UNIVERSITAS INDONESIA

MODEL – MODEL BEBERAPA PENYEBAB KEGAGALAN DAN PENERAPANNYA PADA DUNIA ASURANSI JIWA

SKRIPSI

RISKI DEFRI HERIYANTO
0706163136

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

MODEL – MODEL BEBERAPA PENYEBAB KEGAGALAN DAN PENERAPANNYA PADA DUNIA ASURANSI JIWA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

RISKI DEFRI HERIYANTO
0706163136

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah Saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Riski Defri Heriyanto
NPM	: 0706163136
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 28 Desember 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh		
Nama	:	Riski Defri Heriyanto
NPM	:	0706163136
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Model – Model Beberapa Penyebab Kegagalan dan Penerapannya pada Dunia Asuransi Jiwa

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra. Netty Sunandi, M.Si.	(Netty S)
Penguji	: Mila Novita, S.Si., M.Si.	( )
Penguji	: Sarini Abdullah S.Si., M.Stats.	( )
Penguji	: Dra. Siti Nurrohmah, M. Si.	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	28 Desember 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur Penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karuniaNya sehingga Penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam pengerjaan tugas akhir ini. Adapun ucapan terima kasih tersebut terhatur kepada:

(1) Mama, Papa dan Yanda. Terima kasih atas semua hal baik yang telah diberikan kepada Penulis selama ini, yang tidak mungkin dapat disebutkan secara rinci. Terlebih kepada kesabaran serta pengertian Mama dan Papa yang telah dengan sangat berlapang dada menerima kenyataan bahwa Penulis mengalami keterlambatan kelulusan. Adalah sesuatu yang sangat berharga memiliki Mama, Papa dan Yanda sebagai Orang Tua dan Adik.

(2) Dra. Netty Sunandi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing skripsi. Terima kasih atas segala ilmu yang telah Ibu berikan selama ini serta kesabaran Ibu yang luar biasa selama proses bimbingan mulai dari awal semester VIII hingga sekarang. Merupakan suatu kebanggaan tersendiri bagi penulis untuk dapat memiliki kesempatan dibimbing oleh dosen sekaliber Ibu.

(3) Dra. Siti Nurrohmah, M. Si., Sarini Abdullah S.Si., M.Stats. dan Mila Novita, S.Si., M.Si. selaku dewan penguji. Terima kasih atas masukan serta saran revisi yang telah diberikan.

(4) Dra. Ida S Fitriani, M.Si. selaku pembimbing akademik. Terima Kasih atas saran-saran Ibu selama penulis menjalani masa kuliah.

(5) DR. Yudi Satria, M.T. dan Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc Tech. selaku Ketua dan Sekretaris Departemen. Terima Kasih atas Bantuan Bapak dan Ibu selama ini.

(6) Seluruh dosen dan karyawan di departemen Matematika UI atas ilmu pengetahuan dan dukungan yang telah diberikan selama masa kuliah.

(7) 2 orang "saudara kembar". Syahrul (Bapet) dan Ferdi (Kokoh). Terima kasih atas persahabatan selama ini, dan terima kasih atas komitmen untuk terus menjadi sahabat di masa depan. Bapetos against the world! Viva viva jaya!!

(8) “Keluarga Besar”: “Mama” Farah, “Papa” Toto, “Granma” Nora, “Kakak-kakak”: Lois, Widi, Bapet, Ferdi, Winda, dan “same age sister” Dita. Terima Kasih untuk semua kenangan manis dan pemahaman mengenai konsep “Saya tidak pernah sendiri” yang telah di”ajarkan” kepada penulis selama ini.

(9) Teman-teman seperjuangan peminatan aktuaria (Farah, Nedia, dan Misda), terima kasih atas kerja sama dan dukungannya.

(10) Putu. Terima kasih atas segala pelajaran-pelajaran mengenai kehidupan yang telah diberikan selama ini, serta terima kasih atas semua install ulang yang telah dilakukan.

(11) Seluruh teman-teman angkatan 2007: Adi, Zulfalah, Yosanda, Fauzan, Putri, Paramitha, Siti, Shafa, Siska, Sisca, Anis, Putu, Bowo, Arif, Steffi, Gamar,Wiwi, Anjar, Isna, Afni, Amanda, Anggun, Nedia, Safira, Widya, Hikma, Ayat, Andi, Adit, Danar, Bapet, Dita, Farah, Nora, Toto, Lois, Winda, Widi, Kokoh, Hanif, Misda, yang telah memberikan pengalaman perkuliahan yang tak terlupakan.

(12) Kakak senior dan Adik Junior dari angkatan 2006-2010. Ka Farah, Ka Rafli, Ka Sutisna, Eka, Numa, Icha, Umbu, Michael, Aski, Reza, Eca, yang juga telah memberikan dukungan dalam pengerjaan tugas akhir ini.

Serta kepada pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu pada halaman ini. Terima Kasih atas segalanya.

Penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan berkontribusi bagi pengembangan ilmu. Semoga Tuhan Yang Maha Esa senantiasa memberikan taufik dan hidayah-Nya kepada kita semua.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Riski Defri Heriyanto
NPM	:	0706163136
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah Saya yang berjudul :

Model – Model Beberapa Penyebab Kegagalan dan Penerapannya pada Dunia Asuransi Jiwa

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir Saya selama tetap mencantumkan nama Saya sebagai penulis / pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini Saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 28 Desember 2011
Yang menyatakan

(Riski Defri Heriyanto)

ABSTRAK

Nama : Riski Defri Heriyanto
Program Studi : Matematika
Judul : Model – Model Beberapa Penyebab Kegagalan dan Penerapannya pada Dunia Asuransi Jiwa

Model beberapa penyebab kegagalan (*multiple decrement model*) merupakan model yang menggambarkan kondisi dari dua hal, yakni waktu hingga terjadinya kegagalan dan penyebab terjadinya kegagalan, pada suatu subjek perhatian. Berdasarkan variabel random waktu hingga terjadinya kegagalan, terdapat dua model beberapa penyebab kegagalan, yakni model diskrit dan model kontinu. Sementara, berdasarkan sudut pandang penurunan serta interpretasinya juga terdapat dua model beberapa penyebab kegagalan, yakni model random dan model deterministik. Model beberapa penyebab kegagalan dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang, salah satunya asuransi jiwa. Dalam asuransi jiwa, model beberapa penyebab kegagalan dapat diterapkan antara lain untuk menyusun tabel beberapa penyebab kegagalan (*multiple decrement table*) dan menentukan besar premi tunggal bersih dan variansi *loss* dari suatu skenario asuransi jiwa yang menawarkan besar dana manfaat berbeda untuk penyebab kematian yang berbeda. Sehingga dengan menggunakan model ini, perusahaan asuransi dapat menawarkan satu polis kepada peserta asuransi namun dengan besar dana manfaat yang berbeda-beda. Umumnya, dalam penerapannya, model beberapa penyebab kegagalan menggunakan asumsi. Asumsi tersebut adalah asumsi bahwa *force of decrement* untuk suatu penyebab kegagalan bernilai konstan dan asumsi distribusi uniform pada tiap tahun usia.

Kata Kunci : model – model beberapa penyebab kegagalan, tabel beberapa penyebab kegagalan, premi tunggal bersih
xiv+107 halaman : 1 gambar; 5 tabel
Daftar Pustaka : 6 (1995-2011)

ABSTRACT

Name : Riski Defri Heriyanto
Major : Mathematics
Title : Multiple Decrement Models and Its Application in Life Insurance

Multiple decrement models are models that describe two objects, the time until decrement and the cause of decrement of certain subject. In terms of the time until decrement, there are two multiple decrement models, continuous and discrete model. In terms of point of view and its interpretations, there are two multiple decrement models, random and deterministic model. Multiple decrement models can be applied in some aspects, one of them is life insurance. In life insurance, multiple decrement models can be applied in constructing the multiple decrement table and determining the net single premium and *loss* variance of a life insurance plan that offers different benefit values for different causes of death. Therefore, by using multiple decrement models, an insurance company will be able to offer a single policy, with different benefit values to the insured. Multiple decrement models need to use some assumptions to be able to be applied. These assumptions are constant force of decrement for a certain cause and assumption of uniform distribution in multiple decrement for every year of age.

Keywords : multiple decrement models, multiple decrement table, net single premium
xiv+107 pages: 1 pictures; 5 tables
Bibliography : 6 (1995-2011)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam dunia asuransi jiwa, umumnya seorang peserta asuransi dianggap hanya mungkin mengalami satu jenis risiko, yakni kematian. Artinya, risiko selain kematian serta hal-hal yang menyebabkan kematian tidak menjadi perhatian dari perusahaan asuransi. Pada asuransi semacam ini, ketika menentukan besarnya premi yang harus dibayarkan oleh peserta asuransi, yang diperhatikan oleh perusahaan asuransi hanyalah probabilitas peserta mengalami kematian, tanpa perlu memperhatikan apa penyebabnya. Seiring perkembangan dunia asuransi, berkembang pula berbagai skenario asuransi jiwa yang berbeda, diantaranya adalah:

1. asuransi jiwa yang memungkinkan pesertanya untuk memperoleh sejumlah dana manfaat apabila peserta tersebut memutuskan untuk keluar dari perusahaan asuransi (selain dana manfaat yang akan diperoleh ahli waris peserta apabila peserta tersebut meninggal dunia).
2. asuransi jiwa yang memungkinkan pesertanya memperoleh sejumlah dana manfaat ketika peserta tersebut kehilangan pekerjaannya (selain dana manfaat yang akan diperoleh ahli waris peserta apabila peserta tersebut meninggal dunia).
3. asuransi jiwa yang menawarkan besar dana manfaat yang berbeda untuk penyebab kematian yang berbeda.

Pada skenario-skenario asuransi jiwa di atas, tentunya perusahaan asuransi perlu membedakan risiko-risiko yang mungkin dialami oleh seorang peserta. Pada skenario asuransi yang pertama misalnya, ketika menentukan besarnya premi, perusahaan asuransi perlu memperhatikan dua hal, yakni kemungkinan peserta akan meninggal dunia dan kemungkinan peserta akan keluar dari asuransi jiwa tersebut. Hal yang sama juga berlaku pada skenario asuransi jiwa yang kedua (probabilitas peserta akan meniggal dunia dan probabilitas bahwa peserta akan kehilangan pekerjaan). Sementara pada skenario asuransi jiwa yang ketiga, perusahaan asuransi perlu memperhitungkan probabilitas peserta mengalami kematian yang dikarenakan berbagai penyebab, tergantung kepada penyebab apa saja yang disebutkan dalam polis asuransi.

Untuk asuransi-asuransi jiwa semacam ini, dalam menghitung premi, perusahaan asuransi dapat menggunakan suatu model yang disebut sebagai model beberapa penyebab kegagalan (*multiple decrement model*). Model beberapa penyebab kegagalan dapat digunakan oleh perusahaan asuransi untuk menyusun dua hal, yakni tabel beberapa penyebab kegagalan (*multiple decrement table*) dan penurunan besarnya *Actuarial Present Value* (APV) dari suatu skenario asuransi jiwa dengan beberapa risiko yang mungkin dihadapi oleh pesertanya. Kedua hal inilah yang nantinya akan berguna dalam perhitungan premi asuransi jiwa dengan beberapa risiko yang mungkin dihadapi oleh pesertanya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang pada subbab sebelumnya, maka permasalahan yang akan dibahas pada tugas akhir ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana penggunaan model beberapa penyebab kegagalan untuk menentukan komponen-komponen tabel beberapa penyebab kegagalan
2. Bagaimana penggunaan model beberapa penyebab kegagalan untuk menentukan menentukan hubungan antara komponen-komponen pada tabel beberapa penyebab kegagalan dengan tabel penyebab kegagalan tunggal terkait?
3. Bagaimana penerapan model beberapa penyebab kegagalan pada dunia asuransi jiwa dalam menentukan premi tunggal bersih dan variansi *loss*?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Menjelaskan model beberapa penyebab kegagalan.
2. Menjelaskan penurunan komponen-komponen pada tabel beberapa penyebab kegagalan, yakni $q_x^{(j)}$, $l_x^{(\tau)}$, $d_x^{(j)}$ dan $d_x^{(\tau)}$, dengan menggunakan model beberapa penyebab kegagalan.
3. Menjelaskan hubungan antara komponen-komponen pada tabel beberapa penyebab kegagalan, yakni $q_x^{(j)}$, $l_x^{(\tau)}$, $d_x^{(j)}$ dan $d_x^{(\tau)}$, dengan komponen-komponen pada tabel penyebab kegagalan tunggal terkait, yakni $q_x'^{(j)}$ dan $p_x'^{(j)}$, dengan menggunakan model beberapa penyebab kegagalan dan model kegagalan tunggal terkait.
4. Menerapkan model beberapa penyebab kegagalan pada dunia asuransi jiwa dalam menentukan APV dari beberapa kondisi asuransi.
5. Menerapkan tabel beberapa penyebab kegagalan pada dunia asuransi jiwa dalam menentukan besar premi bersih untuk suatu asuransi jiwa seumur hidup (pada salah satu kondisi di poin 4) dengan pembayaran premi tunggal

1.4 Pembatasan Masalah

Pembahasan dalam tugas akhir ini dibatasi bahwa dalam tiap tahun usia diasumsikan berlaku distribusi uniform untuk masing-masing penyebab kegagalan.

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Variabel Random Waktu Hingga Meninggal (*Age-at-Death*) dan Variabel Random Sisa Usia (*Time Untl Death*)

Untuk mendukung pembahasan selanjutnya, akan didefinisikan dua variabel random kontinu, yakni variabel random X dan variabel random T_x. Variabel random X menyatakan usia saat meninggal (*age-of-death*) dari seorang bayi yang saat ini baru lahir. Sementara variabel random T_x menyatakan sisa usia dari seseorang yang saat ini berusia x, sebelum orang tersebut meninggal dunia (*time until death*). Kedua variabel random tersebut memiliki hubungan sebagai berikut:

$$T_x = X - x | X > x \qquad , x \geq 0$$

2.2 Fungsi Distribusi dan Fungsi *Survival* dari Variabel Random X dan T_x

Fungsi distribusi dari variabel random X dinotasikan dengan $F_X(x)$ di mana:

$$F_X(x) = Pr(X \leq x)$$

Hal ini berarti $F_X(x)$ menyatakan probabilitas bahwa seorang bayi yang baru lahir akan meninggal sebelum berusia x tahun. Pada $F_X(x)$, selalu diasumsikan bahwa $F_X(0) = 0$.

Fungsi *survival* dari variabel random X dinotasikan dengan $s_X(x)$, di mana:

$$\begin{aligned} s_X(x) &= 1 - F_X(x) \\ &= 1 - Pr(X \leq x) \\ &= Pr(X > x) \end{aligned}$$

Dengan kata lain, $s_X(x)$ merupakan suatu fungsi yang menyatakan probabilitas bahwa seorang bayi yang baru lahir akan mencapai usia x (akan meninggal setelah berusia x). Berdasarkan asumsi pada $F_X(0)$, maka pada $s_X(x)$ berlaku:

$$\begin{aligned} s_X(0)` &= 1 - F_X(0) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Fungsi *survival* dari T_x dinotasikan dengan $s_{T_x}(t)$, di mana:

$$s_{T_x}(t) = Pr(T_x > t) \quad ,t > 0$$

Sesuai dengan hubungan antara variabel random X dan T_x, maka dapat diturunkan hubungan antara $s_{T_x}(t)$ dan $s_X(x)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} s_{T_x}(t) &= Pr(T_x > t) \\ &= Pr(X - x > t | X > x) \\ &= Pr(X > t + x | X > x) \\ &= \frac{Pr(X > t + x)}{Pr(X > x)} \\ &= \frac{s_X(x + t)}{s_X(x)} \end{aligned}$$

Dengan kata lain, $s_{T_x}(t)$ menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan bertahan hidup hingga setidaknya berusia $x + t$.

Selanjutnya, $s_{T_x}(t)$ akan dinotasikan sebagai ${}_tp_x$, sehingga diperoleh:

$${}_tp_x = \frac{s_X(x + t)}{s_X(x)}$$

Fungsi distribusi dari T_x dapat dinotasikan dengan $F_{T_x}(t)$, di mana:

$$\begin{aligned} F_{T_x}(t) &= 1 - {}_tp_x \\ &= 1 - \frac{s_X(x + t)}{s_X(x)} \\ &= \frac{s_X(x)}{s_X(x)} - \frac{s_X(x + t)}{s_X(x)} \end{aligned}$$

$$= Pr(X - x > 0|X > x) - Pr(X - x > t|X > x)$$
$$= Pr(0 < X - x \le t|X > x)$$
$$= Pr(x < X \le t + x|X > x)$$

Selanjutnya, $F_{T_x}(t)$ akan dinotasikan sebagai ${}_tq_x$. Artinya

$${}_tq_x = Pr(x < X \le t + x|X > x)$$

Dengan kata lain, ${}_tq_x$ menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan meninggal sebelum berusia $x + t$.

Ketika $t = 1$, baik ${}_tp_x$ maupun ${}_tq_x$ cukup ditulis sebagai p_x dan q_x

2.3 Variabel Random Tahun Penuh Hingga Meninggal Dunia (*Curtate-Future Life-Time*)

Selain dua variabel random X dan T_x yang kontinu, pada seseorang juga dapat didefinisikan variabel random yang diskrit K_x. Variabel K_x disebut sebagai *curtate-future-lifetime* dan menyatakan banyaknya tahun utuh yang dijalani oleh seseorang sebelum mengalami kematian. Variabel K_x dan T_x memiliki hubungan yakni K_x memiliki nilai berupa bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan dari nilai T_x:

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor$$

Variabel random K_x memiliki fungsi probabilitas yang dinotasikan dengan $Pr(K_x = k)$. Dikarenakan hubungan antara K_x dan T_x, maka terdapat hubungan antara fungsi probabilitas dari K_x dengan fungsi distribusi dan fungsi *survival* dari T_x. berikut adalah penurunannya:

$$Pr(K_x = k) = Pr(k \le T_x < k + 1)$$
$$= Pr(T_x \le k + 1) - Pr(T_x < k)$$
$$= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x$$
$$= (1 - {}_{k+1}p_x) - (1 - {}_kp_x)$$
$$= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$$

$$= {}_kp_x - \frac{s_X(x+k+1)}{s_X(x)}$$

$$= {}_kp_x - \frac{s_X(x+k+1)}{s_X(x)} \frac{s_X(x+k)}{s_X(x+k)}$$

$$= {}_kp_x - \frac{s_X(x+k+1)}{s_X(x+k)} \frac{s_X(x+k)}{s_X(x)}$$

$$= {}_kp_x - {}_1p_{x+k}\ {}_kp_x$$

$$= {}_kp_x\left(1 - {}_1p_{x+k}\right)$$

$$= {}_kp_x\ {}_1q_{x+k}$$

$$= {}_kp_x q_{x+k}$$

2.4 *Force of Mortality*

Sebelumnya, telah diketahui probabilitas bersyarat seseorang yang saat ini berusia x akan meninggal dunia sebelum berusia $x + t$ apabila diketahui bahwa orang tersebut bertahan hingga usia x adalah sebagai berikut:

$$Pr(x < X \leq t + x | X > x)$$

Berarti probabilitas bersyarat seseorang yang saat ini berusia x akan meninggal dunia sebelum berusia $x + \Delta x$ apabila diketahui bahwa orang tersebut bertahan hingga usia x adalah

$$Pr(x < X \leq \Delta x + x | X > x)$$

Bila probabilitas di atas dibagi dengan Δx dan Δx ditujukan ke 0, maka dapat ditentukan bentuk dari *force of mortality* pada usia x, yakni:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{Pr(x < X \leq \Delta x + x | X > x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x\left(1 - F_X(x)\right)} \\
&= \frac{1}{\left(1 - F_X(x)\right)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{\left(1 - F_X(x)\right)} f_X(x) \\
&= \frac{f_X(x)}{\left(1 - F_X(x)\right)}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Atau, bila dinyatakan dalam fungsi survival:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{Pr(x < X \leq \Delta x + x | X > x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x\big(1 - F_X(x)\big)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(1 - s_X(x + \Delta x)\big) - \big(1 - s_X(x)\big)}{\Delta x s_X(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s_X(x) - s_X(x + \Delta x)}{\Delta x s_X(x)} \\
&= -\frac{1}{s_X(x)} \frac{d}{dx} s_X(x)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Baik $\frac{f_X(x)}{(1-F_X(x))}$ maupun $-\frac{1}{s_X(x)}\frac{d}{dx}s_X(x)$ merupakan pdf bersyarat dari variabel random X tepat saat usia x dengan syarat bahwa usia x telah dicapai. $\frac{f_X(x)}{(1-F_X(x))}$ maupun $-\frac{1}{s_X(x)}\frac{d}{dx}s_X(x)$ selanjutnya dinotasikan dengan $\mu_X(x)$ dan disebut sebagai *force of mortality* pada usia x.

Kemudian akan ditentukan bentuk dari $\mu_{T_x}(t)$. Berdasarkan (2.1), dapat diturunkan bentuk dari $\mu_{T_x}(t)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mu_{T_x}(t) &= \frac{f_{T_x}(x)}{\Big(1 - F_{T_x}(x)\Big)} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\left({}_tq_x\right)}{1 - {}_tq_x} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\left({}_tq_x\right)}{{}_tp_x} \\
&= \frac{1}{{}_tp_x}\frac{d}{dt}\left({}_tq_x\right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Berdasarkan hasil ini diperoleh bentuk pdf dari T_x (yang dinotasikan dengan f_{T_x}):

$$\begin{aligned}
{}_tp_x\mu_{T_x}(t) &= \frac{d}{dt}\left({}_tq_x\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(F_{T_x}(t)\Big) \\
&= f_{T_x}(t)
\end{aligned}$$

yakni:

$$f_{T_x}(t) = \ {}_t p_x \mu_{T_x}(t)$$

$\mu_{T_x}(t)$ merupakan pdf bersyarat dari variabel random T_x tepat t tahun sejak usia x dengan syarat bahwa usia $x + t$ telah dicapai. $\mu_{T_x}(t)$ memiliki hubungan dengan $\mu_X(x)$. Berikut adalah penurunannya:

$$\begin{aligned}
\mu_{T_x}(t) &= \frac{1}{{}_t p_x} \frac{d}{dt}\left(1 - \ {}_t q_x\right) \\
&= \frac{1}{\frac{s_X(x+t)}{s_X(x)}} \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{s_X(x+t)}{s_X(x)}\right) \\
&= -\frac{1}{\frac{s_X(x+t)}{s_X(x)}} \frac{d}{dt}\left(\frac{s_X(x+t)}{s_X(x)}\right) \\
&= -\frac{s_X(x)}{s_X(x+t)} \frac{1}{s_X(x)} \frac{d}{dt} s_X(x+t) \\
&= -\frac{1}{s_X(x+t)} \frac{d}{dt} s_X(x+t)
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$\mu_{T_x}(t) = -\frac{1}{s_X(x+t)} \frac{d}{dt} s_X(x+t)$$

Dari (2.2) diketahui:

$$-\frac{1}{s_X(x)} \frac{d}{dx} s_X(x) = \mu_X(x)$$

Berarti:

$$-\frac{1}{s_X(x+t)} \frac{d}{dt} s_X(x+t) = \mu_X(x+t)$$

Berdasarkan hal ini, maka diperoleh hubungan antara μ_{T_x} dan μ_X adalah:

$$\mu_{T_x}(t) = \mu_X(x+t)$$

Artinya, $\mu_{T_x}(t)$ menyatakan *force of mortality* pada usia $x + t$.

2.5 Asumsi Distribusi Uniform untuk Tiap Tahun Usia

Dasar penurunan asumsi distribusi uniform adalah bahwa untuk tiap tahun usia, T_x akan berdistribusi uniform standar. Atau dengan kata lain, pdf bersyarat $f_{T_x|T_x<1}(t)$ akan bernilai 1.

Berdasarkan hal ini, maka diperoleh hasil-hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{T_x|T_x<1}(t) &= \frac{f_{T_x}(t)}{Pr(0 < T_x < 1)} \\ &= \frac{f_{T_x}(t)}{q_x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Atau dengan kata lain

$$f_{T_x}(t) = q_x$$

Artinya

$$\begin{aligned} \int_0^t f_{T_x}(s)\, ds &= \int_0^t q_x\, ds \\ &= tq_x \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$${}_tq_x = tq_x$$

dan

$${}_tp_x = 1 - tq_x$$

BAB 3
PENGEMBANGAN MODEL – MODEL BEBERAPA PENYEBAB KEGAGALAN

Pada bab ini akan dijelaskan pengembangan model beberapa penyebab kegagalan serta beberapa hal lain yang terkait. Pada subbab 3.1 akan dijelaskan mengenai model beberapa penyebab kegagalan kontinu dan model beberapa penyebab kegagalan diskrit. Model penyebab kegagalan tunggal terkait akan dijelaskan pada subbab (3.2). Pada subbab (3.3) akan dijelaskan mengenai penurunan komponen-komponen pada tabel beberapa penyebab kegagalan dari dua sudut pandang, yakni sudut pandang probabilistik (*Random Survivorship Group*) dan sudut pandang deterministik (*Deterministic Survivorship Group*). Asumsi-asumsi pada model beberapa penyebab kegagalan dan model penyebab kegagalan tunggal terkait akan dijelaskan masing-masing pada subbab (3.4) dan (3.5).

3.1 Pengembangan Model – Model Beberapa Penyebab Kegagalan (*Multiple Decrement Models*)

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai variabel random yang digunakan pada model beberapa penyebab kegagalan serta pengembangan model beberapa penyebab kegagalan yang kontinu dan diskrit.

3.1.1 Variabel Random $\boldsymbol{T_x}$, $\boldsymbol{K_x}$ dan $\boldsymbol{J}$

Bila dilihat dari variabel random yang menyatakan waktu hingga terjadinya kegagalan, terdapat dua jenis model beberapa penyebab kegagalan, yakni model beberapa penyebab kegagalan kontinu dan model beberapa penyebab kegagalan diskrit. Model beberapa penyebab kegagalan kontinu dikembangkan berdasar kepada 2 variabel random, yakni variabel random T_x dan variabel random J. Model beberapa penyebab kegagalan diskrit dikembangkan juga berdasarkan dua variabel random, yakni variabel random K_x dan variabel random J.

Variabel random J menyatakan penyebab terjadinya kegagalan pada seseorang yang sedang diamati. Bila diasumsikan terdapat m penyebab kegagalan yang mungkin, maka variabel random J dapat bernilai $1,2\ \dots\ m$ (bilangan asli). Variabel random J tidak memiliki urutan baku. Artinya, suatu penyebab kegagalan tidak dapat dikatakan memiliki posisi yang lebih tinggi (lebih awal) dari penyebab kegagalan lainnya. Sebagai contoh, pada program dana pensiun, kematian tidak bisa dikatakan memiliki kedudukan yang lebih tinggi (lebih awal) dari kecacatan dan sebaliknya.

Untuk setiap orang yang diamati, yang dianggap sebagai penyebab kegagalan pada orang tersebut adalah penyebab kegagalan yang pertama kali dialami. Dengan demikian, setiap orang hanya akan memiliki satu penyebab kegagalan diantara m penyebab kegagalan yang mungkin. Atau dengan kata lain, untuk setiap orang yang diamati, sejumlah m penyebab kegagalan yang ada akan saling *mutually exclusive* (tidak dapat muncul bersamaan).

Pada model beberapa penyebab kegagalan kontinu, variabel random T_x menyatakan banyaknya tahun yang dijalani oleh seseorang yang saat ini berusia x tahun sebelum mengalami kegagalan. Variabel random T_x dapat memiliki nilai-nilai berupa bilangan real yang lebih besar dari 0. Banyaknya tahun yang dijalani oleh seseorang yang saat ini berusia x tahun sebelum mengalami kegagalan yang dikarenakan oleh penyebab j dinyatakan sebagai irisan dari variabel random T_x dan variabel random J untuk suatu nilai j, yakni $T_x \cap (J = j)$

Pada model beberapa penyebab kegagalan diskrit, variabel random K_x menyatakan banyaknya tahun utuh yang dijalani oleh seseorang yang saat ini berusia x tahun sebelum orang tersebut mengalami kegagalan. K_x hanya mungkin memiliki nilai 0,1,2 dan seterusnya (bilangan cacah). Banyaknya tahun utuh yang dijalani oleh seseorang yang saat ini berusia x tahun sebelum mengalami kegagalan yang dikarenakan oleh penyebab j dinyatakan sebagai irisan dari variabel random K_x dan variabel random J untuk suatu nilai j, yakni $K_x \cap (J = j)$.

3.1.2 Pengembangan Model Beberapa Penyebab Kegagalan yang Kontinu

3.1.2.1 Pdf Bersama Variabel Random T_x dan J

Pengembangan model beberapa penyebab kegagalan yang kontinu dimulai dari pendefinisian fungsi kepadatan probabilitas bersama (*joint probability density function / joint pdf*) antara variabel random T_x untuk suatu nilai t dan variabel random J untuk suatu nilai j. Pdf bersama ini dinotasikan dengan $f_{T_x,J}(t,j)$, di mana berlaku

$$\sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty f_{T_x,J}(t,j) = 1$$

$$\int_0^\infty \sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(t,j) = 1$$

Probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j selambatnya t tahun dari sekarang (selambatnya saat berusia $x+t$) dinotasikan dengan ${}_tq_x^{(j)}$. Adapun hubungan ${}_tq_x^{(j)}$ dengan $f_{T_x,J}(t,j)$ adalah sebagai berikut

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)\,ds$$

Dengan kata lain, diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(j)} &= Pr\{(0 < T_x \le t) \cap (J = j)\} \\ &= \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds \end{aligned} \tag{3.1}$$

Atau, berdasarkan teorema dasar kalkulus pertama:

$$f_{T_x,J}(t,j) = \frac{d}{dt}\left({}_tq_x^{(j)}\right)$$

Selanjutnya, akan dilakukan peninjauan terhadap semua penyebab kegagalan.

Sebelumnya, dari (3.1) telah diketahui bahwa probabilitas seseorang yang saat ini berusia x akan mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j selambatnya pada usia $x + t$ tahun dinyatakan sebagai

$${}_tq_x^{(j)} = Pr\{(0 < T_x \leq t) \cap (J = j)\}$$

Bila kedua ruas dari persamaan ini dijumlahkan untuk semua nilai j yang mungkin (dari 1 hingga m), maka diperoleh

$$\sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} Pr\{(0 < T_x \leq t) \cap (J = j)\}$$

Ruas kanan dari persamaan di atas menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan mengalami kegagalan dikarenakan penyebab manapun yang mungkin (antara penyebab 1 hingga penyebab m) selambatnya pada usia $x + t$ tahun. Artinya, pada ruas kanan persamaan di atas, semua nilai yang mungkin bagi variabel random J telah ditinjau, sehingga persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$\sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} = Pr(0 < T_x \leq t)$$

Ruas kiri dari persamaan di atas, memiliki notasi khusus, yakni ${}_tq_x^{(\tau)}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(\tau)} &= \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} \\ &= Pr(0 < T_x \leq t) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Artinya, ${}_tq_x^{(\tau)}$ menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x tahun akan mengalami kegagalan dikarenakan penyebab manapun yang mungkin (dari penyebab 1 hingga penyebab m) selambatnya pada usia $x + t$ tahun.

Probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan bertahan dari semua penyebab kegagalan (dari penyebab 1 hingga m) setidaknya hingga usia $x + t$ tahun dinyatakan sebagai ${}_tp_x^{(\tau)}$ di mana

$${}_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}.$$

3.1.2.2 Pdf Marginal Variabel Random T_x dan J

Mula-mula, akan dibahas mengenai pdf marginal dari T_x.
Pdf marginal dari $T_x$dinotasikan dengan $f_{T_x}(t)$, di mana

$$f_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(t,j)$$

$f_{T_x}(t)$ dapat digunakan untuk menentukan ${}_tq_x^{(\tau)}$. Berikut ini adalah hubungan antara ${}_tq_x^{(\tau)}$ dan $f_{T_x}(t)$. Dari (3.2) telah diketahui bahwa

$${}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)}$$

Sementara, dari (3.1) diketahui bahwa

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds$$

Berdasarkan kedua hal ini diperoleh hubungan antara ${}_tq_x^{(\tau)}$ dan $f_{T_x}(t)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(\tau)} &= \sum_{j=1}^{m} \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds \\ &= \int_0^t \sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(s,j)\, ds \\ &= \int_0^t f_{T_x}(s)ds \end{aligned}$$

Artinya, $\int_0^t f_{T_x}(s)ds$ menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x tahun akan mengalami kegagalan dikarenakan penyebab manapun selambatnya pada usia $x + t$ tahun.

Sementara, berdasarkan teorema dasar kalkulus pertama, diperoleh:

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt}\ {}_tq_x^{(\tau)}$$

Kemudian, akan dibahas mengenai pdf marginal dari J.

Pdf marginal dari J, dinotasikan dengan $f_J(j)$ dimana

$$f_J(j) = \int_0^\infty f_{T_x,J}(s,j)ds$$

Sebelumnya, dari (3.1) telah diketahui bahwa

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds$$

Berdasarkan hal ini, terlihat bahwa

$$f_J(j) = {}_\infty q_x^{(j)}$$

Dengan kata lain, $f_J(j)$ menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j pada suatu usia tertentu di masa depan.

3.1.2.3 *Force of Decrement* untuk Suatu Penyebab Kegagalan (*Force of Decrement due to Cause* j) dan *Force of Decrement* untuk Semua Penyebab Kegagalan (*Total Force of Decrement*)

Pada model beberapa penyebab kegagalan terdapat 2 *force of decrement* yang berhubungan satu sama lain, yakni *force of decrement due to cause j* (*force of decrement* untuk penyebab kegagalan j) dan *total force of decrement* (*force of decrement* untuk semua penyebab kegagalan). Kedua *force of decrement* ini diturunkan dengan berdasar kepada probabilitas bersyarat dari variabel random T_x.

a. Penurunan *force of decrement* untuk suatu penyebab kegagalan *(force of Decrement due to Cause j)*

Probabilitas terjadinya kegagalan sesaat ketika seseorang berusia $x + t$ yang dikarenakan oleh penyebab j dengan syarat orang tersebut telah berusia lebih dari $x + t$ adalah

$$Pr[\{(t < T_x \leq t + \Delta t) \cap (J = j)\} | T_x > t]$$

Dengan Δt merupakan suatu bilangan yang kecil.

Pada probabilitas bersyarat, telah diketahui bahwa:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr\ (A \cap B)}{Pr\ (B)}$$

Berdasarkan hal ini, bila dimisalkan

$A = (t < T_x \leq t + \Delta t) \cap (J = j)$

$B = T_x > t$

maka

$A \cap B = (t < T_x \leq t + \Delta t) \cap (J = j)$ atau dengan kata lain, $A \cap B = A$, maka

$$Pr(A|B) = \frac{Pr\ (A \cap B)}{Pr\ (B)} = \frac{Pr(A)}{Pr(B)}$$

Sehingga diperoleh

$$Pr[\{(t < T_x \leq t + \Delta t) \cap (J = j)\} | T_x > t] = \frac{Pr\{(t < T_x \leq t + \Delta t) \cap (J = j)\}}{Pr(T_x > t)} \quad (3.3)$$

Dari sini, akan ditentukan bentuk dari *force of decrement due to cause j*.

Bila kedua ruas pada (3.3) dibagi dengan Δt dan Δt ditujukan ke 0,maka diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr[\{(t < T_x \le t + \Delta t) \cap (J = j)\} | T_x > t]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(t < T_x \le t + \Delta t) \cap (J = j)\}}{\Delta t Pr(T_x > t)}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(t < T_x \le t + \Delta t) \cap (J = j)\}}{\Delta t \left(1 - F_{T_x}(t)\right)}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(0 < T_x \le t + \Delta t) \cap (J = j)\} - Pr\{(0 < T_x \le t) \cap (J = j)\}}{\Delta t \left(1 - F_{T_x}(t)\right)}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(j)} - {}_t q_x^{(j)}}{\Delta t \left(1 - F_{T_x}(t)\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - F_{T_x}(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(j)} - {}_t q_x^{(j)}}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{1 - F_{T_x}(t)} \frac{d}{dt} \, {}_t q_x^{(j)}$$

$$= \frac{1}{1 - F_{T_x}(t)} f_{T_x,J}(t, j)$$

$$= \frac{f_{T_x,J}(t, j)}{1 - F_{T_x}(t)}$$

$$= \frac{f_{T_x,J}(t, j)}{{}_t p_x^{(\tau)}}$$

$\frac{f_{T_x,J}(t,j)}{{}_t p_x^{(\tau)}}$ disebut sebagai *force of decrement due to cause* j pada usia $x + t$ dan dinotasikan dengan $\mu_{T_x}^{(j)}(t)$. Sehingga diperoleh:

$$\mu_{T_x}^{(j)}(t) = \frac{f_{T_x,J}(t, j)}{{}_t p_x^{(\tau)}}$$

Berdasarkan hal ini, diperoleh bentuk lain dari pdf bersama dari T_x dan J, yakni

$$f_{T_x,J}(t, j) = \mu_{T_x}^{(j)}(t) \; {}_t p_x^{(\tau)} \tag{3.4}$$

Dengan kata lain, pdf bersama dari T_x dan J untuk nilai $T_x = t$ dan $J = j$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian antara:

Force of decrement due to cause j pada usia $x + t$ dengan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan bertahan dari semua penyebab kegagalan setidaknya hingga berusia $x + t$.

b. Penurunan *force of decrement* untuk semua penyebab kegagalan (*total force of decrement*

Bila (3.3) dijumlahkan untuk semua nilai j, maka diperoleh

$$\sum_{j=1}^{m} Pr[\{(t < T_x \leq t + \Delta t) \cap (J = j)\} | T_x > t]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{Pr\{(t < T_x \leq t + \Delta t) \cap (J = j)\}}{Pr(T_x > t)}$$

Dengan kata lain, semua penyebab kegagalan telah ditinjau, sehingga persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Pr\{(t < T_x \leq t + \Delta t) | T_x > t\} = \frac{Pr(t < T_x \leq t + \Delta t)}{1 - Pr(T_x \leq t)}$$

$$= \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\tau)} - {}_{t}q_x^{(\tau)}}{1 - F_{T_x}(t)}$$

Bila kedua ruas dari persamaan di atas dibagi dengan Δt, dan Δt ditujukan ke 0, maka diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(t < T_x \leq t + \Delta t) | T_x > t\}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\tau)} - {}_{t}q_x^{(\tau)}}{1 - F_{T_x}(t)}$$

$$= \frac{1}{\{1 - F_{T_x}(t)\}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\tau)} - {}_{t}q_x^{(\tau)}}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{\{1 - F_{T_x}(t)\}} \frac{d}{dt} \ {}_{t}q_x^{(\tau)}$$

$$= \frac{1}{\{1 - F_{T_x}(t)\}} f_{T_x}(t)$$

$$= \frac{f_{T_x}(t)}{\{1 - F_{T_x}(t)\}}$$

$$= \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}}$$

$\frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}}$ menyatakan *total force of decrement* pada usia $x + t$ dan dinotasikan dengan $\mu_{T_x}^{(\tau)}(t)$. Sehingga diperoleh:

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}}$$

Berdasarkan hal ini,maka pdf marginal dari J dapat dinyatakan sebagai

$$f_{T_x}(t) = \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} \tag{3.5}$$

Dengan kata lain, pdf marginal dari T_x dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian antara:

Total force of decrement pada usia $x + t$ dengan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan bertahan dari semua penyebab kegagalan setidaknya hingga berusia $x + t$.

Selanjutnya, akan ditentukan hubungan antara *total force of decrement* dengan *force of decrement due to cause j.*

Sebelumnya, telah diketahui bahwa pdf marginal dari T_x adalah:

$$f_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(t, j)$$

Berarti

$$\frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}}$$

Sehingga diperoleh hubungan antara *total force of decrement* dengan *force of decrement due to cause* j sebagai berikut

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{T_x}^{(j)}(t) \tag{3.6}$$

Dengan kata lain, *total force of decrement* dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari seluruh *force of decrement due to cause j* untuk semua nilai j.

Total force of decrement juga memiliki hubungan dengan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan bertahan dari semua penyebab kegagalan setidaknya hingga berusia $x + t$ $\left({}_tp_x^{(\tau)} \right)$. Berikut adalah penurunan hubungan dari kedua hal ini:

Dari (3.5) diketahui

$$f_{T_x}(t) = \mu_{T(x)}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Berdasarkan hal ini, diperoleh hubungan antara $\mu_{T_x}^{(\tau)}(t)$ dan ${}_tp_x^{(\tau)}$ sebagai berikut

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}}$$

$$= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\ {}_tq_x^{(\tau)}$$

$$= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\left(1 - {}_tp_x^{(\tau)}\right)$$

$$= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

$$= -\frac{d}{dt} ln\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Sehingga, diperoleh bentuk *total force of decrement* pada usia $x+t$ $\left(\mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\right)$ bila dinyatakan dalam probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan bertahan dari semua penyebab kegagalan setidaknya hingga berusia $x+t$ $\left({}_tp_x^{(\tau)}\right)$ adalah sebagai berikut

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = -\frac{d}{dt} ln\ {}_tp_x^{(\tau)} \tag{3.7}$$

Sementara, bentuk dari ${}_tq_x^{(\tau)}$ bila dinyatakan dalam $\mu_{T(x)}^{(\tau)}(t)$ adalah

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = -\frac{d}{dt} ln\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(s) = -\frac{d}{ds} ln\ {}_sp_x^{(\tau)}$$

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds = -d\left(ln\ {}_sp_x^{(\tau)}\right)$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds &= -\int_0^t d\left(ln\ {}_sp_x^{(\tau)}\right)\\ &= -\left(ln\ {}_tp_x^{(\tau)} - ln\ {}_0p_x^{(\tau)}\right)\\ &= -\ ln\ {}_tp_x^{(\tau)}\end{aligned}$$

atau:

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds} \tag{3.8}$$

3.1.2.4 Pdf Bersyarat dari Variabel Random T_x dan J

Pdf bersyarat dari J bila diketahui bahwa kegagalan terjadi pada waktu t, dinyatakan sebagai $f_{J|T_x}(j|t)$, di mana:

$$f_{J|T_x}(j|t) = \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{f_{T_x}(t)}$$

Dari (3.4), diketahui bahwa:

$$f_{T_x,J}(t,j) = \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Sementara, dari (3.5) diketahui:

$$f_{T_x}(t) = \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Dari kedua hal ini, diperoleh bentuk lain pdf bersyarat dari variabel random J untuk nilai T_x yang diberikan, yakni sebagai berikut:

$$f_{J|T_x}(j|t) = \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{f_{T_x}(t)}$$

$$= \frac{\mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}}{\mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}}$$

$$= \frac{\mu_{T_x}^{(j)}(t)}{\mu_{T_x}^{(\tau)}(t)}$$

Artinya, pdf bersyarat dari variabel random J untuk nilai T_x yang diberikan dapat dinyatakan sebagai rasio dari

Force of decrement due to cause j pada usia $x + t$ dengan *total force of decrement* pada usia j.

Pdf bersyarat dari T_x bila diketahui bahwa kegagalan terjadi karena penyebab j, dinyatakan sebagai $f_{T_x|J}(t|j)$, di mana

$$f_{T_x|J}(t|j) = \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{f_J(j)}$$

3.1.3 Pengembangan Model Beberapa Penyebab Kegagalan yang Diskrit

Pengembangan model beberapa penyebab kegagalan yang diskrit dimulai dengan pendefinisian pdf bersama dari variabel random K_x dan J untuk nilai $K_x = k$ dan $J = j$. Pdf bersama ini dinotasikan dengan $f_{K_x,J}(k,j)$, di mana

$$f_{K_x,J}(k,j) = Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\}$$

$f_{K_x,J}(k,j)$ menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x telah menjalani k tahun secara penuh sebelum mengalami kegagalan yang dikarenakan penyebab j. Artinya, orang tersebut mengalami kegagalan ketika berusia antara $x + k$ dan $x + k + 1$. Berdasarkan hal ini, diperoleh hubungan antara $f_{K_x,J}(t,j)$ dengan $f_{T_x,J}(t,j)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} &= Pr\{(k \le T_x < k+1) \cap (J = j)\} \\ &= Pr\{(0 < T_x \le k+1) \cap (J = j)\} \\ &\quad - Pr\{(0 < T_x < k) \cap (J = j)\} \end{aligned}$$

Dari (3.1) diketahui

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(j)} &= Pr\{(0 < T_x \le t) \cap (J = j)\} \\ &= \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds \end{aligned}$$

Berarti

$$\begin{aligned} &Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} \\ &\quad = Pr\{(0 < T_x \le k+1) \cap (J = j)\} - Pr\{(0 < T_x < k) \cap (J = j)\} \\ &\quad = {}_{k+1}q_x^{(j)} - {}_kq_x^{(j)} \\ &\quad = {}_{k|1}q_x^{(j)} \end{aligned}$$

Akan ditentukan bentuk lain dari $Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\}$

$$\begin{aligned} &Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} \\ &\quad = Pr\{(0 < T_x \le k+1) \cap (J = j)\} - Pr\{(0 < T_x < k) \cap (J = j)\} \\ &\quad = \int_0^{k+1} f_{T_x,J}(s,j)ds - \int_0^k f_{T_x,J}(s,j)ds \\ &\quad = \int_k^{k+1} f_{T_x,J}(s,j)ds \end{aligned}$$

Dari (3.4) diketahui

$$f_{T_x,J}(t,j) = \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Berdasarkan hal ini, maka diperoleh

$$Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} = \int_k^{k+1} \mu_{T_x}^{(j)}(s)\ {}_sp_x^{(\tau)}ds$$

dengan mensubstitusi $t = s - k$ ke dalam integral, diperoleh

$$Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} = \int_0^1 \mu_{T_x}^{(j)}(t+k)\,{}_{t+k}p_x^{(\tau)}\,dt$$

Sebelumnya, dari (3.8) diketahui

$${}_{t}p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds}$$

artinya,

$${}_{t+k}p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^{t+k} \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds}$$

Sehingga,bila ${}_{t+k}p_x^{(\tau)}$ diuraikan, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} {}_{t+k}p_x^{(\tau)} &= e^{-\int_0^{t+k} \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds} \\ &= e^{-\left(\int_0^{k} \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds + \int_k^{k+t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds\right)} \\ &= e^{-\int_0^{k} \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds}\, e^{-\int_k^{k+t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds} \\ &= {}_{k}p_x^{(\tau)}\, e^{-\int_k^{k+t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds} \end{aligned}$$

kemudian, bila disubstitusi $u = s - k$, maka diperoleh

$${}_{t+k}p_x^{(\tau)} = {}_{k}p_x^{(\tau)}\, e^{-\int_0^{t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(u+k)du}$$

Sehingga, diperoleh

$$\begin{aligned} Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} &= \int_0^1 \mu_{T_x}^{(j)}(t+k)\,{}_{t+k}p_x^{(\tau)}\,dt \\ &= \int_0^1 \mu_{T_x}^{(j)}(t+k)\,{}_{k}p_x^{(\tau)}\;{}_{k}p_x^{(\tau)}\, e^{-\int_0^{t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(u+k)du}\,dt \\ &= {}_{k}p_x^{(\tau)} \int_0^1 \mu_{T_x}^{(j)}(t+k)\, e^{-\int_0^{t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(u+k)du}\,dt \end{aligned}$$

Terlihat bahwa muncul notasi baru, yakni $\mu_{T_x}^{(j)}(t+k)$ dan $\mu_{T_x}^{(\tau)}(u+k)$, karena itu, terlebih dahulu akan ditentukan makna matematis dari kedua notasi ini.

Sebelumnya, telah diketahui bahwa

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(t < T_x \le t + \Delta t) | T_x > t\}}{\Delta t}$$

Berarti:

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t+k)$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(t + k < T_x \le t + k + \Delta t) | T_x > t + k\}}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(t + k - k < T_x - k \le t + k + \Delta t - k) | T_x - k > t + k - k\}}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(t < T_x - k \le t + \Delta t) | T_x - k > t\}}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{(t < T_{x+k} \le t + \Delta t) | T_{x+k} > t\}}{\Delta t}$$
$$= \mu_{T_{x+k}}^{(\tau)}(t)$$

Dengan penurunan yang similar, juga diperoleh bahwa

$$\mu_{T_x}^{(j)}(u+k) = \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(u)$$

Berdasarkan kedua hal ini,maka diperoleh

$$Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} = {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 \mu_{T_x}^{(j)}(t+k) e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(u+k) du} dt$$
$$= {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(t) e^{-\int_0^t \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(u) du} dt$$

Dari (3.8) diketahui

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s) ds}$$

Berdasarkan hal ini diperoleh

$$Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} = {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(t) e^{-\int_0^t \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(u) du} dt$$
$$= {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(t) \; {}_t p_{x+k}^{(\tau)} dt$$

Dari (3.1) diketahui

$$ {}_{t}q_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds $$

Berdasarkan hal ini diperoleh

$$ Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} = {}_{k}p_x^{(\tau)} \int_0^1 \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(t) \; {}_{t}p_{x+k}^{(\tau)} dt $$
$$ = {}_{k}p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} $$

Sehingga diperoleh bentuk lain dari $Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\}$ sebagai berikut

$$ Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} = {}_{k}p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} $$

Artinya, Probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan menjalani k tahun secara utuh sebelum akhirnya mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j dapat dinyatakan sebagai

$$ f_{K_x,J}(k,j) = Pr\{(K_x = k) \cap (J = j)\} $$
$$ = {}_{k|1}q_x^{(j)} $$
$$ = {}_{k}p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} $$

Kemudian, akan ditentukan probabilitas terjadinya kegagalan pada interval waktu $(k, k+1)$ yang dikarenakan oleh semua penyebab.

Probabilitas terjadinya kegagalan pada interval waktu $(k, k+1)$ yang dikarenakan oleh semua penyebab dapat diperoleh dengan menjumlahkan $f_{K_x,J}(k,j)$ untuk seluruh nilai j, yakni:

$$ Pr(K(x) = k) = \sum_{j=1}^{m} f_{K_x,J}(k,j) $$
$$ = \sum_{j=1}^{m} Pr\{(K(x) = k) \cap (J = j)\} $$
$$ = \sum_{j=1}^{m} {}_{k}p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} $$
$$ = {}_{k}p_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} q_{x+k}^{(j)} $$

Dari (3.2) diketahui:

$$\sum_{j=1}^{m} q_{x+k}^{(j)} = q_{x+k}^{(\tau)}$$

Berdasarkan hal ini, maka diperoleh:

$$Pr(K(x) = k) = {}_k p_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} q_{x+k}^{(j)}$$
$$= {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)}$$

Dari hasil ini, terlihat bahwa model beberapa penyebab kegagalan yang diskrit dapat dikembangkan dari model beberapa penyebab kegagalan yang kontinu, karena itu, pembahasan berikutnya akan lebih ditekankan untuk model beberapa penyebab kegagalan yang kontinu.

3.2 Model Penyebab Kegagalan Tunggal Terkait (*Associated Single Decrement Model*)

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai model penyebab kegagalan tunggal terkait serta hubungan model ini dengan model beberapa penyebab kegagalan.

Untuk setiap penyebab kegagalan yang terdapat pada model beberapa penyebab kegagalan,(baik diskrit maupun kontinu) dapat didefinisikan sebuah model kegagalan tunggal yang hanya dipengaruhi oleh satu penyebab kegagalan dan mengabaikan penyebab lainnya. Model ini disebut sebagai model penyebab kegagalan tunggal terkait, dan didasarkan pada dua hal berikut:

$${}_t p_x^{\prime(j)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(j)}(s)ds} \tag{3.9a}$$

dan

$${}_t q_x^{\prime(j)} = 1 - {}_t p_x^{\prime(j)} \tag{3.9b}$$

Semua konsep pada model penyebab kegagalan tunggal dapat diterapkan pada model penyebab kegagalan tunggal terkait. Namun terdapat perbedaan yang cukup signifikan antara keduanya. Berikut adalah pembahasannya.

Pada model penyebab kegagalan tunggal, ${}_tq_x$ menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan meninggal selambatnya pada usia $x + t$ dan dapat dianggap sebagai fungsi distribusi dari T_x (variabel random yang menyatakan sisa usia dari seseorang yang saat ini berusia x). Sementara ${}_tp_x$ menyatakan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan tetap hidup setidaknya hingga berusia $x + t$ dan dapat dianggap sebagai fungsi *survival* dari variabel random T_x. Sehingga pada model penyebab kegagalan tunggal berlaku $\lim_{t\to\infty} {}_tq_x = 1$, artinya, seseorang yang saat ini berusia x pasti akan meninggal di suatu usia di masa depan.

Sementara, pada model penyebab kegagalan tunggal terkait, $\lim_{t\to\infty} {}_tq_x'^{(j)} \neq 1$. Karena seseorang mungkin saja tidak akan pernah mengalami suatu penyebab kegagalan j. Sebagai contoh adalah pada program rencana pensiun. Pada program ini, seorang peserta yang telah meninggal dunia (mengalami kegagalan yang disebabkan kematian), tentunya tidak akan mungkin mengalami kecacatan. Dengan kata lain, pada orang ini, untuk kecacatan, $\lim_{t\to\infty} {}_tq_x'^{(j)} \neq 1$.

Berdasarkan hal ini, ${}_tp_x'^{(j)}$ bukan merupakan suatu fungsi *survival*. Karena itu, kurang tepat bila ${}_tp_x'^{(j)}$ dan ${}_tq_x'^{(j)}$ dianggap sebagai suatu probabilitas. Berdasarkan hal ini, maka selanjutnya ${}_tq_x'^{(j)}$ akan disebut sebagai rasio kegagalan mutlak.

Model penyebab kegagalan tunggal terkait memiliki hubungan dengan model beberapa penyebab kegagalan. Pada bagian ini, akan dibahas dua hubungan antara model penyebab kegagalan tunggal terkait dengan model beberapa penyebab kegagalan. Kedua hubungan tersebut adalah:

a. Hubungan antara ${}_tp_x^{(\tau)}$dan ${}_tp_x'^{(j)}$
b. Hubungan antara $q_x'^{(j)}$ dan $q_x^{(j)}$

a. Penurunan hubungan antara ${}_tp_x^{(\tau)}$dan ${}_tp_x^{\prime(j)}$.

Dari (3.8) diketahui

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds} $$

Sementara, dari (3.6) diketahui

$$ \mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{T_x}^{(j)}(t) $$

Sehingga diperoleh

$$ \begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= e^{-\int_0^t \left(\sum_{j=1}^m \mu_{T_x}^{(j)}(s)\right)ds} \\ &= e^{-\int_0^t \left(\mu_{T_x}^{(1)}(s)+\mu_{T_x}^{(2)}(s)+\cdots+\mu_{T_x}^{(m)}(s)\right)ds} \\ &= e^{-\int_0^t \left(\mu_{T_x}^{(1)}(s)+\mu_{T_x}^{(2)}(s)+\cdots+\mu_{T_x}^{(m)}(s)\right)ds} \\ &= e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(1)}(s)ds} e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(2)}(s)ds} \ldots e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(m)}(s)ds} \\ &= {}_tp_x^{\prime(1)} \; {}_tp_x^{\prime(2)} \ldots {}_tp_x^{\prime(m)} \\ &= \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{\prime(j)} \end{aligned} $$

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{\prime(j)} \qquad (3.10) $$

Berdasarkan (3.9a) dan (3.9b), dapat disimpulkan bahwa nilai ${}_tp_x^{\prime(j)}$ dan ${}_tq_x^{\prime(j)}$ berada pada interval $(0,1)$. Karena itu, berdasarkan (3.10) dapat disimpulkan bahwa:

$$ {}_tp_x^{\prime(j)} \geq {}_tp_x^{(\tau)} $$

b. Penurunan hubungan antara $q_x^{(j)}$ dan $q_x^{\prime(j)}$.

Sebelumnya telah diketahui bahwa ${}_tp_x^{\prime(j)} \geq {}_tp_x^{(\tau)}$. Bila kedua ruas dikalikan dengan $\mu_x^{(j)}$, maka diperoleh

$$ {}_tp_x'^{(j)}\mu_{T_x}^{(j)}(t) \geq {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(j)}(t) $$

bila kedua ruas diintegralkan terhadap t pada interval $(0,1)$ akan diperoleh

$$ \int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\mu_{T_x}^{(j)}(t)dt \geq \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(j)}(t)dt $$

Dari (3.1) diketahui bahwa

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds $$

Berdasarkan hal di atas, maka diperoleh hasil sebagai berikut

$$ \int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\mu_{T_x}^{(j)}(t)dt \geq q_x^{(j)} $$

Untuk meyelesaikan ruas kiri pertidaksamaan di atas, digunakan analisa sebagai berikut:

${}_tq_x'^{(j)}$ merupakan notasi yang menyatakan seberapa besar rasio kegagalan mutlak antara usia x dan $x+t$ yang dikarenakan oleh penyebab j dengan mengabaikan penyebab kegagalan lainnya. Hal ini, berarti, pada prinsipnya $q_x'^{(j)}$ sama dengan ${}_tq_x$ pada model kegagalan tunggal.

Pada model kegagalan tunggal, dari (2.3) diketahui:

$$ \mu_{T_x}(t) = \frac{1}{{}_tp_x}\frac{d}{dt}({}_tq_x) $$

Sehingga diperoleh

$$ \mu_{T_x}(t)\ {}_tp_x = d({}_tq_x) $$

Bila kedua ruas diintegralkan terhadap t pada interval $(0,1)$, maka diperoleh

$$ \int_0^1 \mu_{T_x}(t)\ {}_tp_x dt = \int_0^1 d({}_tq_x) $$

atau

$$ \int_0^1 \mu_{T_x}(t)\ {}_tp_x dt = q_x $$

Berdasarkan hal di atas, maka pada model kegagalan tunggal terkait akan berlaku

$$\int_0^1 \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_t p_x^{\prime(j)} dt = q_x^{\prime(j)}$$

Sehingga, diperoleh hubungan antara $q_x^{\prime(j)}$ dan $q_x^{(j)}$ sebagai berikut

$$q_x^{\prime(j)} \geq q_x^{(j)}$$

Ilustrasi dari hubungan ini dapat digambarkan sebagai berikut:

Misalkan terdapat 1000 karyawan berusia 50 tahun yang bekerja pada suatu perusahaan. Seluruh karyawan diasumsikan dapat meninggal maupun pensiun sewaktu-waktu antara usia dan 51. Berdasarkan hal ini, dapat diasumsikan $q_{50}^{(1)} = s$ dan $q_{50}^{(2)} = t$. Di mana indeks (1) mewakili meninggal dan (2) mewakili pensiun.

Berarti, kemungkinan akan terdapat $1000s$ karyawan yang meninggal dan $1000t$ karyawan yang pensiun. Di antara $1000t$ karyawan yang pensiun tersebut, mungkin terdapat beberapa orang (katakanlah sejumlah u karyawan) yang meninggal sebelum usia $x + 1$, tetapi setelah pensiun. Sejumlah u karyawan ini, digolongkan mengalami kegagalan karena pensiun (bukan meninggal dunia) karena penyebab kegagalan yang pertama kali mereka alami adalah penyebab (2), yakni pensiun.

Misalkan kemudian perusahaan tersebut mengeluarkan kebijakan larangan pensiun sebelum usia 60. Berarti antara usia 50 dan 51, seluruh karyawan hanya mungkin mengalami kegagalan dikarenakan meniggal. Atau dengan kata lain, antara usia 50 dan 51 hanya terdapat satu penyebab kegagalan.

Dalam kondisi ini, maka sejumlah u karyawan yang pada awalnya diklasifikasikan mengalami kegagalan karena penyebab (2), akan di reklasifikasi menjadi mengalami kegagalan karena penyebab (1). Artinya, jumlah karyawan yang mengalami kegagalan dikarenakan meninggal dunia tidak lagi hanya sebanyak $1000s$, namun $1000s + u$. Artinya, $q_{50}^{\prime(1)}$ akan $\geq q_{50}^{(j)}$ atau secara umum

$$q_x^{\prime(j)} \geq q_x^{(j)}$$

3.3 Pembentukan Komponen Tabel Beberapa Penyebab Kegagalan (*Multiple Decrement Table*)

Model beberapa penyebab kegagalan dapat digunakan untuk menurunkan komponen-komponen pada tabel beberapa penyebab kegagalan. Penurunan komponen-komponen ini dapat dilihat dari 2 sudut pandang, yakni sudut pandang probabilistik (random) dan sudut pandang deterministik. Sudut pandang probabilistik disebut sebagai *random survivorship group,* sementara sudut pandang deterministik disebut sebagai *deterministic survivorship group.*

Kedua sudut pandang memiliki beberapa kondisi yang harus dipenuhi, di mana kondisi ini berbeda antara sudut pandang yang satu dengan yang lainnya. Namun, kedua sudut pandang tetap akan memberikan formula yang sama untuk seluruh komponen tabel.

Beberapa komponen dari tabel beberapa penyebab kegagalan adalah

1. $q_x^{(j)}$. Pada sudut pandang probabilistik, komponen ini memberikan informasi mengenai probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan mengalami kegagalan yang dikarenakan penyebab j selambatnya pada usia $x+1$.
   Sementara pada sudut pandang deterministik, komponen ini memberikan informasi mengenai rasio antara jumlah orang-orang yang mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j antara usia x dan $x+1$ dengan jumlah orang-orang yang bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x.
2. $l_x^{(\tau)}$. Pada sudut pandang probabilistik, komponen ini memberikan informasi mengenai ekspektasi dari jumlah orang-orang yang bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x.
   Sementara, pada sudut pandang deterministik, komponen ini memberikan informasi mengenai jumlah orang-orang yang bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x.
3. $d_x^{(j)}$. Pada sudut pandang probabilistik, komponen ini memberikan informasi mengenai ekspektasi jumlah orang-orang yang mengalami kegagalan yang dikarenakan penyebab j antara usia x dan $x+1$.

Sementara pada sudut pandang deterministik, komponen ini memberikan informasi mengenai jumlah orang-orang yang mengalami kegagalan yang dikarenakan penyebab j antara usia x dan $x + 1$.

4. $d_x^{(\tau)}$. Komponen ini merupakan jumlahan dari $d_x^{(j)}$ untuk seluruh nilai j

3.3.1 *Random Survivorship Group*

Misalkan ditinjau suatu kelompok kehidupan yang didalamnya terdapat $l_a^{(\tau)}$ kehidupan yang berusia a tahun. Pada penurunan menggunakan sudut pandang Random survivorship group diasumsikan bahwa masing-masing kehidupan memiliki pdf bersama dari T_a dan J di titik $T_a = t$ dan $J = j$ sebagai berikut:

$$f_{T_a,J}(t,j) = {}_tp_a^{(\tau)}\mu_{T_a}^{(j)}(t)$$

Kemudian, diperkenalkan tiga variabel random, yakni:

1. $\mathfrak{L}^{(\tau)}(x)$. Merupakan variabel random yang menyatakan jumlah orang-orang yang masih bertahan hingga usia x.
2. ${}_n\mathfrak{D}_x^{(j)}$. Merupakan variabel random yang menyatakan jumlah orang-orang yang mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j ketika berusia antara x dan $x + n$ (di mana $x > a$).
3. ${}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)}$. Merupakan variabel random yang menyatakan jumlah orang-orang yang mengalami kegagalan dikarenakan penyebab manapun (antara penyebab 1 hingga penyebab m), ketika berusia antara x dan $x + n$ (di mana $x > a$). Artinya ${}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_n\mathfrak{D}_x^{(j)}$.

Ketiga variabel tersebut akan ditentukan ekspektasinya:

Ekspektasi dari $\mathfrak{L}^{(\tau)}(x)$, yakni $E\left[\mathfrak{L}^{(\tau)}(x)\right]$, dinotasikan dengan $l_x^{(\tau)}$.

Ekspektasi dari ${}_n\mathfrak{D}_x^{(j)}$, yakni $E\left[{}_n\mathfrak{D}_x^{(j)}\right]$, dinotasikan dengan ${}_nd_x^{(j)}$.

Ekspektasi dari ${}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)}$, yakni $E\left[{}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)}\right]$, dinotasikan dengan ${}_nd_x^{(\tau)}$.

Pertama, akan ditentukan $l_x^{(\tau)}$. Untuk menentukan nilai dari $l_x^{(\tau)}$, diperkenalkan fungsi indikator M_r untuk kehidupan ke r, dimana:

M_r akan bernilai 1 (sukses) jika orang ke r tetap bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x.
M_r akan bernilai 0 (gagal) jika orang ke r mengalami kegagalan sebelum usia x.

Karena $x > a$ maka dapat dikatakan bahwa $x = a + t$ (di mana $t > 0$) atau dengan kata lain, $t = x - a$. Terlihat bahwa M_r merupakan sebuah variabel random yang berdistribusi Bernoulli. Dengan demikian diperoleh

$$
\begin{aligned}
E[M_r] &= \sum_{m_r} m_r \Pr(M_r = m_r) \\
&= (0)\, Pr(M_r = 0) + (1)\, Pr(M_r = 1) \\
&= Pr(M_r = 1) \\
&= Pr(T_a > t) \\
&= Pr(T_a > x - a) \\
&= 1 - Pr(0 < T_a \le x - a)
\end{aligned}
$$

Dari (3.2), diketahui

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = Pr(0 < T_x \le t) $$

artinya

$$ Pr(0 < T_a \le x - a) = {}_{x-a}q_a^{(\tau)} $$

Berdasarkan hal ini, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
E[M_r] &= 1 - {}_{x-a}q_a^{(\tau)} \\
&= {}_{x-a}p_a^{(\tau)}
\end{aligned}
$$

Menggunakan hasil ini, akan ditentukan $l_x^{(\tau)}$

$$ l_x^{(\tau)} = E\left[\mathfrak{L}^{(\tau)}(x)\right] = E\left[l_a^{(\tau)} M_r\right] $$

Karena M_r berdistribusi Bernoulli, maka $l_a^{(\tau)} M_r$ akan berdistribusi binomial dengan probabilitas sukses $(p) = E[M_r] = {}_{x-a}p_a^{(\tau)}$ dan jumlah percobaan $(n) = l_a^{(\tau)}$ sehingga diperoleh ekspektasi dari $\mathfrak{L}^{(\tau)}(x)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &= E\left[\mathfrak{L}^{(\tau)}(x)\right] \\ &= E\left[l_a^{(\tau)} M_r\right] \\ &= l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Artinya, ekspektasi jumlah orang yang akan bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x $\left(l_x^{(\tau)}\right)$ merupakan perkalian antara:

> jumlah mula-mula orang yang menjadi perhatian $\left(l_a^{(\tau)}\right)$ dengan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia a tahun akan tetap bertahan dari semua penyebab kegagalan setidaknya hingga usia x tahun $\left({}_{x-a}p_a^{(\tau)}\right)$.

Kemudian, akan ditentukan ${}_n d_x^{(j)}$

Untuk menentukan nilai dari ${}_n d_x^{(j)}$, diperkenalkan fungsi indikator I_r untuk kehidupan ke r, dimana:

$\mathrm{I}_r^{(j)}$ akan bernilai 1 (sukses) jika orang ke r mengalami kegagalan karena penyebab j ketika berusia antara x dan $x+n$.

$\mathrm{I}_r^{(j)}$ akan bernilai 0 (gagal) jika orang ke r bertahan hingga usia $x+n$

Karena $x > a$ maka dapat dikatakan bahwa $x = a + t$ (di mana $t > 0$) atau dengan kata lain, $t = x - a$. Terlihat bahwa $\mathrm{I}_r^{(j)}$ berdistribusi Bernoulli. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} E\left[\mathrm{I}_r^{(j)}\right] &= \sum_{i_r^{(j)}} i_r^{(j)} \Pr\left(\mathrm{I}_r^{(j)} = i_r^{(j)}\right) \\ &= (0)\, Pr\left(\mathrm{I}_r^{(j)} = 0\right) + (1)\, Pr\left(\mathrm{I}_r^{(j)} = 1\right) \end{aligned}$$

$$= Pr\left(\mathrm{I}_r^{(j)} = 1\right)$$
$$= Pr\{(t < T_a \le t + n) \cap (J = j)\}$$
$$= Pr\{(x - a < T_a \le x - a + n) \cap (J = j)\}$$
$$= Pr\{(0 < T_a \le x - a + n) \cap (J = j)\}$$
$$- Pr\{(0 < T_a \le x - a) \cap (J = j)\}$$

Dari (3.1) diketahui

$$Pr\{(0 < T_x \le t) \cap (J = j)\} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds$$

Berdasarkan hal ini maka

$$E\left[\mathrm{I}_r^{(j)}\right] = Pr\{(0 < T_a \le x - a + n) \cap (J = j)\}$$
$$- Pr\{(0 < T_a \le x - a) \cap (J = j)\}$$
$$= \int_0^{x-a+n} f_{T_x,J}(s,j)ds - \int_0^{x-a} f_{T_x,J}(s,j)ds$$
$$= \int_{x-a}^{x-a+n} f_{T_x,J}(s,j)ds$$

Sehingga diperoleh

$$E\left[\mathrm{I}_r^{(j)}\right] = \int_{x-a}^{x-a+n} f_{T_x,J}(s,j)ds$$

Dari (3.4) diketahui

$$f_{T_x,J}(t,j) = \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Berdasarkan hal ini, maka

$$E\left[\mathrm{I}_r^{(j)}\right] = \int_{x-a}^{x-a+n} f_{T_a,J}(s,j)ds$$
$$= \int_{x-a}^{x-a+n} \mu_{T_a}^{(j)}(s)\ {}_sp_x^{(\tau)} ds$$

Sehingga diperoleh

$$E\left[\mathrm{I}_r^{(j)}\right] = \int_{x-a}^{x+n-a} {}_s p_a^{(\tau)} \mu_{T_a}^{(j)}(s)ds$$

Menggunakan hasil ini, akan ditentukan ${}_n d_x^{(j)}$

$${}_n d_x^{(j)} = E\left[l_a^{(\tau)} \mathrm{I}_r^{(j)}\right]$$

Karena $\mathrm{I}_r^{(j)}$ berdistribusi Bernoulli, maka $l_a^{(\tau)} \mathrm{I}_r^{(j)}$ akan berdistribusi binomial dengan

probabilitas sukses $(p) = E\left[\mathrm{I}_r^{(j)}\right]$

$$= \int_{x-a}^{x+n-a} {}_s p_a^{(\tau)} \mu_{T_a}^{(j)}(s)ds$$

dan jumlah percobaan $(n) = l_a^{(\tau)}$.

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
{}_n d_x^{(j)} &= E\left[{}_n \mathfrak{D}_x^{(j)}\right] \\
&= E\left[l_a^{(\tau)} \mathrm{I}_r^{(j)}\right] \\
&= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_s p_a^{(\tau)} \mu_{T_a}^{(j)}(s)ds \\
&= l_a^{(\tau)} \left(\int_0^{x+n-a} {}_s p_a^{(\tau)} \mu_{T_a}^{(j)}(s)ds - \int_0^{x-a} {}_s p_a^{(\tau)} \mu_{T_a}^{(j)}(s)ds \right)
\end{aligned}$$

Dari (3.1) diketahui bahwa

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds$$

Sementara, dari (3.4) diketahui bahwa

$$f_{T_x,J}(t,j) = \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Berdasarkan kedua hal ini diperoleh

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t \mu_{T_x}^{(j)}(s)\ {}_sp_x^{(\tau)} ds$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
{}_nd_x^{(j)} &= l_a^{(\tau)}\left(\int_0^{x+n-a} {}_sp_a^{(\tau)}\mu_{T_a}^{(j)}(s)ds - \int_0^{x-a} {}_sp_a^{(\tau)}\mu_{T_a}^{(j)}(s)ds\right) \\
&= l_a^{(\tau)}\left({}_{x+n-a}q_a^{(j)} - {}_{x-a}q_a^{(j)}\right) \\
&= l_a^{(\tau)}\left({}_{x-a|n}q_a^{(j)}\right) \\
&= l_a^{(\tau)}\left({}_{x-a}p_a^{(\tau)}\ {}_nq_{a+x-a}^{(j)}\right) \\
&= l_a^{(\tau)}\left({}_{x-a}p_a^{(\tau)}\ {}_nq_x^{(j)}\right)
\end{aligned}$$

Dari (3.11) diketahui

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)}$$

Sehingga diperoleh

$${}_nd_x^{(j)} = l_x^{(\tau)}\ {}_nq_x^{(j)}$$

Artinya, ekspektasi jumlah orang yang mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j antara usia x dan $x + n$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian antara

> jumlah orang-orang yang tetap bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x dengan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j selambatnya pada usia $x + t$.

Dari persamaan di atas, bila diambil $n = 1$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
{}_1d_x^{(j)} &= d_x^{(j)} \\
&= l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Kemudian akan ditentukan $d_x^{(\tau)} = E\left[{}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)}\right]$

Sesuai definisi ${}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)}$, maka

$$
\begin{aligned}
{}_nd_x^{(\tau)} &= E\left[{}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)}\right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{m} {}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)}\right] = \sum_{j=1}^{m} {}_nd_x^{(j)}
\end{aligned}
$$

Artinya, ekspektasi jumlah orang-orang yang mengalami kegagalan dikarenakan semua penyebab antara usia x dan $x + n$ merupakan total jumlah orang-orang yang mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j antara usia x dan $x + n$ untuk semua nilai j.

Berdasarkan hal ini, berarti

$$d_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} d_x^{(j)}$$

Dari (3.12) diketahui

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$$

Sehingga

$$d_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$$

$$d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)}$$

Dari (3.2) diketahui

$${}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)}$$

Artinya

$$q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)}$$

Dari sini, diperoleh

$$\begin{aligned} d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)} \\ &= l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, dapat disimpulkan bahwa ekspektasi jumlah orang yang mengalami kegagalan dikarenakan semua penyebab antara usia x dan $x+1$ $\left(d_x^{(\tau)}\right)$ merupakan hasil perkalian antara

ekspektasi jumlah orang yang bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x $\left(l_x^{(\tau)}\right)$ dengan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan mengalami kegagalan yang dikarenakan penyebab j selambatnya pada usia $x+1$ $\left(q_x^{(\tau)}\right)$

3.3.2 *Deterministic Survivorship Group*

Misalkan diobservasi suatu kelompok kehidupan yang didalamnya terdapat sejumlah $l_a^{(\tau)}$ kehidupan yang berusia a tahun. Dasar penurunan dengan sudut pandang *deterministic survivorship group* adalah asumsi bahwa seluruh $l_a^{(\tau)}$ kehidupan yang bertahan hingga usia x (di mana $x > a$ dan x merupakan bilangan real) akan menghadapi *total force of decrement* yang deterministik (bukan merupakan limit dari probabilitas bersyarat seperti pada *random survivorship group*). *Total force of decrement* ini dinotasikan dengan $\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a)$. Berikut adalah penurunan $\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a)$ secara deterministik.

Misalkan dari sejumlah $l_a^{(\tau)}$ kehidupan yang berusia a tahun, terdapat sebanyak $l_x^{(\tau)}$ kehidupan yang mencapai usia x tahun. Seluruh $l_x^{(\tau)}$ kehidupan ini akan dilihat perubahan jumlahnya misalkan m kali dalam satu tahun. Artinya, akan dilihat perubahan dari jumlah $l_x^{(\tau)}$ setiap $\frac{1}{m}$ tahun. Perubahan jumlah kehidupan ini adalah sebesar:

$$l_x^{(\tau)} - l_{x+\frac{1}{m}}^{(\tau)}$$

Bila perubahan jumlah kehidupan ini dibagi dengan perubahan waktu (yakni sebanyak $\frac{1}{m}$ tahun) dan jumlah awal kehidupan (yakni sebanyak $l_x^{(\tau)}$), maka diperoleh:

$$\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+\frac{1}{m}}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}\frac{1}{m}} = \frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+\frac{1}{m}}^{(\tau)}}{\frac{1}{m}}$$

$\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+\frac{1}{m}}^{(\tau)}}{\frac{1}{m}}$ merupakan tingkat kegagalan nominal tahunan.

Kemudian, bila $\frac{1}{m}$ dinotasikan dengan h, maka diperoleh:

$$\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+\frac{1}{m}}^{(\tau)}}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+h}^{(\tau)}}{h}$$

Bila tingkat kegagalan nominal ini ingin ditinjau sebanyak tak hingga kali dalam interval satu tahun, artinya nilai m ditujukan ke tak hingga. Berarti $\frac{1}{m}$ maupun h akan menuju 0. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+h}^{(\tau)}}{h} &= \frac{1}{l_x^{(\tau)}}\lim_{h\to 0}\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+h}^{(\tau)}}{h}\\ &= \frac{1}{l_x^{(\tau)}}\lim_{h\to 0} -\frac{l_{x+h}^{(\tau)} - l_x^{(\tau)}}{h}\\ &= -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\lim_{h\to 0}\frac{l_{x+h}^{(\tau)} - l_x^{(\tau)}}{h}\\ &= -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(\tau)}}{dx}\end{aligned}$$

$-\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(\tau)}}{dx}$ menyatakan *total force of decrement* dari sudut pandang deterministik yakni $\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a)$. Sehingga diperoleh

$$\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a) = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\left(l_x^{(\tau)}\right) \tag{3.13}$$

$\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a)$ juga dapat diturunkan secara probabilistik, berikut adalah penurunannya:

Dari (3.11) diketahui

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)}$$

Dan dari (3.8) diketahui

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds}$$

Berarti

$${}_{x-a}p_a^{(\tau)} = e^{-\int_0^{x-a} \mu_{T_a}^{(\tau)}(s)ds}$$

Dengan mensubstitusi $y = s + a$, maka

$${}_{x-a}p_a^{(\tau)} = e^{-\int_a^{x} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}$$

Sehingga sebagai hasil akhir, diperoleh

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} e^{-\int_a^{x} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}$$

Bila kedua ruas pada persamaan di atas di ln kan kemudian diturunkan terhadap x, maka diperoleh

$$ln\left(l_x^{(\tau)}\right) = ln\left(l_a^{(\tau)} e^{-\int_a^{x} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}\right)$$

$$= ln\left(l_a^{(\tau)}\right) - \int_a^x \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy$$

$$\int_a^x \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy = ln\left(l_a^{(\tau)}\right) - ln\left(l_x^{(\tau)}\right)$$

$$= ln\left(\frac{l_a^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy\right) = \frac{d}{dx}\left\{ln\left(\frac{l_a^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\right)\right\}$$

$$\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a) = \left(\frac{1}{l_a^{(\tau)}\big/ l_x^{(\tau)}}\right)\left(l_a^{(\tau)}\right)(-1)\left(l_x^{(\tau)}\right)^{-2}\left\{\frac{d}{dx}\left(l_x^{(\tau)}\right)\right\}$$

$$= -\left(\frac{l_x^{(\tau)}}{l_a^{(\tau)}}\right)\left(l_a^{(\tau)}\right)\left(\frac{1}{{l_x^{(\tau)}}^2}\right)\left\{\frac{d}{dx}\left(l_x^{(\tau)}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\left(l_x^{(\tau)}\right)$$

$$\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a) = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\left(l_x^{(\tau)}\right) \tag{3.14}$$

Terlihat bahwa (3.13) dan (3.14) memberikan hasil yang sama, artinya secara matematis, *total force of decrement* pada sudut pandang probabilistik sama dengan *total force of decrement* pada sudut pandang determinisitik. Namun, kedua *total force of decrement* diturunkan dari dua hal yang berbeda. *Total force of decrement* pada sudut pandang probabilistik diturunkan dari probabilitas bersyarat. Sementara *total force of decrement* pada sudut pandang deterministik diturunkan dari tingkat kegagalan nominal tahunan.

Kemudian, akan ditentukan bentuk dari *force of decrement due to cause j* yang deterministik. Pada sudut pandang deterministik, *force of decrement due to cause* j untuk suatu usia x didefinisikan memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\mu_{T_a}^{(j)}(x-a) = \frac{1}{l_x^{(\tau)}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{l_x^{(j)} - l_{x+\Delta x}^{(j)}}{\Delta x}$$

atau dengan kata lain

$$\mu_{T_a}^{(j)}(x-a) = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\left(l_x^{(j)}\right) \tag{3.15}$$

Akan ditentukan hubungan antara $\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a)$dengan $\mu_{T_a}^{(j)}(x-a)$

Dari (3.13) dan (3.14), diketahui bahwa

$$\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a) = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\left(l_x^{(\tau)}\right)$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa terdapat m penyebab kegagalan yang mungkin. Diasumsikan bahwa seluruh $l_x^{(\tau)}$ orang yang ada akan habis (mengalami kegagalan) dikarenakan m penyebab ini. Dengan kata lain, sejumlah $l_x^{(\tau)}$ orang yang ada dapat dianggap akan terbagi ke dalam m kelompok berbeda yang dinotasikan dengan $l_x^{(j)}, j = 1,2,\ldots,m$. Sehingga dapat ditulis

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)}$$

Dalam hal ini, $l_x^{(j)}$menyatakan jumlah orang yang masih bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga berusia x namun diasumsikan akan mengalami kegagalan pada suatu usia tertentu di masa depan dikarenakan penyebab j. maka

$$\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a) = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\left(l_x^{(\tau)}\right)$$

$$\begin{aligned}\mu_{T_a}^{(\tau)}(x-a) &= -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)}\right)\\ &= -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{d}{dx} l_x^{(j)}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{m} -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx} l_x^{(j)}\\ &= \sum_{j=1}^{m} \mu_{T_a}^{(j)}(x-a)\end{aligned}$$

Terlihat bahwa *total force of decrement* yang deterministik dapat diperoleh dari penjumlahan seluruh *force of decrement due to cause* j yang deterministik untuk semua nilai j. Hubungan ini sama dengan hubungan pada sudut pandang random.

Kemudian, akan ditentukan jumlah orang yang mengalami kegagalan antara usia x dan $x+1$ dikarenakan penyebab manapun (dari penyebab 1 hingga m) (dinotasikan dengan $d_x^{(\tau)}$).

Pada sudut pandang *deterministic survivorship group*, jumlah orang yang mengalami kegagalan antara usia x dan $x+1$ didefinisikan sebagai selisih antara jumlah orang yang bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x dengan jumlah orang yang bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia $x+1$. Sehingga

$$
\begin{aligned}
d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} \\
&= l_x^{(\tau)}\left(1 - \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\right) \\
&= l_x^{(\tau)}\left(1 - \frac{l_a^{(\tau)} e^{-\int_a^{x+1} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}}{l_a^{(\tau)} e^{-\int_a^{x} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}}\right) \\
&= l_x^{(\tau)}\left(1 - \frac{e^{-\int_a^{x+1} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}}{e^{-\int_a^{x} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}}\right) \\
&= l_x^{(\tau)}\left(1 - e^{-\int_a^{x+1} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy + \int_a^{x} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}\right) \\
&= l_x^{(\tau)}\left(1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(\tau)}(y-a)dy}\right)
\end{aligned}
$$

Bila disubstitusi $r = y - a$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)}\left(1 - e^{-\int_{x-a}^{x-a+1} \mu_{T_a}^{(\tau)}(r)dr}\right) \\
&= l_x^{(\tau)}\left(1 - e^{-\left(\int_0^{x-a+1} \mu_{T_a}^{(\tau)}(r)dr - \int_0^{x-a} \mu_{T_a}^{(\tau)}(r)dr\right)}\right) \\
&= l_x^{(\tau)}\left(1 - \frac{e^{-\int_0^{x-a+1} \mu_{T_a}^{(\tau)}(r)dr}}{e^{-\int_0^{x-a} \mu_{T_a}^{(\tau)}(r)dr}}\right)
\end{aligned}
$$

Dari (3.8) diketahui

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds} $$

Berarti,

$$ d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} \left(1 - \frac{e^{-\int_0^{x-a+1} \mu_{T_a}^{(\tau)}(r)dr}}{e^{-\int_0^{x-a} \mu_{T_a}^{(\tau)}(r)dr}} \right) $$

$$ \begin{aligned} d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} \left(1 - \frac{{}_{x-a+1}p_a^{(\tau)}}{{}_{x-a}p_a^{(\tau)}} \right) \\ &= l_x^{(\tau)}\left(1 - p_x^{(\tau)}\right) \\ &= l_x^{(\tau)}\left(q_x^{(\tau)}\right) \end{aligned} $$

Sehingga, diperoleh hasil akhir sebagai berikut

$$ \begin{aligned} d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} \\ &= l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)} \end{aligned} $$

Dari sini terlihat bahwa jumlah total orang-orang yang mengalami kegagalan yang dikarenakan semua penyebab antara usia x dan $x+1$ $\left(d_x^{(\tau)}\right)$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian antara

> jumlah orang-orang yang bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x $\left(l_x^{(\tau)}\right)$ dengan $q_x^{(\tau)}$.

Dengan kata lain, $q_x^{(\tau)}$ dalam hal ini adalah

$$ q_x^{(\tau)} = \frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} $$

Artinya $q_x^{(\tau)}$ menyatakan rasio dari total orang-orang yang mengalami kegagalan antara usia x dan $x+1$ dengan jumlah kehidupan yang bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia x. Atau, $q_x^{(\tau)}$ menyatakan tingkat kegagalan efektif tahunan antara tahun usia x dan $x+1$

Dari bentuk $q_x^{(\tau)}$ di atas, dapat diperoleh $p_x^{(\tau)}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
p_x^{(\tau)} &= 1 - q_x^{(\tau)} \\
&= 1 - \frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \\
&= \frac{l_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} - \frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \\
&= \frac{l_x^{(\tau)} - l_x^{(\tau)} + l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \\
&= \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}
\end{aligned}$$

Kemudian akan diturunkan bentuk dari $q_x^{(j)}$

Bila (3.15) disusun ulang, akan diperoleh

$$-d\left(l_x^{(j)}\right) = \mu_{T_a}^{(j)}(x-a)l_x^{(\tau)}dx$$

dengan penamaan ulang variabel x menjadi y, diperoleh

$$-d\left(l_y^{(j)}\right) = \mu_{T_a}^{(j)}(y-a)l_y^{(\tau)}dy$$

kemudian, bila kedua ruas diintegralkan dengan batas-batas dari x hingga $x+1$, akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+1} -d\left(l_y^{(j)}\right) &= \int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(j)}(y-a)l_y^{(\tau)}dy \\
l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} &= \int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(j)}(y-a)l_y^{(\tau)}dy \\
d_x^{(j)} &= \int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(j)}(y-a)l_y^{(\tau)}dy
\end{aligned}$$

Bila kedua ruas dibagi dengan $l_x^{(\tau)}$akan diperoleh

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{\int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(j)}(y-a) l_y^{(\tau)} dy}{l_x^{(\tau)}}$$

$$= \int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(j)}(y-a) \frac{l_y^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} dy$$

$$= \int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(j)}(y-a) \frac{p_y^{(\tau)}}{p_x^{(\tau)}} dy$$

$$= \int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(j)}(y-a)_{y-x} p_x^{(\tau)} dy$$

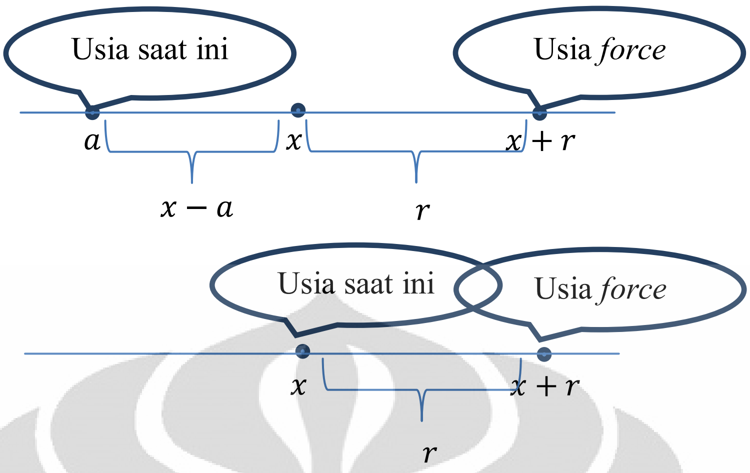
Bila dilakukan substitusi $r = y - x$, maka diperoleh

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \int_x^{x+1} \mu_{T_a}^{(j)}(y-a)_{y-x} p_x^{(\tau)} dy$$

$$= \int_0^1 \mu_{T_a}^{(j)}(r+x-a)\ {}_r p_x^{(\tau)} dy$$

Sebelumnya, telah diketahui bahwa $\mu_{T_a}^{(j)}(y-a)$ menotasikan *force of decrement due to cause j* deterministik yang harus dihadapi oleh seseorang yang saat ini berusia a untuk dapat bertahan dari penyebab kegagalan j hingga usia y (yakni usia $a + (y - a)$).

Menggunakan analogi ini, berarti dapat disimpulkan bahwa $\mu_{T_a}^{(j)}(r + x - a)$ merupakan notasi untuk *force of decrement due to cause* j deterministik yang harus dihadapi oleh seseorang yang saat ini berusia a agar orang tersebut bertahan dari penyebab kegagalan j hingga usia $a + (r + x - a)$ (yakni usia $r + x$). Artinya, bagi seseorang yang saat ini telah berusia x, untuk bertahan dari penyebab kegagalan j hingga usia $r + x$, orang tersebut akan menghadapi *force* sebesar $\mu_{T_x}^{(j)}(r + x - x) = \mu_{T_x}^{(j)}(r)$



Gambar 3.1 Kondisi $\mu_{T_a}^{(j)}(r+x-a)$

Berdasarkan hal ini, dapat disimpulkan bahwa

$$\mu_{T_a}^{(j)}(r+x-a) = \mu_{T_x}^{(j)}(r)$$

Maka diperoleh

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \int_0^1 \mu_{T_a}^{(j)}(r+x-a)\ {}_rp_x^{(\tau)}dy$$

$$= \int_0^1 \mu_{T(x)}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt$$

Dari (3.1) dan (3.4) diketahui

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds$$

$$f_{T_x,J}(t,j) = \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Sehingga, sebagai hasil akhir diperoleh

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \int_0^1 \mu_{T(x)}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt$$

$$= q_x^{(j)}$$

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = q_x^{(j)} \tag{3.16}$$

Dengan kata lain $q_x^{(j)}$ dapat dipandang sebagai rasio antara

jumlah kehidupan yang mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j antara usia x dan $x+1$ dengan jumlah kehidupan yang bertahan hingga usia x

Dari hasil penurunan $q_x^{(j)}, q_x^{(\tau)}, d_x^{(j)}, d_x^{(\tau)}$ dan $l_x^{(\tau)}$ menggunakan sudut pandang probabilistik dan deterministik, dapat disimpulkan bahwa kedua sudut pandang memberikan formula yang sama.

3.4 Beberapa Asumsi pada Model – Model Beberapa Penyebab Kegagalan

3.4.1 Asumsi *Force of Decrement due to Cause j* Bernilai Tetap

Asumsi ini didasarkan bahwa untuk tiap tahun usia ($0 \leq s < 1$), berlaku

$$\mu_{T_x}^{(j)}(s) = \mu_{T_x}^{(j)}(0) \qquad (3.17a)$$

Sebelumnya dari (3.6) telah diketahui bahwa

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{T_x}^{(j)}(t)$$

Berdasarkan hal ini, maka akan berlaku

$$\begin{aligned} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t) &= \sum_{j=1}^{m} \mu_{T_x}^{(j)}(t) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \mu_{T_x}^{(j)}(0) \\ &= \mu_{T_x}^{(\tau)}(0) \end{aligned}$$

$$\mu_{T_x}^{(\tau)}(t) = \mu_{T_x}^{(\tau)}(0) \qquad (3.17b)$$

Berarti, asumsi bahwa *force of decrement due to cause* j bernilai tetap juga akan mengakibatkan *total force of decrement* bernilai tetap.

Akan diturunkan hubungan antara ${}_tq_x^{(j)}$, ${}_tq_x^{(\tau)}$, ${}_rp_x'^{(j)}$ dan ${}_rp_x^{(\tau)}$ untuk $0 \leq r < 1$ dan $0 \leq t < 1$ berdasarkan asumsi ini.

Dari (3.8) telah diketahui

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds}$$

Dari (3.9a) diketahui

$${}_tp_x'^{(j)} = e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(j)}(s)ds}$$

Sehingga, berdasarkan (3.17b) dan (3.8) akan diperoleh

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)ds} \\ &= e^{-\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(0)ds} \\ &= e^{-t\mu_{T_x}^{(\tau)}(0)} \end{aligned}$$

$$ln\left({}_tp_x^{(\tau)} \right) = -t\mu_{T_x}^{(\tau)}(0)$$

Sementara, berdasarkan (3.17a) dan (3.9a) diperoleh

$${}_tp_x'^{(j)} = e^{-\int_0^t \mu_{T(x)}^{(j)}(s)ds}$$

$${}_tp_x'^{(j)} = e^{-\int_0^t \mu_{T(x)}^{(j)}(0)ds}$$

$${}_tp_x'^{(j)} = e^{-t\mu_{T(x)}^{(j)}(0)}$$

$$ln\left({}_tp_x^{(j)} \right) = -t\mu_{T(x)}^{(j)}(0)$$

Sehingga, untuk nilai r pada interval $(0,1)$akan berlaku

$$r\mu_x^{(\tau)}(0) = -ln\ {}_rp_x^{(\tau)}$$

dan

$$r\mu_x^{(j)}(0) = -ln\ {}_rp_x'^{(j)}$$

Menggunakan hal ini, akan diturunkan hubungan antara

${}_tq_x^{(j)}$, ${}_tq_x^{(\tau)}$, ${}_rp_x^{\prime(j)}$ dan ${}_rp_x^{(\tau)}$ untuk $0 \le r < 1$ dan $0 \le t < 1$. Penurunannya adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x^{(j)} &= \int_0^t f_{T_x,J}(s,j)ds \\
&= \int_0^t \mu_{T_x}^{(j)}(s)\ {}_sp_x^{(\tau)}ds \\
&= \mu_{T_x}^{(j)}(0)\int_0^t {}_sp_x^{(\tau)}ds \\
&= \frac{\mu_{T_x}^{(j)}(0)}{\mu_{T_x}^{(\tau)}(0)}\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(0)\ {}_sp_x^{(\tau)}ds \\
&= \frac{\mu_{T_x}^{(j)}(0)}{\mu_{T_x}^{(\tau)}(0)}\int_0^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(s)\ {}_sp_x^{(\tau)}ds \\
&= \frac{\mu_{T_x}^{(j)}(0)}{\mu_{T_x}^{(\tau)}(0)}\ {}_tq_x^{(\tau)} \\
&= \frac{-ln\ {}_rp_x^{\prime(j)}/r}{-ln\ {}_rp_x^{(\tau)}/r}\ {}_tq_x^{(\tau)} \\
&= \frac{ln\ {}_rp_x^{\prime(j)}}{ln\ {}_rp_x^{(\tau)}}\ {}_tq_x^{(\tau)}
\end{aligned}
$$

$$
{}_tq_x^{(j)} = \frac{ln\ {}_rp_x^{\prime(j)}}{ln\ {}_rp_x^{(\tau)}}\ {}_tq_x^{(\tau)} \tag{3.18}
$$

3.4.2 Asumsi Distribusi Uniform pada Variabel Random $\boldsymbol{T_x}$

Asumsi ini didasarkan bahwa bagi semua penyebab kegagalan pada tiap tahun usia, variabel random T_x akan berdistribusi uniform standar, atau dengan kata lain;

$$
f_{T_x|T_x<1,J}(t,j) = 1
$$

Berdasarkan hal ini diperoleh

$$f_{T_x|T_x<1,J}(t,j) = \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{Pr\{(0 < T_x \leq 1) \cap (J = j)\}}$$

$$= \frac{f_{T_x,J}(t,j)}{q_x^{(j)}} = 1$$

Berdasarkan hal ini, berarti

$$f_{T_x,J}(t,j) = q_x^{(j)}$$

$$\int_0^t f_{T_x,J}(t,j)\, ds = \int_0^t q_x^{(j)}\, ds$$

Berdasarkan (3.1)

$$\int_0^t f_{T_x,J}(s,j) ds = \ {}_t q_x^{(j)}$$

sehingga diperoleh

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t q_x^{(j)}\, ds$$

$$= t q_x^{(j)}$$

Artinya, untuk tiap tahun usia $(0 \leq t < 1)$, diperoleh

$${}_t q_x^{(j)} = t q_x^{(j)}$$

Sementara, bentuk dari ${}_t q_x^{(\tau)}$ adalah sebagai berikut

$${}_t q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_t q_x^{(j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} t q_x^{(j)}$$

$$= t \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)}$$

$$= t q_x^{(\tau)}$$

Sehingga diperoleh dua hal berikut

$$ {}_tq_x^{(j)} = tq_x^{(j)} $$

dan

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = tq_x^{(\tau)} $$

Menggunakan hubungan ${}_tq_x^{(\tau)} = tq_x^{(\tau)}$, akan ditentukan bentuk sederhana dari $q_x^{(j)}$.

Dari (3.4) diketahui

$$ f_{T_x,J}(t,j) = \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} $$

Artinya

$$ \frac{d}{dt}\left({}_tq_x^{(j)}\right) = \mu_{T(x)}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} $$

Berdasarkan hal ini, untuk $0 \leq t < 1$ diperoleh

$$ \frac{d}{dt}\left({}_tq_x^{(j)}\right) = \mu_{T(x)}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} $$

$$ \frac{d}{dt}\left(tq_x^{(j)}\right) = \mu_{T(x)}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} $$

$$ q_x^{(j)} = \mu_{T(x)}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} \qquad (3.19) $$

Artinya, probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j selambatnya pada usia $x + 1$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian antara:

> *force of decrement due to cause* j dengan probabilitas bahwa seseorang yang saat ini berusia x akan bertahan dari semua penyebab kegagalan hingga usia $x + t$ (di mana $0 \leq t < 1$).

Selanjutnya, akan ditentukan hubungan antara ${}_tp_x'^{(j)}$, ${}_tp_x^{(\tau)}$, $q_x^{(j)}$ dan $q_x^{(\tau)}$.
Dari (3.9a) diketahui

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x'^{(j)} &= exp\left(-\int_0^t \mu_{T_x}^{(j)}(s)ds\right) \\
&= exp\left(-\int_0^t \frac{q_x^{(j)}}{{}_sp_x^{(\tau)}}ds\right) \\
&= exp\left(-\int_0^t \frac{q_x^{(j)}}{1-\ {}_sq_x^{(\tau)}}ds\right) \\
&= exp\left(-q_x^{(j)}\int_0^t \frac{1}{1-sq_x^{(\tau)}}ds\right)
\end{aligned}
$$

bila diambil $r = 1 - sq_x^{(\tau)}$, maka

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x'^{(j)} &= exp\left(-q_x^{(j)}\int_0^t \frac{1}{1-sq_x^{(\tau)}}ds\right) \\
&= exp\left(\frac{-q_x^{(j)}}{-q_x^{(\tau)}}\int_1^{1-tq_x^{(\tau)}} \frac{1}{r}dr\right) \\
&= exp\left(\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}[ln\, r]_1^{1-tq_x^{(\tau)}}\right) \\
&= exp\left(\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}ln\left(1-tq_x^{(\tau)}\right)\right) \\
&= exp\left(\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}ln\left(1-\ {}_tq_x^{(\tau)}\right)\right) \\
&= exp\left(\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}ln\left(\ {}_tp_x^{(\tau)}\right)\right) \\
&=\ {}_tp_x^{(\tau)\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}
\end{aligned}
$$

Berarti

$$
q_x^{(j)} = \frac{ln\ {}_tp_x'^{(j)}}{ln\ {}_tp_x^{(\tau)}}q_x^{(\tau)} \tag{3.20}
$$

Bila dibandingkan, terlihat bahwa bila nilai t pada (3.18) disubstitusi sebesar 1, maka akan diperoleh (3.20).

3.5 Asumsi pada Model Penyebab Kegagalan Tunggal Terkait

Berdasarkan (3.18) dan (3.20), terlihat bahwa mungkin timbul masalah ketika ${}_{r}p_x^{(\tau)}$ maupun ${}_{t}p_x^{\prime(j)}$ bernilai 0. Untuk mengatasi masalah ini, dikembangkan asumsi distribusi uniform pada model penyebab kegagalan tunggal terkait untuk tiap tahun usia.

Dasar asumsi ini, similar dengan asumsi distribusi uniform pada model penyebab kegagalan tunggal. Pada model penyebab kegagalan tunggal, dasar penurunan asumsi distribusi uniform adalah bahwa untuk tiap tahun usia, pdf bersyarat $f_{T_x|T_x<1}(t)$ akan bernilai 1.

Berdasarkan hal ini, maka

$$f_{T_x|T_x<1}(t) = \frac{f_{T_x}(t)}{Pr(0 < T_x < 1)}$$
$$= \frac{f_{T_x}(t)}{q_x}$$
$$= 1$$

Atau dengan kata lain

$$f_{T_x}(t) = q_x$$

Artinya

$$\int_0^t f_{T_x}(s)\, ds = \int_0^t q_x\, ds$$
$$= tq_x$$

Sehingga, untuk $0 \leq t < 1$, berlaku

$${}_{t}q_x = tq_x$$

dan

$${}_{t}p_x = 1 - tq_x$$

Menggunakan analogi dari hasil ini, maka pada model penyebab kegagalan tunggal terkait, dengan asumsi distribusi uniform pada tiap tahun usia, berlaku dua hal berikut

$${}_tp_x^{\prime(j)} = 1 - tq_x^{\prime(j)}$$

dan

$$\begin{aligned}{}_tp_x^{\prime(j)}\mu_{T(x)}^{(j)}(t) &= \frac{d}{dt}\left(- {}_tp_x^{\prime(j)}\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(tq_x^{\prime(j)} - 1\right)\\ &= q_x^{\prime(j)}\end{aligned}$$

Berdasarkan kedua hal ini, akan ditentukan hubungan antara $q_x^{(j)}$ dan $q_x^{\prime(j)}$.

Dari (3.10) diketahui

$${}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{\prime(j)}$$

Dan dari (3.1) dan (3.4) diperoleh

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(j)}(s)\,ds$$

Berarti

$$\begin{aligned}q_x^{(j)} &= \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^{m} {}_sp_x^{\prime(i)}\right)\mu_{T_x}^{(j)}(s)\,ds\\ &= \int_0^1 \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} {}_sp_x^{\prime(i)}\right) {}_sp_x^{\prime(j)}\mu_{T_x}^{(j)}(s)\,ds\\ &= \int_0^1 \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} {}_sp_x^{\prime(i)}\right) q_x^{\prime(j)}\,ds\end{aligned}$$

$$= q_x'^{(j)} \int_0^1 \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} {}_s p_x'^{(i)} \right) ds$$

$$q_x^{(j)} = q_x'^{(j)} \int_0^1 \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} {}_s p_x'^{(i)} \right) ds \tag{3.21}$$

Dari (3.21) terlihat bahwa walaupun ${}_s p_x'^{(i)}$ bernilai 0, $q_x^{(j)}$ tetap dapat ditentukan.

BAB 4
PENERAPAN MODEL – MODEL BEBERAPA KEGAGALAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai penerapan model – model beberapa penyebab kegagalan dalam dunia asuransi jiwa. Pada subbab 4.1 akan dibahas penggunaan model beberapa penyebab kegagalan dalam menyusun tabel beberapa penyebab kegagalan dari tabel penyebab kegagalan tunggal terkait. Pada subab 4.2 akan dibahas mengenai pembentukan tabel beberapa penyebab kegagalan dari tabel penyebab kegagalan tunggal terkait ketika terdapat suatu maupun beberapa titik diskontinuitas. Penggunaan model beberapa penyebab kegagalan dalam penentuan *Actuarial Present Value* (APV) dari suatu skenario asuransi jiwa akan dibahas pada subbab 4.3. Terkahir, pada subbab 4.4 akan dibahas mengenai penggunaan model beberapa penyebab kegagalan dalam penentuan premi tunggal bersih dan variansi *loss* dari suatu asuransi jiwa seumur hidup.

4.1 Penyusunan Tabel Beberapa Penyebab Kegagalan dari Tabel Penyebab Kegagalan Tunggal Terkait

Pada pembentukan tabel beberapa penyebab kegagalan, akan sangat baik apabila data-data yang dimiliki dapat digunakan untuk langsung mengestimasi $q_x^{(j)}$. Namun biasanya hal ini sulit dilakukan. Untuk mengatasi hal ini dapat digunakan tabel penyebab kegagalan tunggal terkait yang dianggap sesuai.

Berikut adalah contoh pembentukan tabel beberapa penyebab kegagalan (*multiple decrement tabel*) dari data-data pada tabel penyebab kegagalan tunggal terkait (*associated single decrement tabel*) yang dianggap sesuai. Adapun dalam hal ini:

indeks (1) menyatakan kegagalan yang disebabkan kematian

indeks (2) menyatakan kegagalan yang disebabkan kecacatan

indeks (3) menyatakan kegagalan yang disebabkan keluar dari asuransi, pada hal ini, usia 70 merupakan usia dimana peserta asuransi secara otomatis keluar dari asuransi

Misalkan diketahui data-data pada tabel 4.1 sebagai berikut:

Tabel 4.1 Ilustrasi tabel penyebab kegagalan tunggal terkait untuk tiga penyebab kegagalan

x	$q_x'^{(1)}$	$q_x'^{(2)}$	$q_x'^{(3)}$
65	0.020	0.02	0.04
66	0.025	0.02	0.06
67	0.030	0.02	0.08
68	0.035	0.02	0.10
69	0.040	0.02	0.12

diasumsikan bahwa $l_{65}^{(\tau)} = 1000$

Dari data di atas, akan ditentukan:

$q_x^{(j)}, j = 1,2,3$

$q_x^{(\tau)}$

$l_x^{(\tau)}$

$d_x^{(j)}, j = 1,2,3$

Terlebih dahulu, akan ditentukan $q_x^{(\tau)}$.

Sebelumnya telah diketahui bahwa

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x'^{(j)} $$

dan

$$ {}_tp_x'^{(j)} = 1 - {}_tq_x'^{(j)} $$

Maka dapat diperoleh

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - {}_tq_x'^{(j)}\right) $$

Sehingga, dalam kasus ini

$$p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m}\left(1 - q_x'^{(j)}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{3}\left(1 - q_x'^{(j)}\right)$$

dan

$$q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)}$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{3}\left(1 - q_x'^{(j)}\right)$$

Kemudian, akan ditentukan $q_x^{(j)}, j = 1,2,3$ menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan. Dari (3.20) diketahui

$$q_x^{(j)} = \frac{ln\ \ {}_tp_x'^{(j)}}{ln\ \ {}_tp_x^{(\tau)}}\, q_x^{(\tau)}$$

Selanjutnya, akan ditentukan $l_x^{(\tau)}$ dan $d_x^{(j)}, j = 1,2,3$

Dari (3.11) diketahui

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)}$$

bila ditetapkan $a = x - 1$, maka diperoleh

$$l_x^{(\tau)} = l_{x-1}^{(\tau)} p_{x-1}^{(\tau)}$$

$$= l_{x-1}^{(\tau)}\left(1 - q_{x-1}^{(\tau)}\right)$$

dari (3.12) maupun (3.16) diketahui

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$$

Berdasarkan seluruh persamaan di atas, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

x	$q_x^{(\tau)} = 1 - \prod_{j=1}^{3} \left(1 - q_x'^{(j)}\right)$
65	$1-(1-0.020)(1-0.02)(1-0.04) = 0.078016$
66	$1-(1-0.025)(1-0.02)(1-0.06) = 0.10183$
67	$1-(1-0.030)(1-0.02)(1-0.08) = 0.125448$
68	$1-(1-0.035)(1-0.02)(1-0.10) = 0.14887$
69	$1-(1-0.040)(1-0.02)(1-0.12) = 0.172096$
70	$default = 1$

x	$q_x^{(1)} = q_x^{(\tau)} \frac{ln\left(1-q_x'^{(1)}\right)}{ln\left(1-q_x^{(\tau)}\right)}$	$q_x^{(2)} = q_x^{(\tau)} \frac{ln\left(1-q_x'^{(2)}\right)}{ln\left(1-q_x^{(\tau)}\right)}$	$q_x^{(3)} = q_x^{(\tau)} \frac{ln\left(1-q_x'^{(3)}\right)}{ln\left(1-q_x^{(\tau)}\right)}$
65	$(0.078016)\left(\frac{ln(1-0.02)}{\ln(1-0.078016)}\right) = 0.019404$	$(0.078016)\left(\frac{ln(1-0.02)}{\ln(1-0.078016)}\right) = 0.019404$	$(0.078016)\left(\frac{ln(1-0.04)}{\ln(1-0.078016)}\right) = 0.039208$
66	$(0.10183)\left(\frac{ln(1-0.025)}{\ln(1-0.10183)}\right) = 0.024006$	$(0.10183)\left(\frac{ln(1-0.02)}{\ln(1-0.10183)}\right) = 0.019156$	$(0.10183)\left(\frac{ln(1-0.06)}{\ln(1-0.10183)}\right) = 0.058669$
67	$(0.125448)\left(\frac{ln(1-0.03)}{\ln(1-0.125448)}\right) = 0.028506$	$(0.125448)\left(\frac{ln(1-0.02)}{\ln(1-0.125448)}\right) = 0.018907$	$(0.125448)\left(\frac{ln(1-0.08)}{\ln(1-0.125448)}\right) = 0.078035$
68	$(0.14887)\left(\frac{ln(1-0.035)}{\ln(1-0.14887)}\right) = 0.032904$	$(0.14887)\left(\frac{ln(1-0.02)}{\ln(1-0.14887)}\right) = 0.018659$	$(0.14887)\left(\frac{ln(1-0.1)}{\ln(1-0.14887)}\right) = 0.097307$
69	$(0.172096)\left(\frac{ln(1-0.04)}{\ln(1-0.172096)}\right) = 0.037199$	$(0.172096)\left(\frac{ln(1-0.02)}{\ln(1-0.172096)}\right) = 0.01841$	$(0.172096)\left(\frac{ln(1-0.12)}{\ln(1-0.172096)}\right) = 0.116488$
70	$default = 0$	$default = 0$	$default = 1$

x	$l_x^{(\tau)} = l_{x-1}^{(\tau)}\left(1 - q_{x-1}^{(\tau)}\right)$	$d_x^{(1)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(1)}$	$d_x^{(2)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(2)}$	$d_x^{(3)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(3)}$
65	$Default = 1000$	$(1000)(0.019404) = 19.40397$	$(1000)(0.019404) = 19.40397$	$(1000)(0.039208) = 39.20805$
66	$1000(1-0.078016) = 921.984$	$(921.984)(0.024006) = 22.13286$	$(921.984)(0.019156) = 17.66123$	$(921.984)(0.05867) = 54.09155$

67	$921.984(1-0.10183)$ $=828.0984$	$(828.0984)(0.028506)$ $=23.60578$	$(828.0984)(0.01891)$ $=15.65703$	$(828.0984)(0.07803)$ $=64.62047$
68	$828.0984\,(1-0.125448)$ $=724.2151$	$(724.2151)(0.032904)$ $=23.82961$	$(724.2151)(0.01866)$ $=13.51279$	$(724.2151)(0.09731)$ $=70.47149$
69	$724.2151(1-0.14877)$ $=616.4012$	$(616.4012)(0.037199)$ $=22.92941$	$(616.4012)(0.01841)$ $=11.34771$	$(616.4012)(0.11649)$ $=71.80306$
70	$616.4012(1-0.17209)$ $=510.321$	$Default=0$	$Default=0$	$Default=510.321$

Bila $q_x^{(j)}, j = 1,2,3$ ditentukan dengan menggunakan asumsi bahwa masing – masing kegagalan pada model penyebab kegagalan tunggal terkait berdistribusi uniform, maka dari (3.21) diperoleh

$$q_x^{(j)} = q_x^{\prime(j)} \int_0^1 \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2} {}_sp_x^{\prime(i)} \right) ds$$

artinya

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= q_x^{\prime(1)} \int_0^1 {}_sp_x^{\prime(2)}\ {}_sp_x^{\prime(3)}\, ds \\ &= q_x^{\prime(1)} \int_0^1 \left(1 - {}_sq_x^{\prime(2)}\right)\left(1 - {}_sq_x^{\prime(3)}\right) ds \\ &= q_x^{\prime(1)} \int_0^1 \left(1 - sq_x^{\prime(2)}\right)\left(1 - sq_x^{\prime(3)}\right) ds \\ &= q_x^{\prime(1)} \int_0^1 \left(1 - sq_x^{\prime(3)} - sq_x^{\prime(2)} + s^2 q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\right) ds \end{aligned}$$

$$q_x^{(1)} = q_x^{\prime(1)} \left\{1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{\prime(2)} + q_x^{\prime(3)}\right) + \frac{1}{3} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\right\}$$

dengan proses similar, diperoleh

$$q_x^{(2)} = q_x^{\prime(2)} \left\{1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{\prime(1)} + q_x^{\prime(3)}\right) + \frac{1}{3} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)}\right\}$$

$$q_x^{(3)} = q_x^{\prime(3)} \left\{1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{\prime(1)} + q_x^{\prime(2)}\right) + \frac{1}{3} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)}\right\}$$

Sehingga diperoleh nilai $q_x^{(1)}, q_x^{(2)}$ dan $q_x^{(3)}$ sebagai berikut

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
65	$0.02\left\{1-\frac{1}{2}(0.02+0.04)+\frac{1}{3}(0.02)(0.04)\right\}=0.01941$	$0.02\left\{1-\frac{1}{2}(0.02+0.04)+\frac{1}{3}(0.02)(0.04)\right\}=0.01941$	$0.04\left\{1-\frac{1}{2}(0.02+0.02)+\frac{1}{3}(0.02)(0.02)\right\}=0.03920$
66	$0.025\left\{1-\frac{1}{2}(0.02+0.06)+\frac{1}{3}(0.02)(0.06)\right\}=0.02401$	$0.02\left\{1-\frac{1}{2}(0.025+0.06)+\frac{1}{3}(0.025)(0.06)\right\}=0.01916$	$0.06\left\{1-\frac{1}{2}(0.025+0.02)+\frac{1}{3}(0.025)(0.02)\right\}=0.05866$
67	$0.03\left\{1-\frac{1}{2}(0.02+0.08)+\frac{1}{3}(0.02)(0.08)\right\}=0.02852$	$0.02\left\{1-\frac{1}{2}(0.03+0.08)+\frac{1}{3}(0.03)(0.08)\right\}=0.01892$	$0.08\left\{1-\frac{1}{2}(0.03+0.02)+\frac{1}{3}(0.03)(0.02)\right\}=0.07802$
68	$0.035\left\{1-\frac{1}{2}(0.02+0.1)+\frac{1}{3}(0.02)(0.1)\right\}=0.03292$	$0.02\left\{1-\frac{1}{2}(0.035+0.1)+\frac{1}{3}(0.035)(0.1)\right\}=0.01867$	$0.10\left\{1-\frac{1}{2}(0.035+0.02)+\frac{1}{3}(0.035)(0.02)\right\}=0.09727$
69	$0.04\left\{1-\frac{1}{2}(0.02+0.12)+\frac{1}{3}(0.02)(0.12)\right\}=0.03723$	$0.02\left\{1-\frac{1}{2}(0.04+0.12)+\frac{1}{3}(0.04)(0.12)\right\}=0.01843$	$0.12\left\{1-\frac{1}{2}(0.04+0.02)+\frac{1}{3}(0.04)(0.02)\right\}=0.11643$
70	$Default=0$	$Default=0$	$Default=1$

Terlihat bahwa hasil yang diperoleh tidak jauh berbeda dengan hasil yang diperoleh sebelumnya.

Dengan kata lain, dari ketiga tabel penyebab kegagalan tunggal terkait di atas, akan diperoleh tabel beberapa penyebab kegagalan sebagai berikut:

Tabel 4.2 Tabel beberapa penyebab kegagalan yang terbentuk dari tabel penyebab kegagalan tunggal pada tabel 4.1

x	$q_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
65	0.078016	0.019404	0.019404	0.039208	1000	19.40397	19.40397	39.20805
66	0.10183	0.024006	0.019156	0.058669	921.984	22.13286	17.66123	54.09155
67	0.125448	0.028506	0.018907	0.078035	828.0984	23.60578	15.65703	64.62047
68	0.14887	0.032904	0.018659	0.097307	724.2151	23.82961	13.51279	70.47149
69	0.172096	0.037199	0.01841	0.116488	616.4012	22.92941	11.34771	71.80306
70	1	0	0	1	510.321	0	0	510.321

4.2 Kasus Khusus pada Penyusunan Tabel Beberapa Penyebab Kegagalan

Pada seluruh pembahasan mengenai model beberapa penyebab kegagalan serta model penyebab kegagalan tunggal terkait yang telah dijabarkan sebelumnya, terlihat bahwa semua probabilitas $\left({}_tp_x^{(j)},\ {}_tq_x^{(j)},\ {}_tp_x^{(\tau)} \text{dan } {}_tq_x^{(\tau)} \right)$ serta rasio kegagalan mutlak $\left({}_tp_x'^{(j)},\ {}_tq_x'^{(j)},\ {}_tp_x'^{(\tau)} \text{dan } {}_tq_x'^{(\tau)} \right)$ yang terjadi pada interval $0 \leq t < 1$ memiliki nilai-nilai yang sepenuhnya kontinu.

Pada pembahasan ini, akan dijabarkan suatu kasus di mana terdapat titik diskontinuitas pada salah satu rasio kegagalan mutlak dan akan dilihat pengaruhnya kepada model penyebab kegagalan yang terbentuk. Adapun bentuk diskontinuitas yang akan dibahas adalah pada dua situasi berikut

1. situasi di mana peserta asuransi hanya diperbolehkan keluar dari asuransi pada akhir tahun
2. situasi di mana peserta asuransi hanya diperbolehkan keluar dari asuransi pada tengah tahun dan akhir tahun

Pada kedua situasi, diasumsikan bahwa masing-masing rasio kegagalan berdistribusi uniform

Situasi 1

Misalkan terdapat tiga penyebab kegagalan, yakni kematian, kecacatan dan keluar dari asuransi. Data-data mengenai ketiga penyebab kegagalan diambil dari tabel penyebab kegagalan tunggal terkait, yakni:

$q_x'^{(1)}$ untuk rasio kegagalan mutlak yang dikarenakan kematian

$q_x'^{(2)}$ untuk rasio kegagalan mutlak yang dikarenakan kecacatan

$q_x'^{(3)}$ untuk rasio kegagalan mutlak yang dikarenakan keluar dari asuransi

Dengan data – data mengenai rasio kegagalan mutlak pada tabel 4.1. Ketiga penyebab kegagalan tunggal terkait diasumsikan berdistribusi uniform pada setiap tahun usia di *associated single decrement table*. Pengunduran diri (keluar dari asuransi) diasumsikan hanya terjadi di akhir tahun (kondisi diatur sedemikian sehingga pengunduran diri hanya dapat dilakukan di akhir tahun). Akan ditentukaan tabel beberapa penyebab kegagalan yang terbentuk bila diasumsikan diasumsikan bahwa $l_{65}^{(\tau)} = 1000$.

Pertama akan ditentukan $q_x^{(1)}$, $q_x^{(2)}$, $q_x^{(3)}$ dan $q_x^{(\tau)}$

Diketahui ketiga penyebab kegagalan berdistribusi uniform, artinya:

$${}_tp_x'^{(1)} = 1 - \ tq_x'^{(1)}, \text{untuk } 0 \le t \le 1$$

$${}_tp_x'^{(2)} = 1 - \ tq_x'^{(2)}, \text{untuk } 0 \le t \le 1$$

$${}_tp_x'^{(3)} = \begin{cases} 1, 0 \le t < 1 \\ 1 - \ q_x'^{(3)}, \text{untuk } t = 1 \end{cases}$$

Dari (3.21) diketahui

$$q_x^{(j)} = q_x'^{(j)} \int_0^1 \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{m} {}_sp_x'^{(i)} \right) ds$$

Berarti:

$$\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= q_x'^{(1)} \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne 1}}^{3} {}_sp_x'^{(j)} \, ds \\
&= q_x'^{(1)} \int_0^1 {}_sp_x'^{(2)} \ {}_sp_x'^{(3)} \, ds \\
&= q_x'^{(1)} \int_0^1 {}_sp_x'^{(2)} (1) \, ds \\
&= q_x'^{(1)} \int_0^1 {}_sp_x'^{(2)} \, ds \\
&= q_x'^{(1)} \int_0^1 \left(1 - \ {}_sq_x'^{(2)}\right) ds \\
&= q_x'^{(1)} \int_0^1 \left(1 - sq_x'^{(2)}\right) ds \\
&= q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q_x^{(2)} &= q_x^{\prime(2)} \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{3} {}_s p_x^{\prime(j)}\, ds \\
&= q_x^{\prime(2)} \int_0^1 {}_s p_x^{\prime(1)}\ {}_s p_x^{\prime(3)}\, ds \\
&= q_x^{\prime(2)} \int_0^1 {}_s p_x^{\prime(1)}(1)\, ds \\
&= q_x^{\prime(2)} \int_0^1 {}_s p_x^{\prime(1)}\, ds \\
&= q_x^{\prime(2)} \int_0^1 \left(1 - {}_s q_x^{\prime(1)}\right) ds \\
&= q_x^{\prime(2)} \int_0^1 \left(1 - s q_x^{\prime(1)}\right) ds \\
&= q_x^{\prime(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_x^{(3)} &= q_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} \\
&= 1 - p_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} \\
&= 1 - p_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} \\
&= 1 - p_x^{\prime(1)} p_x^{\prime(2)} p_x^{\prime(3)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} \\
&= 1 - \left(1 - q_x^{\prime(1)}\right)\left(1 - q_x^{\prime(2)}\right)\left(1 - q_x^{\prime(3)}\right) - q_x^{\prime(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(2)}\right) \\
&\qquad - q_x^{\prime(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)}\right) \\
&= 1 - \left(1 - q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(2)} + q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} + q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} + q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} \right. \\
&\qquad \left. - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\right) - \left(q_x^{\prime(1)} - \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)}\right) \\
&\qquad - \left(q_x^{\prime(2)} - \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)}\right) \\
&= 1 - 1 + q_x^{\prime(3)} + q_x^{\prime(2)} - q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} + q_x^{\prime(1)} - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} \\
&\qquad + q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} + \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} - q_x^{\prime(2)} + \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)}
\end{aligned}
$$

$$= q_x^{\prime(1)} + q_x^{\prime(2)} + q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} - q_x^{\prime(2)} - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} + \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)}$$

$$+ \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} - q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} + q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}$$

$$= q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} + q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}$$

$$= q_x^{\prime(3)} \left(1 - q_x^{\prime(2)} - q_x^{\prime(1)} - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)}\right)$$

$$= q_x^{\prime(3)} \left\{\left(1 - q_x^{\prime(2)}\right) - q_x^{\prime(1)} \left(1 - q_x^{\prime(2)}\right)\right\}$$

$$= q_x^{\prime(3)} \left(p_x^{\prime(2)} - q_x^{\prime(1)} p_x^{\prime(2)}\right)$$

$$= q_x^{\prime(3)} p_x^{\prime(2)} \left(1 - q_x^{\prime(1)}\right)$$

$$= q_x^{\prime(3)} p_x^{\prime(2)} p_x^{\prime(1)}$$

Berarti, probabilitas terjadinya kegagalan antara usia x dan $x + 1$ yang dikarenakan oleh penyebab j $(j = 1,2,3)$ dengan penyebab 3 yang hanya dapat terjadi di akhir tahun, adalah sebagai berikut

$$q_x^{(j)} = \begin{cases} q_x^{\prime(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(2)}\right) & \text{untuk } j = 1 \\ q_x^{\prime(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)}\right) & \text{untuk } j = 2 \\ q_x^{\prime(3)} p_x^{\prime(2)} p_x^{\prime(1)} & \text{untuk } j = 3 \end{cases}$$

dari (3.2) diketahui

$${}_t q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_t q_x^{(j)}$$

Artinya, probabilitas terjadinya kegagalan yang dikarenakan penyebab manapun antara usia x dan $x + 1$ adalah

$$q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)}$$

Selanjutnya, akan ditentukan $l_x^{(\tau)}$ dan $d_x^{(j)}, j = 1,2,3$

Dari (3.11) diketahui

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)}$$

bila ditetapkan $a = x - 1$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &= l_{x-1}^{(\tau)} p_{x-1}^{(\tau)} \\ &= l_{x-1}^{(\tau)}\left(1 - q_{x-1}^{(\tau)}\right) \end{aligned}$$

dari (3.12) maupun (3.16) diketahui

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$$

Berdasarkan seluruh persamaan di atas, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4.3 Tabel beberapa penyebab kegagalan yang terbentuk dari data kegagalan tunggal terkait pada tabel 4.1 dan dibatasi bahwa peserta hanya diperbolehkan keluar dari asuransi pada akhir tahun

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$q_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
65	0.0198	0.0198	0.038416	0.078016	1000	19.8	19.8	38.416
66	0.02475	0.01975	0.05733	0.10183	921.984	22.8191	18.20918	52.85734
67	0.0297	0.0197	0.076048	0.125448	828.0984	24.59452	16.31354	63.97522
68	0.03465	0.01965	0.09457	0.14887	724.2151	25.09405	14.23083	68.48902
69	0.0396	0.0196	0.112896	0.172096	616.4012	24.40949	12.08146	69.58923

Situasi 2

Untuk data yang sama dengan situasi 1, akan disusun tabel beberapa penyebab kegagalan bila diasumsikan bahwa pengunduran diri dapat terjadi di pertengahan dan akhir tahun. Dengan kata lain, kondisi dari ${}_tp_x'^{(1)}$, ${}_tp_x'^{(2)}$, dan ${}_tp_x'^{(3)}$ adalah sebagai berikut:

$$_tp_x'^{(1)} = 1 - \ tq_x'^{(1)}, \text{untuk } 0 \le t \le 1$$

$$_tp_x'^{(2)} = 1 - \ tq_x'^{(2)}, \text{untuk } 0 \le t \le 1$$

$$_tp_x'^{(3)} = \begin{cases} 1 & , 0 \le t < 0.5 \\ 1 - \ 0.5q_x'^{(3)} & , 0.5 \le t < 1 \\ 1 - q_x'^{(3)} & , t \ge 1 \end{cases}$$

Sehingga dengan metode yang sama seperti pada bagian sebelumnya, diperoleh hasil sebagai berikut

$$q_x^{(1)} = q_x'^{(1)} \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne 1}}^{3} {_sp_x'^{(j)}} \, ds$$

$$= q_x'^{(1)} \int_0^1 {_sp_x'^{(2)}} \ {_sp_x'^{(3)}} \, ds$$

$$= q_x'^{(1)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} {_sp_x'^{(2)}}(1) \, ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 {_sp_x'^{(2)}} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) ds \right\}$$

$$= q_x'^{(1)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} {_sp_x'^{(2)}} \, ds + \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) \int_{\frac{1}{2}}^1 {_sp_x'^{(2)}} \, ds \right\}$$

$$= q_x'^{(1)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \ {_sq_x'^{(2)}}\right) ds + \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - \ {_sq_x'^{(2)}}\right) ds \right\}$$

$$= q_x'^{(1)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - sq_x'^{(2)}\right) ds + \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - sq_x'^{(2)}\right) ds \right\}$$

$$= q_x'^{(1)} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} q_x'^{(2)}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} q_x'^{(2)}\right) \right\}$$

$$= q_x'^{(1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} q_x'^{(2)} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} q_x'^{(2)} - \frac{1}{4} q_x'^{(3)} + \frac{3}{16} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)} \right)$$

$$= q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(2)} - \frac{1}{4} q_x'^{(3)} + \frac{3}{16} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)} \right)$$

$$q_x^{(2)} = q_x'^{(2)} \int_0^1 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{3} {}_s p_x'^{(j)}\, ds$$

$$= q_x'^{(2)} \int_0^1 {}_s p_x'^{(1)}\ {}_s p_x'^{(3)}\, ds$$

$$= q_x'^{(2)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} {}_s p_x'^{(1)}(1)\, ds + \int_{\frac{1}{2}}^{1} {}_s p_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) ds \right\}$$

$$= q_x'^{(2)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} {}_s p_x'^{(1)}\, ds + \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) \int_{\frac{1}{2}}^{1} {}_s p_x'^{(1)}\, ds \right\}$$

$$= q_x'^{(2)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - {}_s q_x'^{(1)}\right) ds + q_x'^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - {}_s q_x'^{(1)}\right) ds \right\}$$

$$= q_x'^{(2)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - s q_x'^{(1)}\right) ds + \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 - s q_x'^{(1)}\right) ds \right\}$$

$$= q_x'^{(2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} q_x'^{(1)}\right) + q_x'^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} q_x'^{(1)}\right)$$

$$= q_x'^{(2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} q_x'^{(1)} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} q_x'^{(1)} - \frac{1}{4} q_x'^{(3)} + \frac{3}{16} q_x'^{(1)} q_x'^{(3)}\right)$$

$$= q_x'^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(1)} - \frac{1}{4} q_x'^{(3)} + \frac{3}{16} q_x'^{(1)} q_x'^{(3)}\right)$$

$$q_x^{(3)} = q_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)}$$

$$= 1 - p_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)}$$

$$= 1 - p_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)}$$

$$= 1 - p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} p_x'^{(3)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)}$$

$$= 1 - \left(1 - q_x'^{(1)}\right)\left(1 - q_x'^{(2)}\right)\left(1 - q_x'^{(3)}\right)$$

$$- q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(2)} - \frac{1}{4} q_x'^{(3)} + \frac{3}{16} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}\right)$$

$$- q_x'^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(1)} - \frac{1}{4} q_x'^{(3)} + \frac{3}{16} q_x'^{(1)} q_x'^{(3)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \Big(1 - q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(2)} + q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} + q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} + q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} \\
&\qquad - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\Big) \\
&\qquad - \left(q_x^{\prime(1)} - \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} - \frac{1}{4} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} + \frac{3}{16} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\right) \\
&\qquad - \left(q_x^{\prime(2)} - \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} - \frac{1}{4} q_x^{\prime(3)} q_x^{\prime(2)} + \frac{3}{16} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\right) \\
&= 1 - 1 + q_x^{\prime(3)} + q_x^{\prime(2)} - q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} + q_x^{\prime(1)} - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} \\
&\qquad + q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(1)} + \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} + \frac{1}{4} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} \\
&\qquad - \frac{3}{16} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} - q_x^{\prime(2)} + \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} + \frac{1}{4} q_x^{\prime(3)} q_x^{\prime(2)} \\
&\qquad - \frac{3}{16} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} \\
&= q_x^{\prime(3)} - \frac{3}{4} q_x^{\prime(3)} q_x^{\prime(2)} - \frac{3}{4} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)} + \frac{10}{16} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)} \\
&= q_x^{\prime(3)} \left(1 - \frac{3}{4} q_x^{\prime(2)} - \frac{3}{4} q_x^{\prime(1)} + \frac{5}{8} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)}\right)
\end{aligned}
$$

Berarti, diperoleh bentuk $q_x^{(j)}$ sebagai berikut:

$$
q_x^{(j)} = \begin{cases}
q_x^{\prime(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(2)} - \frac{1}{4} q_x^{\prime(3)} + \frac{3}{16} q_x^{\prime(2)} q_x^{\prime(3)}\right) & \text{untuk } j = 1 \\
q_x^{\prime(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(1)} - \frac{1}{4} q_x^{\prime(3)} + \frac{3}{16} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(3)}\right) & \text{untuk } j = 2 \\
q_x^{\prime(3)} \left(1 - \frac{3}{4} q_x^{\prime(2)} - \frac{3}{4} q_x^{\prime(1)} + \frac{5}{8} q_x^{\prime(1)} q_x^{\prime(2)}\right) & \text{untuk } j = 3
\end{cases}
$$

dari (3.2) diketahui

$$
{}_t q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_t q_x^{(j)}
$$

Artinya, probabilitas terjadinya kegagalan yang dikarenakan penyebab manapun antara usia x dan $x + 1$ adalah

$$
q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)}
$$

Selanjutnya, akan ditentukan $l_x^{(\tau)}$ dan $d_x^{(j)}, j = 1,2,3$

Dari (3.11) diketahui

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)}$$

bila ditetapkan $a = x - 1$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &= l_{x-1}^{(\tau)} p_{x-1}^{(\tau)} \\ &= l_{x-1}^{(\tau)}\left(1 - q_{x-1}^{(\tau)}\right) \end{aligned}$$

dari (3.12) maupun (3.16) diketahui

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$$

Berdasarkan seluruh persamaan di atas, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4.4 Tabel beberapa penyebab kegagalan yang terbentuk dari data kegagalan tunggal terkait pada tabel 4.1 dan dibatasi bahwa peserta hanya diperbolehkan keluar dari asuransi pada akhir dan pertengahan tahun

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$q_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
65	0.019603	0.019603	0.03881	0.078016	1000	19.603	19.603	38.81
66	0.024381	0.019456	0.057994	0.10183	921.984	22.47855	17.93777	53.46931
67	0.029109	0.019309	0.07703	0.125448	828.0984	24.10512	15.98975	63.78842
68	0.033788	0.019163	0.095919	0.14887	724.2151	24.46987	13.87822	69.46581
69	0.038418	0.019018	0.11466	0.172096	616.4012	23.6809	11.72272	70.67656

4.3 Penerapan Model Beberapa Penyebab Kegagalan dalam Penentuan *Actuarial Present Value* (APV)

Akan diturunkan bentuk *Actuarial Present Value* (APV) dari Beberapa skenario asuransi jiwa yang membayar saat kematian terjadi dengan penyebab kematian lebih dari satu.

Terlebih dahulu akan didefinisikan beberapa hal, yakni:

1. Fungsi benefit, dinotasikan dengan $b_t^{(j)}$. Fungsi ini menyatakan besar *benefit* (dana manfaat) yang akan diterima oleh peserta asuransi yang mengalami kegagalan dikarenakan penyebab j (dalam hal ini, penyebab kematian j)

   $$b_t^{(j)} = B_{x+t}^{(j)} \text{ untuk } 0 < t < \infty \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

   t adalah sisa usia dari peserta asuransi sejak ikut serta dalam asuransi hingga mengalami kematian.

   $B_{x+t}^{(j)}$ menyatakan besarnya dana manfaat yang akan dibayarkan oleh perusahaan asuransi untuk peserta yang mengalami kematian karena penyebab j. Di mana peserta masuk asuransi saat berusia x dan meninggal saat berusia $x + t$.

   $B_{x+t}^{(j)}$ umumnya memiliki nilai yang berbeda-beda untuk nilai j yang berbeda.

   $B_{x+t}^{(j)}$ juga dapat memiliki nilai yang berbeda-beda pada beberapa interval untuk suatu j.
2. Fungsi diskonto $v_t = v^t$, di mana:

   $$v = \frac{1}{1+i}$$

   i menyatakan tingkat bunga tahunan

   v^t biasanya berlaku untuk seluruh j pada $0 < t < \infty$

Akan diturunkan bentuk umum dari APV untuk asuransi jiwa seumur hidup yang melakukan pembayaran dana manfaat saat kegagalan terjadi, dengan besar dana manfaat berbeda untuk j penyebab kegagalan yang berbeda.

APV dari asuransi jiwa seumur hidup bagi seorang peserta yang masuk asuransi ketika berusia x dinotasikan dengan $\bar{A}_x$ di mana

$\bar{A}_x = \sum_{j=1}^{m} E\left[Z^{(j)}\right]$ dan $Z^{(j)} = b_t^{(j)} v^t$

Sehingga pada kasus di mana terdapat beberapa penyebab kegagalan, bentuk APV nya adalah:

$$\bar{A}_x = \sum_{j=1}^{m} E\left[Z^{(j)}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} E\left[b_{T_x}^{(j)} v^{T_x}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t f_{T_x,J}(t,j)\, dt$$

Dari (3.4) diketahui

$$f_{T_x,J}(t,j) = \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Sehingga diperoleh

$$\bar{A}_x = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t f_{T_x,J}(t,j)\, dt$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t\ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt$$

Penurunan APV yang akan dibahas pada subbab ini adalah APV pada 3 situasi asuransi jiwa, yakni:

1. Asuransi jiwa di mana dana manfaat bagi peserta yang meninggal karena kecelakaan besarnya dua kali lipat dibandingkan dengan besar dana manfaat bagi peserta yang meninggal karena penyebab lainnya.
2. Asuransi jiwa di mana dana manfaat bagi peserta yang meninggal karena kecelakaan besarnya proporsional terhadap periode keikutsertaan asuransi. Sementara, peserta yang mengalami kematian karena penyebab lainnya tidak memperoleh dana manfaat.

3. Asuransi jiwa di mana besarnya dana manfaat yang diperuntukkan bagi peserta yang meninggal karena penyebab tertentu, diwakilkan oleh suatu fungsi yang rumit. Sehingga dalam hal ini, yang akan ditentukan hanya hampiran nilai APV nya

Situasi 1:

Pada bagian ini, akan dibahas bentuk APV dari skenario asuransi jiwa berjangka n tahun yang memberikan dana manfaat yang berbeda besarmya untuk kematian yang disebabkan oleh kecelakaan dan kematian yang disebabkan oleh penyebab lainnya. Kematian yang dikarenakan kecelakaan diberi indeks (1). Sementara kematian yang dikarenakan penyebab lainnya diberi indeks (2). Besarnya dana manfaat untuk kematian yang dikarenakan kecelakaan diasumsikan dua kali besarnya dana manfaat untuk kematian yang dikarenakan penyebab lainnya.

Dalam hal ini, berarti $B_{x+t}^{(1)} = 2,\ B_{x+t}^{(2)} = 1$ dan batas integrasi menjadi dari 0 hingga n, (karena asuransi hanya berjangka n tahun) Penurunan APV nya adalah sebagai berikut.

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^n B_{x+t}^{(j)} v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t)dt$$

$$= \int_0^n B_{x+t}^{(1)} v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_0^n B_{x+t}^{(2)} v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(2)}(t)dt$$

$$= \int_0^n (2) v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_0^n (1) v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(2)}(t)dt$$

Terlebih dahulu, akan ditinjau salah satu komponen dari $\bar{A}$, yakni

$$\int_0^n (2) v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt$$

$$\int_0^n (2) v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt$$

$$= (2) \int_0^n v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt$$

$$= (2)\left\{\int_0^1 v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_1^2 v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_2^3 v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^n v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt\right\}$$

Kemudian, akan ditinjau tiap-tiap komponen dari $\int_0^n v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt$:

$$\int_0^1 v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt = \int_0^1 v^{s+0}\ {}_{s+0}p_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+0)ds, \text{dengan } s = t-0$$

$$= v^0\ {}_0p_x^{(\tau)}\int_0^1 v^t\ {}_sp_{x+0}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+0)ds$$

$$\int_1^2 v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt = \int_0^1 v^{s+1}\ {}_{s+1}p_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+1)ds, \text{dengan } s = t-1$$

$$= v^1\ {}_1p_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s\ {}_sp_{x+1}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+1)ds$$

$$\int_2^3 v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt = \int_0^1 v^{s+2}\ {}_{s+2}p_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+2)ds, \text{dengan } s = t-2$$

$$= v^2\ {}_2p_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s\ {}_sp_{x+2}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+2)ds$$

Dan seterusnya hingga

$$\int_{n-1}^n v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt = \int_0^1 v^{s+n-1}\ {}_{s+n-1}p_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+n-1)ds$$

dengan $s = t-(n-1)$

$$= v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s\ {}_sp_{x+n-1}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+n-1)ds$$

Berdasarkan hal ini, diperoleh

$$\int_0^n (2)v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt$$

$$= (2)\int_0^n v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt$$

$$= (2)\left\{\int_0^1 v^t \ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_1^2 v^t \ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_2^3 v^t \ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^n v^t \ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt\right\}$$

$$= (2)\left\{v^0 \ {}_0p_x^{(\tau)}\int_0^1 v^t \ {}_sp_{x+0}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+0)ds + v^1 \ {}_1p_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+1}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+1)ds + v^2 \ {}_2p_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+2}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+2)ds + \cdots + v^{n-1} \ {}_{n-1}p_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+n-1}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+n-1)ds\right\}$$

$$= (2)\left\{\sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+k)ds\right\}$$

Dengan metode yang similar, juga diperoleh

$$\int_0^n (1)v^t \ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(2)}(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(2)}(s+k)ds$$

Sehingga diperoleh

$$\bar{A} = \int_0^n (2)v^t \ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_0^n (1)v^t \ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(2)}(t)dt$$

$$= (2)\left\{\sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(1)}(s+k)ds\right\} + \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{T_x}^{(2)}(s+k)ds$$

$$= (2)\left\{\sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{T_{x+k}}^{(1)}(s)ds\right\} + \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{T_{x+k}}^{(2)}(s)ds$$

$\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(1)}(s) ds$ akan diselesaikan dengan menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan. Berikut adalah penurunannya.

Dari (3.19) diketahui

$$q_x^{(j)} = \mu_{T_x}^{(j)}(t) \ {}_tp_x^{(\tau)}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(1)}(s) ds &= \int_0^1 v^s q_{x+k}^{(1)} ds \\
&= q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 v^s ds \\
&= q_{x+k}^{(1)} \left[\frac{v^s}{ln\, v}\right]_0^1 \\
&= q_{x+k}^{(1)} \frac{v-1}{ln\, v} \\
&= q_{x+k}^{(1)} \frac{-\frac{i}{1+i}}{-\delta} \\
&= q_{x+k}^{(1)} \frac{\frac{i}{1+i}}{\delta} \\
&= vq_{x+k}^{(1)} \frac{\frac{i}{1+i}(1+i)}{\delta} \\
&= vq_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta}
\end{aligned}$$

Secara similar, juga dapat diperoleh

$$\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(2)}(s) ds = vq_{x+k}^{(2)} \frac{i}{\delta}$$

Maka, sebagai hasil akhir, diperoleh

$$\bar{A} = (2)\sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(1)}(s)ds$$

$$+ (1)\sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(2)}(s)ds$$

$$= (2)\sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)} v q_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta} + \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)} v q_{x+k}^{(2)} \frac{i}{\delta}$$

$$= (2)\frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(2)}$$

$$= \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(2)}$$

$$= \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + \frac{i}{\delta}\left(q_{x+k}^{(1)} + q_{x+k}^{(2)}\right)\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)}$$

$$= \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + \frac{i}{\delta} q_{x+k}^{(\tau)} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)}$$

$$= \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^{1\,(1)} + \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^{1}$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1\,(1)} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$$

Dalam hal ini $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1\,(1)}$ menyatakan nilai *Actuarial Present Value* (APV) dari asuransi jiwa berjangka n tahun yang membayar sebesar 1 kepada peserta yang mengalami kematian dikarenakan kecelakaan. Di mana pembayaran dilakukan pada saat kematian peserta.

Sementara $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$ menyatakan nilai *Actuarial Present Value* (APV) dari asuransi jiwa berjangka n tahun yang membayar sebesar 1 kepada peserta yang mengalami kematian yang dikarenakan penyebab manapun (dalam hal ini, kecelakaan maupun lainnya). Di mana pembayaran dilakukan saat kematian peserta.

Data mengenai ${}_kp_x^{(\tau)}$ dapat diambil dari data ${}_kp_x$ pada tabel mortalita biasa. Sehingga bila data mengenai $q_{x+k}^{(1)}$ diketahui, maka tidak perlu menyusun tabel beberapa penyebab kegagalan secara lengkap (dengan penekanan, hal ini dapat dilakukan bahwa pada masing-masing penyebab kegagalan digunakan asumsi distribusi uniform).

Situasi 2:

Untuk skenario asuransi yang sama, akan dilihat kasus apabila *benefit* (dana manfaat) yang diberikan merupakan fungsi dari waktu.

Akan dilihat kasus di mana $B_{x+t}^{(1)} = t$ dan $B_{x+t}^{(2)} = 0$. Artinya, dana manfaat hanya akan diberikan kepada peserta yang mengalami kematian dikarenakan kecelakaan yang besarnya sebanding dengan lamanya peserta asuransi bergabung dengan asuransi tersebut. Sementara untuk peserta yang mengalami kematia dikarenakan penyebab lainnya, tidak akan diberikan dana manfaat. APV dari asuransi ini adalah sebagai berikut.

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^n B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t)dt$$

$$= \int_0^n tv^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_0^n 0v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(2)}(t)dt$$

$$= \int_0^n tv^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt$$

$$= \int_0^1 tv^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_1^2 tv^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \int_2^3 tv^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt + \cdots$$
$$+ \int_{n-1}^n tv^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(t)dt$$

$$= \int_0^1 (s+0)v^{s+0} \; {}_{s+0}p_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+0)ds + \int_0^1 (s+1)v^{s+1} \; {}_{s+1}p_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+1)ds$$
$$+ \int_0^1 (s+2)v^{s+2} \; {}_{s+2}p_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+2)ds + \cdots$$
$$+ \int_0^1 (s+n-1)v^{s+n-1} \; {}_{s+n-1}p_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+n-1)dt$$

$$= \int_0^1 (s+0) v^s v^0 \; {}_0p_x^{(\tau)} \; {}_sp_{x+0}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+0) ds$$

$$+ \int_0^1 (s+1) v^s v^1 \; {}_1p_x^{(\tau)} \; {}_sp_{x+1}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+1) ds$$

$$+ \int_0^1 (s+2) v^s v^2 \; {}_2p_x^{(\tau)} \; {}_sp_{x+2}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+2) ds + \cdots$$

$$+ \int_0^1 (s+n-1) v^s v^{n-1} \; {}_{n-1}p_x^{(\tau)} \; {}_sp_{x+n-1}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+n-1) dt$$

$$= v^0 \; {}_0p_x^{(\tau)} \int_0^1 (s+0) v^s \; {}_sp_{x+0}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+0) ds$$

$$+ v^1 \; {}_1p_x^{(\tau)} \int_0^1 (s+1) v^s \; {}_sp_{x+1}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+1) ds$$

$$+ v^2 \; {}_2p_x^{(\tau)} \int_0^1 (s+2) v^s \; {}_sp_{x+2}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+2) ds + \cdots$$

$$+ v^{n-1} \; {}_{n-1}p_x^{(\tau)} \int_0^1 (s+n-1) v^s \; {}_sp_{x+n-1}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+n-1) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 (s+k) v^s \; {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(1)}(s+k) ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 (s+k) v^s \; {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(1)}(s) ds$$

Menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan, akan diperoleh

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^n B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 (s+k) v^s \; {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(1)}(s) ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (s+k) v^s ds$$

$\int_0^1 (s+k)v^s ds$ akan diselesaikan menggunakan integral parsial dengan

$$u = s + k \qquad du = ds$$

$$dv = v^s ds \qquad v = \frac{v^s}{ln\, v}$$

Sehingga diperoleh

$$\int_0^1 (s+k)v^s ds = \left[(s+k)\frac{v^s}{ln\, v}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{v^s}{ln\, v} ds$$

$$= \left((1+k)\frac{v}{ln\, v} - \frac{k}{ln\, v}\right) - \frac{1}{(ln\, v)^2}[v^s]_0^1$$

$$= \frac{1}{ln\, v}\big((1+k)v - k\big) - \frac{1}{(ln\, v)^2}(v-1)$$

$$= \frac{1}{ln\, v}(v + kv - k) - \frac{1}{(ln\, v)^2}(v-1)$$

$$= \frac{1}{ln\, v}\left\{(v + kv - k) - \frac{v-1}{ln\, v}\right\}$$

$$= \frac{1}{ln\, v}\left\{\big(v + k(v-1)\big) - \frac{v-1}{ln\, v}\right\}$$

$$= \frac{1}{ln\, v}\left\{\big(v + k(-d)\big) - \frac{-d}{ln\, v}\right\}$$

$$= \frac{1}{ln\, v}\left\{(v - kd) + \frac{d}{ln\, v}\right\}$$

$$= \frac{1}{-\delta}\left\{(v - kd) + \frac{d}{-\delta}\right\}$$

$$= \frac{1}{\delta}\left\{(kd - v) + \frac{d}{\delta}\right\}$$

$$= \frac{1}{\delta}v(1+i)\left\{(kd - v) + \frac{d}{\delta}\right\}$$

$$= \frac{1}{\delta}v\left\{(1+i)(kd - v) + \frac{(1+i)d}{\delta}\right\}$$

$$= \frac{1}{\delta}v\left\{(ki - 1) + \frac{i}{\delta}\right\}$$

$$= \frac{i}{\delta}v\left\{k - \frac{1}{i} + \frac{1}{\delta}\right\}$$

Menggunakan hasil ini, akan diperoleh

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (s+k) v^s ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta} v \left\{ k - \frac{1}{i} + \frac{1}{\delta} \right\}$$

Situasi 3:

Pada dunia asuransi yang nyata, seringkali besarnya jumlah dana manfaat yang diberikan merupakan suatu fungsi yang rumit, sehingga memerlukan aproksimasi numerik. Salah satu aproksimasi numerik yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan aturan integrasi nilai tengah. (penjelasan terlampir)

Menggunakan aturan ini, akan ditentukan bentuk umum dari $\bar{A}$ apabila $B_{x+t}^{(j)}$ merupakan fungsi yang rumit.

Sebelumnya, telah diketahui bentuk umum dari $\bar{A}$ adalah

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt$$

Akan ditinjau besarnya nilai APV untuk masing-masing penyebab kegagalan, yakni $\int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt$.

$$\int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt$$

$$= \int_0^1 B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt + \int_1^2 B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt + \cdots$$

$$+ \int_{n-1}^{n} B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt + \cdots$$

$$= \int_0^1 B_{x+s+0}^{(j)} v^{s+0} \; {}_{s+0}p_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+0) ds + \int_0^1 B_{x+s+1}^{(j)} v^{s+1} \; {}_{s+1}p_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+1) ds$$

$$+ \cdots + \int_0^1 B_{x+s+n-1}^{(j)} v^{s+n-1} \; {}_{s+n-1}p_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+n-1) ds + \cdots$$

$$= \int_0^1 B_{x+s+0}^{(j)} v^s v^0 \; {}_0p_x^{(\tau)} \; {}_sp_{x+0}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+0)ds$$

$$+ \int_0^1 B_{x+s+1}^{(j)} v^s v^1 \; {}_1p_x^{(\tau)} \; {}_sp_{x+1}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+1)ds + \cdots$$

$$+ \int_0^1 B_{x+s+n-1}^{(j)} v^s v^{n-1} \; {}_{n-1}p_x^{(\tau)} \; {}_sp_{x+n-1}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+n-1)ds + \cdots$$

$$= v^0 \; {}_0p_x^{(\tau)} \int_0^1 B_{x+s+0}^{(j)} v^s \; {}_sp_{x+0}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+0)ds$$

$$+ v^1 \; {}_1p_x^{(\tau)} \int_0^1 B_{x+s+1}^{(j)} v^s \; {}_sp_{x+1}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+1)ds + \cdots$$

$$+ v^{n-1} \; {}_{n-1}p_x^{(\tau)} \int_0^1 B_{x+s+n-1}^{(j)} v^s \; {}_sp_{x+n-1}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+n-1)ds + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 B_{x+s+k}^{(j)} v^s \; {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(s+k)ds$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 B_{x+s+k}^{(j)} v^s \; {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(s)ds$$

Menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan, akan diperoleh

$$\int_0^{\infty} B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 B_{x+s+k}^{(j)} v^s \; {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \mu_{T_{x+k}}^{(j)}(s)ds$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \int_0^1 B_{x+s+k}^{(j)} v^s ds$$

Menggunakan aturan integrasi nilai tengah dengan $f(s) = B_{x+s+k}^{(j)} v^s$, $h = 1$ dan $n = 1$ diperoleh

$$\int_0^1 B_{x+s+k}^{(j)} v^s ds \approx (1) B_{x+\left(0+\frac{1}{2}\right)+k}^{(j)} v^{\left(0+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\approx B_{x+\frac{1}{2}+k}^{(j)} v^{\frac{1}{2}}$$

Maka, sebagai hasil akhir diperoleh

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \; {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{T_x}^{(j)}(t) dt$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \int_0^1 B_{x+s+k}^{(j)} v^s ds$$

$$\approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} B_{x+\frac{1}{2}+k}^{(j)} v^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+\frac{1}{2}} \; {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} B_{x+k+\frac{1}{2}}^{(j)}$$

4.3 Penggunaan Model Beberapa Penyebab Kegagalan dalam Penentuan Nilai Premi Tunggal Bersih dan Variansi *Loss* dari Suatu Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Pada subbab ini akan dibahas contoh penerapan model beberapa penyebab kegagalan dalam penentuan besar premi tunggal bersih dan variansi *loss* pada suatu asuransi jiwa seumur hidup.

Misalkan, seseorang yang saat ini berusia x ikut serta dalam asuransi jiwa seumur hidup yang membayar dana manfaat saat peserta meninggal dunia dengan skenario sebagai berikut:
Bila peserta mengalami kematian yang dikarenakan kecelakaan sebelum berusia r, maka perusahaan asuransi akan memberikan dana manfaat sebesar $2B$.
Bila peserta mengalami kematian yang dikarenakan penyebab selain kecelakaan kecelakaan sebelum berusia r, maka perusahaan asuransi akan memberikan dana manfaat sebesar B.

Bila peserta mengalami kematian yang dikarenakan penyebab manapun setelah berusia r, maka perusahaan asuransi akan memberikan dana manfaat sebesar B.

Dana manfaat akan diberikan perusahaan asuransi tepat saat peserta meninggal dunia.

Akan ditentukan berapa besar Premi bersih tunggal dan variansi *Loss* pada skenario ini, dengan menggunakan prinsip ekivalen.

Terlebih dahulu, akan ditentukan bagaimana persamaan *Loss* yang mungkin dialami perusahaan asuransi. *Loss* diartikan sebagai selisih antara:

Nilai kini dari besarnya dana manfaat yang nantinya akan dibayarkan perusahaan asuransi denganAPV

Untuk menentukan persamaan *Loss* yang mungkin dialami perusahaan asuransi, terlebih dahulu diperkenalkan tiga pasangan variabel random, yakni

1. T_x , $J = 1$ menyatakan banyaknya tahun yang dijalani oleh peserta asuransi sebelum mengalami kematian yang dikarenakan kecelakaan
2. T_x , $J = 2$ menyatakan banyaknya tahun yang dijalani oleh peserta asuransi sebelum mengalami kematian yang dikarenakan penyebab selain kecelakaan
3. T_x , $J = 1,2$ menyatakan banyaknya tahun yang dijalani oleh peserta asuransi sebelum mengalami kematian yang dikarenakan penyebab manapun

Pada skenario di atas, *Loss* yang mungkin dialami oleh perusahaan asuransi adalah

$$L = \begin{cases} 2Bv^{T_x} - APV, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 1 \\ Bv^{T_x} - APV, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 2 \\ Bv^{T_x} - APV, & T_x > r - x \quad J = 1,2 \end{cases}$$

Ekspektasi dari *Loss* yang mungkin dialami oleh perusahaan asurnsi dinyatakan dengan $E[L]$, di mana

$$E[L] = \begin{cases} E[2Bv^{T_x} - APV], & 0 < T_x \le r - x \quad J = 1 \\ E[Bv^{T_x} - APV], & 0 < T_x \le r - x \quad J = 2 \\ E[Bv^{T_x} - APV], & T_x > r - x \quad J = 1,2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} E[2Bv^{T_x}] - APV, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 1 \\ E[Bv^{T_x}] - APV, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 2 \\ E[Bv^{T_x}] - APV, & T_x > r - x \quad J = 1,2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^{r-x} 2Bv^t f_{T_x,J}(t,1)dt - APV, & 0 < T_x \leq r-x \quad J=1 \\ \int_0^{r-x} Bv^t f_{T_x,J}(t,2)dt - APV, & 0 < T_x \leq r-x \quad J=2 \\ \int_{r-x}^{\infty} Bv^t f_{T_x}(t)dt - APV, & T_x > r-x \quad J=1,2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & 0 < T_x \leq r-x \quad J=1 \\ \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & 0 < T_x \leq r-x \quad J=2 \\ \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & T_x > r-x \quad J=1,2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & 0 < T_x \leq r-x \quad J=1 \\ \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & 0 < T_x \leq r-x \quad J=2 \\ \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \left(\mu_{T_x}^{(1)} + \mu_{T_x}^{(2)}\right)(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & T_x > r-x \quad J=1,2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & 0 < T_x \leq r-x \quad J=1 \\ \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & 0 < T_x \leq r-x \quad J=2 \\ \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV, & T_x > r-x \quad J=1,2 \end{cases}$$

Secara umum, untuk $0 < T_x < \infty$ dan $j = 1,2$, berlaku

$$\begin{aligned} E[L] &= \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\ &\quad + \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV \\ &= \left(\int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \right) \\ &\quad + \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\ &\quad + \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV \end{aligned}$$

$$= \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$+ \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$+ \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV$$
$$= \int_0^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$+ \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV$$
$$= \int_0^{\infty} Bv^t \left(\mu_{T_x}^{(1)}(t) + \mu_{T_x}^{(2)}(t)\right)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV$$
$$= \int_0^{\infty} Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV$$
$$= B\left(\int_0^{\infty} v^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} v^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right) - APV$$

APV akan ditentukan dengan menggunakan prinsip ekivalen. Berdasarkan prinsip ekivalen, harus terpenuhi

$$E[L] = 0$$

Artinya

$$B\left(\int_0^{\infty} v^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} v^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right) - APV = 0$$
$$APV = B\left(\int_0^{\infty} v^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} v^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right)$$

Berdasarkan prinsip ekivalen, karena premi hanya dibayarkan sekali, maka besar premi tunggal tersebut akan sama dengan nilai APV. Sehingga, diperoleh besar premi bersih tunggal untuk asuransi ini adalah sebagai berikut:

$$\pi = B\left(\int_0^{\infty} v^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} v^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right)$$

Kemudian, akan ditentukan $Var(L)$

$$Var(L) = E[L^2] - E[L]^2$$

Karena dengan menggunakan prinsip ekivalen, $E[L] = 0$, berarti

$$Var(L) = E[L^2]$$

Terlebih dahulu, akan ditentukan L^2

$$L^2 = \begin{cases} (2Bv^{T_x} - APV)^2, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 1 \\ (Bv^{T_x} - APV)^2, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 2 \\ (Bv^{T_x} - APV)^2, & T_x > r - x \quad J = 1{,}2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4B^2v^{2T_x} - 4Bv^{T_x}APV + APV, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 1 \\ B^2v^{2T_x} - 2Bv^{T_x}APV + APV^2, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 2 \\ B^2v^{2T_x} - 2Bv^{T_x}APV + APV^2, & T_x > r - x \quad J = 1{,}2 \end{cases}$$

Dari sini, diperoleh

$E[L^2]$

$$= \begin{cases} E[4B^2v^{2T_x} - 4Bv^{T_x}APV + APV^2], & 0 < T_x \le r - x \quad J = 1 \\ E[B^2v^{2T_x} - 2Bv^{T_x}APV + APV^2], & 0 < T_x \le r - x \quad J = 2 \\ E[B^2v^{2T_x} - 2Bv^{T_x}APV + APV^2], & T_x > r - x \quad J = 1{,}2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} E[4B^2v^{2T_x}] - (APV)E[4Bv^{T_x}] + APV^2, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 1 \\ E[B^2v^{2T_x}] - (APV)E[2Bv^{T_x}] + APV^2, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 2 \\ E[B^2v^{2T_x}] - (APV)E[2Bv^{T_x}] + APV^2, & T_x > r - x \quad J = 1{,}2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^{r-x} 4B^2v^{2t}f_{T_x,J}(t,1)dt - (APV)\int_0^{r-x} 4Bv^t f_{T_x,J}(t,1)dt + APV^2 & 0 < T_x \le r - x \quad J = 1 \\ \int_0^{r-x} B^2v^{2t}f_{T_x,J}(t,2)dt - (APV)\int_0^{r-x} 2Bv^t f_{T_x,J}(t,2)dt + APV^2, & 0 < T_x \le r - x \quad J = 2 \\ \int_{r-x}^{\infty} B^2v^{2t}f_{T_x}(t)dt - (APV)\int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t f_{T_x}(t)dt + APV^2, & T_x > r - x \quad J = 1{,}2 \end{cases}$$

Sehingga, untuk $0 < T_x < \infty \quad J = 1,2$ berlaku

$$E[L^2] = \int_0^{r-x} 4B^2 v^{2t} f_{T_x,J}(t,1)dt + \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} f_{T_x,J}(t,2)dt$$

$$+ \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} f_{T_x}(t)dt$$

$$- (APV)\left\{\int_0^{r-x} 4Bv^t f_{T_x,J}(t,1)dt + \int_0^{r-x} 2Bv^t f_{T_x,J}(t,2)dt\right.$$

$$\left. + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t f_{T_x}(t)dt\right\} + APV^2$$

$$= \int_0^{r-x} 4B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt + \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt$$

$$+ \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt$$

$$- (APV)\left\{\int_0^{r-x} 4Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt\right.$$

$$\left. + \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt\right\}$$

$$+ APV^2$$

$$= \int_0^{r-x} 4B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt + \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt$$

$$+ \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \left(\mu_{T_x}^{(1)}(t) + \mu_{T_x}^{(2)}(t)\right)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt$$

$$- (APV)\left\{\int_0^{r-x} 4Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt\right.$$

$$+ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt$$

$$\left. + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \left(\mu_{T_x}^{(1)}(t) + \mu_{T_x}^{(2)}(t)\right)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt\right\} + APV^2$$

$$
\begin{aligned}
= \int_0^{r-x} 4B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt &+ \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\
&+ \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\
&- (APV) \left\{ \int_0^{r-x} 4Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \right. \\
&+ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\
&\left. + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \right\} + APV^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \int_0^{r-x} 3B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt &+ \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\
&+ \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\
&+ \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\
&- (APV) \left\{ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \right. \\
&+ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \\
&\left. + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt \right\} \\
&+ APV^2
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^{r-x} 3B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$+ \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$+ \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$- (APV) \left\{ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt \right.$$

$$+ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$\left. + \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt \right\}$$

$$+ APV^2$$

$$= \int_0^{r-x} 3B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$+ \int_0^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$- (APV) \left\{ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt \right\}$$

$$+ APV^2$$

$$= \int_0^{r-x} 3B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} B^2 v^{2t} \left(\mu_{T_x}^{(1)}(t) + \mu_{T_x}^{(2)}(t) \right)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$- (APV) \left\{ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} 2Bv^t \left(\mu_{T_x}^{(1)}(t) + \mu_{T_x}^{(2)}(t) \right)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt \right\} + APV^2$$

$$= \int_0^{r-x} 3B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$- (APV) \left\{ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}\ {}_t p_x^{(\tau)} dt \right\} + APV^2$$

$$= \int_0^{r-x} 3B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$- (APV)(2B)\left\{\int_0^{r-x} v^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} v^t \mu_{T_x}^{(\tau)}\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right\}$$
$$+ APV^2$$
$$= \int_0^{r-x} 3B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$- (APV)(2APV) + APV^2$$
$$= \int_0^{r-x} 3B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt - APV^2$$
$$= B^2\left\{3\int_0^{r-x} v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} v^{2t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right\} - APV^2$$

Bila variansi *Loss* ingin dinyatakan menggunakan notasi $B_{x+t}^{(j)}$, maka

$$E[L^2] = \int_0^{r-x} 4B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$+ \int_{r-x}^{\infty} B^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$- (APV)\left\{\int_0^{r-x} 4Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right.$$
$$\left. + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right\} + APV^2$$
$$= \int_0^{r-x} \left(B_{x+t}^{(1)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} \left(B_{x+t}^{(2)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$+ \int_{r-x}^{\infty} \left(B_{x+t}^{(1)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$+ \int_{r-x}^{\infty} \left(B_{x+t}^{(2)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$- (APV)\left\{\int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right.$$
$$+ \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt$$
$$\left. + \int_{r-x}^{\infty} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right\} + APV^2$$

$$= \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(1)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(2)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$- (APV)\left\{\int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt\right.$$

$$\left. + \int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_{r-x}^\infty 2Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt\right\}$$

$$+ APV^2$$

$$= \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(1)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(2)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$- (APV)\left\{\int_0^{r-x} 2Bv^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty 2Bv^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt\right\} + APV^2$$

$$= \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(1)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(2)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt$$

$$- 2(APV)^2 + APV^2$$

$$= \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(1)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt + \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(2)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(2)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt - APV^2$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(j)}\right)^2 v^{2t} \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt - APV^2$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(j)} v^t\right)^2 \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt - APV^2$$

Sehingga diperoleh bentuk umum variansi *Loss* dalam kasus ini adalah

$$Var(L) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty \left(B_{x+t}^{(j)} v^t\right)^2 \mu_{T_x}^{(j)}(t)\ {}_t p_x^{(\tau)} dt - APV^2$$

di mana (dalam hal ini) $m = 2$

Jadi, pada asuransi ini, premi nya adalah sebesar

$$\pi = B\left(\int_0^{\infty} v^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} v^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right)$$

Sementara, variansi *loss*nya adalah sebesar:

$$Var(L) = B^2\left\{3\int_0^{r-x} v^{2t} \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{\infty} v^{2t} \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right\} - APV^2$$

Akan ditentukan berapa besarnya premi tunggal bersih dan variansi *loss* pada asuransi ini bagi seorang yang ketika masuk asuransi, peserta tersebut berusia 40 tahun. Proteksi (perlinungan) diberikan hingga peserta tersebut berusia maksimal 84 tahun, batasan usia untuk perbedaan besar dana manfaat bagi kecelakaan dan penyebab lainnya adalah 60 tahun dan tingkat bunga tahunan sebesar 10 persen.

Digunakan tabel mortalita dan tabel kematian karena kecelakaan sebagai berikut (data terlampir). Tabel diambil dari "National Vital Statistics System", Centers for Disease Control and Prevention of the US Department of Health and Human Services. Tahun 2007, dengan modifikasi:

q_x pada tabel pertama, dapat dianggap sebagai $q_x^{(\tau)}$, sehingga dapat diperoleh $p_x^{(\tau)}$ menggunakan hubungan $q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)}$

q_x pada tabel kedua, dapat dianggap sebagai $q_x'^{(1)}$, sehingga dapat diperoleh $p_x'^{(1)}$ dengan menggunakan hubungan $q_x'^{(1)} = 1 - p_x'^{(1)}$

Setelah $p_x^{(\tau)}$ dan $p_x'^{(1)}$ diperoleh, maka $q_x^{(j)}$ dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan (3.20), yakni

$$q_x^{(j)} = \frac{ln\ \ {}_tp_x'^{(j)}}{ln\ \ {}_tp_x^{(\tau)}}\, q_x^{(\tau)}$$

Sehingga, diperoleh tabel $q_x^{(1)}$ sebagai berikut:

Tabel 4.5 Hasil Perhitungan $q_x^{(1)}$ dengan Menggunakan Data dari Lampiran 1 Dan 2

Age x	Probability of dying by accidental means between exact age x and $x+1$ q_x
40	0.000393031
41	0.000428111
42	0.000468318
43	0.000513652
44	0.000562612
45	0.000312716
46	0.000339212
47	0.000367773
48	0.000399597
49	0.00043479
50	0.000473239
51	0.000513745
52	0.000555326
53	0.000597001
54	0.000639314
55	0.000260767
56	0.000279448
57	0.000299902
58	0.000322786
59	0.000348263
60	0.000376864
61	0.000408172
62	0.000441932

Age x	Probability of dying by accidental means between exact age x and $x+1$ q_x
63	0.000478097
64	0.000517526
65	0.000301561
66	0.000326258
67	0.000353455
68	0.000382637
69	0.000414804
70	0.000451343
71	0.000494195
72	0.000544217
73	0.000601661
74	0.000666271
75	0.0006636
76	0.000732903
77	0.000808954
78	0.000892337
79	0.000983633
80	0.001083415
81	0.001192284
82	0.001310882
83	0.001439789
84	0.001579611

Terlebih dahulu, akan ditentukan besarnya premi bersih tunggal, yakni sebesar:

$$\pi = B\left(\int_0^{\infty} v^t \mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} v^t \mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)} dt\right)$$

Atau dalam hal ini, sebesar:

$$\pi = B\left(\int_0^{44} v^t \mu_{T_{40}}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt + \int_0^{60-40} v^t \mu_{T_{40}}^{(1)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt\right)$$

$$= B\left(\int_0^{44} v^t \mu_{T_{40}}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt + \int_0^{20} v^t \mu_{T_{40}}^{(1)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt\right)$$

Berdasarkan situasi 1:

$$\pi = B\left(\int_0^{44} v^t \mu_{T_{40}}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt + \int_0^{20} v^t \mu_{T_{40}}^{(1)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt\right)$$

$$= B\left(\sum_{k=0}^{43} v^k\ {}_kp_{40}^{(\tau)} \int_0^1 v^s\ {}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40}}^{(\tau)}(s+k)ds\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{19} v^k\ {}_kp_{40}^{(\tau)} \int_0^1 v^s\ {}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40}}^{(1)}(s+k)ds\right)$$

$$= B\left(\sum_{k=0}^{43} v^k\ {}_kp_{40}^{(\tau)} \int_0^1 v^s\ {}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40+k}}^{(\tau)}(s)ds\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{19} v^k\ {}_kp_{40}^{(\tau)} \int_0^1 v^s\ {}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40+k}}^{(1)}(s)ds\right)$$

Menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan, dari (3.19) diperoleh (untuk $0 \leq t < 1$)

$$q_x^{(j)} = \mu_{T(x)}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

berarti

$${}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40+k}}^{(\tau)}(s) = q_{40+k}^{(\tau)}$$

dan

$${}_{s+k}p_{40}^{(\tau)}\mu_{T_{40}}^{(1)}(s+k) = q_{40+k}^{(1)}$$

Sehingga, menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan, diperoleh:

$$\pi = B\left(\sum_{k=0}^{43} v^k \int_0^1 v^s \, {}_{s+k}p_{40}^{(\tau)} \mu_{T_{40}}^{(\tau)}(s+k)ds + \sum_{k=0}^{19} v^k \int_0^1 v^s \, {}_{s+k}p_{40}^{(\tau)} \mu_{T_{40}}^{(1)}(s+k)ds\right)$$

$$= B\left(\sum_{k=0}^{43} v^k \; {}_kp_{40}^{(\tau)} \int_0^1 v^s q_{40+k}^{(\tau)} ds + \sum_{k=0}^{19} v^k \; {}_kp_{40}^{(\tau)} \int_0^1 v^s q_{40+k}^{(1)} ds\right)$$

$$= B\left(\sum_{k=0}^{43} v^k \; {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(\tau)} \int_0^1 v^s ds + \sum_{k=0}^{19} v^k \; {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(1)} \int_0^1 v^s ds\right)$$

Terlebih dahulu, akan ditentukan nilai dari $\int_0^1 v^s ds$, yakni:

$$\int_0^1 v^s ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+0.1}\right)^s ds$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+0.1}\right)^s ds$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{100}{110}\right)^s ds$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{100}{110}\right)^s}{ln\frac{100}{110}}\right]_0^1$$

$$= \frac{\frac{100}{110}}{ln\frac{100}{110}} - \frac{1}{ln\frac{100}{110}}$$

$$= 0.953823517$$

Maka diperoleh:

$$\pi = B\left(\sum_{k=0}^{43} v^k \; {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(\tau)} 0.953823517 + \sum_{k=0}^{19} v^k \; {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(1)} 0.953823517\right)$$

$$= B\left(\sum_{k=0}^{43} v^k \; {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(\tau)} 0.953823517 + \sum_{k=0}^{19} v^k \; {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(1)} 0.953823517\right)$$

Menggunakan penghitungan dengan perangkat lunak, diperoleh:

$$\pi = B(0.05150660 + 0.003754935) = 0.05526153B$$

Kemudian, akan ditentukan variansi *Loss*, yakni sebesar:

$$var(L) = B^2\left\{3\int_0^{r-x} v^{2t}\mu_{T_x}^{(1)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt + \int_0^{\infty} v^{2t}\mu_{T_x}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}dt\right\} - APV^2$$

$$= B^2\left\{3\int_0^{60-40} v^{2t}\mu_{T_{40}}^{(1)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt + \int_0^{44} v^{2t}\mu_{T_{40}}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt\right\} - APV^2$$

$$= B^2\left\{3\int_0^{20} v^{2t}\mu_{T_{40}}^{(1)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt + \int_0^{44} v^{2t}\mu_{T_{40}}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt\right\} - APV^2$$

Berdasarkan situasi 1 pada halaman 67, diperoleh:

$$Var\ (L) = B^2\left\{3\int_0^{20} v^{2t}\mu_{T_{40}}^{(1)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt + \int_0^{44} v^{2t}\mu_{T_{40}}^{(\tau)}(t)\ {}_tp_{40}^{(\tau)}dt\right\} - APV^2$$

$$= B^2\left(3\sum_{k=0}^{19} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)}\int_0^1 v^{2s}\ {}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40}}^{(1)}(s+k)ds + \sum_{k=0}^{43} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)}\int_0^1 v^{2s}\ {}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40}}^{(\tau)}(s+k)ds\right) - APV^2$$

$$= B^2\left(3\sum_{k=0}^{19} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)}\int_0^1 v^{2s}\ {}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40+k}}^{(1)}(s)ds + \sum_{k=0}^{43} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)}\int_0^1 v^{2s}\ {}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40+k}}^{(\tau)}(s)ds\right) - APV^2$$

Menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan, dari (3.19) diperoleh (untuk $0 \leq t < 1$)

$$q_x^{(j)} = \mu_{T(x)}^{(j)}(t)\ {}_tp_x^{(\tau)}$$

berarti:

$${}_{s+k}p_{40}^{(\tau)}\mu_{T_{40}}^{(1)}(s+k) = q_{40+k}^{(1)}$$

dan

$${}_sp_{40+k}^{(\tau)}\mu_{T_{40+k}}^{(\tau)}(s) = q_{40+k}^{(\tau)}$$

Sehingga, menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan, diperoleh:

$$Var(L) = B^2\left(3\sum_{k=0}^{19} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)}\int_0^1 v^{2s} q_{40+k}^{(1)} ds + \sum_{k=0}^{43} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)}\int_0^1 v^{2s} q_{40+k}^{(\tau)} ds\right) - APV^2$$

$$= B^2\left(3\sum_{k=0}^{19} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(1)}\int_0^1 v^{2s} ds + \sum_{k=0}^{43} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(\tau)}\int_0^1 v^{2s} ds\right) - APV^2$$

Terlebih dahulu, akan ditentukan nilai dari $\int_0^1 v^{2s} ds$, yakni:

$$\int_0^1 v^s ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+0.1}\right)^{2s} ds$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+0.1}\right)^{2s} ds$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{100}{110}\right)^{2s} ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{100}{110}\right)^{w} dw$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{100}{110}\right)^s}{ln\frac{100}{110}}\right]_0^2$$

$$= \frac{\left(\frac{100}{110}\right)^2}{2\,ln\frac{100}{110}} - \frac{1}{2\,ln\frac{100}{110}}$$

$$= 0.9104679026$$

Maka diperoleh:

$$Var(L) = B^2\left(3\sum_{k=0}^{19} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(1)}\int_0^1 v^{2s} ds + \sum_{k=0}^{43} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(\tau)}\int_0^1 v^{2s} ds\right) - APV^2$$

$$= B^2\left(3\sum_{k=0}^{19} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(1)}\ 0.9104679026\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{43} v^{2k}\ {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(\tau)}\ 0.9104679026\right) - APV^2$$

Menggunakan penghitungan dengan perangkat lunak, diperoleh:

$$Var(L) = B^2(3(0.002201857) + 0.015779338) - (0.05526153B)^2$$

$$Var(L) = 0.019331071B^2$$

BAB 5
KESIMPULAN

Kesimpulan yang didapatkan dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Dilihat dari variabel random pembentuknya, terdapat dua model beberapa penyebab kegagalan, yakni model beberapa penyebab kegagalan dengan waktu hingga terjadinya kegagalan yang kontinu dan model beberapa penyebab kegagalan dengan waktu hingga terjadinya kegagalan yang diskrit. Sementara, dilihat dari sudut pandang penurunan serta makna notasinya, terdapat dua model beberapa penyebab kegagalan, yakni model yang probabilistik (*random survivorship group*) dan model yang deterministik (*deterministic survivorship group*).
2. Dengan menggunakan model beberapa penyebab kegagalan, dapat disusun suatu tabel beberapa penyebab kegagalan (*multiple decrement table*) dari beberapa tabel penyebab kegagalan tunggal terkait (*associated single decrement table*).
3. Terdapat dua asumsi yang dapat digunakan pada model beberapa penyebab kegagalan, yakni asumsi bahwa *force of decrement due to cause j* bernilai tetap, serta asumsi distribusi uniform. Kedua asumsi akan memberikan hasil yang sama ketika digunakan pada konstruksi tabel beberapa penyebab kegagalan dari tabel penyebab kegagalan tunggal terkait.
4. Model beberapa penyebab kegagalan juga dapat digunakan dalam penentuan bentuk premi tunggal bersih (*nett single premium*) dan variansi *loss* dari suatu skenario asuransi jiwa.
5. Agar tabel beberapa penyebab kegagalan yang telah terbentuk dapat digunakan ketika menghitung besarnya premi tunggal bersih dan variansi *loss* dari suatu asuransi jiwa, maka kedua hal ini perlu diturunkan dengan menggunakan asumsi distribusi uniform pada model beberapa penyebab kegagalan.

DAFTAR PUSTAKA

Arian, E. (2011). *United States Life Tables, 2007.* National Center for Health Statistics.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics.* Illinois: The Society of Actuaries.

Cunningham, R., Herzog, T., & London, R. L. (2005). *Models for Quantifying Risk.* Connecticut: ACTEX Publications, Inc.

Kellison, S. G. (1999). *The Theory of Interest.* Boston: Irwin / McGraw Hill.

Promislow, D. S. (2011). *Fundamentals of Actuarial Mathematics.* West Sussex: John Wiley and Sons Ltd.

Robert, H. V., & Craig, A. T. (1995). *Introduction to Mathematical Statistics.* New Jersey: Prentice Hall.

LAMPIRAN

Lampiran 1. *Life Table for The Total Population: United States, 2007*

Age x (Years)	Probability of dying between exact age x and $x+1$ q_x	Number of survivors at exact age x l_x	Number of deaths between exact age x and $x+1$ d_x	Number of years lived between exact age x and $x+1$ L_x	Total number of years lived after exact age x T_x	Expectation of life at exact age x e_x
40	0.001836	96537	177	96448	3856045	39.9
41	0.002000	96360	193	96263	3759597	39.0
42	0.002188	96167	210	96062	3663334	38.1
43	0.002400	95956	230	95841	3567272	37.2
44	0.002629	95726	252	95600	3471431	36.3
45	0.002864	95475	273	95338	3375831	35.4
46	0.003107	95201	296	95053	3280493	34.5
47	0.003369	94905	320	94745	3185440	33.6
48	0.003661	94586	346	94412	3090694	32.7
49	0.003984	94239	375	94052	2996282	31.8
50	0.004337	93864	407	93660	2902230	30.9
51	0.004709	93457	440	93237	2808570	30.1
52	0.005091	93017	474	92780	2715333	29.2
53	0.005474	92543	507	92290	2622553	28.3
54	0.005863	92037	540	91767	2530263	27.5
55	0.006275	91497	574	91210	2438496	26.7
56	0.006726	90923	612	90617	2347286	25.8
57	0.007220	90311	652	89985	2256669	25.0
58	0.007773	89659	697	89311	2166684	24.2
59	0.008389	88962	746	88589	2077373	23.4
60	0.009081	88216	801	87816	1988784	22.5
61	0.009839	87415	860	86985	1900968	21.7
62	0.010657	86555	922	86094	1813983	21.0
63	0.011534	85632	988	85139	1727890	20.2
64	0.012491	84645	1057	84116	1642751	19.4
65	0.013600	83587	1137	83019	1558635	18.6
66	0.014722	82451	1214	81844	1475616	17.9
67	0.015959	81237	1296	80589	1393772	17.2
68	0.017288	79940	1382	79249	1313183	16.4
69	0.018755	78558	1473	77822	1233934	15.7
70	0.020424	77085	1574	76298	1156112	15.0
71	0.022385	75511	1690	74666	1079814	14.3
72	0.024679	73820	1822	72909	1005149	13.6
73	0.027320	71999	1967	71015	932239	12.9

74	0.030299	70032	2122	68971	861224	12.3
75	0.033636	67910	2284	66768	792254	11.7
76	0.037216	65625	2442	64404	725486	11.1
78	0.045503	60583	2757	59204	599199	9.9
79	0.050281	57826	2908	56372	539995	9.3
80	0.055531	54918	3050	53393	483622	8.8
81	0.061293	51869	3179	50279	430229	8.3
82	0.067611	48689	3292	47044	379950	7.8
83	0.074528	45398	3383	43706	332906	7.3
84	0.082091	42014	3449	40290	289201	6.9

Lampiran 2. Tabel Tingkat Kematian yang Dikarenakan Kecelakaan Di Negara Amerika Serikat Tahun 2007

Age x	Probability of dying by accidental means between exact age x and $x+1$ q_x	Age x	Probability of dying by accidental means between exact age x and $x+1$ q_x
40	0.000393315	63	0.00048076
41	0.000428447	64	0.00052065
42	0.000468721	65	0.000303584
43	0.000514137	66	0.00032863
44	0.000563194	67	0.000356242
45	0.000313116	68	0.000385909
46	0.000339682	69	0.000418656
47	0.000368326	70	0.000455912
48	0.00040025	71	0.000499686
49	0.000435563	72	0.000550893
50	0.000474156	73	0.000609847
51	0.000514826	74	0.000676345
52	0.000556589	75	0.00067479
53	0.000598462	76	0.00074661
54	0.00064099	77	0.000825733
55	0.000261555	78	0.00091286
56	0.000280353	79	0.001008714
57	0.000300944	80	0.001114037
58	0.000323994	81	0.001229632
59	0.00034967	82	0.001356381

60	0.000378514
61	0.000410109
62	0.000444205
83	0.001495146
84	0.001646872

Lampiran 3. Aturan Integrasi Nilai Tengah

Misalkan suatu fungsi $f(x)$ terdefinisi pada interval $[x_0, x_1]$ di mana:

$x_1 = x_0 + h$

$\Delta x = \frac{h}{n}$

n menyatakan pembagian interval

maka berdasarkan aturan integrasi nilai tengah berlaku

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx$$

$$= \frac{h}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2x_0 + \frac{ih}{n}}{2}\right)$$