UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA KELUARGA GRAF BINTANG : GRAF ILALANG, GRAF KELABANG DAN GRAF ALFABET BINTANG

TESIS

ZULFI AMRI
NPM. 0906577463

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN $\widehat{\rho}$ PADA KELUARGA GRAF BINTANG : GRAF ILALANG, GRAF KELABANG DAN GRAF ALFABET BINTANG

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

ZULFI AMRI
NPM. 0906577463

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	ZULFI AMRI
NPM	:	906577463
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	12 Januari 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :
Nama : Zulfi Amri
NPM : 0906577463
Program Studi : Magister Matematika
Judul Tesis : **PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA KELUARGA GRAF BINTANG: GRAF ILALANG, GRAF KELABANG DAN GRAF ALFABET BINTANG**

Telah berhasil dipertahankan dihadapan dewan penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi magister matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Dr. Kiki Ariyanti Sugeng ( )

Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami ( )

Penguji : Alhadi Bustamam, PhD ( )

Penguji : Arie Wibowo, M.Si ( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 12 Januari 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji hanya bagi Allah SWT tuhan yang maha kuasa, yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya sadar bahwa penyelesaian tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tesis ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Ibunda **Dr. Kiki Ariyanti Sugeng**, selaku dosen pembimbing tesis yang teramat banyak memberikan nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini;
2. Bapak **Prof. Dr. Djati Kerami**, selaku dosen pembimbing akademik dan Ketua Program Studi Magister Matematika yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama menyelesaikan proses studi;
3. Bapak **Dr. rar.nat. Hendri Murfi, M.kom**., selaku Sekretaris Program Studi Magister Matematika yang telah memberikan arahan kepada penulis selama proses penyelesaian tugas akhir;
4. Bapak **Dr. Yudi Satria, M.T**, selaku ketua Departemen Matematika FMIPA UI dan Ibu **Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech**, selaku Sekretaris Departemen Matematika FMIPA UI;
5. Seluruh staf pengajar di Program Magister Matematika FMIPA UI, yang tidak mungkin disebutkan satu persatu, atas arahan, bimbingan, dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;
6. Abanganda **Drs. H. Ibrahim Sakty Batubara, M.AP** (ketua FPAN MPR-RI) berserta keluarga yang memotivasi dan memberikan bantuan moril dan materil yang masikmal kepada penulis untuk meyelesaikan studi;
7. Abanganda **Drs. Agussani, M.AP** (Rektor UMSU) yang memberikan dukungan untuk meyelesaikan studi.

8. Ayahandaku **Zahari LB** dan Ibundaku **Azizah** tercinta dan keluarga besar saya (Bang Bustami, kak Farida, Ipin, Rahmi, Ipau, Lelen, Aay, Rahim, Hafiz, Tiflah, dan Muhammad Iqbal Tufail) yang telah memberikan dukungan moral, materil, serta doa yang tiada henti kepada penulis;
9. Istriku tercinta **Elva Suzana, Amkeb, SKM**, atas segala dukungan, kesabaran, semangat, dan doa tulus iklasnya;
10. Mertuaku, ayah **Umar Yusuh** dan ibunda **Nuraini** beserta keluarga (Along, bang Darma, Angah, bang Edo, Sadam, Alin, Bulek);
11. Liswanto, Bu Suarsih, Henang, Haryono, Mulyadi, Muzayin, Yuda dan semua teman-teman S2 UI yang telah berjuang bersama dan telah memberi motivasi terutama teman-teman magister angkatan 2009 di Matematika UI.
12. Teman-teman DPP IMM dan segenap alumni IMM Sumut yang senantiasa memberikan motivasi selama studi;
13. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam proses studi dan pengerjaan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu, penulis ucapkan terima kasih.

Akhir kata, saya berharap kepada Allah SWT Tuhan Yang Maha Kuasa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Depok, 12 Januari 2012

Penulis

Z U L F I A M R I

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini ;

Nama	:	Zulfi Amri
NPM	:	0906577463
Program Studi	:	Magister Matematika
Departeman	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Tesis

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia, hak bebas biaya royalti noneksklusif (Non-exclusive royalti-free right) atas karya ilmiah saya berjudul :

PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA KELUARGA GRAF BINTANG : GRAF ILALANG, GRAF KELABANG DAN GRAF ALFABET BINTANG

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan hak bebas biaya royalti non eksklusif ini Universitas Indonesia berhak untuk menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk data (data base), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai hak cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada Tanggal : 12 Januari 2012

Yang menyatakan

Zodaur

Z U L F I A M R I

ABSTRAK

Nama : Zulfi Amri
NPM : 0906577463
Program Studi : Magister Matematika
Judul Tesis : **PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA KELUARGA GRAF BINTANG: GRAF ILALANG, GRAF KELABANG DAN GRAF ALFABET BINTANG**

Graf G = (*V*,*E*) adalah pasangan himpunan terurut dimana *V* adalah himpunan simpul tak kosong dan *E* adalah himpunan busur. Pelabelan *graceful* adalah fungsi injektif α dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots.|E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif α' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots.|E|\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u,v* ∈ *V* berlaku α'(*uv*) = $|\alpha(u) - \alpha(v)|$. Pelabelan *skolem graceful* adalah modifikasi dari pelabelan *graceful* yaitu berupa fungsi injektif μ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots.|V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif μ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u,v* ∈ *V* berlaku μ' (*uv*) = $|\mu(u) - \mu(v)|$. Pelabelan $\hat{\rho}$ adalah modifikasi dari pelabelan *graceful* yaitu fungsi injektif γ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots.|E|+1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$ atau $\{1,2,\ldots,|E|-1,|E|+1\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u,v* ∈ *V* berlaku γ' (*uv*) = $|\gamma(u) - \gamma(v)|$. Graf Ilalang adalah suatu graf yang dibangun dari r buah graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul *c,* disebut dengan simpul pusat, dan diberikan busur-busur yang menghubungkan setiap simpul pusat S_n dengan simpul *c* tersebut. Graf Kelabang merupakan pengembangan dari graf ilalang $(S_n, 3)$ dengan memperpanjang salah satu busurnya yakni diberikan *m* simpul yang menghubungkan simpul pusat graf $(S_n, 3)$ ke salah satu simpul pusat graf bintang S_n. Graf H-bintang dibentuk dari huruf H dan semua daunnya merupakan titik pusat graf bintang S_n. Graf A-bintang dibentuk dari huruf A dan semua daunnya merupakan titik pusat graf bintang S_n. Pada tesis ini diberikan konstruksi pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada keluarga graf bintang: graf ilalang, graf kelabang dan graf alphabet bintang.

Kata kunci : Pelabelan graceful, Pelabelan skolem graceful, pelabelan $\hat{\rho}$, graf ilalang, graf kelabang, graf H-bintang dan graf A-Bintang.

ABSTRACT

Name : Zulfi Amri
Study Program : Magister Of Mathematics
Judul Tesis : **GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL AND $\hat{\rho}$ LABELING OF FAMILY STAR GRAPH: GRAPH *ILALANG*, *KELABANG* GRAPH AND ALFABET-BINTANG GRAPH**

A graph G = (*V,E*) is an ordered pair of set (*V,E*), where *V* is a nonempty set (*non zero*) and *E* is a set of edges. A graceful labeling is an injective function $\alpha: V \longrightarrow \{0,1,2,\ldots.|E|\}$, induces a bijective function α'$: E \longrightarrow \{1,2,\ldots.|E|\}$ defined by α'(*uv*) = $|\alpha(u) - \alpha(v)|$ where *uv* ∈ *E* and *u,v* ∈ *V*. A skolem graceful labeling on a graph G is an injection $\mu: V \rightarrow \{1,2,\ldots,|V|\}$ induces a bijective $\mu': E \rightarrow \{1,2,\ldots,|E|\}$ defined by μ'(*uv*) = $|\mu(u) - \mu(v)|$, where $uv \in E$ and $u, v \in V$. A $\hat{\rho}$ labeling is an injective function γ:$V \longrightarrow \{0,1,2,\ldots.|E|+1\}$ induces a bijective function γ':$E \longrightarrow \{1,2,\ldots.|E|\}$ or $\{1,2,\ldots,|E|-1,|E|+1\}$ defined by γ'(*uv*) = $|\gamma(u) - \gamma(v)|$ where *uv* ∈ *E* and *u,v* ∈ *V*. An ***Ilalang*** graph is a graph which generated from r star graphs S_n so that given a vertex *c,* called central vertex, and given edges wich connect every vertex central star graphs S_n with a vertex *c*. A ***Kelabang*** graph is a modification of ilalang graph $(S_n, 3)$ which extend one of the egde, which is given *m* vertices on the edge which connect a vertex c and center vertex of one star graph S_n. An ***H-bintang*** graph is a graph which generated from letter H graph and every vertex of the H graph is a central vertex of star graph S_n. An ***A-bintang*** graph is graph which generated from letter H graph and every vertex of H graph is a central vertex of star graph S_n. In this thesis is given the construction of graceful, skolem graceful and $\hat{\rho}$ labelings of *ilalang, kelabang*, *H-bintang* and *A-bintang* graphs.

Key words: Graceful labeling, skolem graceful labeling, $\hat{\rho}$ labeling, *ilalang* graph, *kelabang* graph, *H-bintang* and *A-bintang* graph.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

Bagian pendahuluan memuat latar belakang dilakukannya penelitian dan ide pemilihan graf, permasalahan dan ruang lingkup, tujuan penulisan dan batasan masalah penulisan serta metode penelitian.

1.1. Latar Belakang

Permasalahan yang muncul di dunia nyata sering terkait dengan objek diskrit dan relasi antar objek tersebut. Sebagai contoh: ada beberapa kota dalam satu propinsi, dan ada jalan yang menghubungkan satu kota dengan kota lainnya. Hal ini merupakan objek diskrit, sedangkan jalan merelasikan antar suatu objek ke objek lainnya. Contoh lainnya dalam suatu komputer terdiri dari objek-objek komputer baik sebagai server maupun workstation. Di sini bisa dicari apakah suatu komputer dapat terhubung dengan komputer lainnya. Permasalahan–permasalahan dapat dimodelkan secara baik dengan menggunakan konsep graf. Sehingga teori graf banyak digunakan untuk menyederhanakan dalam penyelesaian suatu masalah dengan cara merepresentasikan masalah dalam bentuk graf, sehingga permasalahan akan lebih mudah untuk dipahami.

Graf G adalah suatu pasangan terurut (V, E) dengan V merupakan himpunan simpul (*node*) dan E adalah himpunan dari multiset yang terdiri dari dua elemen di $V,$ elemen di E dinamakan busur. Pelabelan pada suatu graf pada dasarnya adalah memberikan simbol/nilai tertentu pada simpul dan atau busur yang memenuhi aturan tertentu pula. Gallian (2010) mencatat selama 50 tahun terakhir sampai data tertanggal 13 November 2010 terdapat 1198 artikel yang membahas tentang berbagai macam pelabelan. Dalam membahas pelabelan graf seakan memberikan suatu tantangan dan sangat memungkinkan untuk bisa membangun konstruksi pelabelan pada kelas-kelas graf yang belum diketahui " Pelabelan graf ini akan bisa menghilangkan stigma bahwa matematika itu sulit bahkan sebaliknya mengasikkan". Untuk itu penulis mencoba membahas tentang pelabelan graceful dan modifikasinya yaitu pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada beberapa kelas graf yang belum diketahui pelabelannya.

Secara umum, pelabelan graceful adalah pemetaan injektif dari anggota himpunan simpul ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \ldots . |E|\}$ dan setiap selisih dua simpul yang saling berhubungan merupakan pemetaan bijektif dari anggota himpunan busur ke himpunan bilangan $\{1,2, \ldots, |E|\}$.

Pemilihan graf ilalang $(S_n, 3)$ dilatarbelakangi dari pelabelan graceful graf bintang S_n dan suatu pertanyaan yakni mengapa gabungan 2 graf bintang S_n tidak mempunyai pelabelan graceful. Bagaimana jika ada sebuah simpul yang saling dihubungkan dengan simpul pusat 2 graf bintang S_n tersebut, sehingga setelah dihubungkan membentuk graf caterpillar. Kemudian dengan menggunakan ide atau cara yang sama terhadap 3 graf bintang S_n, akhirnya di bangun graf yang disebut dengan graf $(S_n, 3)$ (Amri dkk., 2011). Hal yang sama dilakukan terhadap 4 dan 5 graf bintang S_n beturut-turut membentuk graf $(S_n, 4)$ dan graf $(S_n, 5)$ sehingga diberikan suatu simpulan jika sebanyak r graf bintang S_n akan membentuk graf (S_n, r) untuk $r \geq 3$ dan selanjutnya disebut graf ilalang (S_n, r). Sedangkan pemilihan graf kelabang dilatarbelakangi dari graf ilalang $(S_n, 3)$ dengan memperpanjang salah satu busurnya yakni diberikan beberapa simpul berjumlah m yang menghubungkan simpul pusat ilalang $(S_n, 3)$ ke salah satu simpul pusat graf bintang S_n.

Selanjutnya pemilihan graf H-bintang dan A-bintang dilatarbelakangi dari graf $(S_n, 3)$, jika graf bintang S_n pada graf $(S_n, 3)$ dihilangkan maka graf tersebut berbentuk seperti huruf Y, kemudian muncul suatu ide bagaimana jika pada graf berbentuk abjad diberikan graf bintang S_n pada simpul berderajat satu sebagai pusat graf bintang S_n sehingga mengkontruksi graf H-bintang dan graf A-bintang. Sedangkan huruf I,L,M,N,V,W dan huruf Z akan membentuk graf caterpillar beserta dengan variasinya, sedangkan huruf K dan X akan membentuk graf ilalang $(S_n, 4)$ serta huruf T dan huruf Y sendiri membentuk graf $(S_n, 3)$.

Semua variasi graf bintang tersebut yakni : graf ilalang, graf kelabang, graf H-bintang dan graf A-bintang dapat dikatakan sebagai graf pohon kecuali graf A-bintang karena graf A-bintang memuat graf lingkaran. Graf-graf yang dibangun oleh graf bintang di atas selanjutnya akan disebut keluarga bintang. Graf-graf tersebut akan diberikan pelabelan graceful dan modifikasinya yaitu, pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

1.2. Permasalahan dan Ruang Lingkup

Mengkonstruksikan pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada beberapa graf keluarga bintang yakni : graf ilalang, graf kelabang, graf H-bintang dan graf A-bintang.

1.3. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tesis ini adalah untuk mengkaji dan mengkonstruksi pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada keluarga graf bintang yakni : graf ilalang $(S_n, 3)$, graf ilalang $(S_n, 4)$, graf ilalang $(S_n, 5)$, graf kelabang, graf H-bintang dan graf A-bintang.

1.4. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, tesis atau pun makalah yang relevan dengan topik pembahasan. Pengkajian dilanjutkan dengan mengkontruksi pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada beberapa graf keluarga bintang yakni : graf ilalang $(S_n, 3)$, graf ilalang $(S_n, 4)$, graf ilalang $(S_n, 5)$, graf kelabang, graf H-bintang dan graf A-bintang.

BAB II
TEORI GRAF DAN PELABELAN

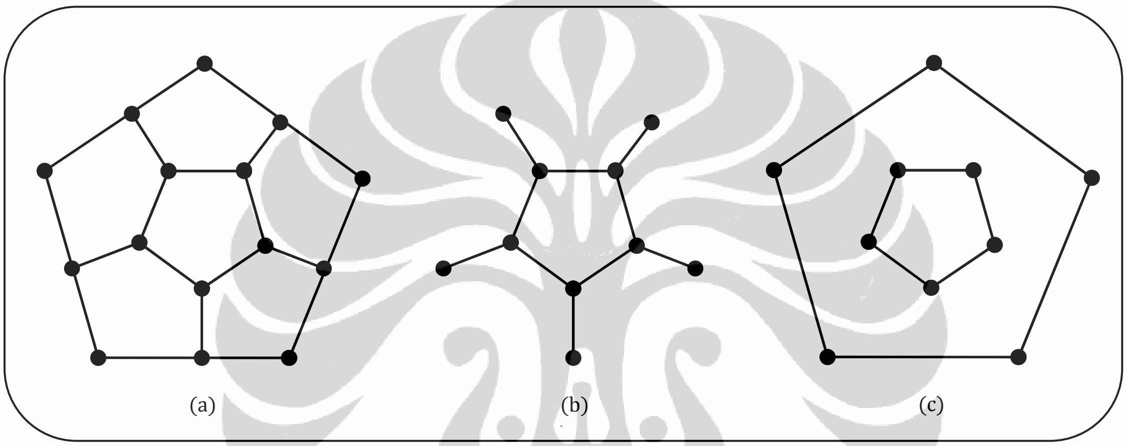
Pada bab ini diberikan beberapa definisi, kosep dasar dan istilah-istilah pada graf sebahagian besar ambil dari West (2001). Dijelaskan juga tentang beberapa pelabelan yang akan digunakan pada bab selanjutnya.

2.1. Teori Graf

Graf G adalah sepasang himpunan (V,E) dimana V adalah suatu himpunan tak kosong dan E adalah suatu himpunan (mungkin kosong) yang berisi pasangan-pasangan (tak terurut) dari anggota-anggota $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\}$ dan anggota-anggota $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots\}$ masing-masing disebut **simpul** dan **busur** dari graf G. $V(G)$ ditulis untuk menyatakan himpunan simpul dari G, $E(G)$ untuk menyatakan himpunan busur dari G. Banyaknya simpul atau anggota V dinotasikan $|\boldsymbol{V}|$ sedangkan banyaknya busur atau anggota E dinotasikan $|\boldsymbol{E}|$. Biasanya titik digambarkan untuk mewakili simpul, dan garis untuk mewakili busur, garis yang digunakan dapat berupa garis lurus atau kurva. Jika u dan v simpul pada graf G, u dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) dengan v, jika terdapat busur diantara u dan v, busur yang terhubung dituliskan e atau uv. Busur e dikatakan **menghubungkan** atau **hadir** (*incident*) pada simpul u, jika u merupakan titik ujung dari e, sebaliknya simpul u dikatakan menghubungkan pada busur e, jika jika u merupakan titik ujung dari e. **Derajat** (*degree*) simpul v disimbolkan dengan $deg(v)$ adalah banyaknya busur yang *menghubungkan* dengan simpul v. **Simpul terpencil** (*terisolasi*) adalah simpul dengan derajat 0. **Simpul ujung** atau **daun** adalah simpul dengan derajat 1.

Misalkan diberikan graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$, maka gabungan dari graf G_1 dan G_2 adalah graf $G_1 \cup G_2$, dimana $V(G_1 \cup G_2) = V_1 \cup V_2$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E_1 \cup E_2$.

Subgraf dari graf G adalah suatu graf $\boldsymbol{H}$ yang setiap simpul dari H merupakan simpul dari G dan setiap busur dari H merupakan busur di G. dengan kata lain, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Secara khusus jika simpul $v \in G$, maka $G - v$ merupakan subgraf dari G yang diperoleh dengan cara menghapus simpul v dari G dan menghapus semua busur di G yang *incident* dengan v. Jika busur $e \in G$, maka $G - e$ merupakan subgraf dari G yang diperoleh dengan cara menghapus busur e dari G. Seperti ditunjukkan pada Gambar 2.1.



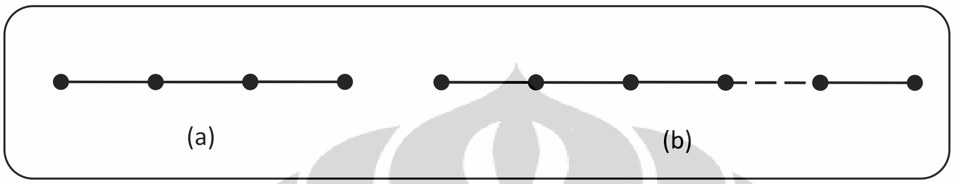
Gambar 2.1 (b) dan (c) merupakan subgraf dari (a)

Misalkan diberikan graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf sederhana suatu **isomorfisma** graf adalah suatu fungsi $f: V_1 \to V_2$ Sedemikian sehingga, busur uv di E_1 jika dan hanya jika busur $f(u)f(v)$ di E_2. Graf G_1 dikatakan isomorfik dengan G_2 jika terdapat suatu isomorfisma antara kedua graf tersebut. Jika G_1 dan G_2 isomorfik, maka gabungannya dinotasikan dengan $2G_1$atau $2G_2$. Secara umum jika terdapat k graf yang isomorfik dengan G maka gabungannya dituliskan dengan kG.

2.2. Jenis-Jenis Graf

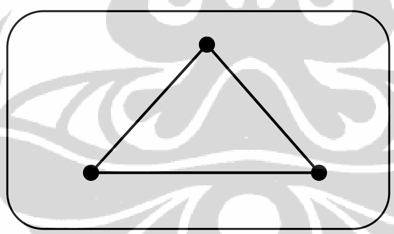
Pada bagian ini akan dibahas jenis-jenis graf yang akan digunakan pada bab berikutnya.

Suatu graf dngan n simpul yaitu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan busur $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$ disebut graf **lintasan $\boldsymbol{P_n}$** dengan panjang n. Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk sembarang dua simpul u dan v pada graf G terdapat lintasan dari u ke v. Pada Gambar 2.2 diberikan contoh lintasan $\boldsymbol{P_4}$ dengan banyak simpul 4 dan banyak busur 3 serta contoh lintasan $\boldsymbol{P_n}$ dengan banyak simpul n dan banyak busur $n-1$.



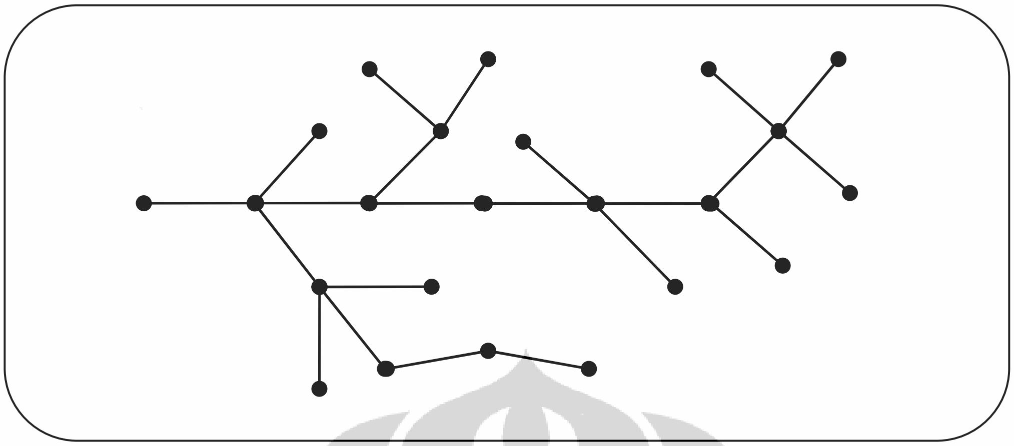
Gambar 2.2 Graf Lintasan P_4 dan Graf Lintasan P_n

Graf lingkaran *(cycle)* dengan panjang n adalah graf dengan n simpul $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan busur $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n,\ v_nv_1$. Pada Gambar 2.3 diberikan contoh graf lingkaran C_3 yaitu graf lingkaran yang banyak simpul 3 dan banyak busur 3.



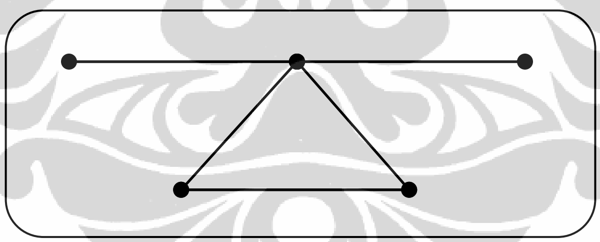
Gambar 2.3 Graf Lingkaran (cycle) C_3

Graf pohon adalah suatu graf terhubung yang tidak mengandung subgraf lingkaran. Sedangkan **graf hutan** adalah gabungan terpisah dari graf pohon. Pada Gambar 2.4 diberikan contoh graf pohon dengan banyaknya simpul 23 dan banyaknya busur 22.



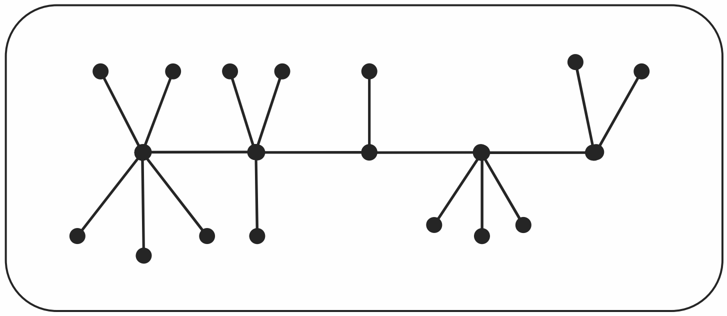
Gambar 2.4 Contoh graf Pohon

Suatu graf pohon yang memuat graf lingkaran disebut **graf *unicyclic*** (Gallian, 2010). Pada Gambar 2.5 diberikan contoh graf unicyclic yang dibangun dari P_3 dan C_3, simpul P_2 terhubung dengan salah satu simpul C_3 yang jumlah simpul 5 dan jumlah busur 5.



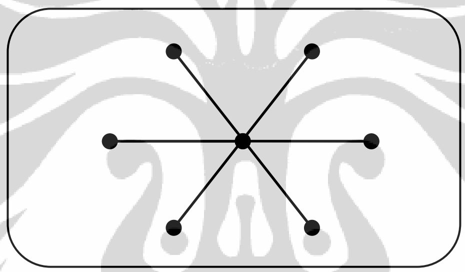
Gambar 2.5 Contoh graf Unicyclic

Graf caterpilar $S_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ adalah graf yang dibangun dari suatu lintasan P_r dengan menambahkan sejumlah daun di setiap simpul pada lintasan yang disebut tulang belakang atau backbone yaitu n_i daun simpul lintasan c_i, dimana $n_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,r$. $V(S_{n_1,n_2,\ldots,n_r}) = \{c_i | i = 1,2,\ldots,r\} \cup \cup_{i=1}^{r} \{c_i {x_i}^j | j = 1,2,\ldots,n_i\}$. $|V(S_{n_1,n_2,\ldots,n_r})| = r + \sum_{i=1}^{r} n_i$ dan $|E(S_{n_1,n_2,\ldots,n_r})| = r - 1 + \sum_{i=1}^{r} n_i$ (Sugeng, Miller, Slamin & Baca, 2005). Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf *caterpillar* dengan banyaknya simpul 19 dan banyaknya busur 18.



Gambar 2.6 Graf *Carterpillar* $S_{(5,3,1,3,2)}$

Graf bintang S_n adalah graf yang dibangun dari satu simpul pusat kemudian menambahkan sejumlah n simpul daun pada simpul pusat tersebut. Graf bintang memiliki n+1 simpul dan n busur.

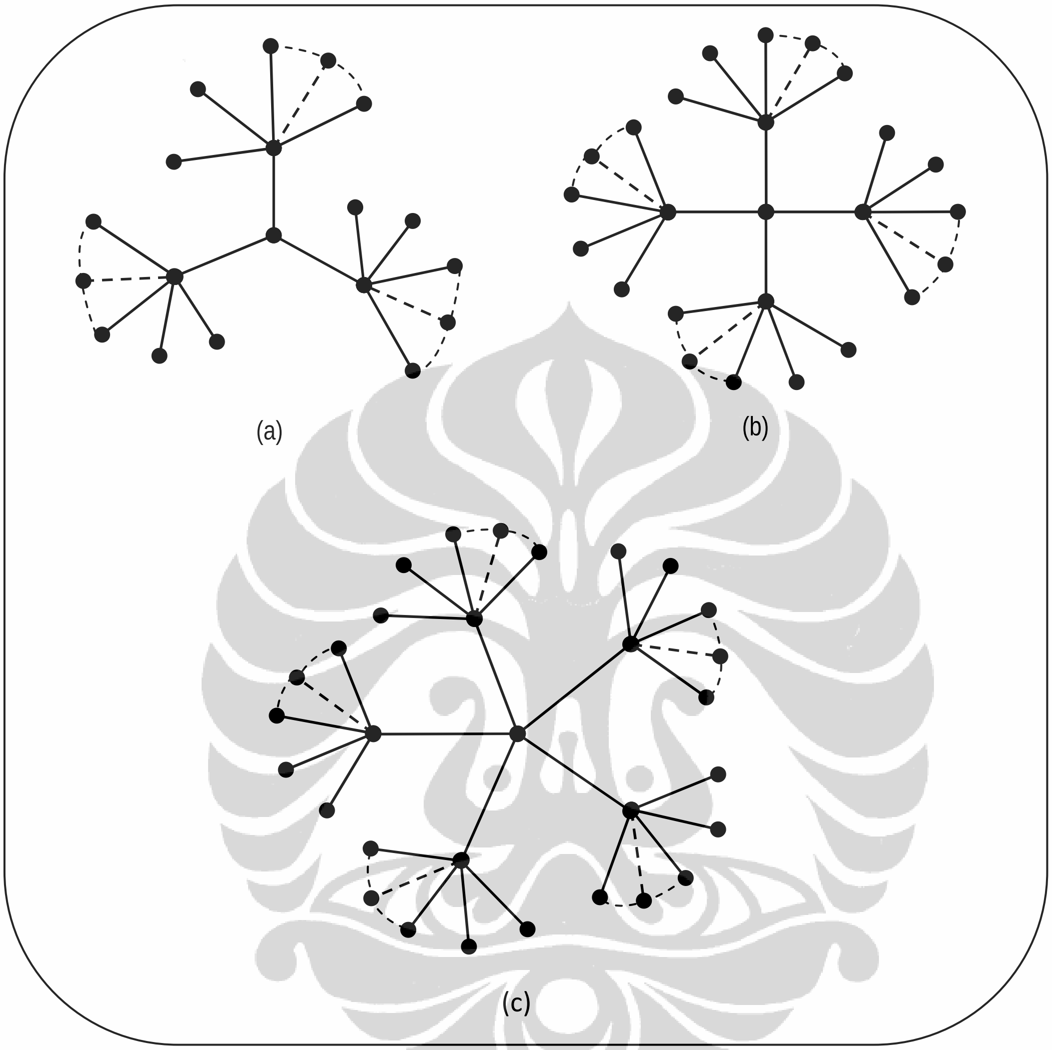


Gambar 2.7 Graf Bintang S_7

Graf bintang merupakan sub kelas dari graf pohon, karena graf bintang tidak mempunyai subgraf lingkaran.

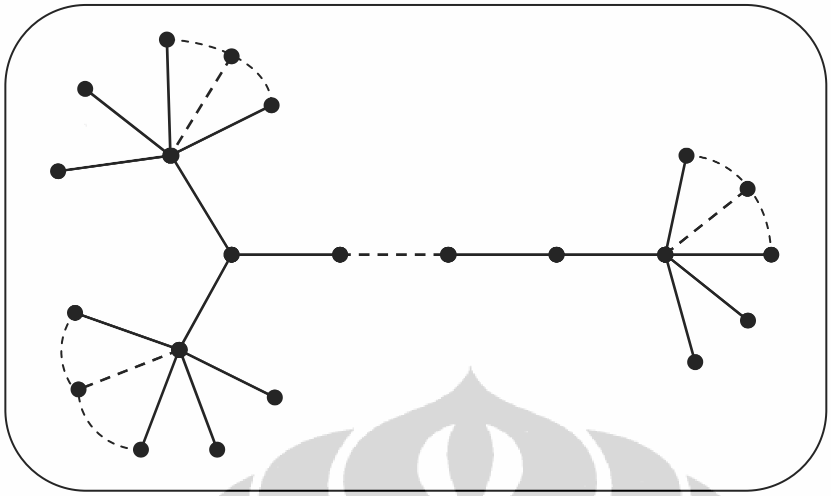
Graf ilalang (S_n, r) adalah suatu graf yang dibangun dari r buah graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul *c,* disebut dengan simpul pusat, dan diberikan busur-busur yang menghubungkan setiap simpul pusat S_n dengan simpul *c* tersebut (Amri dkk., 2011).

Selanjutnya untuk $r = 3$ disebut graf ilalang $(S_n, 3)$, untuk $r = 4$ disebut graf ilalang $(S_n, 4)$, untuk $r = 5$ disebut graf ilalang $(S_n, 5)$ dan seterusnya. Pada Gambar 2.8 diberikan beberapa contoh graf ilalang.



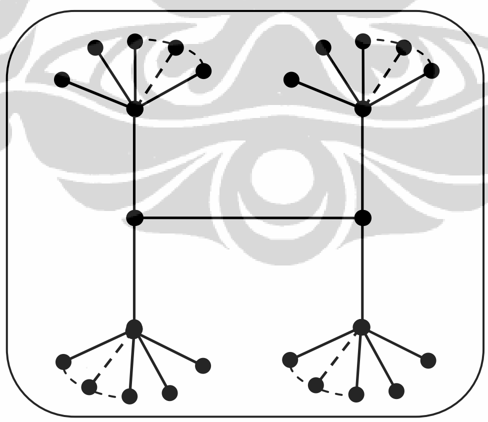
Gambar 2.8 Graf Ilalang (a) Graf Ilalang $(S_n, 3)$, (a) Graf Ilalang $(S_n, 4)$, (a) Graf Ilalang $(S_n, 5)$

Graf Kelabang merupakan pengembangan dari graf ilalang $(S_n, 3)$ dengan memperpanjang salah satu busurnya yakni diberikan m simpul yang menghubungkan simpul pusat graf $(S_n, 3)$ ke salah satu simpul pusat graf bintang S_n. Pada Gambar 2.9 diberikan contoh graf kelabang (Amri dkk., 2011).



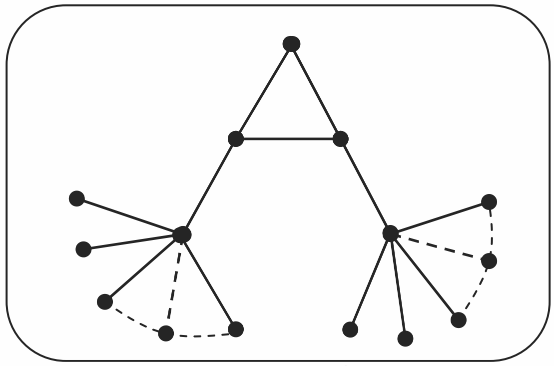
Gambar 2.9 Graf Kelabang

Graf H-Bintang adalah suatu graf yang dibangun dari beberapa graf bintang S_n kemudian diberikan suatu graf berbentuk huruf H besar dimana setiap simpul berderajat satu pada graf H merupakan pusat graf bintang. Pada Gambar 2.10 diberikan graf H-bintang.



Gambar 2.10 Graf H-Bintang

Graf A-Bintang adalah suatu graf yang dibangun dari graf yang berbentuk huruf A kemudian diberikan graf bintang S_n pada daun-daunnya. Pada Gambar 2.11 diberikan graf A-bintang.



Gambar 2.11 Graf A-Bintang

Semua graf yang dibangun variasi graf bintang tersebut yakni : graf ilalang, graf kelabang dan graf H-Bintang serta graf A-bintang. Graf-graf ini dapat dikatakan sebagai graf pohon kecuali graf A-bintang karena graf A-bintang memuat graf lingkaran. Selanjutnya untuk melakukan generalisasi terhadap graf-graf tersebut maka graf-graf yang dibangun oleh graf bintang disebut graf keluarga bintang. Graf-graf tersebut akan diberikan pelabelan *graceful* dan modifikasinya yaitu, pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$.

2.3. Pelabelan Graf

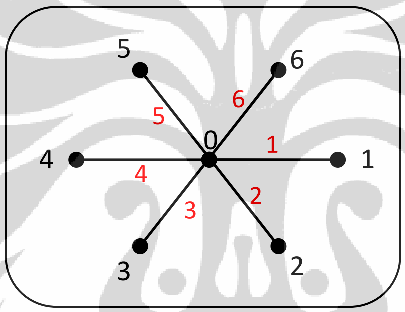
Pelabelan graf adalah pemberian nilai bilangan pada simpul, busur, atau pada simpul dan busur menurut aturan tertentu. Banyak jenis pelabelan yang telah di kenalkan diantaranya pelabelan harmonis, pelabelan ajaib, pelabelan jumlah dan lain sebagainya. Pada tesis ini hanya dibahas pelabelan *graceful* dan pelabelan *skolem graceful* serta pelabelan $\hat{\rho}$.

2.3.1. Pelabelan *Graceful*

Pelabelan *graceful* pada graf G(V,E) adalah fungsi injektif α dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \ldots . |E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif α' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2, \ldots . |E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku α' (uv) = $|\alpha(u) - \alpha(v)|$. Suatu graf yang memiliki pelabelan *graceful* disebut dengan graf *graceful* (Gallian, 2010).

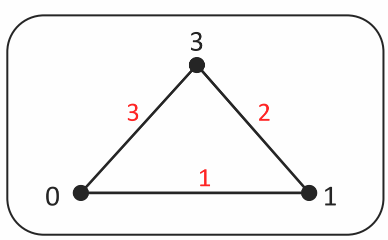
Menurut Mahmoudzadeh (2010), nama "pelabelan *graceful*" dikemukakan oleh Solomon W. Golomb, namun, pelabelan awal kelas ini diberi nama pelabelan β (*β-labelings*) oleh Alex Rosa pada tahun 1967.

Beberapa graf *graceful* yang sudah diketahaui antara lain adalah graf lintasan, graf *caterpillar* dan graf bintang. Graf bintang jelas merupakan graf *graceful* dengan kontruksi pelabelan sebagai berikut: simpul pusat diberikan label 0, dan simpul-simpul ujungnya di berikan label 1, 2 dan seterusnya. Dengan kontruksi pelabelan seperti ini maka pelabelan busur yang di induksikan oleh pelabelan simpul adalah selisih dari simpul-simpul yang hadir pada busur tersebut. Pada Gambar 2.12 diberikan contoh pelabelan *graceful* pada S_6. dengan 7 simpul dan 6 busur.



Gambar 2.12 Pelabelan Graceful Graf Bintang S_6

Pada pelabelan *graceful* setiap simpul diberikan label dari $0,1,2,\ldots,|E|$, maka terdapat $|E|+1$ nilai untuk melabelkan setiap simpulnya. Pada graf yang memiliki $|V|<|E|+1$ maka tidak semua label yang ada harus digunakan, Sebagai contoh adalah graf lingkaran . Pada Gambar 2.13 diberikan contoh pelabelan *graceful* pada graf lingkaran C_3. Terlihat bahwa label 2 tidak digunakan dalam melabelkan simpulnya.



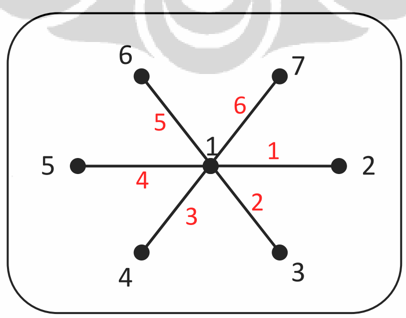
Gambar 2.13 Pelabelan Graceful Pada Graf Lingkaran (cycle) C_3

Graf *graceful* tidak mungkin dikonstruksikan pada graf yang memiliki $|V| > |E| + 1$, untuk graf seperti ini didefinisikan pelabelan sejenis yang memberikan kelonggaran pada pelabelan simpulnya. Jenis pelabelan ini antara lain, pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$.

2.3.2. Pelabelan Skolem *Graceful*

Pelabelan *skolem graceful* adalah modifikasi dari pelabelan *graceful* yaitu berupa fungsi injektif μ dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots . |V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif μ' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots , |E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku μ' $(uv) = \left|\mu(u) - \mu(v)\right|$ (Gallian, 2010).

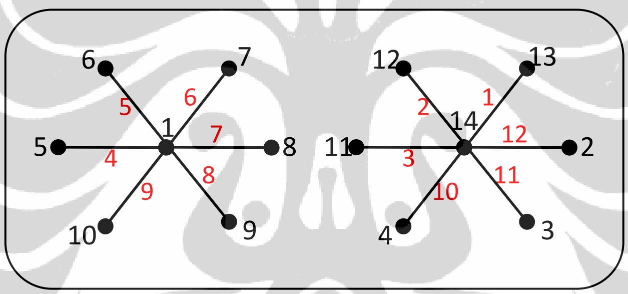
Menurut Gallian (2010), beberapa graf terhubung mempunyai pelabelan *skolem graceful*: Lee dan Wui menunjukkan bahwa graf terhubung mimiliki pelabelan *skolem graceful* jika dan hanya jika graf tersebut merupakan graf pohon *graceful*; Yao, Cheng dan Zhongfu menunjukkan graf pohon dengan derajat maksimum lebih besar dari $\frac{|V|}{2}$ memiliki pelabelan *skolem graceful*. Pada Gambar 2.14 diberikan contoh pelabelan *skolem graceful* pada graf bintang S_6 dengan 7 simpul dan 6 busur.



Gambar 2.14 Pelabelan Skolem Graceful Graf Bintang S_6

Masih menurut Gallian (2010), beberapa gabungan graf mempunyai pelabelan *skolem graceful*: Lee dan Wui membuktikan gabungan terpisah dari 2 atau 3 graf bintang memiliki pelabelan *skolem graceful* jika dan hanya jika paling tidak salah satunya memiliki jumlah busur genap; Choudum dan Kishore membuktikan bahwa gabungan terpisah 5 graf bintang adalah *skolem graceful*; Lee, Quach dang Wang menunjukkan gabungan terpisah P_n dengan S_n adalah *skolem graceful* jika dan hanya jika $n = 2$ dan m genap, atau $n \geq 3$ dan $m \geq 1$; Frucht membuktikan $P_n \cup P_m$ adalah *skolem graceful* jika dan hanya jika $m + n \geq 5$.

Menurut Sevenhot dkk., (2010), graf yang merupakan gabungan terpisah 2 graf pohon memiliki pelabelan *skolem graceful* jika dan hanya jika memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. Pada Gambar 2.15 diberikan contoh pelabelan *skolem graceful* pada gabungan terpisah 2 graf.

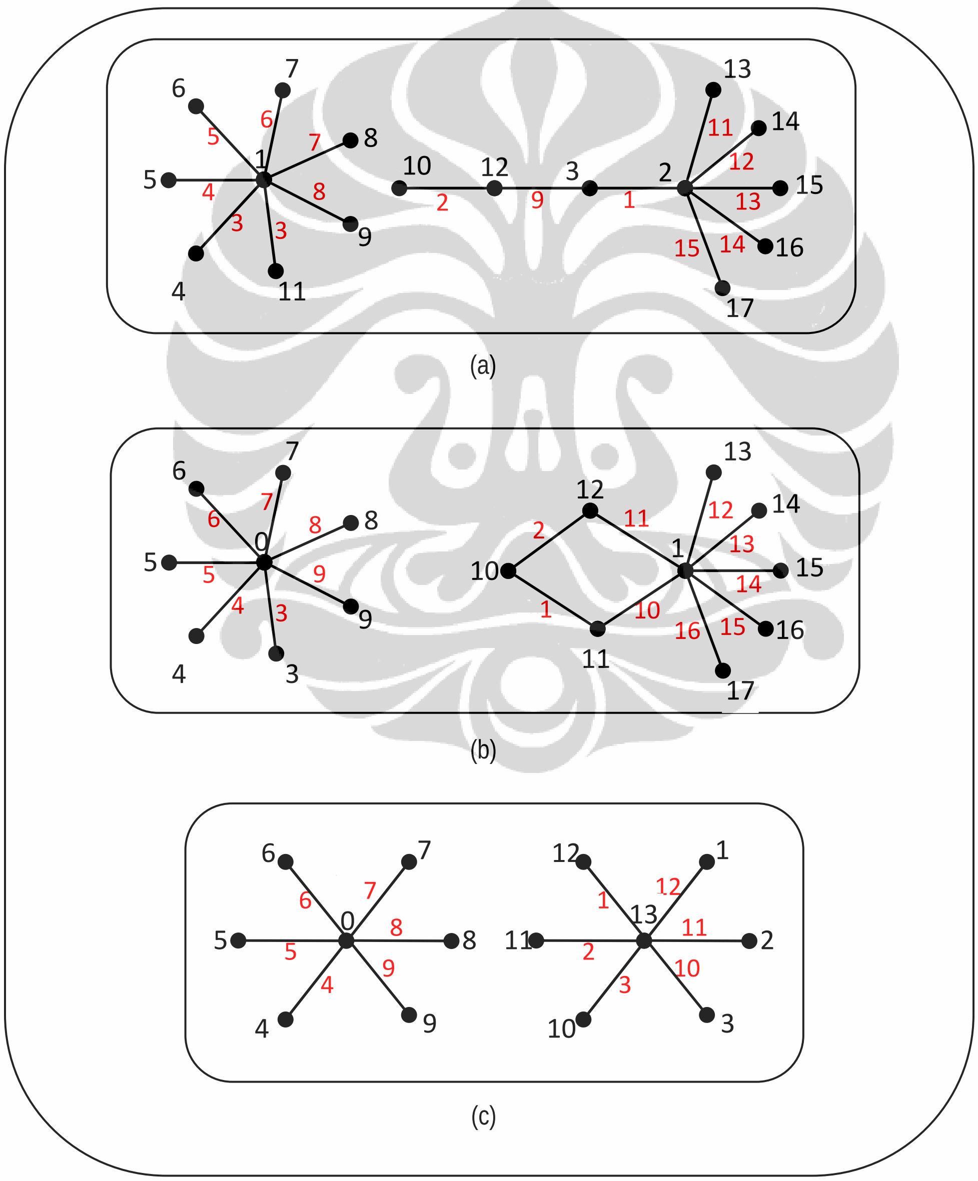


Gambar 2.15 Pelabelan Skolem Graceful Graf Bintang $2S_6$

2.3.3. Pelabelan $\hat{\boldsymbol{\rho}}$

Alex Rosa mendefinisikan suatu pelabelan yang mirip pelabelan *graceful* yang disebut dengan pelabelan $\hat{\rho}$. **Pelabelan $\hat{\boldsymbol{\rho}}$** adalah modifikasi dari pelabelan *graceful* yaitu fungsi injektif γ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots . |E| + 1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$ atau $\{1,2, \dots, |E| - 1, |E| + 1\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u,v* ∈ *V* berlaku γ' (*uv*) = $|\gamma(u) - \gamma(v)|$ (Gallian, 2010). Jelas bahwa semua graf yang memiliki pelabelan *graceful* memiliki pelabelan $\hat{\rho}$, hal ini disebabkan himpunan label simpul pada graf *graceful* merupakan subhimpunan dari himpunan label simpul pada pelabelan $\hat{\rho}$. Tetapi graf yang memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ belum tentu merupakan pelabelan *graceful*. Contoh pelabelan $\hat{\rho}$ diberikan sama seperti pada Gambar 2.12, 2.13 dan 2.14.

Sevenhot dkk.,(2010), menunjukkan bahwa gabungan terpisah graf bintang dengan graf sapu dan gabungan terpisah graf bintang dengan graf cumi serta gabungan 2 graf bintang dengan n genap memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. Berikut diberikan contoh pada Gambar 2.16



Gambar 2.16 (a).Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf $S_7 \cup$ Graf Sapu $B_{4,5}$, (b).Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf $S_7 \cup$ Graf Cumi $Sq_{4,5}$ dan (c).Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf $2S_6$

Pada Gambar 2.15 dan Gambar 2.16(c) ditunjukkan bahwa gabungan terpisah dua graf bintang S_n memiliki pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$, namun gabungan terpisah dari dua graf bintang S_n tersebut tidak memiliki pelabelan *graceful*. Hal ini menjadi dasar pembahasan awal tesis ini.

BAB III
PELABELAN GRACEFUL,
SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$

Pada bab ini akan diberikan pelabelan *graceful* dan modifikasi *graceful* yaitu pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada beberapa graf, sehingga graf tersebut mempunyai pelabelan *graceful*, pelabelan *skolem graceful* dan atau pelabelan $\hat{\rho}$. Graf yang menjadi fokus perhatian dalam tesis ini adalah graf yang subgrafnya berupa graf bintang yakni pada graf ilalang, graf kelabang dan graf alfabet bintang.

Suatu graf pohon mempunyai pelabelan *graceful* jika dan hanya jika pada graf tersebut dapat dibangun pelabelan *skolem graceful*. Setiap graf yang memiliki pelabelan *graceful*, jelas memiliki pelabelan $\hat{\rho}$, tetapi tidak sebaliknya, Setiap graf yang memiliki pelabelan *skolem graceful*, jelas memiliki pelabelan $\hat{\rho}$, tetapi tidak sebaliknya (Gallian, 2010).

Tetapi suatu graf yang tidak mempunyai pelabelan *graceful* dapat mempunyai pelabelan *skolem graceful* atau pelabelan$\hat{\rho}$. Sebagai contoh adalah gabungan terpisah dari dua graf bintang S_n yang merupakan graf hutan, tidak mempunyai pelabelan *graceful* tetapi mempunyai pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$ (Sevenhot dkk., 2010).

3.1. Pelabelan Pada Graf Ilalang (S_n, r)

Pada bab sebelumnya telah diberikan definisi tentang pelabelan yaitu pelabelan *graceful*, pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$. Graf ilalang (S_n, r) adalah suatu graf yang dibangun dari graf bintang S_n sebanyak r, kemudian diberikan sebuah simpul c, disebut dengan simpul pusat, dan diberikan busur yang menghubungkan simpul c ke setiap simpul pusat S_n untuk $r = 3$ telah dibuktikan (Amri dkk., 2011).

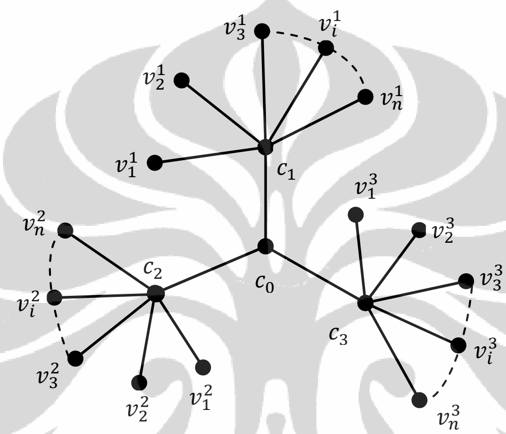
Selanjutnya akan diberikan pelabelan *graceful*, pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf ilalang (S_n, r) untuk $3 \leq r \leq 5$, sebagai berikut:

3.1.1. Pelabelan Pada Graf Ilalang $(S_n, 3)$

Menurut Amri dkk., (2011) graf ilalang $(S_n, 3)$ merupakan graf *graceful*, graf sekolem *graceful* dan graf $\hat{\rho}$ diberikan pada teorema dan akibat berikut:

Teorema 3.1 Graf ilalang $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan *graceful*.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf ilalang $(S_n, 3)$ diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Penamaan Simpul Graf Ilalang $(S_n, 3)$

Pada Gambar 3.1 diatas terlihat bahwa himpunan simpul $V(S_n, 3) = \{c_0, c_1, c_2, c_3, v_1^1, v_2^1, .., v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2, v_1^3, v_2^3, \dots, v_n^3\}$ himpunan busur $E(S_n, 3) = \{c_0c_1, \dots, c_0c_3, c_1v_1^1, \dots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, \dots, c_2v_n^2, c_3v_1^3, \dots, c_3v_n^3\}$ sehingga banyaknya elemen V dan E masing-masing adalah $3n + 4$ dan $3n + 3$ dinotasikan dengan $|V| = 3n + 4$ dan $|E| = 3n + 3$.

Didefinisikan pelabelan, dengan menggunakan notasi α, untuk simpul sebagai berikut :

$$\alpha(c_0) = 2n + 3. \tag{3.1}$$

$$\alpha(c_1) = 0. \tag{3.2}$$

$$\alpha(c_2) = 1. \tag{3.3}$$

$$\alpha(c_3) = n + 2. \tag{3.4}$$

$$\alpha(v_i^1) = 3n + 4 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2\ldots,n. \tag{3.5}$$

$$\alpha(v_i^2) = 2n + 3 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2\ldots,n. \tag{3.6}$$

$$\alpha(v_i^3) = n + 2 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2\ldots,n. \tag{3.7}$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.1)-(3.7), melabelkan setiap anggota $V(S_n, 3)$ dengan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \ldots, |E|\}$. Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan α', yang diinduksikan oleh pelabelan simpul, $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada graf ilalang $(S_n, 3)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_1) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_1)| \\ &= |(2n+3) - (0)| \\ &= 2n+3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_2) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_2)| \\ &= |(2n+3) - (1)| \\ &= 2n+2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_3) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_3)| \\ &= |(2n+3) - (n+2)| \\ &= n+1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

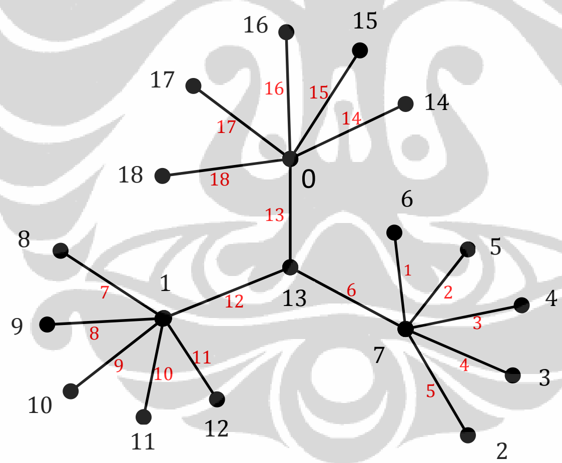
$$\begin{aligned} \alpha'(c_1v_i^1) &= \left|\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)\right| \\ &= \left|(0) - \left(3n + 4 - i\right)\right| \\ &= 3n + 4 - i, \qquad \text{untuk } i=1,2\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_2v_i^2) &= \left|\alpha(c_2) - \alpha(v_i^2)\right| \\ &= |(1) - (2n + 3 - i)| \\ &= 2n + 2 - i, \qquad \text{untuk } i=1,2\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha'(c_3 v_i^3) &= \left|\alpha(c_3) - \alpha(v_i^3)\right| \\
&= |(n+2) - (n+2-i)| \\
&= i, \qquad\qquad \text{untuk } \; i=1,2\ldots,n. \qquad\qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.1)-(3.7) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pula pada masing-masing busur seperti pada persamaan (3.8)–(3.13) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Berdasarkan hasil diatas, maka α merupakan pelabelan *graceful* untuk graf ilalang $(S_n, 3)$. ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan *graceful* pada graf ilalang $(S_5, 3)$.



Gambar 3.2 Pelabelan *Graceful* Pada Graf Ilalang $(S_5, 3)$

Semua kelas graf *graceful* dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf *skolem graceful* dengan mendefinisikan $\mu(x) = \alpha(x) + 1$ dimana μ merupakan notasi untuk pelabelan *skolem graceful* dan $x \in V(S_n, 3)$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

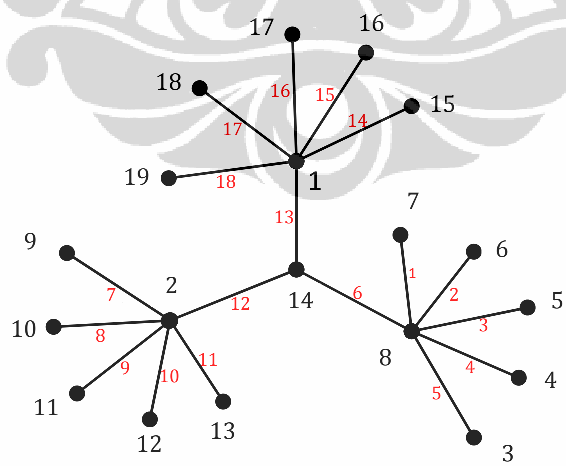
Akibat 3.2 Graf ilalang $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan *skolem graceful*.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf ilalang $(S_n, 3)$ yang diberikan seperti pada Gambar 3.1.

Didefinisikan pelabelan μ untuk simpul dengan menambahkan 1 disetiap label simpul yang digunakan pada persamaan (3.1)-(3.7) di Teorema 3.1, sehingga $\mu(x) = \alpha(x) + 1$ untuk setiap $x \in V(S_n, 3)$ dimana α adalah pelabelan pada bukti Teorema 3.1, pelabelan yang didefinisikan oleh μ akan melabelkan setiap anggota $V(S_n, 3)$ dengan pelabelan $\mu(V(S_n, 3))$ adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{1,2, \dots, |V|\}$, $u, v \in V$. Sehingga setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan $\mu'(uv) = |\mu(u) - \mu(v)|$ pada graf ilalang $(S_n, 3)$ yang menghasilkan sama seperti persamaan (3.8)–(3.13).

Berdasarkan pelabelan μ yang terdefinisikan dari bukti Teorema 3.1, setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |V|\}$. Kemudian pelabelan μ' sama seperti persamaan (3.8)–(3.13) yang diinduksi oleh pelabelan simpul μ menghasilkan sama seperti bukti Teorema 3.1, sehingga memberikan nilai yang berbeda pula pada masing-masing busur dan merupakan himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$. Maka μ merupakan pelabelan *skolem graceful* untuk graf Ilalang $(S_n, 3)$.■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan *skolem graceful* untuk graf ilalang $(S_5, 3)$.



Gambar 3.3 Pelabelan *Skolem Graceful* Pada Graf Ilalang $(S_5, 3)$

Semua kelas graf *graceful* dan graf *skolem graceful* dengan $|V| = |E| + 1$ akan merupakan graf $\hat{\rho}$ dengan mendefinisikan $\gamma(x) = \mu(x)$ atau $\gamma(x) = \alpha(x)$, dimana γ merupakan notasi untuk pelabelan $\hat{\rho}$, μ merupakan notasi untuk pelabelan *skolem graceful* dan $x \in V(S_n, 3)$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 3.3 Graf ilalang $(S_n, 3)$memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

Bukti. Misal notasi simpul graf ilalang $(S_n, 3)$ ditunjukkan pada Gambar 3.1

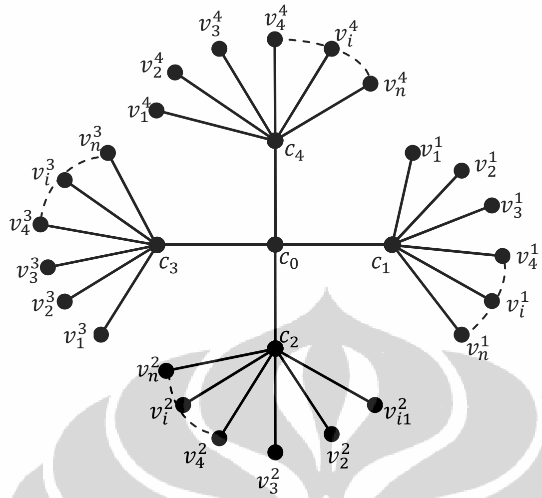
Menggunakan cara yang sama pada pembuktian *graceful* pada Teorema 3.1 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $\gamma = \alpha$ seperti persamaan (3.1)–(3.7) Teorema 3.1 atau dengan cara yang sama pada pembuktian seperti Akibat 3.2 $\gamma = \mu$, maka menginduksikan pelabelan busur $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$ dimana $uv \in E$ dan $u, v \in V$ diperoleh pelabelan simpul dari graf ilalang $(S_n, 3)$ ke subhimpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, |E| + 1\}$, dan pelabelan busur dari graf ilalang $(S_n, 3)$ ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$. Sedemikian sehingga graf ilalang $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. ■

3.1.2. Pelabelan Pada Graf Ilalang $(S_n, 4)$

Graf ilalang $(S_n, 4)$ juga merupakan graf *graceful*, graf sekolem *graceful* dan graf $\hat{\rho}$ ditunjukkan pada teorema dan akibat-akibat berikut:

Teorema 3.4 Graf ilalang $(S_n, 4)$ memiliki pelabelan *graceful*.

Bukti. Dengan cara yang sama seperti Teorema 3.1, Misalkan notasi simpul graf ilalang $(S_n, 4)$ diberikan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Penamaan Simpul Graf Ilalang $(S_n, 4)$

Pada Gambar 3.4 diatas terlihat bahwa himpunan simpul $V(S_n, 4) = \{c_0, \ldots, c_4, v_1^1, v_2^1, \ldots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2, v_1^3, v_2^3, \ldots, v_n^3, v_1^4, v_2^4, \ldots, v_n^4\}$, himpunan busur $E(S_n, 4) = \{c_0c_1, \ldots, c_0c_4, c_1v_1^1, \ldots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, \ldots, c_2v_n^2, c_3v_1^3, \ldots, c_3v_n^3, c_4v_1^4, \ldots, c_4v_n^4,\}$ sehingga $|V| = 4n + 5$ dan $|E| = 4n + 4$. Didefinisikan pelabelan, dengan menngunakan notasi α (alpha), untuk simpul sebagai berikut :

$$\alpha(c_0) = 3n + 4. \tag{3.14}$$

$$\alpha(c_1) = 0. \tag{3.15}$$

$$\alpha(c_2) = 1. \tag{3.16}$$

$$\alpha(c_3) = n + 2\,. \tag{3.17}$$

$$\alpha(c_4) = 2n + 3. \tag{3.18}$$

$$\alpha(v_i^1) = 4n + 5 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2, \ldots, n. \tag{3.19}$$

$$\alpha(v_i^2) = 3n + 4 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2, \ldots, n. \tag{3.20}$$

$$\alpha(v_i^3) = 2n + 3 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2, \ldots, n. \tag{3.21}$$

$$\alpha(v_i^4) = n + 2 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2, \ldots, n. \tag{3.22}$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.14)-(3.22), melabelkan setiap anggota $V(S_n, 4)$ dengan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \ldots, |E|\}$.

Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan, $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada graf ilalang $(S_n, 4)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_1) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_1)| \\ &= |(3n+4) - (0)| \\ &= 3n+4. \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_2) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_2)| \\ &= |(3n+4) - (1)| \\ &= 3n+3. \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_3) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_3)| \\ &= |(3n+4) - (n+2)| \\ &= 2n+2. \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_4) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_4)| \\ &= |(3n+4) - (2n+3)| \\ &= n+1. \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_1v_i^1) &= \left|\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)\right| \\ &= |(0) - (4n+5-i)| \\ &= 4n+5-i, \qquad \text{untuk } i=1,2...,n. \end{aligned} \tag{3.27}$$

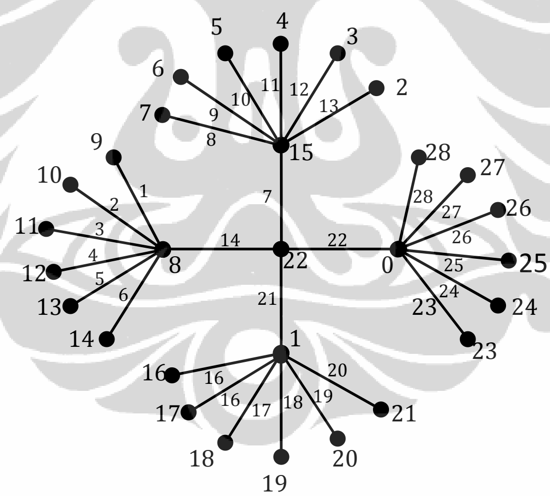
$$\begin{aligned} \alpha'(c_2v_i^2) &= \left|\alpha(c_2) - \alpha(v_i^2)\right| \\ &= |(1) - (3n+4-i)| \\ &= 3n + 3 - i, \qquad \text{untuk } i=1,2...,n. \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_3v_i^3) &= \left|\alpha(c_3) - \alpha(v_i^3)\right| \\ &= |(n+2) - (2n+3-i)| \\ &= n + 1 - i, \qquad \text{untuk } i=1,2...,n. \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\alpha'(c_4 v_i^4) = \left|\alpha(c_4) - \alpha(v_i^4)\right|$$
$$= |(2n+3) - (n+2-i)|$$
$$= n + 1 + i, \qquad \text{untuk } i=1,2\ldots,n. \qquad (3.30)$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.14)-(3.22) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur seperti pada persamaan (3.23)–(3.30) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Berdasarkan hasil diatas, sehingga α merupakan pelabelan *graceful* untuk graf ilalang $(S_n, 4)$. ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan *graceful* untuk graf ilalang $(S_6, 4)$.



Gambar 3.5 Pelabelan *Graceful* Pada Graf Ilalang $(S_6, 4)$

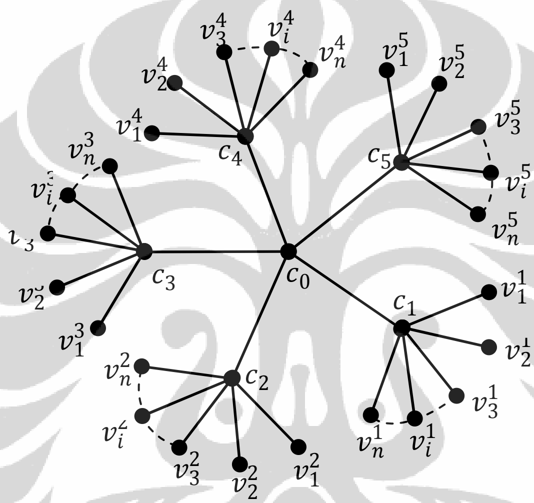
Karena semua kelas graf *graceful* dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf *skolem graceful* dan graf $\hat{\rho}$ maka akibatnya graf ilalang $(S_n, 4)$ memiliki pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$.

3.1.3. Pelabelan Pada Graf Ilalang $(S_n, 5)$

Serupa halnya dengan graf ilalang $(S_n, 3)$ dan $(S_n, 4)$, graf ilalang $(S_n, 5)$ juga merupakan graf *graceful*, *sekolem graceful* dan graf $\hat{\rho}$ yang akan ditunjukkan pada Teorema 3.5 berikut:

Teorema 3.5 Graf Ilalang $(S_n, 5)$ memiliki pelabelan *graceful*.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf ilalang $(S_n, 5)$ diberikan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Penamaan Simpul Graf Ilalang $(S_n, 5)$

Pada Gambar 3.6 diatas terlihat bahwa himpunan simpul $V(S_n, 5) = \{ c_0, c_1, c_2, \dots, c_5, v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2, v_1^3, v_2^3, \dots, v_n^3, v_1^4, v_2^4, \dots, v_n^4, v_1^5, v_2^5, \dots, v_n^5\}$ himpunan busur $E(S_n, 3) = \{c_0c_1, \dots, c_0c_5, c_1v_1^1, \dots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, \dots, c_2v_n^2, c_3v_1^3, \dots, c_3v_n^3, c_4v_1^4, \dots, c_4v_n^4, c_5v_1^5, \dots, c_5v_n^5\}$ sehingga banyaknya elemen V dan E masing-masing adalah $5n + 6$ dan $5n + 5$ dinotasikan dengan $|V| = 5n + 6$ dan $|E| = 5n + 5$. Didefinisikan pelabelan, dengan menngunakan notasi α, untuk simpul ditunjukkan pada persamaan (3.31) – (3.41) berikut :

$$\alpha(c_0) = 4n + 5. \tag{3.31}$$

$$\alpha(c_1) = 0. \tag{3.32}$$

$$\alpha(c_2) = 1. \tag{3.33}$$

$$\alpha(c_3) = 3. \tag{3.34}$$

$$\alpha(c_4) = 2n + 2. \quad (3.35)$$

$$\alpha(c_5) = 2n + 4. \quad (3.36)$$

$$\alpha(v_i^1) = 5n + 6 - i, \quad \text{untuk } i = 1,2\ldots,n. \quad (3.37)$$

$$\alpha(v_i^2) = 4n + 6 - 2i, \quad \text{untuk } i = 1,2\ldots,n. \quad (3.38)$$

$$\alpha(v_i^3) = 4n + 5 - 2i, \quad \text{untuk } i = 1,2\ldots,n. \quad (3.39)$$

$$\alpha(v_i^4) = 2i, \quad \text{untuk } i = 1,2\ldots,n. \quad (3.40)$$

$$\alpha(v_i^5) = 2i + 3, \quad \text{untuk } i = 1,2\ldots,n. \quad (3.41)$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.31)-(3.41), melabelkan anggota $V(S_n, 5)$ adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \ldots, |E|\}$. Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada graf ilalang $(S_n, 5)$ yang dinyatakan pada persamaan (3.42)- (3.51) berikut:

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_1) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_1)| \\ &= |(4n + 5) - (0)| \\ &= 4n + 5. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_2) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_2)| \\ &= |(4n + 5) - (1)| \\ &= 4n + 4. \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_3) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_3)| \\ &= |(4n + 5) - (3)| \\ &= 4n + 2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_4) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_4)| \\ &= |(4n + 5) - (2n + 2)| \\ &= 2n + 3. \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\alpha'(c_0c_5) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_5)| \\ &= |(4n+5) - (2n+4)| \\ &= 2n+1. \end{aligned} \qquad (3.46)$$

$$\begin{aligned}\alpha'(c_1v_i^1) &= \left|\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)\right| \\ &= \left|(0) - \left(5n + 6 - i\right)\right| \\ &= 5n + 6 - i, \end{aligned} \qquad \text{untuk } i=1,2...,n. \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}\alpha'(c_2v_i^2) &= \left|\alpha(c_2) - \alpha(v_i^2)\right| \\ &= |(1) - (4n+6-2i)| \\ &= 4n+5-2i, \end{aligned} \qquad \text{untuk } i=1,2...,n. \quad (3.48)$$

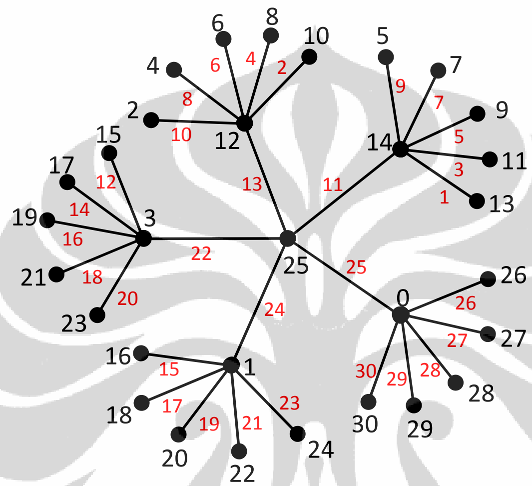
$$\begin{aligned}\alpha'(\mathrm{c}_3\mathrm{v}_\mathrm{i}^3) &= \left|\alpha(\mathrm{c}_3) - \alpha(\mathrm{v}_\mathrm{i}^3)\right| \\ &= |(3) - (4n+5-i)| \\ &= 4n+2-i, \end{aligned} \qquad \text{untuk } i=1,2...,n. \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}\alpha'(c_4v_i^4) &= \left|\alpha(c_4) - \alpha(v_i^4)\right| \\ &= |(2n+2) - (2i)| \\ &= 2n+2-2i, \end{aligned} \qquad \text{untuk } i=1,2...,n. \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}\alpha'\left(c_5v_i^5\right) &= \left|\alpha(c_5) - \alpha\left(v_i^5\right)\right| \\ &= |(2n+2) - (2i+3)| \\ &= 2n-2i+1, \end{aligned} \qquad \text{untuk } i=1,2...,n. \quad (3.51)$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.31)-(3.41) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan anggota himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,|E|\}$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pula pada masing-masing busur seperti pada persamaan (3.42)–(3.51) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Berdasarkan definisi pelabelan *graceful* diatas, maka α merupakan pelabelan *graceful* untuk graf ilalang $(S_n, 5)$. ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan *graceful* untuk graf ilalang $(S_5, 5)$.



Gambar 3.7 Pelabelan *Graceful* Pada Graf Ilalang $(S_5, 5)$

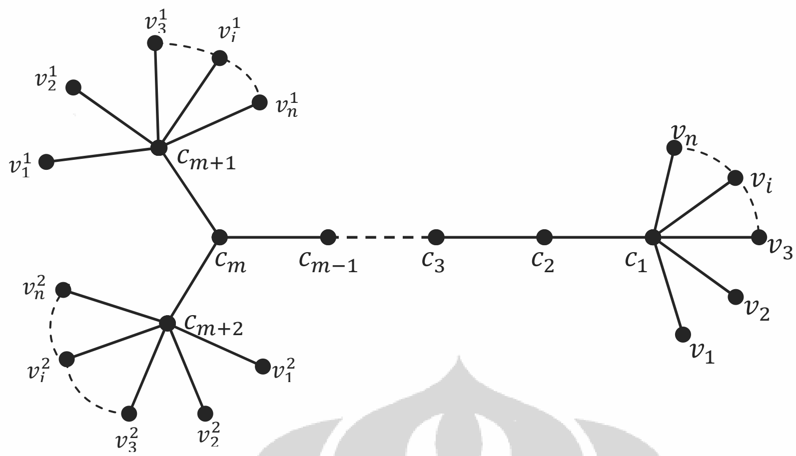
Sama seperti graf ilalang $(S_n, 4)$, graf ilalang $(S_n, 5)$ juga memiliki pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$.

3.2. Pelabelan Pada Graf Kelabang

Pada subbab ini dibahas pelabelan *graceful*, pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada kelas graf kelabang.

Teorema 3.6. Graf kelabang memiliki pelabelan *graceful*.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf kelabang diberikan pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Penamaan Simpul Graf Kelabang

Pada Gambar 3.10 diatas terlihat bahwa himpunan simpul graf kelabang adalah $\{c_1, \dots, c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, v_1, \dots, v_n, v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2\}$ himpunan busurnya adalah $\{c_1c_2, \dots, c_{m-1}c_m, c_mc_{m+1}, c_mc_{m+2}, c_1v_1, \dots, c_1v_n, c_{m+1}v_1^1, \dots,$ $c_{m+1}v_n^1,\ c_{m+2}v_1^2, \dots, c_{m+2}v_n^2\}$ diperoleh $|V| = 3n + m + 2$ dan $|E| = |V| - 1 = 3n + m + 1$.

Didefinisikan pelabelan α untuk melabelkan simpul graf kelabang sebagai berikut:

$$\alpha(c_j) = \begin{cases} \frac{j+1}{2} - 1 & , \ j = \text{ganjil.} \\ 2n + m + 2 - \frac{j}{2} & , \ j = \text{genap.} \end{cases} \tag{3.52}$$

$$\alpha(v_i) = 3n + m + 2 - i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2 \dots n. \tag{3.53}$$

Jika m bilangan genap maka

$$\alpha(c_{m+1}) = \frac{m}{2}. \tag{3.54}$$

$$\alpha(c_{m+2}) = \frac{m}{2} + n + 1. \tag{3.55}$$

$$\alpha(v_i^1) = 2n + m + 2 - \frac{m}{2} - i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2 \dots, n. \tag{3.56}$$

$$\alpha(v_i^2) = \frac{m}{2} + i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2 \dots, n. \tag{3.57}$$

Jika m bilangan ganjil maka

$$\alpha(c_{m+1}) = 2n + m + 2 - \frac{m+1}{2}. \quad (3.58)$$

$$\alpha(c_{m+2}) = n + m + 1 - \frac{m+1}{2}. \quad (3.59)$$

$$\alpha(v_i^1) = \frac{m-1}{2} + i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \quad (3.60)$$

$$\alpha(v_i^2) = n + m + 1 - \frac{m+1}{2} + i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \quad (3.61)$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.52)-(3.57) atau (3.52)-(3.53) dan (3.58)-(3.61), melabelkan anggota simpul graf kelabang adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \ldots, |E|\}$. Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada graf kelabang yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha'(c_1 v_i) &= |\alpha(c_1) - \alpha(v_i)| \\ &= |(0) - (3n + m + 2 - i)| \\ &= 3n + m + 2 - i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_j c_{j+1}) &= |\alpha(c_j) - \alpha(c_{j+1})| \\ &= \left|\left(\frac{j+1}{2} - 1\right) - \left(2n + m + 2 - \frac{j}{2}\right)\right| \\ &= 2n + m + 2 - j, \quad j = 1,2, \ldots, m-1. \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_m c_{m+1}) &= |\alpha(c_m) - \alpha(c_{m+1})| \\ &= \left|\left(\frac{m+1}{2} - 1\right) - \left(2n + m + 2 - \frac{m+1}{2}\right)\right| \\ &= 2n + 2. \end{aligned} \quad (3.64)$$

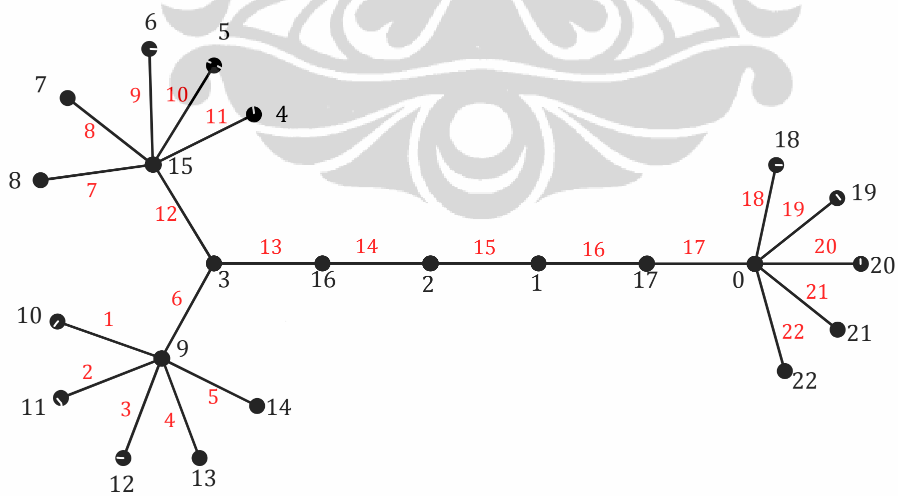
$$\begin{aligned} \alpha'(c_m c_{m+2}) &= |\alpha(c_m) - \alpha(c_{m+2})| \\ &= \left|\left(\frac{m+1}{2} - 1\right) - \left(n + m + 1 - \frac{m+1}{2}\right)\right| \\ &= n + 1. \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\alpha'(c_{m+1}v_i^1) = |\alpha(c_{m+1}) - \alpha(v_i^1)|$$
$$= |(2n + m + 2 - \tfrac{m+1}{2}) - (\tfrac{m-1}{2} + i)|$$
$$= 2n + 2 - i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \qquad (3.66)$$

$$\alpha'(c_{m+2}v_i^2) = |\alpha(c_{m+2}) - \alpha(v_i^2)|$$
$$= |(n + m + 1 - \tfrac{m+1}{2}) - (n + m + 1 - \tfrac{m+1}{2} + i)|$$
$$= i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \qquad (3.67)$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.52)-(3.61) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur seperti pada persamaan (3.62)–(3.67) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Berdasarkan definisi pelabelan *graceful*, maka α merupakan pelabelan *graceful* untuk graf kelabang. ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan *graceful* untuk graf kelabang .



Gambar 3.9 Pelabelan *Graceful* Pada Graf Kelabang $(2S_5, P_6, S_5)$

Graf kelabang adalah graf yang banyak simpulnya $|V| = |E| + 1$ sehingga graf kelabang memiliki pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$.

3.3. Pelabelan Pada Graf Alfabet Bintang

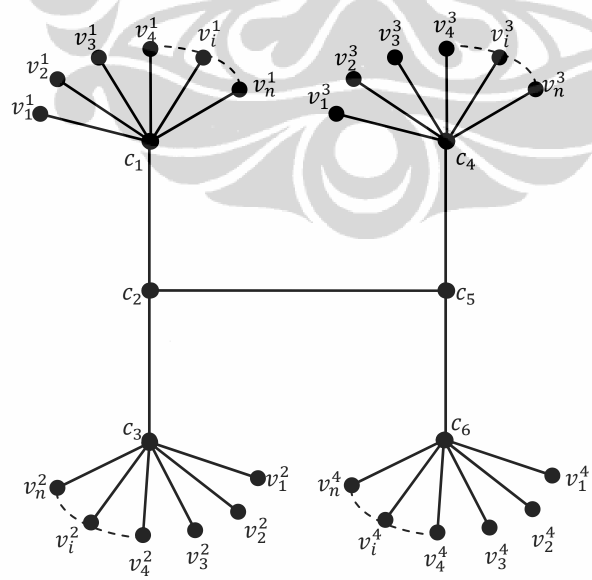
Pada sub bab ini akan dibahas pelabelan *graceful* dan modifikasinya terhadap graf alfabet bintang. Sesuai dengan ide pembentukannya graf alfabet bintang dapat di klasifikasikan menjadi graf caterpilar beserta dengan variasinya yakni graf yang dibangun dari huruf I, L, M, V, W dan Z. Sedangkan huruf X, K, T dan Y membentuk graf ilalang. Pada sub bab ini hanya akan dibahas graf H-bintang dan graf A-bintang

3.3.1. Pelabelan pada graf H-bintang

Pada sub bab ini akan diberikan pelabelan *graceful*, perlabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf H-Bintang. Graf H-bintang dinotasikan dengan H-S_n.

Teorema 3.7 Graf H-bintang memiliki pelabelan *graceful*.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf H-bintang diberikan pada Gambar 3.13.



Gambar 3.10 Penamaan Simpul Graf H-Bintang

Pada Gambar 3.10 diatas terlihat bahwa himpunan simpul graf H-bintang adalah $\{c_1, \dots, c_6\ , v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2, v_1^3, v_2^3, \dots, v_n^3, v_1^4, \dots, v_n^4\}$, dan himpunan busurnya $\{c_1c_2, c_2c_3, c_2c_5, c_4c_5, c_5c_6, c_1v_1^1, \dots, c_1v_n^1, c_3v_1^2, \dots, c_3v_n^2, c_4v_1^3, \dots, c_4v_n^3,$ $c_6v_1^4, \dots, c_6v_n^4\}$, maka $|V| = 4n + 6$ dan $|E| = 4n + 5$.

Didefinisikan pelabelan, dengan menggunakan notasi α, untuk simpul sebagai berikut :

$$\alpha(c_1) = 0. \tag{3.68}$$

$$\alpha(c_2) = 3n + 5. \tag{3.69}$$

$$\alpha(c_3) = 1. \tag{3.70}$$

$$\alpha(c_4) = 2n + 3. \tag{3.71}$$

$$\alpha(c_5) = n + 2. \tag{3.72}$$

$$\alpha(c_6) = 2n + 4. \tag{3.73}$$

$$\alpha(v_i^1) = 4n + 6 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2\dots,n. \tag{3.74}$$

$$\alpha(v_i^2) = 3n + 5 - i, \qquad \text{untuk } i = 1,2\dots,n. \tag{3.75}$$

$$\alpha(v_i^3) = n + 2 + i, \qquad \text{untuk } i = 1,2\dots,n. \tag{3.76}$$

$$\alpha(v_i^4) = i + 1, \qquad \text{untuk } i = 1,2\dots,n. \tag{3.77}$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.68)-(3.77), melabelkan semua anggota simpul graf H-bintang dengan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \dots, |E|\}$, $u, v \in V$. Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada graf H-bintang yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha'(c_1c_2) &= |\alpha(c_1) - \alpha(c_2)| \\ &= |(0) - (3n + 5)| \\ &= 3n + 5.\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}\alpha'(c_2c_3) &= |\alpha(c_2) - \alpha(c_3)| \\ &= |(3n + 5) - (1)| \\ &= 3n + 4.\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\alpha'(c_2c_5) = |\alpha(c_2) - \alpha(c_5)|$$
$$= |(3n + 5) - (n+2)|$$
$$= 2n + 3. \quad (3.80)$$

$$\alpha'(c_4c_5) = |\alpha(c_4) - \alpha(c_5)|$$
$$= |(2n + 3) - (n+2)|$$
$$= n + 1. \quad (3.81)$$

$$\alpha'(c_5c_6) = |\alpha(c_5) - \alpha(c_6)|$$
$$= |(n+2) - (2n + 4)|$$
$$= n + 2. \quad (3.82)$$

$$\alpha'(c_1v_i^1) = |\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)|$$
$$= |(0) - (4n + 6 - i)|$$
$$= 4n + 6 - i, \quad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \quad (3.83)$$

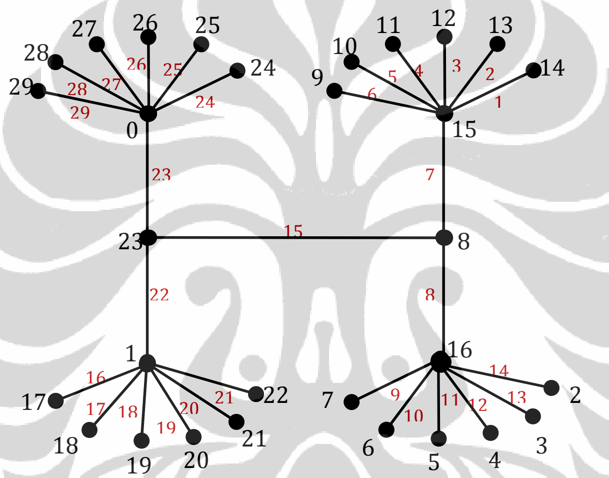
$$\alpha'(c_3v_i^2) = |\alpha(c_3) - \alpha(v_i^2)|$$
$$= |(1) - (3n + 5 - i)|$$
$$= 3n + 4 - i, \quad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \quad (3.84)$$

$$\alpha'(c_4v_i^3) = |\alpha(c_4) - \alpha(v_i^3)|$$
$$= |(2n + 3) - (n + 2 + i)|$$
$$= n + 1 - i, \quad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \quad (3.85)$$

$$\alpha'(c_6v_i^4) = |\alpha(c_6) - \alpha(v_i^4)|$$
$$= |(2n + 4) - (i + 1)|$$
$$= 2n + 3 - i, \quad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \quad (3.86)$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.68)-(3.77) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pula pada masing-masing busur seperti pada persamaan (3.78)-(3.86) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Berdasarkan pembahasn diatas, maka α merupakan pelabelan *graceful* untuk graf H-bintang.■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan *graceful* untuk graf H-bintang



Gambar 3.11 Pelabelan *Graceful* Pada Graf H-Bintang (H-S_6)

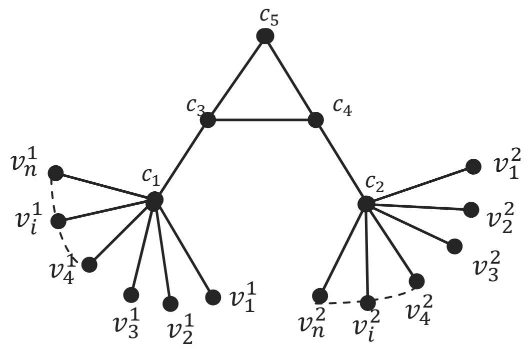
Graf H-bintang adalah graf yang banyak simpulnya $|V| = |E| + 1$ sehingga graf H-bintang memiliki pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$.

3.3.2. Pelabelan pada graf A-bintang

Pada sub bab ini akan diberikan pelabelan *graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf A-Bintang. Graf A-bintang dinotasikan dengan A-S_n.

Teorema 3.8 Graf A-bintang memiliki pelabelan *graceful*.

Bukti. Misalkan notasi simpul graf A-bintang diberikan pada Gambar 3.16.



Gambar 3.12 Penamaan Simpul Graf A-Bintang

Pada Gambar 3.12 diatas terlihat bahwa himpunan simpul graf A-bintang adalah $\{c_1, \dots, c_5\ , v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2\}$ dan himpunan busurnya adalah $\{\ c_1c_3, c_3c_5, c_2c_4, c_4c_5, c_1v_1^1, \dots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, \dots, c_2v_n^2\}$ maka $|V|\ =\ 2n\ +\ 5$ dan $|E| = 2n + 5$.

Didefinisikan pelabelan, dengan menngunakan notasi α, untuk simpul sebagai berikut :

$$\alpha(c_1) = 0. \tag{3.87}$$

$$\alpha(c_2) = n + 4. \tag{3.88}$$

$$\alpha(c_3) = n + 5. \tag{3.89}$$

$$\alpha(c_4) = 2. \tag{3.90}$$

$$\alpha(c_5) = 1. \tag{3.91}$$

$$\alpha(v_i^1) = 2n + 6 - i, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2\dots,n. \tag{3.92}$$

$$\alpha(v_i^2) = i + 2, \qquad \text{untuk} \quad i = 1,2\dots,n. \tag{3.93}$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.87)-(3.93), melabelkan semua simpul graf A-bintang merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \dots, |E|\}$, $u, v \in V$. Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada graf A-bintang yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\alpha'(c_1c_3) = |\alpha(c_1) - \alpha(c_3)|$$
$$= |(0) - (n+5)|$$
$$= n+5. \tag{3.94}$$

$$\alpha'(c_3c_5) = |\alpha(c_3) - \alpha(c_5)|$$
$$= |(n+5) - (1)|$$
$$= n+4. \tag{3.95}$$

$$\alpha'(c_2c_4) = |\alpha(c_2) - \alpha(c_4)|$$
$$= |(n+4) - (2)|$$
$$= n+2. \tag{3.96}$$

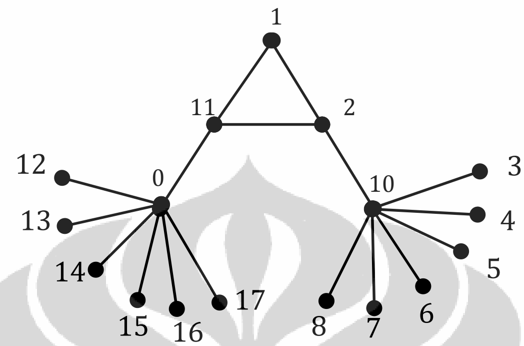
$$\alpha'(c_4c_5) = |\alpha(c_4) - \alpha(c_5)|$$
$$= |(2) - (1)|$$
$$= 1. \tag{3.97}$$

$$\alpha'(c_1v_i^1) = |\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)|$$
$$= |(0) - (2n+6-i)|$$
$$= 2n+6-i, \quad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \tag{3.98}$$

$$\alpha'(c_2v_i^2) = |\alpha(c_2) - \alpha(v_i^2)|$$
$$= |(n+4) - (i+2)|$$
$$= n+2-i, \quad \text{untuk} \quad i = 1,2\ldots,n. \tag{3.99}$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (3.87)-(3.93) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan subhimpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$ dan selalu tidak memuat pelabelan simpul $n+3$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur seperti pada persamaan (3.94)-(3.99) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Berdasarkan hal tersebut, maka α merupakan pelabelan *graceful* untuk graf A-bintang. ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan *graceful* pada graf A-bintang.



Gambar 3.13 Contoh Pelabelan *Graceful* Pada Graf A-Bintang (A-S_6)

Semua kelas graf *graceful* dengan $|V| = |E|$ merupakan graf $\hat{\rho}$, ditunjukkan pada akibat 3.17 berikut :

Akibat 3.9 Graf A-bintang memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.

Bukti. Misal notasi simpul graf A-bintang ditunjukkan seperti pada Gambar 3.16.

Menggunakan cara yang sama pada pembuktian *graceful* pada Teorema 3.16 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $\gamma = \alpha$ seperti persamaan (3.87)-(3.93) dan pelabelan busur γ' (uv) $=|\gamma(u) - \gamma(v)|$ dimana $uv \in E$ dengan $u,v \in V$ diperoleh pelabelan simpul dari graf A-bintang ke subhimpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,|E|+1\}$, dan pelabelan busur dari graf A-bintang ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Jadi graf A-bintang memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.■

Semua graf *graceful* dengan $|V| = |E|$ bukan merupakan graf *skolem graceful*, sesuai dengan definisi pelabelan *graceful*:

$\mu: V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$, $\forall u, v \in V$ dimana

$\mu'(uv) = |\mu(u) - \mu(v)|, uv \in E$, sedemikian sehingga

$\mu': E \to \{1, 2, \dots, |E|\}$.

Ambil $u \in V$ yang merupakan elemen terkecil di V yaitu : $u = 1$, dan

Ambil $v \in V$ yang merupakan elemen terbesar di V yaitu : $v = |V|$, sehingga

$$\mu'(uv) = |\mu(u) - \mu(v)|$$

$$= |(1) - (|V|)|$$

$$= \big||V| - 1\big|,$$

karena $|V| = |E|$ maka $\mu'(uv) = \big||E| - 1\big|$ dan karena $\mu'(uv) \in E$ maka $E \to \{1, 2, \ldots, |E| - 1\}$.

karena $\mu': E \to \{1, 2, \ldots, |E| - 1\}$ maka μ'tidak memenuhi definisi pelabelan *skolem graceful* yakni $E \to \{1, 2, \ldots, |E|\}$, dan karena μ' tidak memenuhi definisi pelabelan *skolem graceful* yakni $E \to \{1, 2, \ldots, |E|\}$, maka graf *graceful* dengan $|V| = |E|$ bukan merupakan graf *skolem graceful*.

Pada bab ini telah dibahas konstruksi pelabelan *graceful*, pelabelan sekolem *graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf ilalang, graf kelabang, dan graf alfabet bintang, dan pada bab berikutnya akan berikan kesimpulan dan saran.

BAB IV
PENUTUP

Pada bab ini akan disampaikan kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan konstruksi pelabelan *graceful*, pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf keluarga bintang yakni: graf ilalang, graf kelabang dan graf alfabet bintang.

4.1. Kesimpulan

Bentuk umum yang diperoleh dari hasil penelitian pada bab pembahasan dapat ditunjukkan bahwa graf ilalang (S_n, r) untuk $3 \leq r \leq 5$, graf kelabang dan graf H-bintang mempunyai konstruksi pelabelan *graceful*, pelabelan *skolem graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$, sedangkan graf A-bintang hanya mempunyai konstruksi pelabelan *graceful* dan pelabelan $\hat{\rho}$, berarti graf A-bintang tidak dapat ditemukan pelabelan *skolem graceful*. Sehingga semua graf *graceful* dengan $|V| = |E|$ bukan merupakan pelabelan *skolem graceful*.

4.2. Saran

Berdasarkan kesimpulan dari pembahasan yang dilakukan, penulis menyarankan untuk dilakukan kajian lebih lanjut, karena sangat mungkin untuk mengkonstruksi pelabelan *graceful* dan atau pelabelan lainnya terhadap kelas-kelas graf yang belum dinyatakan.

Khusus untuk pengembangan pembahasan tesis ini, penulis menyarankan bagi peneliti selanjutnya untuk melakukan pengkajian apakah graf ilalang, graf kelabang, graf alfabet bintangbisa diberikan konstruksi pelabelan harmonis, pelabelan magic dan anti magic serta pelabelan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

1. Amri Z., Ahmad M., Huda N., Supriadi., Sugeng K.A., (2011) *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf* $(S_n, 3)$. Prosiding Seminar Nasional UNY, Yogjakarta, hal. M 131- M 136.
2. Amri Z., Sugeng K.A., (2011) *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf Kelabang.* Jurnal Eureka. Pendidikan Matematika, FKIP-UMSU, Medan, hal. 109-115.
3. Gallian, J. A. (2010). Dynamic survey of graph Lebeling. *Electronic Journal of kombinatorics,17#ds6*
4. Mahmoudzadeh. H., (2010) *A Metaheruristic Approach to the Graceful Labeling Problem.* International Journal of Applied Metaheuristic Computing, Kourosh Eshghi, Sharif university of Technology, Iran 1(4). hal 42-56.
5. Sevenhot, Sugeng. K.A., Silaban. D.R. (2010). *Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Gabungan Dua Graf.* Prosiding Seminar Nasional UNPAR, Bandung, hal MS 183- MS 191.
6. West, D.B., (2001). *Introduction to Graph Theory*, second edition, University of Illinois, Urbana. Prentice Hall.