian bahwa $(c,d)\mathcal{B}(a,b)$.

Sifat simetris dipenuhi oleh relasi $\mathcal{B}$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\mathcal{B}$ bersifat transitif.

Misal $(a,b)\mathcal{B}(c,d)$ dan $(c,d)\mathcal{B}(e,f)$. Akan ditunjukkan $(a,b)\mathcal{B}(e,f)$. Karena $(a,b)\mathcal{B}(c,d)$ dan $(c,d)\mathcal{B}(e,f)$ maka berdasarkan Definisi 3.2.4

(i) berlaku

$$(a,b)\nabla(c,d) \tag{3.2.9}$$

$$(c,d)\nabla(e,f) \tag{3.2.10}$$

di mana $a \neq b, c \neq d$, dan $e \neq f$.

Sesuai Definisi 3.2.1 maka (3.2.9) memberikan pengertian

$$a \oplus d = b \oplus c \text{ atau } maks(a,d) = maks(b,c). \tag{3.2.11}$$

Karena $a \neq b, c \neq d$ maka kondisi yang berlaku pada (3.2.11) adalah $a = c$ atau $d = b$. Asumsikan $d = b$ sehingga pada (3.2.11) berlaku juga bahwa $c < b$ dan $a < b = d$. Karena $d = b$ maka $(c,d)\mathcal{B}(e,f)$ dapat dinyatakan sebagai $(c,b)\mathcal{B}(e,f)$ sehingga sesuai Definisi 3.2.5, kondisi (3.2.10) menjadi

$$(c,b)\nabla(e,f) \tag{3.2.12}$$

di mana $c \neq b$ dan $e \neq f$. Sesuai Definisi 3.2.1 maka (3.2.12) memberikan pengertian bahwa

$$c \oplus f = b \oplus e \text{ atau } maks(c,f) = maks(b,e). \tag{3.2.13}$$

Karena $c \neq b, e \neq f$ maka kondisi yang berlaku pada (3.2.13) adalah $c = e$ atau $f = b$. Karena pada (3.2.3) telah diasumsikan $d = b$ maka pada (3.2.13) berlaku $f = b$ sehingga $c < f$. Karena $a < b$ dan karena $f = b$ maka $a < f$ sehingga (3.2.13) dapat juga dinyatakan sebagai

$$a \oplus f = b \oplus e. \tag{3.2.14}$$

Sesuai Definisi 3.2.1 maka (3.2.14) memberikan pengertian bahwa

$$(a,b)\nabla(e,f). \tag{3.2.15}$$

Karena $a \neq b, e \neq f$ maka (3.2.15) memberikan $(a,b)\mathcal{B}(e,f)$. Karena $(a,b)\mathcal{B}(c,d)$ dan $(c,d)\mathcal{B}(e,f)$ mengakibatkan $(a,b)\mathcal{B}(e,f)$ maka $\mathcal{B}$ bersifat transitif;

(ii) berlaku $(a,b) = (c,d)$ dan $(c,d) = (e,f)$ sehingga didapat $(a,b) = (e,f)$. Karena $(a,b) = (e,f)$ maka sesuai Definisi 3.2.4 didapat pengertian bahwa $(a,b)\mathcal{B}(e,f)$.

Sifat transitif dipenuhi oleh $\mathcal{B}$. Telah terbukti $\mathcal{B}$ bersifat refleksif, simetris, dan transitif maka $\mathcal{B}$ merupakan relasi ekivalen pada $\mathcal{P}_\mathcal{E}$.■

Oleh karena $\mathcal{B}$ merupakan relasi ekivalen pada $\mathcal{P}_\mathcal{E}$ maka $\mathcal{B}$ dapat digunakan untuk membangun kelas ekivalen dan himpunan kuosien.

3.3 Kelas Ekivalen dan Himpunan Kuosien pada $\mathcal{P}_\mathcal{E}$ terhadap $\mathcal{B}$

Pada Subbab 2.1.4 telah diterangkan definisi kelas ekivalen dan himpunan kuosien. Pembahasan berikut ini akan menjelaskan kelas ekivalen dan himpunan kuosien pada $\mathcal{P}_\mathcal{E}$ yang dibangun oleh relasi $\mathcal{B}$ dan operasi-operasi pada himpunan kuosien tersebut.

Definisi 3.3.1 Untuk suatu $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon \in \mathbb{R}_\mathcal{E}$ dapat didefinisikan kelas ekivalen pada $\mathcal{P}_\mathcal{E}$ yang dibangun oleh relasi $\mathcal{B}$ yaitu:

(i) $\overline{(a,\varepsilon)} = \{(a,x) \in \mathcal{P}_\mathcal{E} \mid x < a\}$, disebut elemen positif *max-plus*;

(ii) $\overline{(\varepsilon,a)} = \{(x,a) \in \mathcal{P}_\mathcal{E} \mid x < a\}$, disebut elemen negatif *max-plus*;

(iii) $\overline{(a,a)} = \{(a,a) \in \mathcal{P}_\mathcal{E}\}$, disebut elemen seimbang;

(iv) $\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}$ disebut dengan kelas nol *max-plus*

(Baccelli, et al., 2001).

Jika terdapat kelas ekivalen lain selain kelas-kelas ekivalen di atas maka berdasarkan Definisi 3.2.5 dan Definisi 3.3.1 dapat diterangkan akibat berikut.

Akibat 3.3.2 Untuk setiap $(a,b) \in \mathcal{P}_\mathcal{E}$ dengan kondisi:

(i) $a > b$ maka $\overline{(a,b)} = \overline{(a,\varepsilon)}$;

(ii) $a < b$ maka $\overline{(a,b)} = \overline{(\varepsilon, b)}$;

(iii) $a = b$ maka $\overline{(a,b)} = \overline{(a,a)}$.

Contoh 3.3.3

(i) $\overline{(3,\varepsilon)} = \{(3,2.999), \cdots, (3,2), \cdots, (3,1), \cdots, (3,0.5), \cdots\}$

(ii) $\overline{(3,2)} = \{(3,2.999) \cdots, (3,2), \cdots, (3,1), \cdots, (3,0.5), \cdots, \}$

(iii) $\overline{(\varepsilon,7)} = \{\cdots, (2,7), \cdots, (4,7), \cdots, (5,7), \cdots, (6,7), \cdots, (6.999,7)\}$

(iv) $\overline{(4,7)} = \{\cdots, (2,7), \cdots, (4,7), \cdots, (5,7), \cdots, (6,7), \cdots (6.999,7)\}$

Jelas bahwa $\overline{(3,2)} = \overline{(3,\varepsilon)}$ dan $\overline{(4,7)} = \overline{(\varepsilon,7)}$.

Sesuai dengan Definisi 3.2.7 diperoleh bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ di mana $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_\varepsilon$ maka $a \oplus b, a \otimes b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ sehingga $\overline{(b,\varepsilon)}$, $\overline{(a \oplus b, \varepsilon)}$, $\overline{(a \otimes b, \varepsilon)} \in \left\{\overline{(a,\varepsilon)}\right\}$, $\overline{(\varepsilon, b)}, \overline{(\varepsilon, a \oplus b)}, \overline{(\varepsilon, a \otimes b)} \in \left\{\overline{(\varepsilon, a)}\right\}$ dan $\overline{(a \oplus b, a \oplus b)}, \overline{(a \otimes b, a \otimes b)} \in \left\{\overline{(a,a)}\right\}$. Untuk $\varepsilon \in \mathbb{R}_\varepsilon$ maka $\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}$.

Berdasarkan Definisi 2.1.5 telah diterangkan bahwa himpunan yang elemen-elemennya terdiri dari kelas-kelas ekivalen disebut dengan himpunan kuosien dan himpunan kuosien yang dimaksud pada pembahasan ini adalah himpunan kuosien $\mathcal{P}_\varepsilon$ terhadap relasi $\mathcal{B}$, dinotasikan dengan $\mathcal{P}_\varepsilon / \mathcal{B}$ atau $\mathbb{S}$ di mana

$$\mathcal{P}_\varepsilon / \mathcal{B} = \mathbb{S} = \left\{\overline{(a,\varepsilon)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\} \cup \left\{\overline{(a,a)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}. \quad (3.3.1)$$

Pada himpunan $\mathbb{S}$ akan didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dengan menggunakan definisi operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathcal{P}_\varepsilon$, seperti yang terdapat pada Definisi 3.1.1. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{S}$ meliputi operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada tiap-tiap himpunan di $\mathbb{S}$ dan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan yang satu dengan himpunan yang lainnya di $\mathbb{S}$. Terlebih dahulu akan diterangkan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada tiap-tiap himpunan di $\mathbb{S}$.

(i) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\left\{\overline{(a,\varepsilon)}\right\}$

Pandang $\overline{(a,\varepsilon)}, \overline{(b,\varepsilon)} \in \left\{\overline{(a,\varepsilon)}\right\}$. Berdasarkan Definisi 3.3.1 (i), $\overline{(a,\varepsilon)} = \{(a,x) \in \mathcal{P}_\varepsilon \mid x < a\}$ dan $\overline{(b,\varepsilon)} = \{(b,y) \in \mathcal{P}_\varepsilon \mid y < b\}$. Ambil sembarang $(a,x), (a,y) \in \overline{(a,\varepsilon)}$ dan $(b,y) \in \overline{(b,\varepsilon)}$ maka:

- $(a,x) \oplus (a,y) = (a \oplus a, x \oplus y) = (a, x \oplus y)$.

Karena $x, y < a$ maka $x \oplus y = maks(x, y) < a$ sehingga $(a, x \oplus y) \in \overline{(a, \varepsilon)}$.

Akibatnya $\overline{(a, \varepsilon)} \oplus \overline{(a, \varepsilon)} = \overline{(a \oplus a, \varepsilon \oplus \varepsilon)} = \overline{(a, \varepsilon)} \in \{\overline{(a, \varepsilon)}\}$;

- $(a, x) \oplus (b, y) = (a \oplus b, x \oplus y)$. Karena $x < a, y < b$ maka $maks(x, y) < maks(a, b)$ sehingga $(a \oplus b, x \oplus y) \in \overline{(a \oplus b, \varepsilon)}$.
  Akibatnya $\overline{(a, \varepsilon)} \oplus \overline{(b, \varepsilon)} = \overline{(a \oplus b, \varepsilon)} \in \{\overline{(a, \varepsilon)}\}$;
- $(a, x) \otimes (a, y) = 2a \oplus x \otimes y, a \otimes y \oplus x \otimes a)$. (3.3.2)
  Karena $x, y < a$ maka $maks(2a, x + y,) = 2a$ dan $maks(a + y, x + a) < 2a$ sehingga (3.3.2) menjadi $(2a, a \otimes y \oplus x \otimes a) \in \overline{(2a, \varepsilon)}$.
  Akibatnya $\overline{(a, \varepsilon)} \otimes \overline{(a, \varepsilon)} = \overline{(a \otimes a, \varepsilon)} = \overline{(2a, \varepsilon)} \in \{\overline{(a, \varepsilon)}\}$;
- $(a, x) \otimes (b, y) = (a \otimes b \oplus x \otimes y, a \otimes y \oplus b \otimes x)$. (3.3.3)
  Karena $x < a, y < b$ maka $maks(a + b, x + y) = a + b$ dan $maks(a + y, b + x) < a + b$ sehingga (3.3.3) memberikan $(a \otimes b, a \otimes y \oplus b \otimes x) \in \overline{(a \otimes b, \varepsilon)}$ akibatnya $\overline{(a, \varepsilon)} \otimes \overline{(b, \varepsilon)} = \overline{(a \otimes b, \varepsilon)} \in \{\overline{(a, \varepsilon)}\}$.

(ii) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\{\overline{(\varepsilon, a)}\}$

Pandang $\overline{(\varepsilon, a)}, \overline{(\varepsilon, b)} \in \{\overline{(\varepsilon, a)}\}$. Berdasarkan Definisi 3.3.1 (ii) $\overline{(\varepsilon, a)} = \{(x, a) \in \mathcal{P}_\varepsilon \mid x < a\}$ dan $\overline{(\varepsilon, b)} = \{(y, b) \in \mathcal{P}_\varepsilon \mid y < b\}$. Untuk sembarang $(x, a), (y, a) \in \overline{(\varepsilon, a)}$ dan $(y, b) \in \overline{(\varepsilon, b)}$ maka:

- $(x, a) \oplus (y, a) = (x \oplus y, a \oplus a) = (x \oplus y, a)$. Karena $x, y < a$ maka $maks(x, y) < a$ sehingga $(x \oplus y, a) \in \overline{(\varepsilon, a)}$. Akibatnya $\overline{(\varepsilon, a)} \oplus \overline{(\varepsilon, a)} = \overline{(\varepsilon, a \oplus a)} = \overline{(\varepsilon, a)} \in \{\overline{(\varepsilon, a)}\}$;
- $(x, a) \oplus (y, b) = (x \oplus y, a \oplus b)$. Karena $x < a, y < b$ maka $maks(x, y) < maks(a, b)$ sehingga $(x \oplus y, a \oplus b) \in \overline{(\varepsilon, a \oplus b)}$.
  Akibatnya $\overline{(\varepsilon, a)} \oplus \overline{(\varepsilon, b)} = \overline{(\varepsilon, a \oplus b,)} \in \{\overline{(\varepsilon, a)}\}$;
- $(x, a) \otimes (y, a) = (x \otimes y \oplus 2a, x \otimes a \oplus a \otimes y)$. (3.3.4)
  Karena $x, y < a$ maka $maks(x + y, 2a) = 2a$ dan $maks(x + a, a + y) < 2a$ sehingga (3.3.4) menjadi

$(2a, x\otimes a\oplus a\otimes y) \in \overline{(2a, \varepsilon)}$. Akibatnya

$\overline{(\varepsilon, a)}\otimes\overline{(\varepsilon, a)} = \overline{(a\otimes a, \varepsilon)} = \overline{(2a, \varepsilon)} \in \{\overline{(a, \varepsilon)}\}$;

- $(x, a)\otimes(y, b) = (x\otimes y\oplus a\otimes b, x\otimes b\oplus a\otimes y)$ (3.3.5)

  Karena $x < a, y < b$ maka $maks(x + y, a + b) = a + b$ dan $maks(x + b, a + y) < a + b$ sehingga (3.3.5) memberikan $(a\otimes b, x\otimes b\oplus a\otimes y) \in \overline{(a\otimes b, \varepsilon)}$. Akibatnya

  $\overline{(\varepsilon, a)}\otimes\overline{(\varepsilon, b)} = \overline{(a\otimes b, \varepsilon)} \in \{\overline{(a, \varepsilon)}\}$.

(iii) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\{\overline{(a, a)}\}$

Pandang $\overline{(a, a)}, \overline{(b, b)} \in \{\overline{(a, a)}\}$. Berdasarkan Definisi 3.3.1 (iii), $\overline{(a, a)} = \{(a, a) \in \mathcal{P}_\varepsilon\}$ dan $\overline{(b, b)} = \{(b, b) \in \mathcal{P}_\varepsilon\}$. Ambil $(a, a) \in \overline{(a, a)}$ dan $(b, b) \in \overline{(b, b)}$ maka:

- $(a, a)\oplus(b, b) = (a\oplus b, a\oplus b) \in \overline{(a\oplus b, a\oplus b)}$.

  Akibatnya $\overline{(a, a)}\oplus\overline{(b, b)} = \overline{(a\oplus b, a\oplus b,)} \in \{\overline{(a, a)}\}$;

- $(a, a)\otimes(b, b) = (a\otimes b\oplus a\otimes b, a\otimes b\oplus a\otimes b) = (a\otimes b, a\otimes b)$. (3.3.6)

  Jelas $(a\otimes b, a\otimes b) \in \overline{(a\otimes b, a\otimes b)}$. Akibatnya

  $\overline{(a, a)}\otimes\overline{(b, b)} = \overline{(a\otimes b, a\otimes b)} \in \{\overline{(a, a)}\}$.

(iv) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\{\overline{(\varepsilon, \varepsilon)}\}$

Pandang $\overline{(\varepsilon, \varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon, \varepsilon)}\}$. Ambil $(\varepsilon, \varepsilon) \in \overline{(\varepsilon, \varepsilon)}$ maka:

- $(\varepsilon, \varepsilon)\oplus(\varepsilon, \varepsilon) = (\varepsilon\oplus\varepsilon, \varepsilon\oplus\varepsilon) = (\varepsilon, \varepsilon) \in \overline{(\varepsilon, \varepsilon)}$.

  Akibatnya $\overline{(\varepsilon, \varepsilon)}\oplus\overline{(\varepsilon, \varepsilon)} = \overline{(\varepsilon, \varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon, \varepsilon)}\}$;

- $(\varepsilon, \varepsilon)\otimes(\varepsilon, \varepsilon) = (\varepsilon, \varepsilon) \in \overline{(\varepsilon, \varepsilon)}$.

  Akibatnya $\overline{(\varepsilon, \varepsilon)}\otimes\overline{(\varepsilon, \varepsilon)} = \overline{(\varepsilon, \varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon, \varepsilon)}\}$.

Pendefinisian berikutnya adalah definisi operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan yang satu dengan himpunan yang lainnya di $\mathbb{S}$.

(v) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\{\overline{(a, \varepsilon)}\}$ dengan $\{\overline{(\varepsilon, a)}\}$

Pandang $\overline{(a, \varepsilon)} \in \{\overline{(a, \varepsilon)}\}$, $\overline{(\varepsilon, a)}, \overline{(\varepsilon, b)} \in \{\overline{(\varepsilon, a)}\}$. Untuk sembarang $(a, x) \in \overline{(a, \varepsilon)}$,$(y, a) \in \overline{(\varepsilon, a)}$ dan $(y, b) \in \overline{(\varepsilon, b)}$ maka:

- $(a,x)\oplus(y,a) = (a\oplus y, x\oplus a).$ (3.3.7)

  Karena $x, y < a$ maka (3.3.7) memberikan $(a,a) \in \overline{(a,a)}$ sehingga $\overline{(a,\varepsilon)}\oplus\overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(a,a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$;

- $(a,x)\oplus(y,b) = (a\oplus y, x\oplus b)$ (3.3.8)

  Untuk $a > b$ (3.3.8) memberikan $(a,x) \in \overline{(a,\varepsilon)}$ atau $(a,b) \in \overline{(a,\varepsilon)}$.

  Untuk $a < b$ (3.3.8) memberikan $(y,b) \in \overline{(\varepsilon,b)}$ atau $(a,b) \in \overline{(\varepsilon,a)}$.

  Sehingga $\overline{(a,\varepsilon)}\oplus\overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(a\oplus\varepsilon, b\oplus\varepsilon)} = \overline{(a,b)}$. Berdasar Akibat 3.3.2 (i)-(ii), $\overline{(a,b)} = \overline{(a,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$ untuk $a > b$ dan $\overline{(a,b)} = \overline{(\varepsilon,b)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$ untuk $a < b$;

- $(a,x)\otimes(y,a) = (a\otimes y\oplus x\otimes a, a\otimes a\oplus x\otimes y).$ (3.3.9)

  Karena $x, y < a$ maka $maks(a + a, x + y) = a + a = 2a$ dan $maks(a + y, x + a) < 2a$ sehingga (3.3..9) $(a\otimes y\oplus x\otimes a, 2a) \in \overline{(\varepsilon, 2a)}$. Akibatnya $\overline{(a,\varepsilon)}\otimes\overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(a\otimes\varepsilon\oplus\varepsilon\otimes a, a\otimes a\oplus\varepsilon\otimes\varepsilon))} = \overline{(\varepsilon,2a)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$;

- $(a,x)\otimes(y,b) = (a\otimes y\oplus x\otimes b, a\otimes b\oplus x\otimes y).$ (3.3.10)

  Karena $x < a, y < b$ maka $maks(a + b, x + y) = a + b$ dan $maks(a + y, x + b) < a + b$ sehingga (3.3.10) memberikan $(a\otimes y\oplus x\otimes b, a\otimes b) \in \overline{(\varepsilon, a\otimes b)}$ dan akibatnya $\overline{(a,\varepsilon)}\otimes\overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(\varepsilon,a\otimes b)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$.

(vi) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\{\overline{(a,\varepsilon)}\}$ dengan $\{\overline{(a,a)}\}$

Pandang $\overline{(a,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$ dan $\overline{(a,a)}, \overline{(b,b)} \in \{\overline{(a,a)}\}$. Ambil sembarang $(a,x) \in \overline{(a,\varepsilon)}, (a,a) \in \overline{(a,a)}$ dan $(b,b) \in \overline{(b,b)}$ maka

- $(a,x)\oplus(a,a) = (a\oplus a, x\oplus a).$ (3.3.11)

  Karena $maks\,(a,a) = a$ dan karena $x < a$ maka (3.2.11) memberikan $(a,a) \in \overline{(a,a)}$ sehingga $\overline{(a,\varepsilon)}\oplus\overline{(a,a)} = \overline{(a,a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$;

- $(a,x)\oplus(b,b) = (a\oplus b, x\oplus b).$ (3.3.12)

  Untuk $a > b$ persamaan (3.3.12) memberikan $(a,x) \in \overline{(a,\varepsilon)}$ atau $(a,b) \in \overline{(a,\varepsilon)}$. Untuk $a < b$ maka persamaan (3.3.12) menjadi $(b,b) \in \overline{(b,b)}$. Sehingga

$\overline{(a,\varepsilon)}\oplus\overline{(b,b)} = \overline{(a\oplus b, b\oplus\varepsilon)} = \overline{(a\oplus b, b)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}\cup\{\overline{(a,a)}\}$;

- $(a,x)\otimes(a,a) = (a\otimes a\oplus x\otimes a, a\otimes a\oplus x\otimes a)$. (3.3.13)

  Karena dan $x < a$ maka $maks\ (a + a, x + a) = a + a = 2a$ sehingga (3.3.13) memberikan $(2a, 2a) \in \overline{(2a, 2a)}$ akibatnya $\overline{(a,\varepsilon)}\otimes\overline{(a,a)} = \overline{(2a,2a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$.

- $(a,x)\otimes(b,b) = (a\otimes b\oplus x\otimes b, a\otimes b\oplus x\otimes b)$. (3.3.14)

  Karena dan $x < a$ maka $maks\ (a + b, x + b) = a + b$ sehingga (3.3.14) memberikan $(a\otimes b, a\otimes b) \in \overline{(a\otimes b, a\otimes b)}$ akibatnya $\overline{(a,\varepsilon)}\otimes\overline{(b,b)} = \overline{(a\otimes b, a\otimes b)} \in \{\overline{(a,a)}\}$.

(vii) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\{\overline{(a,\varepsilon)}\}$ dengan $\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$

Pandang $\overline{(a,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$ dan $\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$. Ambil sembarang $(a,x) \in \overline{(a,\varepsilon)}$ dan $(\varepsilon,\varepsilon) \in \overline{(\varepsilon,\varepsilon)}$ maka:

- $(a,x)\oplus(\varepsilon,\varepsilon) = (a\oplus\varepsilon, x\oplus\varepsilon)$. (3.3.15)

  Karena $a, \varepsilon \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan ε merupakan unsur nol pada operasi $\oplus$ di $\mathbb{R}_\varepsilon$ maka (3.3.15) menjadi $(a,x) \in \overline{(a,\varepsilon)}$ sehingga $\overline{(a,\varepsilon)}\oplus\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(a,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$;

- $(a,x)\otimes(\varepsilon,\varepsilon) = (a\otimes\varepsilon\oplus x\otimes\varepsilon, a\otimes\varepsilon\oplus x\otimes\varepsilon) = (\varepsilon,\varepsilon)$. (3.3.16)

  Karena $(\varepsilon,\varepsilon) \in \overline{(\varepsilon,\varepsilon)}$ maka $\overline{(a,\varepsilon)}\otimes\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$.

(viii) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\{\overline{(\varepsilon,a)}\}$ dengan $\{\overline{(a,a)}\}$

Pandang $\overline{(\varepsilon,a)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$ dan $\overline{(a,a)}, \overline{(b,b)} \in \{\overline{(a,a)}\}$. Ambil sembarang $(x,a) \in \overline{(\varepsilon,a)}, (a,a) \in \overline{(a,a)}, (b,b) \in \overline{(b,b)}$ maka sesuai Definisi 3.1.1

- $(x,a)\oplus(a,a) = (x\oplus a, a\oplus a)$. (3.3.17)

  Karena $x < a$ dan $maks\ (a,a) = a$ maka (3.3.17) memberikan $(a,a) \in \overline{(a,a)}$ sehingga $\overline{(\varepsilon,a)}\oplus\overline{(a,a)} = \overline{(a,a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$;

- $(x,a)\oplus(b,b) = (x\oplus b, a\oplus b)$. (3.3.18)

  Untuk $a > b$ persamaan (3.3.18) memberikan $(x,a) \in \overline{(\varepsilon,a)}$ atau $(b,a) \in \overline{(\varepsilon,a)}$. Untuk $a < b$ maka persamaan (3.3.18) memberikan

$(b,b)\ \in \overline{(b,b)}$. Sehingga $\overline{(\varepsilon,a)}\oplus\overline{(b,b)} = \overline{(b,a\oplus b)} = \overline{(\varepsilon,a)}\cup\overline{(b,b)}$ di mana $\overline{(\varepsilon,a)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\}$ dan $\overline{(b,b)} \in \left\{\overline{(a,a)}\right\}$;

- $(x,a)\otimes(a,a) = (x\otimes a\oplus a\otimes a, x\otimes a\oplus a\otimes a)$. (3.3.19)

  Karena $x < a$ maka $maks\ (x+a, a+a) = a+a = 2a$ sehingga (3.3.19) memberikan $(2a,2a) \in \overline{(2a,2a)}$. Akibatnya $\overline{(a,\varepsilon)}\otimes\overline{(a,a)} = \overline{(2a,2a)} \in \left\{\overline{(a,a)}\right\}$.
- $(x,a)\otimes(b,b) = (x\otimes b\oplus a\otimes b, x\otimes b\oplus a\otimes b)$. (3.3.20)

  Karena $x < a$ maka $maks\ (x+b, a+b) = a+b$ sehingga (3.3.20) memberikan $(a\otimes b, a\otimes b) \in \overline{(a\otimes b, a\otimes b)}$. Akibatnya $\overline{(\varepsilon,a)}\otimes\overline{(b,b)} = \overline{(a\otimes b, a\otimes b)} \in \left\{\overline{(a,a)}\right\}$.

(ix) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\}$ dengan $\left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}$

Pandang $\overline{(\varepsilon,a)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\}, \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}$. Ambil sembarang $(x,a) \in \left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\}, (\varepsilon,\varepsilon) \in \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}$ maka sesuai Definisi 3.1.1

- $(x,a)\oplus(\varepsilon,\varepsilon) = (x\oplus\varepsilon, a\oplus\varepsilon)$. (3.3.22)

  Karena $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan ε merupakan unsur nol untuk operasi $\oplus$ di $\mathbb{R}_\varepsilon$ maka (3.3.22) memberikan $(x,a) \in \overline{(\varepsilon,a)}$ sehingga $\overline{(\varepsilon,a)}\oplus\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,a)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\}$;
- $(x,a)\otimes(\varepsilon,\varepsilon) = (x\otimes\varepsilon\oplus a\otimes\varepsilon, x\otimes\varepsilon\oplus a\otimes\varepsilon)$. (3.3.23)

  Karena ε merupakan unsur penyerap untuk operasi $\otimes$ di $\mathbb{R}_\varepsilon$ maka (3.3.23) memberikan $(\varepsilon,\varepsilon)$ sehingga $\overline{(\varepsilon,a)}\otimes\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}$.

(x) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\left\{\overline{(a,a)}\right\}$ dengan $\left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}$

Pandang $\overline{(a,a)} \in \left\{\overline{(a,a)}\right\}$, dan $\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}$.

Ambil $(a,a) \in \overline{(a,a)}$ dan $(\varepsilon,\varepsilon) \in \overline{(\varepsilon,\varepsilon)}$ maka sesuai Definisi 3.1.1

- $(a,a)\oplus(\varepsilon,\varepsilon) = (a\oplus\varepsilon, a\oplus\varepsilon) = (a,a)$. (3.3.24)

  maka (3.3.24) memberikan $(a,a) \in \overline{(a,a)}$ sehingga $\overline{(a,a)}\oplus\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(a,a)} \in \left\{\overline{(a,a)}\right\}$;
- $(a,a)\otimes(\varepsilon,\varepsilon) = (a\otimes\varepsilon\oplus a\otimes\varepsilon, a\otimes\varepsilon\oplus a\otimes\varepsilon) = (\varepsilon,\varepsilon)$. (3.3.25)

  Karena $(\varepsilon,\varepsilon) \in \overline{(\varepsilon,\varepsilon)}$ maka $\overline{(a,a)}\otimes\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}$.

Berdasarkan uraian (i) - (x) di atas, dapat disimpulkan bahwa operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada kelas-kelas ekivalen yang merupakan elemen $\mathbb{S}$ seperti yang dideskripsikan pada tabel berikut.

Tabel 3.3.1 Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{S}$

No	Himpunan	Operasi $\oplus$	Operasi $\otimes$
Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada suatu himpunan di $\mathbb{S}$			
1	$\{\overline{(a,\varepsilon)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(a,\varepsilon)} = \overline{(a,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(a,\varepsilon)} = \overline{(2a,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(b,\varepsilon)} = \overline{(a\oplus b,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(b,\varepsilon)} = \overline{(a\otimes b,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$
2	$\{\overline{(\varepsilon,a)}\}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(\varepsilon,a)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(\varepsilon,2a)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$
		$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(\varepsilon,a\oplus b)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(\varepsilon,a\otimes b)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$
3	$\{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(a,a)} \oplus \overline{(a,a)} = \overline{(a,a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(a,a)} \otimes \overline{(a,a)} = \overline{(2a,2a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$
		$\overline{(a,a)} \oplus \overline{(b,b)} = \overline{(a\oplus b,a\oplus b)} \in \{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(a,a)} \otimes \overline{(b,b)} = \overline{(a\otimes b,a\otimes b)} \in \{\overline{(a,a)}\}$
4	$\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$	$\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$	$\overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \otimes \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$

(Sambungan)

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan yang satu dengan himpunan yang lainnya di $\mathbb{S}$			
5	$\{\overline{(a,\varepsilon)}\}$ dan $\{\overline{(\varepsilon,a)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(a,a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(\varepsilon,2a)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(a,b)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\} \cup \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(\varepsilon,a\otimes b)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$
6	$\{\overline{(a,\varepsilon)}\}$ dan $\{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(a,a)} = \overline{(a,a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(a,a)} = \overline{(2a,2a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(b,b)} = \overline{(a\oplus b,b)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\} \cup \{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(b,b)} = \overline{(a\otimes b,a\otimes b)} \in \{\overline{(a,a)}\}$
7	$\{\overline{(a,\varepsilon)}\}$ dan $\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(a,\varepsilon)} \in \{\overline{(a,\varepsilon)}\}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$
8	$\{\overline{(\varepsilon,a)}\}$ dan $\{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(a,a)} = \overline{(a,a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(a,a)} = \overline{(2a,2a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$
		$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(b,b)} = \overline{(b,a\oplus b)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\} \cup \{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(b,b)} = \overline{(a\otimes b,a\otimes b)} \in \{\overline{(a,a)}\}$
9	$\{\overline{(\varepsilon,a)}\}$ dan $\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,a)} \in \{\overline{(\varepsilon,a)}\}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$
10	$\{\overline{(a,a)}\}$ dan $\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$	$\overline{(a,a)} \oplus \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(a,a)} \in \{\overline{(a,a)}\}$	$\overline{(a,a)} \otimes \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \in \{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\}$

Pada Tabel 3.1.1 telah ditunjukkan bahwa operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{S}$ memenuhi sifat tertutup. Selanjutnya pada Tabel 3.1.1 terdapat bahwa

$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(b,\varepsilon)} = \overline{(a \oplus b,\varepsilon)}$ dan $\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(b,\varepsilon)} = \overline{(a \otimes b,\varepsilon)}$ sehingga untuk penyederhanaan $\overline{(a,\varepsilon)}$ dapat diasosiasikan sebagai a, ditulis

$$\overline{(a,\varepsilon)} \equiv a \tag{3.3.26}$$

sehingga

$$\left\{\overline{(a,\varepsilon)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\} \equiv \{a \mid \forall a \in \mathbb{R}_\varepsilon\} \tag{3.3.27}$$

dan disebut dengan himpunan kelas positif atau kelas nol *max-plus*, dinotasikan dengan $\mathbb{S}^\oplus$. Akibatnya $\mathbb{R}_\varepsilon$ dapat diidentifikasikan sebagai himpunan $\mathbb{S}^\oplus$.

Jika $\overline{(a,\varepsilon)}$ diasosiakan sebagai a maka $\overline{(\varepsilon,a)}$ dan $\overline{(a,a)}$ dapat juga diasosiasikan sebagai suatu elemen di $\mathbb{R}_\varepsilon$. Dengan menggunakan formula pada Definisi 3.1.3 (ii)-(iii) maka untuk setiap $(a,x) \in \mathcal{P}_\varepsilon$ dan $(a,x) \in \overline{(a,\varepsilon)}$ didapat:

(i) $\ominus\,(a,x) = (x,a) \in \overline{(\varepsilon,a)}$. Pada Definisi 3.3.1 (i) dan Formula 3.3.26 dijelaskan bahwa $\overline{(a,\varepsilon)} = \{(a,x) \in \mathcal{P}_\varepsilon \mid x < a\} \equiv a$ sehingga

$\ominus\,\overline{(a,\varepsilon)} = \ominus\,\{(a,x) \in \mathcal{P}_\varepsilon\} = \{(x,a) \in \mathcal{P}_\varepsilon\} = \overline{(\varepsilon,a)} \equiv \ominus\, a.$

Tulis

$$\overline{(\varepsilon,a)} \equiv \ominus\, a; \tag{3.3.28}$$

Karena $\overline{(\varepsilon,a)} \in \left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\}$ maka $\left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\} \equiv \{\ominus\, a \mid \forall a \in \mathbb{S}^\oplus\}$ dan disebut himpunan elemen negatif *max-plus* atau kelas nol *max-plus*, dinotasikan dengan $\mathbb{S}^\ominus$.

(ii) $$(a,x)^\bullet = (a \oplus x, a \oplus x). \tag{3.3.29}$$

Karena $(a,x) \in \overline{(a,\varepsilon)}$ maka sesuai Definisi 3.3.1 (i) diketahui $x < a$ sehingga (3.3.29) menjadi $(a,a) \in \overline{(a,a)}$. Pada Definisi 3.3.1 (i) dan Formula 3.3.26 telah diterangkan bahwa $\overline{(a,\varepsilon)} = \{(a,x) \in \mathcal{P}_\varepsilon\} \equiv a$ sehingga

$\overline{(a,\varepsilon)}^\bullet = \{(a,x) \in \mathcal{P}_\varepsilon\}^\bullet = \{(a,x)^\bullet \in \mathcal{P}_\varepsilon\} = \{(a,a) \in \mathcal{P}_\varepsilon\} \equiv a^\bullet$. Tulis

$$\overline{(a,a)} \equiv a^\bullet. \tag{3.3.30}$$

Karena $\overline{(a,a)} \in \left\{\overline{(a,a)}\right\}$ maka $\left\{\overline{(a,a)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\} \equiv \{a^\bullet \mid a \in \mathbb{R}_\varepsilon\}$ dan disebut himpunan elemen seimbang, dinotasikan dengan $\mathbb{S}^\bullet$.

Penggabungan $\mathbb{S}^\oplus, \mathbb{S}^\ominus, \mathbb{S}^\bullet$ memberikan

$$\mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet} = \left[\left\{\overline{(a,\varepsilon)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}\right] \cup \left[\left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}\right] \cup \left[\left\{\overline{(a,a)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}\right]$$

$$= \left\{\overline{(a,\varepsilon)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,a)}\right\} \cup \left\{\overline{(a,a)}\right\} \cup \left\{\overline{(\varepsilon,\varepsilon)}\right\}. \qquad (3.3.31)$$

Himpunan pada (3.3.31) adalah sama dengan himpunan pada (3.3.1) sehingga himpunan $\mathbb{S}$ dapat dinyatakan menjadi

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}. \qquad (3.3.32)$$

Berdasarkan Formula (3.3.26), (3.3.28), dan (3.3.30) diperoleh bahwa elemen-elemen himpunan $\mathbb{S}$ adalah

$$\mathbb{S} = \left\{a \mid a \in \mathbb{R}_{\varepsilon}\right\} \cup \left\{\ominus a \mid a \in \mathbb{R}_{\varepsilon}\right\} \cup \left\{a^{\bullet} \mid a \in \mathbb{R}_{\varepsilon}\right\}. \qquad (3.3.33)$$

Gabungan $\mathbb{S}^{\oplus}$ dan $\mathbb{S}^{\ominus}$ membentuk himpunan $\mathbb{S}^{\vee}$ dan elemen-elemen pada himpunan $\mathbb{S}^{\vee}$ disebut dengan *signed*. Elemen bersama dari himpunan $\mathbb{S}^{\oplus}, \mathbb{S}^{\ominus}$, dan $\mathbb{S}^{\bullet}$ adalah

$$\mathbb{S}^{\oplus} \cap \mathbb{S}^{\ominus} \cap \mathbb{S}^{\bullet} = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)} \equiv \varepsilon \qquad (3.3.34)$$

Sehingga

$$\varepsilon = \ominus \varepsilon = \varepsilon^{\bullet}. \qquad (3.3.35)$$

Himpunan $\mathbb{S}$ pada (3.3.33) merupakan perubahan bentuk dari himpunan $\mathbb{S}$ pada (3.1.1). Untuk penggunaan notasi pada pembahasan selanjutnya akan digunakan himpunan $\mathbb{S}$ pada (3.3.33) sehingga operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{S}$ tidak dilakukan dengan mengoperasikan kelas-kelas ekivalen tetapi dengan mengoperasikan elemen-elemen yang telah diasosiasikan. Pada tabel berikut ini akan dideskripsikan ketersesuaian antara operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{S}$ yang elemen-elemennya belum diasosiasikan dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang elemen-elemennya telah diasosiasikan. Terlebih dahulu dideskripsikan operasi $\oplus$ pada himpunan $\mathbb{S}$.

Tabel 3.3.2 Operasi $\oplus$ pada himpunan $\mathbb{S}$

No	Himpunan	sebelum asosiasi (terdapat pada tabel 3.3.1)	setelah asosiasi
Operasi $\oplus$ pada suatu himpunan di $\mathbb{S}$			
1	$\mathbb{S}^{\oplus}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(a,\varepsilon)} = \overline{(a,\varepsilon)}$	$a \oplus a = a$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(b,\varepsilon)} = \overline{(a \oplus b,\varepsilon)}$	$a \oplus b = a \oplus b$
2	$\mathbb{S}^{\ominus}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(\varepsilon,a)}$	$\ominus a \oplus (\ominus a) = \ominus a$
		$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(\varepsilon,a \oplus b)}$	$\ominus a \oplus (\ominus b) = \ominus (a \oplus b)$
3	$\mathbb{S}^{\bullet}$	$\overline{(a,a)} \oplus \overline{(a,a)} = \overline{(a,a)}$	$a^{\bullet} \oplus a^{\bullet} = a^{\bullet}$
		$\overline{(a,a)} \oplus \overline{(b,b)} = \overline{(a \oplus b, a \oplus b)}$	$a^{\bullet} \oplus b^{\bullet} = (a \oplus b)^{\bullet}$
Operasi $\oplus$ pada himpunan yang satu dengan himpunan yang lainnya di $\mathbb{S}$			
5	$\mathbb{S}^{\oplus}$ dan $\mathbb{S}^{\ominus}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(a,a)}$	$a \oplus (\ominus a) = a^{\bullet}$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(a,b)}$	$a \oplus (\ominus b) = \begin{cases} a \; untuk \; a > b \\ \ominus b \; untuk \; a < b \end{cases}$
6	$\mathbb{S}^{\oplus}$ dan $\mathbb{S}^{\bullet}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(a,a)} = \overline{(a,a)}$	$a \oplus a^{\bullet} = a^{\bullet}$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \oplus \overline{(b,b)} = \overline{(a \oplus b,b)}$	$a \oplus b^{\bullet} = \begin{cases} a \; untuk \; a > b \\ b^{\bullet} \; untuk \; a < b \end{cases}$
7	$\mathbb{S}^{\ominus}$ dan $\mathbb{S}^{\bullet}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(a,a)} = \overline{(a,a)}$	$\ominus a \oplus a^{\bullet} = a^{\bullet}$
		$\overline{(\varepsilon,a)} \oplus \overline{(b,b)} = \overline{(b,a \oplus b)}$	$\ominus a \oplus b^{\bullet} = \begin{cases} \ominus a \; untuk \; a > b \\ b^{\bullet} \; untuk \; a < b \end{cases}$

Selanjutnya akan diberikan perbandingan operasi $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{S}$ yang elemennya belum diasosiasikan dengan operasi $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{S}$ yang elemennya telah diasosiasikan.

Tabel 3.3.3 Operasi $\otimes$ pada $\mathbb{S}$

No	Himpunan	Sebelum asosiasi (terdapat pada tabel 3.3.1)	setelah asosiasi
Operasi $\oplus$ pada suatu himpunan di $\mathbb{S}$			
1	$\mathbb{S}^{\oplus}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(a,\varepsilon)} = \overline{(2a,\varepsilon)}$	$a \otimes a = 2a$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(b,\varepsilon)} = \overline{(a\otimes b,\varepsilon)}$	$a \otimes b = a \otimes b$
2	$\mathbb{S}^{\ominus}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(2a,\varepsilon)}$	$\ominus a \otimes (\ominus a) = 2a$
		$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(a\otimes b,\varepsilon)}$	$\ominus a \otimes (\ominus b) = a \otimes b$
3	$\mathbb{S}^{\bullet}$	$\overline{(a,a)} \otimes \overline{(a,a)} = \overline{(2a,2a)}$	$a^{\bullet} \otimes a^{\bullet} = 2a^{\bullet}$
		$\overline{(a,a)} \otimes \overline{(b,b)} = \overline{(a\oplus b,a\oplus b)}$	$a^{\bullet} \otimes b^{\bullet} = (a\otimes b)^{\bullet}$
Operasi $\otimes$ pada himpunan yang satu dengan himpunan yang lainnya di $\mathbb{S}$			
4	$\mathbb{S}^{\oplus}$ dan $\mathbb{S}^{\ominus}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(\varepsilon,a)} = \overline{(\varepsilon,2a)}$	$a \otimes (\ominus a) = \ominus (2a)$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(\varepsilon,b)} = \overline{(a,b)}$	$a \otimes (\ominus b) = \ominus (a\otimes b)$
5	$\mathbb{S}^{\oplus}$ dan $\mathbb{S}^{\bullet}$	$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(a,a)} = \overline{(2a,2a)}$	$a \otimes a^{\bullet} = (2a)^{\bullet}$
		$\overline{(a,\varepsilon)} \otimes \overline{(b,b)} == \overline{(a\otimes b,a\otimes b)}$	$a\otimes b^{\bullet} = (a\otimes b)^{\bullet}$
6	$\mathbb{S}^{\ominus}$ dan $\mathbb{S}^{\bullet}$	$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(a,a)} = \overline{(2a,2a)}$	$\ominus a\otimes a^{\bullet} = (2a)^{\bullet}$
		$\overline{(\varepsilon,a)} \otimes \overline{(b,b)} = \overline{(a\otimes b,a\otimes b)}$	$\ominus a\otimes b^{\bullet} = (a\otimes b)^{\bullet}$

Contoh 3.3.4

(i) $\overline{(-4,\varepsilon)} \oplus \overline{(10,\varepsilon)} \equiv -4 \oplus 10 = 10$

(ii) $\overline{(3,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,5)} \equiv 3 \oplus (\ominus 5) = \ominus 5$

(iii) $\overline{(2,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,1)} \equiv 2 \oplus (\ominus 1) = 2$

(iv) $\overline{(4,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,4)} \equiv 4 \oplus (\ominus 4) = 4^{\bullet}$

(v) $\overline{(3,\varepsilon)} \otimes \overline{(\varepsilon,5)} \equiv 3 \otimes (\ominus 5) = \ominus 8.$

Pendefinisian operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{S}$ menggunakan Definisi 3.1.1 sehingga semua sifat yang terdapat pada Lemma 3.1.2 berlaku pada himpunan $\mathbb{S}$. Sifat-sifat elemen yang bertanda $\ominus$ dan $(.)^{\bullet}$, yaitu semua elemen yang terdapat pada $\mathbb{S}^{\ominus}$ dan $\mathbb{S}^{\bullet}$ akan dijelaskan pada lemma berikut.

Lemma 3.3.5 Untuk setiap $a, b \in \mathbb{S}^{\oplus}$ maka

(i) $a^{\bullet} = (\ominus a)^{\bullet} = a^{\bullet\bullet}$;

(ii) $a \otimes b^{\bullet} = (a \otimes b)^{\bullet}$;

(iii) $\ominus (\ominus a) = a$;

(iv) $\ominus (a \oplus b) = (\ominus a) \oplus (\ominus b)$;

(v) $\ominus (a \otimes b) = (\ominus a) \otimes b = a \otimes (\ominus b)$.

(Schutter, 1996).

Bukti

(i) $(\ominus a)^{\bullet} \equiv \overline{(\varepsilon, a)}^{\bullet} = \overline{(\varepsilon \oplus a, \varepsilon \oplus a)} = \overline{(a, a)} \equiv a^{\bullet}$ dan

$a^{\bullet\bullet} = \overline{(a, a)}^{\bullet} = \overline{(a \oplus a, a \oplus a)} = \overline{(a, a)} = a^{\bullet}$;

(ii) $a \otimes b^{\bullet} = \overline{(a, \varepsilon)} \otimes \overline{(b, b)} = \overline{(a \otimes b \oplus \varepsilon \otimes b, a \otimes b \oplus \varepsilon \otimes b)} =$

$\overline{\big((a \oplus \varepsilon) \otimes b, (a \oplus \varepsilon) \otimes b\big)} = \overline{(a \otimes b, a \otimes b)} \equiv (a \otimes b)^{\bullet}$;

(iii) $\ominus (\ominus a) = \ominus \overline{(\varepsilon, a)} = \overline{(a, \varepsilon)} = a$;

(iv) $\ominus (a \oplus b) = \ominus \overline{(a \oplus b, \varepsilon)} = \overline{(\varepsilon, a \oplus b)} = \overline{(\varepsilon \oplus \varepsilon, a \oplus b)} =$

$\overline{(\varepsilon, a)} \oplus \overline{(\varepsilon, b)} \equiv \ominus a \oplus (\ominus b)$;

(v) $\ominus (a \otimes b) = \ominus \overline{(a \otimes b, \varepsilon)} = \overline{(\varepsilon, a \otimes b)} =$

$$\begin{cases} \overline{(a \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes b, a \otimes b \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon)} = \overline{(a, \varepsilon) \otimes (\varepsilon, b)} = \overline{(a, \varepsilon)} \otimes \overline{(\varepsilon, b)} \equiv a \otimes (\ominus b) \\ \overline{(\varepsilon \otimes b \oplus a \otimes \varepsilon, \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus a \otimes b)} = \overline{(\varepsilon, a) \otimes (b, \varepsilon)} = \overline{(\varepsilon, a)} \otimes \overline{(b, \varepsilon)} \equiv (\ominus a) \otimes b \end{cases}$$

Lemma terbukti. ■

Sifat-sifat pada Lemma 3.3.5 ini sama dengan sifat-sifat yang berlaku pada $\mathcal{P}_{\varepsilon}$, seperti telah dijelaskan pada Lemma 3.1.4. Lemma 3.3.5 (i)-(ii) menunjukkan bahwa $(\cdot)^{\bullet}$ pada himpunan $\mathbb{S}$ memiliki sifat penyerapan. Sedangkan Lemma 3.3.5 (iii)-(v) menunjukkan bahwa $\ominus$ pada himpunan $\mathbb{S}$ memiliki sifat yang sama dengan $-$ pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ (Bart De Schutter, 1996). Perbandingan kedua operator ini dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.3.4 Perbandingan operator $-$ di $\mathbb{R}$ dan operator $\ominus$ di $\mathbb{S}$

Operator $-$ pada $\mathbb{R}$	Operator $\ominus$ pada $\mathbb{S}$
$-(-a) = a$	$\ominus(\ominus a) = a$
$-(a+b) = -a + (-b)$	$\ominus(a \oplus b) = \ominus a \oplus (\ominus b)$
$-a + (-b) = -(a+b)$	$\ominus a \oplus (\ominus) b = \ominus(a \oplus b)$
$a + (-b) = a - b$ jika $a > b$	$a \oplus (\ominus b) = a \ominus b = a$ jika $a > b$
$a + (-b) = -(b-a)$ jika $a < b$	$a \oplus (\ominus b) = a \ominus b = \ominus b$ jika $a < b$
$-(a \times b) = -a \times b = a \times (-b)$	$\ominus(a \otimes b) = \ominus a \otimes b = a \otimes (\ominus b)$
$-a \times (-b) = a \times b$	$\ominus a \otimes (\ominus) b = a \otimes b$
$a + (-a) = a - a = 0$	$a \oplus (\ominus a) = a \ominus a = a^{\bullet}$

Contoh 3.3.6

(i) $\ominus(-2 \otimes 11^{\bullet}) = \ominus(9^{\bullet}) = 9^{\bullet} = \ominus 2 \otimes 11^{\bullet} = \ominus 2 \otimes \ominus 11^{\bullet}$

(ii) $2 \oplus (\ominus 5 \oplus 4) = 2 \oplus (\ominus 5) = \ominus 5$

(iii) $(2 \oplus \ominus 5) \oplus 4 = \ominus 5 \oplus 4 = \ominus 5$

(iv) $1 \otimes (3 \oplus 6^{\bullet}) = 1 \otimes 6^{\bullet} = 7^{\bullet}$

(v) $(1 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 6^{\bullet}) = 4 \oplus 7^{\bullet} = 7^{\bullet}$

Setelah membahas operasi-operasi dan contoh-contoh operasi pada himpunan $\mathbb{S}$, pada subbab berikut akan dibahas relasi seimbang pada himpunan $\mathbb{S}$.

3.4 Relasi Seimbang dan Sifat-Sifatnya pada Himpunan $\mathbb{S}$

Pada Subbab 3.2 telah diterangkan relasi seimbang pada himpunan $\mathcal{P}_\varepsilon$. Oleh karena pada $\mathcal{P}_\varepsilon$, maka relasi seimbang yang terdapat pada Definisi 3.2.1 adalah relasi seimbang antara pasangan terurut yang satu dengan pasangan terurut yang lainnya. Pada subbab ini akan dibahas relasi seimbang antar elemen pada himpunan $\mathbb{S}$ yang dinyatakan pada (3.3.33) dan sifat-sifat relasi seimbang tersebut. Sebelumnya akan diterangkan kondisi berikut ini:

(i) ambil sembarang $a \in \mathbb{S}^{\oplus}$. Pada Formula 3.3.26 telah diketahui bahwa $\overline{(a,\varepsilon)} \equiv a$. Bilangan a pada $\overline{(a,\varepsilon)}$ disebut dengan $a^{\oplus}$ dari $a \in \mathbb{S}^{\oplus}$ dan bilangan ε pada $\overline{(a,\varepsilon)}$ disebut dengan $a^{\ominus}$ dari $a \in \mathbb{S}^{\oplus}$;

(ii) ambil sembarang $a \in \mathbb{S}^{\ominus}$. Nyatakan $a = \ominus\, p$ sehingga sesuai Formula 3.3.28 didapat $\overline{(\varepsilon,p)} \equiv \ominus\, p = a$. Bilangan ε pada $\overline{(\varepsilon,p)}$ disebut dengan $a^{\oplus}$ dari $a \in \mathbb{S}^{\ominus}$ dan bilangan p pada $\overline{(\varepsilon,p)}$ disebut dengan $a^{\ominus}$ dari $a \in \mathbb{S}^{\ominus}$. Berdasarkan sifat operator $\ominus$ maka $p = \ominus\,(\ominus\, p) = \ominus\, a$ sehingga $a^{\ominus}$ dari a dapat juga dinyatakan sebagai $\ominus\, a$;

(iii) ambil sembarang $a \in \mathbb{S}^{\bullet}$. Nyatakan $a = p^{\bullet}$ sehingga sesuai Formula 3.3.30 didapat bahwa $\overline{(p,p)} \equiv p^{\bullet} = a$. Bilangan p yang merupakan komponen pertama pada $\overline{(p,p)}$ disebut dengan $a^{\oplus}$ dari $a \in \mathbb{S}^{\bullet}$ dan bilangan p yang merupakan komponen kedua pada $\overline{(p,p)}$ disebut dengan $a^{\ominus}$ dari $a \in \mathbb{S}^{\bullet}$.

Berdasarkan uraian (i)–(iii) di atas, $a^{\oplus}$ menotasikan bagian positif dari $a \in \mathbb{S}$ dan $a^{\ominus}$ menotasikan bagian negatif dari $a \in \mathbb{S}$. Uraian di atas akan diringkas pada definisi di bawah ini.

Definisi 3.4.1 Pandang $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$ dan $a \in \mathbb{S}$,

(i) jika $a \in \mathbb{S}^{\oplus}$ maka $a^{\oplus} = a$ dan $a^{\ominus} = \varepsilon$;

(ii) jika $a \in \mathbb{S}^{\ominus}$ maka $a^{\oplus} = \varepsilon$ dan $a^{\ominus} = \ominus\, a$;

(iii) jika $a \in \mathbb{S}^{\bullet}$ maka terdapat bilangan $p \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$ sedemikian sehingga $a = p^{\bullet}$ dan $a^{\oplus} = a^{\ominus} = p$

(Schutter, 1996).

Akibat 3.4.2 Pandang $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$. Untuk setiap $a \in \mathbb{S}$ maka:

(i) $a^{\oplus}, a^{\ominus} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$;

(ii) $a = a^{\oplus} \ominus a^{\ominus}$;

(iii) $|a| = a^{\oplus} \oplus a^{\ominus}$.

Dengan menggunakan kondisi pada Definisi 3.4.1 akan diberikan definisi relasi seimbang ∇ pada himpunan $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$.

Definisi 3.4.3 Diberikan $a, b \in \mathbb{S}$. $a \nabla b$ jika dan hanya jika $a^{\oplus} \oplus b^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus b^{\oplus}$ (Schutter, 1996).

Pada Akibat 3.4.2 telah diketahui bahwa $a^{\oplus}, b^{\ominus}, a^{\ominus}, b^{\oplus} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$ sehingga $(a^{\oplus}, a^{\ominus}), (b^{\oplus}, b^{\ominus}) \in \mathcal{P}_{\varepsilon}$. Berdasarkan Definisi 3.1.6, persamaaan yang terdapat pada Definisi 3.4.3 memiliki pengertian bahwa

$$(a^{\oplus}, a^{\ominus}) \nabla (b^{\oplus}, b^{\ominus}). \tag{3.4.1}$$

Jika $a, b \in \mathbb{S}^{\oplus}$ maka (3.4.1) menjadi

$$(a, \varepsilon) \nabla (b, \varepsilon). \tag{3.4.2}$$

Karena $(a, \varepsilon) \in \overline{(a, \varepsilon)}$ di mana $\overline{(a, \varepsilon)} \equiv a$ dan $(b, \varepsilon) \in \overline{(b, \varepsilon)}$ di mana $\overline{(b, \varepsilon)} \equiv b$ maka (3.4.2) dan (3.4.1) menjadi

$$a \nabla b. \tag{3.4.3}$$

Jika $a, b \in \mathbb{S}^{\ominus}$ maka terlebih dahulu nyatakan $a = \ominus\, p$ dan $b = \ominus\, q$ sehingga (3.4.1) menjadi

$$(\varepsilon, p) \nabla (\varepsilon, q). \tag{3.4.4}$$

Karena $(\varepsilon, p) \in \overline{(\varepsilon, p)}$ di mana $\overline{(\varepsilon, p)} \equiv \ominus\, p = a$ dan $(\varepsilon, q) \in \overline{(\varepsilon, q)}$ di mana $\overline{(\varepsilon, q)} \equiv \ominus\, q = b$ maka (3.4.4) dan (3.4.1) menjadi

$$a \nabla b. \tag{3.4.5}$$

Jika $a, b \in \mathbb{S}^{\bullet}$ maka terlebih dahulu nyatakan $a = p^{\bullet}$ dan $b = q^{\bullet}$ sehingga (3.4.1)

$$(p, p) \nabla (q, q). \tag{3.4.6}$$

Karena $(p, p) \in \overline{(p, p)}$ di mana $\overline{(p, p)} \equiv p^{\bullet} = a$ dan $(q, q) \in \overline{(q, q)}$ di mana $\overline{(q, q)} \equiv q^{\bullet} = b$ maka (3.4.6) dan (3.4.1) menjadi

$$a \nabla b. \tag{3.4.7}$$

Dengan membandingkan (3.4.1) terhadap (3.4.3) , (3.4.5), dan (3.4.7) dapat disimpulkan bahwa relasi ∇ pada $\mathbb{S}$ memiliki pengertian yang sama dengan relasi ∇ pada $\mathcal{P}_{\varepsilon}$, sehingga Definisi 3.4.3 merupakan reformulasi dari Definisi 3.1.6. Hal lain yang dapat diterangkan dari Definisi 3.4.3 dijelaskan pada Lemma di bawah ini.

Akibat 3.4.4 Pandang $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$ dan $a, b \in \mathbb{S}$ maka:

(i) $a \nabla \varepsilon$ untuk setiap $a \in \mathbb{S}^{\bullet}$;

(ii) $a \not\nabla\ \varepsilon$ untuk setiap $a \in \mathbb{S}^{\vee}$;

(iii) $a \nabla b$ untuk setiap $a = b$ di $\mathbb{S}^{\vee}$ atau untuk setiap $a, b \in \mathbb{S}^{\bullet}$ atau untuk setiap $a \in \mathbb{S}^{\bullet}$ di mana $|a| \geq |b|$.

Contoh 3.4.5

(i) Diketahui $a = \ominus 4$. Tentukan $|a|$!

(ii) Tunjukkan $1 \nabla 6^{\bullet}$!

(iii) Tunjukkan $3 \not\nabla \ominus e$

Penyelesaian

(i) $a = \ominus 4 \in \mathbb{S}^{\ominus}$ maka $a^{\oplus} = \varepsilon$ dan $a^{\ominus} = 4$ sehingga $|a| = \varepsilon \oplus 4 = 4$.

(ii) Karena $1 \in \mathbb{S}^{\oplus}$ maka $1^{\oplus} = 1$ dan $1^{\ominus} = \varepsilon$. Karena $6^{\bullet} \in \mathbb{S}^{\bullet}$ maka $(6^{\bullet})^{\oplus} = (6^{\bullet})^{\ominus} = 6$. Sehingga

$1^{\oplus} \oplus (6^{\bullet})^{\ominus} = 1 \oplus 6 = 6 = \varepsilon \oplus 6 = 1^{\ominus} \oplus (6^{\bullet})^{\oplus}$. Benar bahwa $1 \nabla 6^{\bullet}$.

(iii) $3 \in \mathbb{S}^{\oplus}$ maka $3^{\oplus} = 3$, $3^{\ominus} = \varepsilon$ dan $\ominus e \in \mathbb{S}^{\ominus}$ maka

$(\ominus e)^{\oplus} = \varepsilon, (\ominus e)^{\ominus} = e$.

Karena $3^{\oplus} \oplus (\ominus e)^{\ominus} = 3 \neq \varepsilon = 3^{\ominus} \oplus (\ominus e)^{\oplus}$ maka $3 \not\nabla \ominus e$.

Relasi seimbang ∇ pada $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ memiliki sifat refleksif dan simetris. Hal ini telah diterangkan pada pembuktian Lemma 3.2.1. Pada penjelasan Definisi 3.4.3 telah diterangkan bahwa relasi ∇ pada $\mathbb{S}$ merupakan reformulasi dari relasi ∇ pada $\mathcal{P}_{\varepsilon}$. Lemma berikut menjelaskan sifat-sifat relasi ∇ pada $\mathbb{S}$.

Teorema 3.4.6 Relasi ∇ pada himpunan $\mathbb{S}$ memiliki sifat-sifat berikut:

(i) refleksif: $a \nabla a$;

(ii) simetris: $a \nabla b \Leftrightarrow b \nabla a$;

(iii) $a \nabla b \Leftrightarrow a \ominus b \nabla \varepsilon$;

(iv) $\{a \nabla b, c \nabla d\} \Rightarrow a \oplus c\ \nabla\ b \oplus d$;

(v) $a \nabla b \Rightarrow a \otimes c \nabla b \otimes c$

(Baccelli, et al., 2001).

Bukti Pembuktian teorema ini berdasarkan Definisi 3.4.1 dan Definisi 3.4.3.

(i) Akan ditunjukkan $a^{\oplus} \oplus a^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus a^{\oplus}$. Telah diketahui

$a^{\oplus}, a^{\ominus} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$. Karena $\oplus$ di $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ bersifat komutatif maka benar bahwa $a^{\oplus} \oplus a^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus a^{\oplus}$. Terbukti $a \nabla a$;

(ii) $\Rightarrow$akan dibuktikan bahwa $a \nabla b \Rightarrow b \nabla a$. $a \nabla b$ maka $a^{\oplus} \oplus b^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus b^{\oplus}$ Karena $\oplus$ di $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ bersifat komutatif maka $a^{\oplus} \oplus b^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus b^{\oplus}$ dapat ditulis menjadi $b^{\oplus} \oplus a^{\ominus} = b^{\ominus} \oplus a^{\oplus}$ sehingga hal ini menunjukkan $b \nabla a$. Dengan cara yang similar dapat dibuktikan bahwa $b \nabla a \Rightarrow a \nabla b$;

(iii) akan dibuktikan bahwa $a \ominus b \nabla \varepsilon \Rightarrow b \nabla a$. Karena $a \ominus b \nabla \varepsilon$ maka sesuai Akibat 3.4.4 jelas bahwa $a \ominus b \in \mathbb{S}^{\bullet}$ sehingga $b = a$. Karena $\oplus$ di $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ bersifat komutatif maka $a^{\oplus} \oplus a^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus a^{\oplus}$. Karena $b = a$ maka $a^{\oplus} \oplus b^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus b^{\oplus}$, sehingga $a \nabla b$. Dengan cara yang similar dapat dibuktikan bahwa $a \nabla b \Rightarrow a \ominus b \nabla \varepsilon$;

(iv) $a \nabla b$ dan $c \nabla d$ memiliki definisi berturut-turut:

$$a^{\oplus} \oplus b^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus b^{\oplus} \tag{3.4.8}$$

$$c^{\oplus} \oplus d^{\ominus} = c^{\ominus} \oplus d^{\oplus}\ . \tag{3.4.9}$$

Dengan menambahkan $c^{\oplus} \oplus d^{\ominus}$ pada (3.4.8) diperoleh

$$a^{\oplus} \oplus b^{\ominus} \oplus c^{\oplus} \oplus d^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus b^{\oplus} \oplus c^{\oplus} \oplus d^{\ominus} \tag{3.4.10}$$

Subsitusi (3.4.9) ke (3.4.10) diperoleh

$$a^{\oplus} \oplus b^{\ominus} \oplus c^{\oplus} \oplus d^{\ominus} = a^{\ominus} \oplus b^{\oplus} \oplus c^{\ominus} \oplus d^{\oplus} \tag{3.4.11}$$

Karena berlaku sifat asosiatif pada $\mathbb{R}_{\varepsilon}$, (3.4.11) menjadi

$$(a^{\oplus} \oplus c^{\oplus}) \oplus (b^{\ominus} \oplus d^{\ominus}) = (a^{\ominus} \oplus c^{\ominus}) \oplus (b^{\oplus} \oplus d^{\oplus}) \tag{3.4.12}$$

Asumsikan $a, b, c, d \in \mathbb{S}^{\oplus}$

$$(a \oplus c)^{\oplus} \oplus (b \oplus d)^{\ominus} = (a \oplus c)^{\ominus} \oplus (b \oplus d)^{\oplus} \tag{3.4.13}$$

Persamaan 3.4.13 menunjukkan $a \oplus c \nabla b \oplus d$.

(v) Berdasarkan (iii), $a \nabla b \Leftrightarrow a \ominus b \nabla \varepsilon$. Jelas bahwa $a \ominus b \in \mathbb{S}^{\bullet}$. Ambil sembarang $c \in \mathbb{S}$. Sesuai sifat penyerapan pada $\mathbb{S}^{\bullet}$ (lihat Lemma 3.3.5(ii)) $(a \ominus b) \otimes c \in \mathbb{S}^{\bullet}$ sehingga $(a \ominus b) \otimes c \nabla \varepsilon$ atau $a \otimes c \ominus b \otimes c \nabla \varepsilon$. Berdasar (iii) diperoleh $a \otimes c \nabla b \otimes c$.■

Teorema 3.4.6 (i)-(ii) menunjukkan relasi ∇ pada $\mathbb{S}$ memiliki sifat yang sama dengan relasi ∇ pada $\mathcal{P}_{\varepsilon}$. Kesamaan sifat ini jelas benar sebagai akibat dari kesamaan definisi. Meskipun ∇ tidak transitif, beberapa sifat ketransitifan berlaku ketika suatu variabel merupakan *signed*.

Contoh 3.4.7

(i) Sifat refleksif: $2\nabla 2$, $\ominus 3\nabla \ominus 3$, $-1^{\bullet}\nabla -1^{\bullet}$, $2\not\nabla \ominus 2$.

(ii) Sifat simetris: $2\nabla 6^{\bullet}$ maka $6^{\bullet}\nabla 2$.

(iii) $4\nabla 5^{\bullet} \leftrightarrow 5^{\bullet} \ominus 4\nabla \varepsilon$ atau dapat juga ditulis $5^{\bullet}\nabla \varepsilon$.

(iv) $\ominus(-7)\nabla 5^{\bullet}$ dan $1\nabla 1$ maka $\ominus(-7)\oplus 1\ \nabla 5^{\bullet}\oplus 1$ atau dapat ditulis juga dengan $1\nabla 5^{\bullet}$.

(v) $-2\nabla 8^{\bullet}$. Ambil $9 \in \mathbb{S}^{\oplus}$ maka $-2\otimes 9\nabla 8^{\bullet}\otimes 9$ atau dapat ditulis juga dengan $7\nabla 17^{\bullet}$.

Teorema 3.4.8 Pandang $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\vee} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$ dan $a, b \in \mathbb{S}$ maka berlaku sifat:

(i) subsitusi lemah: jika $x\nabla a, c\otimes x\nabla b$, dan $x \in \mathbb{S}^{\vee}$ maka $ca\nabla b$;

(ii) transitif lemah: jika $x\nabla a, x\nabla b$, dan $x \in \mathbb{S}^{\vee}$ maka $a\nabla b$;

(iii) reduksi dari seimbang : jika $x\nabla y$ dan $x, y \in \mathbb{S}^{\vee}$ maka $x = y$

(Baccelli, et al., 2001).

Bukti

(i) Asumsikan $x \in \mathbb{S}^{\oplus}$ Ambil sembarang (a', a''), (b', b''), dan (c', c'') di mana $(a', a''), (b', b''), (c', c'')$ berada di kelas yang bersesuaian dengan a dan b. Karena $x \in \mathbb{S}^{\oplus}$ dan $x\nabla a$ maka $(x, \varepsilon)\nabla(a', a'')$ sehingga diperoleh

$$x\oplus a'' = a'. \tag{3.4.14}$$

Karena $c\otimes x\nabla b$ maka $(c', c'')\otimes(x, \varepsilon)\nabla(b', b'')$. Dengan menggunakan definisi $\otimes$ pada $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ diperoleh

$$c'\otimes x\oplus b'' = c''\otimes x\oplus b'. \tag{3.4.15}$$

Tambahkan $c'\otimes a''\oplus c''\otimes a''$ pada (3.4.16) sehingga

$c'\otimes a''\oplus c''\otimes a''\oplus c'\otimes x\oplus b'' = c'\otimes a''\oplus c''\otimes a''\oplus c''\otimes x\oplus b'$. Dengan menggunakan sifat asosiatif pada $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ maka

$$c'\otimes(x\oplus a'')\oplus c''\otimes a''\oplus b'' = c''\otimes(x\oplus a'')\oplus c'\otimes a''\oplus \tag{3.4.16}$$

Subsitusi (3.4.14) ke (3.4.16)

$$(c'\otimes a'\oplus c''\otimes a'')\oplus b'' = (c''\otimes a'\oplus c'\otimes a'')\oplus b' . \tag{3.4.17}$$

Persamaan 3.4.17 mendefinisikan bahwa

$(c'\otimes a'\oplus c''\otimes a'', c'\otimes a''\oplus c''\otimes a')\nabla(b', b'')$

$(c', c'')\otimes(a', a'')\nabla(b', b'')$

$c \otimes a \nabla b$

(ii) Kasus (ii) ini mengasumsikan bahwa pada kasus (i) berlaku $c = e$

(iii) Pandang $x \nabla y$ maka $x^{\oplus} \oplus y^{\ominus} = x^{\ominus} \oplus y^{\oplus}$. Untuk $x, y \in \mathbb{S}^{\oplus}$ maka $x^{\oplus} \oplus y^{\ominus} = x^{\ominus} \oplus y^{\oplus}$ ekivalen dengan $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus y$ sehingga $x = y$. Untuk $x, y \in \mathbb{S}^{\ominus}$ maka $x^{\oplus} \oplus y^{\ominus} = x^{\ominus} \oplus y^{\oplus}$ ekivalen dengan $\varepsilon \oplus (\ominus\, y) = (\ominus\, x) \oplus \varepsilon$ sehingga $\ominus\, x = \ominus\, y$ atau $x = y$.

Teorema terbukti. ■

Contoh 3.4.9

(i) $\ominus\, 6 \nabla 6^{\bullet}$, $4 \otimes \ominus\, 6 \nabla 21^{\bullet}$ $(4 \otimes \ominus\, 6 = \ominus\, 10)$ maka $4 \otimes 6^{\bullet} \nabla 21^{\bullet}$ atau $10^{\bullet} \nabla 21^{\bullet}$.

(ii) $8 \nabla 10^{\bullet}$, $8 \nabla 13^{\bullet}$ maka $10^{\bullet} \nabla 13^{\bullet}$.

(iii) $-2^{\bullet} \nabla 1$, $-2^{\bullet} \nabla -5$ tetapi $1 \not\nabla -5$ karena $x = -2^{\bullet}$ bukan *signed*.

(iv) $7^{\bullet} \nabla \ominus\, 3$, $7^{\bullet} \nabla 4^{\bullet}$ maka $\ominus\, 3 \nabla 4^{\bullet}$

(v) $4^{\bullet} \nabla 4$, $4^{\bullet} \nabla 1$, $4 \not\nabla 1$

(vi) $4^{\bullet} \nabla -2^{\bullet}$, $4^{\bullet} \nabla 21^{\bullet}$ maka $-2^{\bullet} \nabla 21^{\bullet}$

(vii) $12 \nabla 12$ maka $12 = 12$

(viii) karena $\ominus\, 12 \neq -12$ maka $\ominus\, 12 \not\nabla -12$

Jika pada Teorema 3.4.9 (ii) $x \in \mathbb{S}^{\bullet}$ dengan kondisi:

(i) $a \in \mathbb{S}^{\bullet}$ atau $b \in \mathbb{S}^{\bullet}$. Jika $a \in \mathbb{S}^{\bullet}$, $b \in \mathbb{S}^{\vee}$ di mana $|a| \geq |b|$ maka sifat transitif lemah berlaku. Kondisi ini telah diberikan pada Contoh 3.4.9 (iv).

(ii) $a, b \in \mathbb{S}^{\bullet}$. Apapun keadaan a, b Teorema 3.4.9 (ii) berlaku. Kondisi ini diberikan pada contoh (vi)

(iii) untuk $a, b \notin \mathbb{S}^{\bullet}$ sifat transitif lemah tidak berlaku. Kondisi ini diberikan pada contoh (v).

Sedangkan Teorema 3.4.9 (iii) menyatakan bahwa setiap elemen *signed* yang sama jelas akan seimbang dan setiap elemen *signed* yang berbeda jelas tidak seimbang.

Teorema 3.4.10 Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{S}$, $a \ominus c \nabla b$ jika dan hanya jika $a \nabla b \oplus c$ (Schutter, 1996).

Bukti Misal $a \ominus c \nabla b$ sehingga berdasarkan Teorema 3.4.6 (iii) berlaku $a \ominus c \ominus b \nabla \varepsilon$ sehingga $a \ominus (b \oplus c) \nabla \varepsilon$ akibatnya $a \nabla b \oplus c$.

Contoh 3.4.11

(i) $5\ominus(-11)\nabla 5^{\bullet}$ jika dan hanya jika $5\nabla 5^{\bullet}\oplus(-11)$ atau $5\nabla 5^{\bullet}$.

(ii) $10^{\bullet}\ominus 2\nabla 8$ jika dan hanya jika $10^{\bullet}\nabla 8\oplus 2$ atau dapat juga ditulis $10^{\bullet}\nabla 8$.

Lemma 3.4.6 (iii)-(v) , Teorema 3.4.7, dan teorema 3.4.8 menunjukkan bahwa sifat-sifat relasi ∇ pada himpunan $\mathbb{S}$ mengikuti sifat relasi $=$ pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$.

Pada Tabel 3.3.2 telah ditunjukkan bahwa untuk setiap $a\in\mathbb{S}^{\oplus}$ atau $a\in\mathbb{R}_{\varepsilon}$

$$a\oplus(\ominus a)=a\ominus a=a^{\bullet}\neq\varepsilon.$$

di mana ε merupakan unsur nol pada $\mathbb{R}_{\varepsilon}$. Sesuai Definisi 3.4.1 didapat $a^{\bullet\oplus}=a^{\bullet\ominus}=a$ dan $\varepsilon^{\oplus}=\varepsilon^{\ominus}=\varepsilon$ sehingga

$$a^{\bullet\oplus}\oplus\varepsilon^{\ominus}=a^{\bullet\ominus}\oplus\varepsilon^{\oplus}. \qquad (3.4.18)$$

Persamaan 3.4.18 memberikan pengertian bahwa untuk setiap $a\in\mathbb{S}$ maka

$$a^{\bullet}\nabla\varepsilon \text{ atau } \ominus a\nabla\varepsilon\ . \qquad (3.4.19)$$

Karena untuk $a\neq\varepsilon$ berlaku $a\ominus a\neq\varepsilon$ tetapi $a\ominus a\nabla\varepsilon$ di mana ε merupakan unsur nol pada $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ maka pada himpunan $\mathbb{S}$ akan digunakan relasi ∇ sebagai pengganti relasi $=$.

Setelah diterangkan tentang himpunan $\mathbb{S}$ beserta operasi $\oplus,\otimes$, dan relasi ∇ pada $\mathbb{S}$ maka selanjutnya akan dijelaskan tentang sifat-sifat $\oplus$, $\otimes$ pada $\mathbb{S}$ yang disertai dengan relasi ∇.

Sifat 3.4.12 Pandang $\mathbb{S}=\mathbb{S}^{\oplus}\cup\mathbb{S}^{\ominus}\cup\mathbb{S}^{\bullet}$. Untuk setiap $a,b,c\in\mathbb{S}$ maka

(i) $(\mathbb{S},\oplus)$ memilikat sifat:
- asosiatif: $[a\oplus(b\oplus c)]\nabla[(a\oplus b)\oplus c]$;
- komutatif: $[a\oplus b]\nabla[b\oplus a]$;
- $[a\oplus x^{\bullet}]\nabla[x^{\bullet}\oplus a]\nabla a$ untuk setiap $x\in\mathbb{S}^{\oplus}$. $x^{\bullet}$ disebut elemen nol;
- $[a\oplus(\ominus a)]\nabla[(\ominus a)\oplus a]\nabla x^{\bullet}$. $\ominus a$ disebut invers dari a

(ii) $(\mathbb{S},\otimes)$ memiliki sifat:
- asosiatif: $[a\otimes(b\otimes c)]\nabla[(a\otimes b)\otimes c]$;
- komutatif: $[a\otimes b]\nabla[b\otimes a]$;
- $[a\otimes e]\nabla[e\otimes a]\nabla a$. e disebut elemen satuan
- untuk $a\neq\varepsilon$ terdapat $-a\in\mathbb{S}$ sehingga

$[a \otimes -a] \nabla [-a \otimes a] \nabla e$. Bilangan $-a$ dikatakan invers dari a;

(iii) distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$: $[a \otimes (b \oplus c)] \nabla [a \otimes b \oplus a \otimes c]$.

Berdasarkan Sifat 3.4.12 dapat didefinisikan bahwa sistem matematika $(\mathbb{S}, \oplus \otimes)$ yang disertai dengan relasi simbang ∇ disebut dengan aljabar *max-plus* yang simetri, dinotasikan dengan $\mathbb{S}_{max}$ (Schutter, 1996). Tabel di bawah ini menunjukkan analogi antara $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{S}_{max}$.

Tabel 3.4.4 Analogi antara $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{S}_{max}$

No	Kategori	$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \times)$	$\mathbb{S}_{max} = (\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$
1	Operasi penjumlahan	$+$	$\oplus$
2	Operasi perkalian	$\times$	$\otimes$
3	Operasi pengurangan	$-$	$\ominus$
4	Operasi pembagian	$\div$	Φ
5	Relasi kesamaan	$=$	∇
6	Unsur nol	0	$\boldsymbol{x^{\bullet}}$ **(untuk setiap** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$
7	Unsur satuan	1	$e\ (e = 0 \in \mathbb{R}_{\varepsilon})$
8	Invers penjumlahan	$-a$ untuk $a \in \mathbb{R}$	$\ominus \boldsymbol{a}$ untuk $\boldsymbol{a} \in \mathbb{S}$
9	Invers perkalian	$1 \div a$ untuk $a \in \mathbb{R}$	$-\boldsymbol{a}$ untuk $\boldsymbol{a} \in \mathbb{S}$
10	Himpunan bagian	$\mathbb{R}^{+}$ $\mathbb{R}^{-}$ - $\mathbb{R} = \mathbb{R}^{+} \cup \mathbb{R}^{-}$	$\mathbb{S}^{\oplus}$ $\mathbb{S}^{\ominus}$ $\mathbb{S}^{\bullet}$ $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$

BAB 4
PENUTUP

4.1 Rangkuman

Sebagai penutup pada penulisan tesis ini akan diberikan ringkasan dari hasil pembahasan terhadap topik penelitian. Pembahasan tesis ini adalah terkait dengan perluasan dari aljabar *max-plus* ($\mathbb{R}_{maks}$).

Pada Definisi 2.2.1 telah didefinisikan himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ di mana untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$, $a \oplus b = maksimum(a, b)$ dan $a \otimes b = a + b$. $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut aljabar *max-plus*, dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{maks}$. Perbedaan utama antara $(\mathbb{R}, +, \times)$ dan $\mathbb{R}_{maks}$ adalah pada $\mathbb{R}_{maks}$ tidak terdapat elemen invers untuk operasi $\oplus$ kecuali elemen ε, sebagaimana yang terdapat pada Sifat 2.2.2 dan Tabel 2.2.1.

Perluasan aljabar *max-plus* diawali dengan Definisi 3.3.1 yang memberikan penjelasan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon = \mathcal{P}_\varepsilon$. Kemudian dilanjutkan dengan Definisi 3.2.1 yang menjelaskan relasi seimbang ∇. Karena relasi ∇ bukan relasi ekivalen maka Definisi 3.2.5 memberikan relasi seimbang yang memiliki kriteria khusus, dinotasikan dengan $\mathcal{B}$ di mana $\mathcal{B}$ merupakan relasi ekivalen sehingga dapat digunakan untuk membangun kelas ekivalen dan himpunan kuosien $\mathcal{P}_\varepsilon / \mathcal{B} = \mathbb{S}$, seperti telah dijelaskan pada Definisi 3.3.1 dan Persamaan 3.3.1. Kemudian dengan menggunakan definisi operasi $\oplus, \otimes$ dan relasi seimbang ∇ pada $\mathcal{P}_\varepsilon$ terbentuk sistem $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$ dengan penjelasan sebagai berikut:

(i) Sistem $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$ yang disertai dengan relasi ∇ disebut dengan aljabar *max-plus* yang simetri ($\mathbb{S}_{maks}$). Relasi seimbang ∇ dianalogikan sebagai relasi kesamaan, $=$, pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$.

(ii) Elemen-elemen dari himpunan $\mathbb{S}$ adalah kelas ekivalen (Persamaan 3.1.1) yang dibangun oleh relasi $\mathcal{B}$ yang kemudian setiap kelas ekivalen diasosiasikan dengan suatu elemen atau elemen bertanda $\ominus$ dan $(.)^\bullet$ di $\mathbb{R}_\varepsilon$. Himpunan $\mathbb{S}$ setelah asosiasi (Persamaan 3.3.33) dinyatakan sebagai $\mathbb{S} = \mathbb{S}^\oplus \cup \mathbb{S}^\ominus \cup \mathbb{S}^\bullet$ di mana

$$\mathbb{S}^\oplus = \left\{a \,\middle|\, a \in \mathbb{R}_\varepsilon\right\}, \mathbb{S}^\ominus = \left\{\ominus a \,\middle|\, a \in \mathbb{R}_\varepsilon\right\}, \mathbb{S}^\bullet = \left\{a^\bullet \,\middle|\, a \in \mathbb{R}_\varepsilon\right\}.$$

(iii) Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada himpunan $\mathbb{S}$ yang elemen-elemennya terdapat pada Persamaan 3.3.3 adalah Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang berlaku pada himpunan $\mathbb{R}_{\varepsilon}$, yang terdapat pada Definisi 2.2.1 (i)-(ii)

(iv) Sifat-sifat operasi dan relasi ∇ pada $\mathbb{S}_{maks}$ dan perbandingannya dengan sifat-sifat operasi di $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}_{maks}$ diperlihatkan pada tabel berikut ini:

Tabel 4.4.1 Perbandingan sifat operasi pada $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{maks}$, dan $\mathbb{S}_{maks}$

No	Sifat-sifat operasi	$\mathbb{R}$ $(\mathbb{R},+,\times)$	$\mathbb{R}_{maks}$ $(\mathbb{R}_{\varepsilon},\oplus,\otimes)$	$\mathbb{S}_{maks}$ $(\mathbb{S},\oplus,\otimes)$
1	Asosiatif	Ya	Ya	Ya
2	Komutatif	Ya	Ya	Ya
3	Terdapat unsur nol	Ya	Ya	Ya
4	Terdapat unsur satuan	Ya	Ya	Ya
5	Terdapat invers penjumlahan	Ya	Tidak	Ya
6	Terdapat invers perkalian untuk elemen tak nol	Ya	Ya	Ya
7	Distributif perkalian terhadap penjumlahan	Ya	Ya	Ya
8	Terdapat operasi balikan penjumlahan	Ya	Tidak	Ya
9	Terdapat operasi balikan perkalian	Ya	Ya	Ya
10	Idempoten terhadap penjumlahan	Tidak	Ya	Ya
11	Terdapat elemen penyerap pada perkalian	Tidak	Ya	Ya

4.2 Saran

Penelitian ini bisa dilanjutkan pada permasalahan keseimbangan linear dan sistem keseimbangan linear pada aljabar *max-plus* yang simetri.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, A. (2000). *Aljabar*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, L. G., and Quadrat, P. J. (2001). *Syncronization and linearity*: *an algebra for discrete event system*. New York: Wiley-Interscience.

Bhattacharya, P. B., Jain, S. K., dan Nagpaul, S. R. (1994). *Basic abstract algebra* (2nd *ed.*). Melbroune: Cambridge University Press.

Farlow, G. K. (2009). *Max-plus algebra*. Masters's thesis Virginia Polytechnic Institute and State University. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Hungerford, T. W. (2000). *Algebra*: *graduate texts in mathematics*. USA: Springer.

Jacob, Bill. (1990). *Linear algebra*. New York : Freeman and Company.

Schutter, B. D. (1996). *Max-algebraic system theory for discrete event systems*. Ph.D. thesis Katholieke Universiteit Leuven Faculteit Der Toegepaste Wetenschappen Departement Elektrotechniek. Leuven, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.