UNIVERSITAS INDONESIA

MODEL WAKTU TUNGGU
PADA PERSIMPANGAN LAMPU LALU LINTAS

SKRIPSI

M. TRY SUTRISNO GAUS
0 6 0 6 0 6 7 5 0 2

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

MODEL WAKTU TUNGGU
PADA PERSIMPANGAN LAMPU LALU LINTAS

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

M. TRY SUTRISNO GAUS

0 6 0 6 0 6 7 5 0 2

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPOK

JUNI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: M. TRY SUTRISNO GAUS
NPM	: 0606067502
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 13 Juni 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	: M. Try Sutrisno Gaus
NPM	: 0606067502
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Model Waktu Tunggu pada Persimpangan Lampu Lalu Lintas

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom	(..............................)
Penguji	: Dr. Yudi Satria, MT	(..............................)
Penguji	: Rahmi Rusin. M.ScTech	(..............................)
Penguji	: Dr. Al Haji Akbar Bachtiar, M.Sc	(..............................)

Ditetapkan di	: Depok
Tanggal	: 13 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil ‘alamin. Segala puji bagi Allah swt yang telah memberikan segala nikmat dan karunianya hingga saat ini kepada kita semua, khususnya kepada saya pribadi, yang diberikan kemudahan atas segala urusan yang berhubungan dengan skripsi saya ditengah aktivitas saya baik di dalam maupun di luar kampus. Shalawat serta salam semoga selalu tersampaikan kepada Nabi Muhammad saw, Nabi yang atas izin Allah swt, membawa risalah Islam yang dapat terus terasa hingga hari ini hingga akhir zaman.

Perjalanan panjang telah dilewati penulis dalam upaya penyelesaian skripsi ini. Begitu banyak orang-orang yang sangat berperan dalam proses penyelesaiannya. Dalam kesempatan ini, saya sampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah berperan, khususnya adalah sebagai berikut:

(1) Ibu Dr. Sri Mardiyati, M.Kom selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Beliau telah dengan sabar mendampingi dan memberikan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini baik dalam kondisi penulis yang sedang baik ataupun tidak.

(2) Ibu Dra. Nora Hariadi, M.Si selaku pembimbing akademik penulis. Beliau telah membimbing penulis sejak penulis menjadi mahasiswa baru hingga akhir studi di Matematika. Beliau telah memberikan banyak masukan, nasihat, dan lain sebagainya selama penulis menyelesaikan studi di Departemen Matematika.

(3) H.M. Nasrul Gaus, SE dan Hj. Yuliati Ningsih, selaku kedua orang tua penulis, yang selalu memberikan dukungan secara optimal kepada penulis dalam segala hal dalam proses penyelesaian skripsi penulis.

(4) Pak Dr. Yudi Satria, MT; Pak Drs. Suryadi MT, MT; Pak Dr. Al Haji Akbar Bachtiar, M.Sc, Pak Prof. Dr. Djati Kerami, Ibu Dra. Siti Aminah, M. Kom; Mbak Helen Burhan, M.Si, Mbak Sarini Abdullah M. Stats, serta sejumlah dosen lainnya yang telah memberikan dorongan untuk dapat tetap menjaga semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

(5) Dr. Yunus Daud, selaku orang tua penulis di kampus yang selalu memberikan motivasi dan penguatan ruhani dari penulis sehingga penulis dapat tetap fokus menyelesaikan skripsi hingga selesai.

(6) Seluruh rekan kerja di PPSDMS NF (Program Pembinaan Sumber Daya Mahasiswa Strategsi Nurul Fikri) dan seluruh Tim MHMMD (Mengelola Hidup dan Merencanakan Masa Depan) serta Ibu Marwah Daud Ibrahim, yang memberikan sudut pandang yang berbeda dari penulis dalam menyelesaikan skripsi ini sehingga penyelesaian skripsi ini lebih bermakna.

(7) Budi Rahayu, rekan kerja sejawat di PPSDMS, yang selalu menghibur dan menjaga semangat penulis disaat penulis sedang melewati titik jenuh.

(8) Peserta PPSDMS NF angkatan 5 Regional 1 Jakarta Putra. Selama penulis menyelesaiakan skripsi yang juga sambil menjalankan tanggung jawabnya di PPSDMS sebagai supervisor, mereka lah yang menjadi penyemangat penulis dengan mimpi besarnya dalam nilai-nilai "Idealisme Kami" yang sangat kuat mengokohkan langkah penulis dalam menyelesaikan semua tanggung jawabnya baik sebagai mahasiswa tingkat akhir sekaligus sebagai supervisor asrama program pembinaan mahasiswa berprestasi PPSDMS. Karena "*Yang kami harap adalah, terbentuknya Indonesia yang lebih baik dan bermartabat, serta mendapatkan kebaikan dari Allah pencipta alam semesta*"
-Idealisme Kami-

(9) Seluruh mahasiswa Matematika UI angkatan 2006.

Penulis juga menyampaikan banyak terima kasih kepada pihak-pihak lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah turut membantu dalam penyusunan skripsi ini. Penulis juga menyampaikan permohonan maaf jika ada kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Semoga dapat bermanfaat bagi perkemanbangan ilmu pengetahuan selanjutnya, khususnya di Departemen Matematika.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: M. TRY SUTRISNO GAUS
NPM	: 0606067502
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Model Waktu Tunggu pada Persimpangan Lampu Lalu Lintas

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada Tanggal : 13 Juni 2011
Yang Menyatakan

(M. Try Sutrisno Gaus)

ABSTRAK

Nama : M. Try Sutrisno Gaus

Program Studi : Matematika

Judul : Model Waktu Tunggu pada Persimpangan Lampu Lalu Lintas

Skripsi ini membahas tentang bagaimana menentukan model lama waktu tunggu kendaraan dalam antrian dengan pola kedatangan kendaraan tertentu di persimpangan lampu lalu lintas. Teori yang digunakan banyak membahas tentang teori antrian. Diawal pembahasan, skripsi ini menentukan model waktu tunggu kendaraan untuk pola kedatangan yang bersifat umum. Setelah itu, penulis mengambil salah satu pola kedatangan kendaraan, yaitu pola kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson*.

Kata kunci : waktu tunggu, pemodelan, antrian, lampu lalu lintas, *compound poisson*

xi + 38 halaman : 2 gambar;

Daftar Pustaka : 9 (1968-2001)

ABSTRACT

Nama : M. Try Sutrisno Gaus
Program Studi : Mathematics
Judul : Delay Model on Signalized Intersection

This thesis discusses how to determine delayed model of each vehicle in queue with the particular arrival pattern at signalized intersection. The theory is used a great deal about the theory of queues. At the beginning of the discussion, this paper determines the delay model for the arrival pattern of a general nature. After that, this paper determines the delay model for compound Poisson arrival pattern.

Keywords : delay model, modeling, queuing, traffic light, compound Poisson
xi + 38 pages : 2 pictures;
Bibliography : 9 (1968-2001)

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG MASALAH

Peningkatan jumlah penduduk di Indonesia berbanding lurus dengan banyaknya kendaraan di jalan raya. Khususnya sejak akhir tahun 1990-an, jumlah kendaraan meningkat pesat (Polda Metro Jaya. 2010). Sebelum tahun 1990-an, dengan jumlah kendaraan yang belum terlalu banyak, permasalahan lalu lintas belum begitu terlihat. Setelah tahun 1990-an, dengan meningkatnya jumlah kendaraan di jalan raya, maka perlu ada penyiasatan untuk mengatur lalu lintas agar tidak menimbulkan kemacetan.

Kelancaran lalu lintas di jalan raya selalu dibutuhkan hampir di setiap wilayah, baik di negara maju, maupun di negara berkembang. Jika jumlah kendaraan yang beredar di suatu wilayah bertambah, seperti di Jakarta yang merupakan Ibu Kota Negara, maka tingkat kesulitan dalam menciptakan kelancaran lalu lintas pun juga bertambah. Alternatif awal yang dapat dilakukan untuk menyikapi jumlah kendaraan yang bertambah adalah dengan melakukan perluasan wilayah. Akan tetapi, dengan wilayah yang terbatas dan tidak mungkin lagi untuk diperluas sedangkan jumlah kendaraan terus meningkat, maka diperlukan pengaturan lalu lintas agar kemacetan tidak terjadi. Diperlukan pemodelan yang dapat menjadikan lampu lalu lintas, yang merupakan salah satu alat untuk mengatur lalu lintas, dapat menyelesaikan antrian di persimpangan lampu lampu lalu lintas dan mengawali lampu merah selanjutnya tanpa ada antrian yang tersisa atau minimal tidak mengalami peningkatan jumlah antrian. Pemodelan untuk pengaturan lampu lalu lintas seperti yang telah dipaparkan di atas, telah berhasil diterapkan di beberapa negara dalam mengatasi permasalahan lalu lintas, misalnya Amerika dan juga Australia (Ortuzar & Willumsen. 1990).

Dalam skripsi ini, akan dibahas tentang model waktu tunggu kendaraan di persimpangan lampu lalu lintas dengan memperhatikan pola kedatangan kendaraan yang masuk ke dalam antrian pada lampu lalu lintas tersebut. Selama 1 *cycle*, durasi waktu yang dibutuhkan untuk menyalanya lampu merah dan dilanjutkan dengan menyalanya lampu hijau secara bergantian dalam 1 kali menyala untuk masing-masing lampunya, model yang dihasilkan tidak memperhatikan keterkaitan dengan lampu lalu lintas yang ada disekitarnya.

Dengan mengawali model umum dari antrian di persimpangan lampu lalu lintas, selanjutnya difokuskan dengan menentukan salah satu pola kedatangan kendaraan yang lebih khusus, yaitu model waktu tunggu pada antrian di persimpangan lampu lalu lintas dengan pola kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson.* Dipilihnya pola kedatangan kendaraan yang berdistribusi *compound poisson* karena diantara pola kedatangan kendaraan yang berdistribusi *binomial*, *poisson*, dan juga *compound poisson*, *compound poisson* yang merupakan pola kedatangan kendaraan yang paling menggambarkan kondisi lalu lintas dalam kehidupan sehari-hari. (Rouphail. 2001)

1.2 RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang masalah diatas, masalah yang akan dibahas adalah bagaimana mendapatkan model waktu tunggu di persimpangan lampu lalu lintas dengan diawali pola kedatangan kendaraan yang bersifat umum dan dilanjutkan dengan pola kedatangan kendaraan secara khusus, yaitu berdistribusi *compound poisson*. Akan diperhatikan pola distribusi kedatangan kendaraan, keberangkatan kendaraan, lama waktu menyalanya lampu merah dan lampu hijau, serta banyaknya kendaraan yang tersisa dari antrian sebelumnya.

1.3 BATASAN MASALAH

Berdasarkan rumusan masalah yang dibahas sebelumnya, maka permasalahan ini hanya mencakup pemodelan waktu tunggu pada lampu lalu lintas di satu persimpangan dengan tidak memperhatikan pengaruh dari antrian lampu lalu lintas disekitarnya. Dalam pembahasan secara khusus, hanya akan dibahas model waktu tunggu dengan pola kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson.*

1.4 TUJUAN PENULISAN

Dalam skripsi ini, sesuai dengan penjelasan pada rumusan masalah, bertujuan untuk memodelkan waktu tunggu pada lampu lalu lintas di satu persimpangan jalan dengan pola kedatangan kendaraan secara umum dan pola kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson*.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Penulisan dalam skripsi ini akan dibagi menjadi 4 bab. Bab 1 membahas tentang pendahuluan. Selanjutnya, Bab 2 membahas tentang landasan teori yang digunakan untuk menyelesaikan pemodelan ini. Bab 3 membahas tentang penentuan model waktu tunggu dalam antrian di persimpangan lampu lalu lintas. Bab 4 menggambarkan kesimpulan dan saran dari hasil skripsi ini.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas teori – teori dasar yang digunakan dalam teori lampu lalu lintas pada Bab 3. Teori-teori yang akan dibahas, dibagi menjadi beberapa subbab. Pada subbab 2.1 akan dibahas mengenai teori antrian. Dilanjutkan pada subbab 2.2 akan dibahas mengenai teori kalkulus tentang integral yang menjelaskan integral tak tentu serta integral tentu. Selain itu dalam subbab ini pun akan dituliskan sifat-sifat integral yang penting untuk diketahui. Pada subbab 2.3 akan dibahas mengenai teori-teori statistik yang akan digunakan pada skripsi ini.

2.1 Teori antrian

Menurut Gross dan Harris, 1985, sistem antrian dapat digambarkan sebagai kedatangan pelanggan ke dalam antrian, menunggu pelayanan, mendapatkan pelayanan, meninggalkan antrian setelah mendapatkan pelayanan.

2.1.1 Pola kedatangan pelanggan

Pola kedatangan atau input pada sistem antrian sering diukur dengan memperhatikan rata-rata jumlah kedatangan kendaraan dalam suatu waktu (*mean arrival rate*) atau dengan rata-rata waktu yang dibutuhkan antar kedatangan kendaraan yang satu dengan yang lainnya (*mean interarrival time*).

Pola kedatangan kendaraan dalam antrian dikatakan *deterministic arrival pattern* (deterministik) apabila pola kedatangan tetap/ tidak berubah dan dapat ditentukan *mean arrival time* atau *mean interarrival time.* Selain itu, pola kedatangan kendaraan yang deterministik pun menghasilkan pola dari panjang antrian yang tetap pula.

Di sisi lain, jika terdapat ketidakpastian pada pola kedatangan seperti *random*, *probabilistic*, ataupun *stochastic*, maka nilai rata-rata tersebut hanya dapat mengukur pola untuk proses input, dan untuk karakteristik lainnya dipenuhi dalam bentuk distribusi probabilitas yang dihubungkan dengan proses randomnya. Dengan pola kedatangan kendaraan yang berubah berdasarkan waktu, maka panjang antrian tidak memiliki pola dalam antrian tersebut.

Jika pelanggan telah memasuki antrian, namun setelah menunggu beberapa lama, memutuskan untuk keluar antrian sebelum sampai ke server (yang memberikan pelayanan), maka kondisi ini dikatakan *reneged*.

Faktor terakhir yang terdapat pada pola kedatangan adalah aturan dimana pola dapat berubah mengikuti waktu. Pola kedatangan yang tidak berubah mengikuti waktu disebut *stationary arrival pattern*, dan yang bergantung pada waktu disebut *nonstationary arrival pattern*.

2.1.2 Pola pelayanan

Pelayanan pada antrian juga dapat berupa *single* atau *batch* (berkelompok). Secara umum, satu kendaraan dilayani pada suatu waktu oleh satu server yang telah ditentukan, tapi dalam antrian lampu lalu lintas dan beberapa situasi lainnya, beberapa pelanggan dilayani secara bersamaan oleh server yang sama.

Berdasarkan pola kedatangan para pelanggan, pelayanan server dapat dibagi menjadi *stationary* atau *nonstationary*. Ada pelayanan dari server yang dapat mempercepat waktu yang dibutuhkan untuk melayani pelanggan pada saat jumlah pelanggan semakin meningkat. Bentuk pelayanan ini disebut pelayanan *nonstationary*. Ada pula pelayanan yang tidak memperhatikan jumlah pelanggan yang ada dalam antrian. Bentuk pelayanan seperti ini merupakan bentuk pelayanan *stationary*.

Walaupun tingkat pelayanannya tinggi, sangat mungkin bila beberapa pelanggan akan menunggu dalam antrian. Secara umum, pelanggan datang pada waktu yang tidak beraturan, sehingga panjang antrian akan tidak mengikuti pola tertentu kecuali pola kedatangan dan pola keberangkatan kendaraannya bersifat deterministik.

2.1.3 Disiplin Pelayanan Antrian

Penentuan disiplin pelayanan antrian dalam sebuah antrian mengacu pada kondisi pelanggan dalam antrian tersebut. Bentuk disiplin pelayanan antrian yang cukup dikenal dan mudah ditemui sehari-hari adalah *First Come First Served* (FCFS) atau biasa disebut juga dengan *First In First Out* (FIFO). Pola ini merupakan pola antrian yang pelayanannya mendahulukan pelanggan yang datang ke dalam antrian terlebih dahulu.

Disiplin pelayanan antrian lainnya yang juga biasa digunakan adalah *Last Come First Served* (LCFS). Berlawanan dengan FCFS, pelayanan dalam disiplin antrian LCFS atau Last In First Out (LIFO) akan mendahulukan pelanggan yang terakhir datang ke dalam antrian.

Selain itu, ada pula pemilihan pelayanan dalam urutan acak yang tidak bergantung pada waktu masuk antrian. Dalam disiplin ini, tidak memperhatikan waktu kedatangan para pelanggan. Pelayanan diberikan kepada pelanggan secara acak.

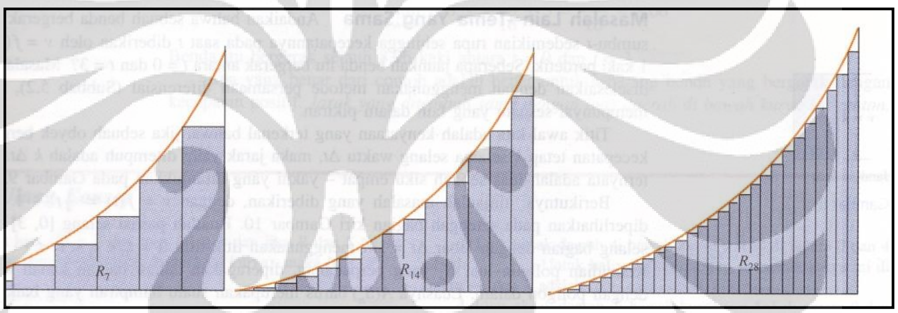
Terakhir adalah disiplin antrian dengan skema prioritas. Dalam disiplin ini, pelayanan diberikan terlebih dahulu kepada pelanggan yang memiliki prioritas yang lebih tinggi tanpa memperhatikan waktu kedatangan mereka. Pelanggan yang memiliki prioritas lebih tinggi akan didahulukan mendapatkan pelayanan dibandingkan pelanggan lainnya walaupun terakhir masuk dalam antrian.

2.1.4 Kapasitas Sistem

Dalam beberapa proses antrian terdapat keterbatasan fisik pada jumlah ruang tunggu. Jika antrian yang terjadi telah mencapai panjang tertentu, pelanggan berikutnya tidak dapat masuk hingga terdapat ruang yang tersedia dari pelayanan yang telah diselesaikan. Hal ini mengacu pada situasi antrian berhingga, yaitu, terdapat suatu batas hingga pada ukuran antrian maksimum.

2.2 Teori Integral

Jumlah kendaraan dalam antrian dapat diketahui dengan mencari luas dari grafik antrian tersebut. Dibagi grafik tersebut menjadi beberapa partisi seperti grafik dibawah ini hingga terbentuk sejumlah persegi panjang. Dari gambar terlihat bahwa luas suatu grafik dapat kita peroleh dengan menjumlahkan seluruh luas persegi panjang yang ada. Semakin panjang partisi mendekati 0, maka luas grafik tersebut akan semakin akurat. Metode yang digunakan merupakan metode penjumlahan Rieman yang menjadi dasar penggunaan teori integral.



Gambar 2.1 Partisi area dalam bentuk penjumlahan Riemann

[Sumber: Purcell. 2003]

2.2.1 Integral Tak Tentu

Berdasarkan pemaparan Purcell, dkk (2003), Integral merupakan teori dalam kalkulus yang membahas tentang cara menghitung luas suatu daerah dengan dasar penjumlahan Riemann.

Misalkan f merupakan suatu fungsi pada selang *I*. Integral tak tentu dapat didefinisikan sebagai berikut

"*Suatu fungsi F adalah* ***antiturunan*** *(integral tak tentu) dari fungsi f pada selang I jika $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ pada I, atau jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I.*"

Ada beberapa sifat-sifat integral tak tentu.

a. Teorema A

Jika r adalah sebarang bilangan rasional dengan $r \neq 1$, maka

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

b. Teorema B

Andaikan f dan g mempunyai antiturunan (integral tak-tentu) dan andaikan k suatu konstanta, maka:

(i) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

(ii) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(iii) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

2.2.2 Integral Tentu

Misalkan sebuah fungsi f yang didefinisikan pada selang tutup $[a, b]$. Partisi selang $[a, b]$ menjadi n selang bagian (tidak perlu sama panjang), menggunakan titik-titik

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Andaikan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, ambillah sebuah titik sebarang $\overline{x_i}$ (yang mungkin saja sebuah titik ujung), dinamakan titik tersebut sebagai titik sampel untuk selang bagian ke-i. Terbentuklah penjumlahan

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\, \Delta x_i$$

Namakan R_p sebagai jumlah Riemann untuk f yang berpadanan dengan Δx_i. Jika panjang selang bagian yang terpanjang dari partisi adalah Δx_i, dengan demikian, jika

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}) \Delta x_i$$

ada, dapat dikatakan *f* adalah terintegrasikan pada $[a, b]$, serta $\int_a^b f(x)dx$ dinamakan sebagai integral tentu (atau integral Riemann) *f* dari *a* ke *b*, dan ditulis

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}) \Delta x_i$$

Ada beberapa sifat integral tentu yang digunakan dalam skripsi ini:

a. Teorema D

Jika f terbatas pada $[a, b]$ dan f kontinu, maka f terintegrasikan pada $[a, b]$. Khususnya, jika f kontinu pada seluruh selang $[a, b]$, maka *f* terintegrasikan pada $[a, b]$.

b. Teorema E

Jika f terintegrasikan pada sebuah selang yang mengandung titik-titik $a, b,$ dan c, maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

c. Teorema F

Anggaplah f kontinu (dan terintegrasikan) pada selang $[a, b]$, dan anggaplah F sebarang antiturunan f pada $[a, b]$, jadi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

d. Teorema G

Andaikan bahwa f dan g terintegrasikan pada $[a, b]$ dan k konstanta. Maka kf dan $f + g$ terintegrasikan dan :

(i) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(ii) $\int_a^b [f(x)dx + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$

(iii) $\int_a^b [f(x)dx - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$

2.3 Teori – teori pada statistik

2.3.1. Variabel Acak

Berdasarkan buku yang ditulis oleh Walpole (1993), diperoleh definisi sebagai berikut:

a. Definisi variabel acak

variabel acak adalah suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan riil, yang ditentukan oleh setiap unsur dalam ruang sampel.

b. Definisi ruang sampel diskret

Bila suatu ruang sampel mengandung jumlah titik sampel yang terhingga atau suatu barisan unsur yang tidak pernah berakhir tetapi yang sama banyaknya dengan bilangan cacah, maka ruang itu disebut ruang sampel diskret.

c. Definisi ruang sampel kontinu

Bila suatu ruang sampel mengandung tak hingga banyaknya titik sampel yang sama dengan banyaknya titik pada sebuah ruas garis, maka ruang itu disebut ruang sampel kontinu.

d. Definisi variabel acak diskret dan variabel acak kontinu
Variabel acak yang didefinisikan di atas ruang sampel diskret dan kontinu masing-masing disebut variabel acak diskret dan kontinu.

e. Definisi *probability density function* (pdf) pada variabel acak diskret
Misalkan X sebuah variabel acak yang memiliki ruang dimensi satu Å. Misalkan Å terdiri dari sejumlah titik berhingga, dan $f(x)$ sebuah fungsi sedemikian sehingga $f(x) > 0$, $x \epsilon$ Å, dan

$$\sum_{Å} f(x) = 1$$

Apabila fungsi himpunan probabilitas $P(A), A \subset$ Å, dapat diekspresikan menjadi

$$P(A) = \Pr(X \in A) = \sum_{A} f(x)$$

Maka X merupakan variabel acak diskret dan $f(x)$ disebut *probability distribution function.* (Hogg & Craig. 1987.)

f. Definisi *probability density function* (pdf) pada variabel acak kontinu
Misalkan X sebuah variabel acak yang memiliki ruang dimensi satu Å, yang terdiri dari sebuah interval atau gabungan dari beberapa interval. Misalkan $f(x)$ sebuah fungsi nonnegatif sedemikian sehingga

$$\int_{Å} f(x)\, dx = 1$$

Apabila fungsi himpunan probabilitas $P(A), A \subset$ Å, dapat diekspresikan menjadi

$$P(A) = \Pr(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$$

Maka X merupakan variabel acak kontinu dan $f(x)$ disebut *probability distribution function*.dari X. (Hogg & Craig. 1987.)

g. Definisi pdf bersyarat

PDF bersyarat bagi variabel acak X, untuk $y \in Y$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0$$

Sedangkan PDF bersyarat bagi variabel acak Y, untuk $x \in X$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0$$

Dimana $f_Y(y)$ dan $f_X(x)$ adalah pdf marjinal dari masing-masing Y dan X.

h. Definisi dua variabel acak yang bebas

Variabel acak X dan Y dikatakan saling bebas jika dan hanya jika :

$f(x,y) = f_X(x).\, f_Y(y)$

2.3.2. Distribusi Poisson

Distribusi dari sebuah variabel acak *Poisson X*, yang menyatakan banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu atau daerah tertentu, adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m^x e^{-m}}{x!}, & x = 1, 2, \ldots \\ 0\,, & lainnya \end{cases}$$

Dimana m adalah rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau dalam daerah yang dinyatakan, dan e = 2,71828…
(Walpole. 1993)

Karena

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x e^{-m}}{x!} = e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} = e^{-m}.e^{m} = 1$$

Maka $f(x)$ memenuhi kondisi untuk menjadi sebuah pdf bertipe diskret. Variabel acak yang mempunyai fungsi $f(x)$ yang memenuhi kondisi diatas dikatakan berdistribusi poisson dan $f(x)$disebut pdf *Poisson*.

Sesuai dengan yang dijelaskan oleh Ronald E. Walpole (1993), kejadian yang berdistribusi *Poisson* memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- Banyaknya kejadian yang terjadi dalam suatu selang waktu tertentu tidak bergantung pada banyaknya kejadian yang terjadi pada selang waktu yang lain
- Peluang terjadinya satu hasil percobaan selama suatu selang waktu tertentu sebanding dengan panjang selang waktu tersebut.
- Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat dapat diabaikan.

2.3.3. Distribusi Compound Poisson

$\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan proses *compound poisson* jika proses tersebut dapat direpresentasikan sebagai berikut, dengan $t \geq 0$,

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

dimana $\{N(t), t \geq 0\}$ merupakan proses *Poisson*, dan $\{X_i, i = 1,2, \ldots\}$ variabel acak yang saling bebas dan identik, serta saling bebas dengan $\{N(t), t \geq 0\}$. Jika $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan proses *compound poisson* maka $X(t)$juga merupakan variabel acak *compound poisson*. (Ross. 1996.)

2.3.4 Ekspektasi dan Variansi pada Variabel Acak Diskret

Nilai ekspektasi dari variabel acak X dengan pdf $f(x)$ dinotasikan dengan $E[X]$, didefinisikan dengan

$$E[X] = \sum_{x} xf(x)\ , \qquad untuk\ X\ variabel\ acak\ diskrit$$

$$E[X] = \int_{\infty}^{-\infty} xf(x)\, dx\ , \qquad untuk\ X\ variabel\ acak\ kontinu$$

Bentuk ekspektasi di atas dapat juga didefinisikan untuk mencari nilai ekspektasi suatu fungsi dari X. Misalkan $h(x)$ suatu fungsi dari variabel acak X, karena $h(x)$ juga variabel acak, maka

$E[h(x)] = \sum_{x} h(x)f(x)\ ,\ untuk\ X\ variabel\ acak\ diskrit$

$E[h(x)] = \int_{\infty}^{-\infty} h(x)f(x)\, dx,\ untuk\ X\ variabel\ acak\ kontinu$

(Hogg & Craig. 1978)

Ada beberapa sifat ekspektasi yang dipaparkan oleh walpole (1993) serta Hogg & Craig (1978), yaitu:

- $E[\sum_{i=1}^{n} X_i] \quad = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$
- $E[\int x\, dx] \quad = \int E[x]\, dx$
- $E[aX + b] \quad = aE[X] + b$

Bila Xdan Y variabel acak yang saling bebas, maka

- $E[X + Y] \quad = E[X] + E[Y]$
- $E[XY] \quad = E[X]E[Y]$
- $E\big[E[X_2|X_1]\big] \quad = E[X_2]$

Variansi merupakan sebaran populasi dari suatu variabel acak. Bila X adalah variabel acak, maka variansinya adalah :

- $Var[X] \quad = E[X^2] - (E[X])^2$
- $Var[X + b] \quad = Var[X]$
- $Var[aX] \quad = a^2 Var[X]$

Bila Xdan Y variabel acak yang saling bebas, maka

- $Var[X + Y] \quad = Var[X] + Var[Y]$
- $Var[X|Y] \quad = E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2$

BAB 3

WAKTU TUNGGU PADA PERSIMPANGAN LAMPU LALU LINTAS

3.1 Model Umum

Masalah mendasar dari teori lampu lalu lintas dalam matematika adalah mendapatkan ekspektasi lama waktu tunggu dari setiap kendaraan yang ada dalam antrian kendaraan lalu lintas di persimpangan (McNeil, 1968). Lamanya kendaraan berada dalam antrian di persimpangan lampu lalu lintas harus dapat diminimalisasi agar dalam antrian tersebut tidak terjadi penumpukan antrian. Ketika antrian kendaraan tidak dapat terselesaikan dalam 1 *cycle* lampu lalu lintas, maka hal tersebut dapat menimbulkan antrian yang lebih panjang pada *cycle* selanjutnya. Pada skripsi ini, persimpangan lampu lalu lintas adalah suatu persimpangan dengan lampu lalu lintas sebagai pengatur lalu lintas di persimpangan tersebut.

Konsep dasar dalam pemodelan waktu tunggu kendaraan dalam antrian di persimpangan lampu lalu lintas pada durasi waktu tertentu yang dibahas dalam skripsi ini bersifat deterministik. Dalam konsep deterministik, ada beberapa komponen yang harus diperhatikan (Rouphail, Tarko, Li. 2001):

1. Adanya keseragaman dari pola rata-rata kedatangan kendaraan selama satu *cycle*. Pola kedatangan kendaraan tidak bergantung terhadap waktu (*stationary arrival pattern*)
2. Kedatangan kendaraan tidak melebihi dari kapasitasnya, yang ditentukan oleh batas maksimum jumlah kendaraan dalam antrian.
3. Pada awal fase lampu hijau, seluruh kendaraan dalam antrian baru mulai bergerak meninggalkan antrian.
4. Adanya keseragaman dari pola keberangkatan kendaraan ketika meninggalkan antrian.

Agar dapat menggunakan teori antrian yang bersifat deterministik, maka pada persimpangan lalu lintas diasumsikan:

1. Pada persimpangan tersebut tidak ada jalur putaran balik, karena kondisi ini dapat menghambat laju kendaraan keluar dari antrian yang nantinya menimbulkan perbedaan pola keberangkatan kendaraan dari dalam antrian..
2. Pada antrian di persimpangan lampu lalu lintas, jika kendaraan sudah masuk ke dalam antrian, tidak bisa keluar dari antrian, sehingga tidak mungkin terjadi kondisi *reneged* (sesuai dengan definisi yang sudah dijelaskan pada subbab 2.1.1).

Dalam antrian di persimpangan lampu lalu lintas, yang dimaksud dengan server adalah lampu lalu lintas, sedangkan yang dimaksud dengan pelayanan dalam antrian adalah proses kendaraan keluar meninggalkan antrian lampu lalu lintas.

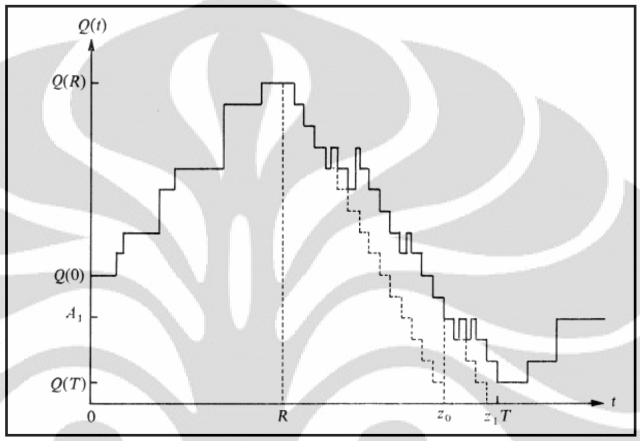
Antrian di persimpangan lampu lalu lintas diharapkan dapat berjalan optimal selama 1 *cycle*, yaitu dengan meminimalisasi waktu tunggu kendaraan dalam antrian di persimpangan lampu lalu lintas sehingga dapat menyelesaikan antrian dan tidak meninggalkan sisa kendaraan dalam antrian untuk *cycle* selanjutnya. Karena jika antrian saat berakhir 1 *cycle* selalu bertambah dibandingkan dengan sisa antrian pada *cycle* sebelumnya, maka akan dapat menciptakan penumpukan antrian dan menimbulkan kemacetan total dalam lalu lintas tersebut.

Menurut McNeil, 1968, terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi lama kendaraan dalam antrian. faktor-faktor tersebut didefinisikan sebagai berikut:

1. Lamanya waktu lampu merah, yang dinotasikan R
2. Lamanya durasi 1 *cycle*, yaitu waktu yang dibutuhkan untuk menyalanya lampu merah dan hijau dalam 1 kali menyala secara bergantian, yang dinotasikan dengan T
3. Banyaknya kendaraan yang masuk ke dalam antrian pada waktu t, yang dinotasikan $N(t)$

4. Banyaknya kendaraan dalam antrian pada waktu t, yang dinotasikan $Q(t)$

Kondisi banyaknya kendaraan dalam antrian lalu lintas diharapkan dapat memenuhi kondisi seperti Gambar 3.1 dengan notasi-notasi yang digunakan sesuai dengan definisi diatas.



Gambar 3.1 Grafik jumlah kendaraan dalam antrian

[Sumber: McNeil, 1968]

Gambar 3.1 menunjukkan grafik banyaknya kendaraan dalam interval $0 \leq t \leq T$, pada antrian di suatu persimpangan lampu lalu lintas yang dipengaruhi oleh waktu t.

Pada awal menyalanya lampu merah, $t = 0$, banyaknya kendaraan dalam antrian yang merupakan sisa antrian dari *cycle* sebelumnya, yaitu $Q(0)$. Selanjutnya, banyaknya kendaraan dalam antrian, $Q(t)$, akan bertambah secara bertahap berdasarkan penambahan dari kendaraan yang datang, $N(t)$. Banyaknya kendaraan akan mencapai maksimum pada akhir fase menyalanya lampu merah.

Interval waktu $R \leq t \leq T$ menunjukkan fase lampu hijau. Pada waktu $t = R$, seluruh kendaraan mulai bergerak meninggalkan antrian. Kendaraan dalam antrian akan berjalan bersamaan menuju barisan depan dan kendaraan terdepan akan keluar dari antrian. Pada fase hijau, jumlah kendaraan yang keluar dari antrian harus lebih banyak dibandingkan jumlah kendaraan yang masuk ke dalam antrian sehingga jumlah kendaraan dalam antrian sebanyak Q(R) akan terus berkurang hingga fase lampu hijau berakhir.

Misalkan **λ** merupakan rata-rata kendaraan yang masuk ke dalam antrian setiap detiknya dan μ merupakan rata-rata kendaraan yang keluar meninggalkan antrian setiap detiknya, maka untuk dapat memenuhi kondisi berdasarkan grafik pada Gambar 3.1, harus memenuhi persamaan berikut

$$\lambda T < (T - R)\mu$$

Berdasarkan Gambar 3.1, untuk menghitung total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan selama berada dalam antrian dalam 1 *cycle* dapat digunakan metode integrasi. Interval 0 $\leq$ t $\leq$ T dapat dipartisi sehingga dapat dihitung waktu tunggu tersebut dengan menggunakan intergral Riemann yang dinotasikan dengan W.

$$W = \int_0^T Q(t)dt \qquad \ldots(3.1)$$

Dimana

W = total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat berada dalam antrian selama satu cycle (kendaraan.detik)

T = Lama waktu satu cycle (detik)

$Q(t)$ = Banyaknya kendaraan dalam antrian pada waktu t, $(0 \leq t \leq T)$

Berdasarkan sifat integral Teorema E yang ada dalam Bab 2, mengenai sifat penjumlahan pada selang, maka persamaan di atas dapat dibagi menjadi persamaan di bawah ini,

$$W = \int_0^R Q(t)dt + \int_R^T Q(t)dt \qquad \ldots(3.2)$$

Jika pada fase lampu merah, total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat berada dalam antrian dinyatakan dengan $W_1 = \int_0^R Q(t)dt$, dan pada waktu lampu hijau dinyatakan dengan $W_2 = \int_R^T Q(t)dt$, maka dapat ditulis

$$W = W_1 + W_2 \qquad \text{…(3.3)}$$

Pada interval $(0 \leq t \leq R)$, yaitu fase lampu merah, jumlah kendaraan dalam antrian dipengaruhi oleh:

1. Banyaknya kendaraan yang tersisa dari cycle sebelumnya $(Q(0))$
2. Banyaknya kedatangan kendaraan yang masuk ke dalam antrian pada waktu t $(N(t))$,

Sehingga jumlah kendaraan pada waktu t, $Q(t)$, pada interval lampu merah adalah $Q(0) + N(t)$. Dengan demikian, saat fase lampu merah, total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat dalam antrian menjadi:

$$W_1 = \int_0^R [Q(0) + N(t)]\mathrm{dt} \qquad \text{…(3.4)}$$

Karena $N(t)$ merupakan jumlah kendaraan yang masuk ke dalam antrian pada waktu t, yang kita tidak ketahui nilainya dan menghasilkan bilangan riil, maka $N(t)$ merupakan variabel acak. Sehingga untuk mencari nilai $N(t)$ dapat menggunakan persamaan

$$E[N(t)] = \lambda t \qquad \text{…(3.5)}$$

Karena $N(t)$ merupakan variabel acak, dan $W_{1,} W_{2,} dan\ W$ merupakan fungsi dari variabel acak, maka $W_{1,} W_{2,} dan\ W$ juga merupakan variabel acak. Sehingga W_1, dengan menggunakan persamaan (3.5), menjadi

$$E[W_1] = E\left[\int_0^R \{Q(0) + N(t)\}\,\mathrm{dt}\right]$$

$$= \int_0^R \{E[Q(0) + N(t)]\}\,\mathrm{dt}$$

$$= \int_0^R \{E[Q(0)] + E[N(t)]\}\,\mathrm{dt}$$

$$= \int_0^R E[Q(0)]\mathrm{dt} + \int_0^R E[N(t)]\mathrm{dt}$$

$$= \int_0^R E[Q(0)]dt + \int_0^R \lambda \mathrm{t}\ dt$$

$$= E[Q(0)]t]_0^R \ + \ \left.\frac{1}{2}\lambda t^2\right]_0^R$$

$$= \ E[Q(0)]\{R-0\} + \ \frac{1}{2}\lambda\{R^2 - 0^2\}$$

$$E[W_1] \ = E[Q(0)]R + \ \frac{1}{2}\lambda R^2 \qquad \ldots(3.6)$$

Dalam antrian di persimpangan lampu lalu lintas, setelah melewati fase lampu merah, kendaraan-kendaraan dalam antrian akan melewati fase lampu hijau yang merupakan fase akhir dalam interval 1 *cycle*. Fase menyalanya lampu hijau merupakan fase pelayanan terhadap kendaraan yang sudah masuk ke dalam antrian dimana kendaraan yang berada pada antrian terdepan dapat keluar meninggalkan antrian.

Untuk antrian di persimpangan lalu lintas, diasumsikan mengikuti disiplin antrian *First In First Out* (FIFO). Setiap kendaraan yang masuk ke dalam antrian, akan dapat keluar terlebih dahulu dari dalam antrian berdasarkan waktu kedatangannya. Kendaraan yang datang lebih awal akan keluar lebih awal pula.

Banyaknya kendaraan yang keluar dari antrian, atau terlayani oleh sistem, berjumlah tetap pada persimpangan tersebut dan tidak memperhatikan banyak atau sedikitnya kendaraan yang ada dalam antrian. Dalam antrian tersebut, panjang maupun pendeknya antrian yang ada, tidak mengubah banyaknya kapasitas maksimum kendaraan yang akan keluar dari antrian. Dengan demikian, sesuai definisi di Bab 2.1.2, bentuk pelayanan dalam lalu lintas ini bersifat *stationary* (Gross & Haris, 1985).

Seperti yang dikutip dari Rouphail (2001), setiap model waktu tunggu kendaraan dalam antrian sangat bergantung pada lama rata-rata kedatangan kendaraan dan lama rata-rata waktu yang dibutuhkan untuk keberangkatan kendaraan dari antrian. Setiap distribusi tersebut menghasilkan model yang berbeda-beda. Sehingga, W_2 , total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat berada dalam antrian pada fase lampu hijau, yang dipengaruhi oleh kedatangan dan keberangkatan kendaraan, menghasilkan model yang berbeda-beda pula.

Dengan demikian, secara umum, total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat dalam antrian selama 1 *cycle* dengan berbagai distribusi kedatangan kendaraan serta berdistribusi keberangkatan kendaraan yang konstan, adalah

$$E[W] = E[W_1] + E[W_2]$$

$$E[W] = \left(E[Q(0)]R + \frac{1}{2}\lambda R^2\right) + \int_R^T Q(t)dt \qquad \text{….(3.7)}$$

Dengan model waktu tunggu

$$d = \frac{E[W]}{E[N(T)]} \qquad \text{…(3.8)}$$

Dimana:

d = Waktu tunggu setiap kendaraan dalam antrian (detik)

T = Waktu yang dibutuhkan untuk 1 fase lampu merah dan 1 fase lampu hijau (detik)

$E[W]$ = Total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat berada dalam antrian selama satu cycle (kendaraan.detik)

$E[N(T)]$ = rata-rata kendaraan yang masuk ke dalam antrian pada waktu t, $\{0 \leq t \leq T\}$ (kendaraan)

R = Waktu yang dibutuhkan untuk 1 fase lampu merah (detik)

$E[W_1]$ = Total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat berada dalam antrian pada fase lampu merah, $\{0 \leq t \leq R\}$ (kendaraan.detik)

$E[W_2]$ = Total waktu tunggu yang dibutuhkan seluruh kendaraan saat berada dalam antrian pada fase lampu hijau t, $\{R \leq t \leq T\}$ (kendaraan.detik)

$E[Q(0)]$ = Jumlah kendaraan yang tersisa dari *cycle* sebelumnya (kendaraan)

λ = rata-rata kedatangan kendaraan ke dalam antrian setiap detiknya (kendaraan/detik)

$Q(t)$ = Banyaknya kendaraan dalam antrian pada waktu t (kendaraan)

3.2 Model Khusus dengan pola kedatangan kendaraan berdistribusi *Compound Poisson*

Diantara kedatangan kendaraan yang berdistribusi *binomial*, *poisson*, dan *compound poisson*, distribusi kedatangan kendaraan yang paling memungkinkan mendekati kondisi sebenarnya adalah kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson* (Rouphail. 2001) . Dengan demikian akan ditentukan model waktu tunggu kendaraan dalam antrian di persimpangan lampu lalu lintas dengan pola kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson*.

Misalkan

$N(t)$ = Banyaknya kendaraan yang masuk kedalam antrian pada waktu t

$P(t)$ = Jumlah gelombang kendaraan yang masuk kedalam antrian pada waktu t,

N_i = Banyaknya kendaraan yang masuk pada gelombang ke-i

Jika $N(t)$ berdistribusi *compound poisson*, maka

$$N(t) = \sum_{i=1}^{P(t)} N_i$$

Berdasarkan ciri dari distribusi *compound poisson*, maka $P(t)$ berdistribusi *poisson* dan N_i berdistribusi sembarang yang saling bebas dan identik. Karena gelombang masuknya kendaraan, $P(t)$, ke dalam antrian berdistribusi *poisson*, maka berdasarkan sifat *poisson* yang dijelaskan pada Bab 2.3.2, gelombang masuknya kendaraan kedalam antrian memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- Antara kejadian gelombang masuk kendaraan yang satu dengan yang lainnya bersifat saling bebas
- Peluang terjadinya satu kejadian selama suatu selang waktu tertentu sebanding dengan panjang selang waktu tersebut.

- Peluang bahwa lebih dari satu kejadian akan terjadi dalam selang waktu yang hampir bersamaan, dapat diabaikan.

Dengan menggunakan pola kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson*, selanjutnya akan dicari model waktu tunggu setiap kendaraan dalam antrian di persimpangan lampu lalu lintas dengan model waktu tunggu seluruh kendaraan saat berada dalam antrian selama 1 *cycle*

$$E[W] = E[W_1] + E[W_2]$$

$$E[W] = \left(E[Q(0)]R + \frac{1}{2}\lambda R^2\right) + \int_R^T Q(t)dt$$

Untuk menghitung W_2, akan dihitung $Q(t)$ pada interval (R, T). Selanjutnya didefinisikan $Q_1(t)$ identik dengan $Q(t)$ pada interval (T, ∞). Karena $Q_1(t)$ pada interval (T, ∞) identik dengan $Q(t)$ pada interval (R, T), maka didefinisikan $Q_1(t)$ pada interval (R, ∞).

Untuk fase lampu hijau, total waktu tunggu seluruh kendaraan saat berada dalam antrian, W_2, dipengaruhi oleh beberapa hal, yaitu:

1. Banyaknya kendaraan pada antrian dalam waktu t, $Q_1(t)$.
   Pada fase awal lampu hijau, jumlah kendaraan adalah $Q(R)$, yaitu banyaknya kendaraan pada akhir fase lampu merah.
2. Rata-rata lamanya pelayanan kendaraan dalam antrian atau waktu yang dibutuhkan setiap kendaraan keluar dari dalam antrian, yang dinotasikan dengan $\frac{1}{\mu}$
3. Banyaknya kendaraan yang datang pada fase lampu hijau, $N(t)$.

Karena banyaknya kendaraan yang ada dalam antrian pada fase lampu hijau dipengaruhi oleh kendaraan yang masuk dan juga kendaraan yang keluar, maka akan dibagi interval waktu berdasarkan waktu yang dibutuhkan untuk melayani kendaraan yang ada dalam antrian. Sehingga jumlah kendaraan yang datang saat lampu hijau menyesuaikan dengan pembagian interval waktu tersebut. Jika pada fase lampu merah jumlah kendaraan yang datang dinotasikan dengan $N(t)$, maka pada fase lampu hijau dinotasikan dengan $A_n, n = 1, 2,$ ...., dimana n merupakan banyaknya fase pelayanan kendaraan yang sudah dilakukan dalam 1 fase lampu hijau. Layaknya $N(t)$, karena nilai dari A_n tidak diketahui nilainya, maka A_n merupakan variabel acak.

Dengan demikian

$$W_2 = \int_R^T Q(t)\text{dt} \qquad \ldots(3.9)$$

Berdasarkan persamaan (3.9), sesuai dengan sifat dari integral, maka W_2 dapat ditulis menjadi persamaan berikut:

$$W_2 = \int_R^\infty Q_1(t)dt - \int_T^\infty Q_1(t)\text{dt} \qquad \ldots(3.10)$$

Jika dimisalkan $W_3 = \int_R^\infty Q_1(t)$ dan $W_4 = \int_T^\infty Q_1(t)$, persamaan (3.10) dapat ditulis sebagai berikut

$$W_2 = W_3 - W_4 \qquad \ldots(3.11)$$

Partisi interval waktu $R \leq t \leq \infty$, berdasarkan lamanya waktu pelayanan kendaraan dalam antrian. Dengan demikian, dapat didefinisikan jumlah kedatangan kendaraan dalam antrian pada interval waktu $\left(R \leq t \leq R + \frac{1}{\mu}Q(R)\right)$ dengan A_1, jumlah kedatangan kendaraan dalam antrian pada interval waktu $\left(R + \frac{1}{\mu}Q(R) \leq t \leq R + \frac{1}{\mu}\{Q(R) + A_1\}\right)$ dengan A_2 , jumlah kedatangan kendaraan dalam antrian pada interval waktu $\left(R + \frac{1}{\mu}\{Q(R) + A_1\} \leq t \leq R + \frac{1}{\mu}\{Q(R) + A_1 + A_2\}\right)$ dengan A_3, dan seterusnya. Secara umum A_n didefinisikan sebagai jumlah kedatangan kendaraan dalam antrian pada interval waktu $\left(R + \frac{1}{\mu}\{Q(R) + A_1 + \cdots + A_{n-2}\} \leq t \leq R + \frac{1}{\mu}\{Q(R) + A_1 + \cdots + A_{n-1}\}\right)$.

Untuk menyederhanakan notasi interval waktu di atas, dimisalkan

$Z_0 \quad = R + \frac{1}{\mu} Q(R)$

$Z_1 \quad = R + \frac{1}{\mu} Q(R) + \frac{1}{\mu} A_1$

$\quad\quad = Z_0 + \frac{1}{\mu} A_1$

$Z_2 \quad = R + \frac{1}{\mu} Q(R) + \frac{1}{\mu} A_1 + \frac{1}{\mu} A_2$

$\quad\quad = Z_0 + \frac{1}{\mu} \{A_1 + A_2\}$

Secara umum:

$$Z_n = Z_0 + \frac{1}{\mu}\{A_1 + \cdots + A_n\}, n = 1,2, \ldots. \qquad \ldots(3.12)$$

Ambil

$W_3 \quad = \int_R^\infty Q_1(t)\mathrm{dt}$

Berdasarkan sifat penjumlahan pada selang, W_3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathrm{W}_3 \quad = \int_R^{z_0} Q_1(t)\mathrm{dt} + \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \int_{\mathrm{z_n}}^{\mathrm{z_{n+1}}} Q_1(t)dt \qquad \ldots(3.13)$$

Untuk integral $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \int_{\mathrm{z_n}}^{\mathrm{z_{n+1}}} Q_1(t)dt$, berdasarkan sifat ekspektasi yang dibahas pada bab 2.3, $E(X) = E\big(E(X|Y)\big)$, karena banyaknya kendaraan dipengaruhi oleh jumlah kendaraan yang masuk ke dalam antrian, maka

$$E\left\{\int_{\mathrm{z_n}}^{\mathrm{z_{n+1}}} Q_1(t)dt\right\} = E\left\{E\left\{\int_{\mathrm{z_n}}^{\mathrm{z_{n+1}}} Q_1(t)dt \,\middle|\, A_{n+1}\right\}\right\}$$

Integral pada persamaan diatas dapat dibagi menjadi dua bagian, bagian pertama menggambarkan waktu tunggu hingga A_{n+1} kendaraan dalam antrian pada waktu $\mathrm{Z_n}$, bagian kedua menggambarkan waktu tunggu dalam antrian kendaraan yang datang pada interval waktu $(\mathrm{Z_n}, \mathrm{Z_{n+1}})$, kemudian

$$E\left\{\int_{\mathrm{Z_n}}^{\mathrm{Z_{n+1}}} Q_1(t)dt\right\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{2\mu}A_{n+1}(1 + A_{n+1}) + \ E\left\{\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} N(t)dt\,\middle|A_{n+1}\right\}\right\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{2\mu}A_{n+1}(1 + A_{n+1}) + \ E\left\{\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} N(t)dt\,\middle|A_{n+1}\right\}\right\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{2\mu}A_{n+1}(1 + A_{n+1}) + \ E\left\{\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} N(t)dt\,\middle|A_{n+1}\right\}\right\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{2\mu}(A_{n+1} + A^2{}_{n+1}) + \frac{\lambda}{2\mu^2}A^2{}_{n+1}\right\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{2\mu}\left(A_{n+1} + A^2{}_{n+1} + \frac{\lambda}{\mu}A^2{}_{n+1}\right)\right\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{2\mu}\left[A_{n+1} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)A^2{}_{n+1}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\mu}E\left\{A_{n+1} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)A_{n+1}{}^2\right\} \quad \ldots(3.14)$$

Kedatangan kendaraan ke dalam antrian pada fase lampu merah berlaku persamaan $EN(t) = \lambda t$. Persamaan tersebut menunjukkan bahwa kedatangan kendaraan bergantung langsung dengan t. Karena pada fase lampu hijau kedatangan kendaraan bergantung pada waktu yang dibutuhkan untuk melayani seluruh kendaraan dalam antrian untuk keluar dari antrian, dengan menggunakan persamaan (3.5), dan (3.12) dan dimisalkan ρ=**λ**/μ, dan

$$I = \frac{Variansi\ dari\ jumlah\ kedatangan\ kendaraan\ /cycle}{Rata - rata\ jumlah\ kedatangan\ kendaraan\ /\ cycle} = \frac{varN(t)}{\lambda t}$$

$$varN(t) = I\lambda \quad \ldots(3.15)$$

maka:

$$E\{A_{n+1}|A_n\} = \lambda\left(\frac{1}{\mu}A_n\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}A_n$$

$$= \rho A_n \qquad \ldots(3.16)$$

$$E\{A_{n+1}{}^2|A_n\} = E^2\{A_{n+1}|A_n\} + var\{A_{n+1}|A_n\}$$

$$= (\rho A_n)^2 + I\lambda\frac{A_n}{\mu}$$

$$= \rho^2 A_n{}^2 + I\frac{\lambda}{\mu}A_n$$

$$= \rho^2 A_n{}^2 + I\rho A_n \qquad \ldots(3.17)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.14), (3.15), (3.16), dan (3.17)

$$E\left\{\int_{z_n}^{z_{n+1}} Q_1(t)dt\right\} = \frac{1}{2\mu}E\left\{\rho A_n + \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\rho^2 A_n{}^2 + I\rho A_n\right)\right\}$$

Karena ρ=**λ**/μ, maka

$$E\left\{\int_{z_n}^{z_{n+1}} Q_1(t)dt\right\} = \frac{1}{2\mu}E\{\rho A_n + (1+\rho)\left(\rho^2 A_n{}^2 + I\rho A_n\right)\}$$

$$= \frac{1}{2\mu}E\{\rho A_n + \rho^2 A_n{}^2 + I\rho A_n + \rho^3 A_n{}^2 + I\rho^2 A_n\}$$

$$= \frac{1}{2\mu}E\{\rho A_n + I\rho A_n + I\rho^2 A_n + \rho^2 A_n{}^2 + \rho^3 A_n{}^2\}$$

$$= \frac{1}{2\mu}E\{[\rho + I\rho(1+\rho)A_n] + (\rho^2+\rho^3)A_n{}^2\}$$

$$= \frac{1}{2\mu}E\{\rho[1 + I(1+\rho)A_n] + \rho^2(1+\rho)A_n{}^2\}$$

$$E\left\{\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} Q_1(t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left\{\rho^{n+1}\left[1 + \frac{I(1+\rho)(1-\rho^{n+1})}{1-\rho}\right]E[Q(R)] + \rho^{n+2}(1+\rho)E[Q^2(R)]\right\}$$

Masukkan persamaan di atas ke persamaan (3.13) dan hitung dengan menggunakan penjumlahan deret geometri, maka

$$E[W_3] = \tfrac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}\{(1+\rho I-\rho)E[Q(R)] + (1-\rho)E[Q^2(R)]\}$$

…(3.18)

Dan

$$E[W_4] = \tfrac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}\{(1+\rho I-\rho)E[Q(T)] + (1-\rho)E[Q^2(T)]\}$$

…(3.19)

Diasumsikan antrian tersebut berada dalam keseimbangan statis. Berdasarkan pembahasan sebelumnya yang menjadi kondisi yang harus dipenuhi untuk sesuai dengan Gambar 3.1, dengan rata-rata jumlah kedatangan kendaraan per 1 *cycle* harus kurang dari banyaknya kendaraan yang dapat keluar dari antrian selama fase lampu hijau, yaitu

$$\lambda \mathrm{T} < (T - \mathrm{R})\mu$$

$$\frac{\lambda}{\mu}\mathrm{T} < (T - \mathrm{R})$$

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{(\mathrm{T} - \mathrm{R})}{\mathrm{T}}$$

Karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ dan misalkan $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}}$, maka

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{(\mathrm{T} - \mathrm{R})}{\mathrm{T}}$$

$\rho < 1\text{-r}$ …(3.20)

Dalam kondisi keseimbangan, $E[Q(0)] = E[Q(T)]$ dan $E[Q^2(0)] = E[Q^2(T)]$ Serta $E[Q(R)] = E[Q(0)] + E[N(R)]$

Sehingga

$$\begin{aligned} E[Q(R)] - E[Q(T)] &= E[Q(0)] + EN(R) - E[Q(0)] \\ &= E[N(R)] \\ &= \lambda \mathrm{R} \end{aligned} \quad \text{…(3.21)}$$

Dan

$$\begin{aligned} E[Q^2(R)] - E[Q^2(T)] &= 2E[N(R)]E[Q(0)] + E[N^2(\mathrm{R})] \\ &= 2\lambda RE[Q(0)] + (\lambda \mathrm{R})^2 + \lambda RI \\ &= 2\lambda RE[Q(0)] + \lambda^2 \mathrm{R}^2 + \lambda RI \end{aligned} \quad \text{…(3.22)}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.11), (3.18), (3.19), (3.21), dan (3.22), menghasilkan

$$\begin{aligned} E[W_2] = \frac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}\big\{&(1+\rho I-\rho)\big[E[Q(R)] - E[Q(T)]\big] \\ &+ (1-\rho)\big[E[Q^2(R)] - E[Q^2(T)]\big]\big\} \end{aligned}$$

$$E[W_2] = \tfrac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}\{(1+\rho I-\rho)\lambda R + (1-\rho)(2\lambda RE[Q(0)] + \lambda^2\mathrm{R}^2 + \lambda RI)\}$$

…(3.23)

Dari persamaan (3.3), (3.6) dan (3.23) menghasilkan

$E[W] = E[W_1] + E[W_2]$

$$=\left(E[Q(0)]R+\frac{1}{2}\lambda R^2\right)+$$
$$\left(\frac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}\{(1+\rho I-\rho)\lambda R+(1-\rho)(2\lambda RE[Q(0)]+\lambda^2\mathrm{R}^2+\lambda RI)\}\right)$$

$$=E[Q(0)]R+\frac{1}{2}\lambda R^2+\frac{1}{2\mu(1-\rho)^2}\{(1+\rho I-\rho)\lambda R+(1-\rho)(2\lambda RE[Q(0)]+$$
$$\lambda^2\mathrm{R}^2+\lambda RI)\}$$

$$=\frac{2(1-\rho)}{2(1-\rho)}\left(E[Q(0)]R+\frac{1}{2}\lambda R^2\right)+\frac{1}{2(1-\rho)}\left\{\frac{(1+\rho I-\rho)}{(1-\rho)}\frac{\lambda}{\mu}R+\frac{(1-\rho)}{(1-\rho)}(2\frac{\lambda}{\mu}RE[Q(0)]+\right.$$
$$\left.\frac{\lambda}{\mu}\lambda\mathrm{R}^2+\frac{\lambda}{\mu}RI)\right\}$$

$$=\frac{2(1-\rho)}{2(1-\rho)}\left(E[Q(0)]R+\frac{1}{2}\lambda R^2\right)+\frac{1}{2(1-\rho)}\left\{\left(\frac{(1-\rho)}{(1-\rho)}+\frac{(\rho I)}{(1-\rho)}\right)\rho R+2\rho RE[Q(0)]+\right.$$
$$\left.\rho\lambda\mathrm{R}^2+\rho RI\right\}$$

$$=\frac{2(1-\rho)\left(E[Q_0]R+\frac{1}{2}\lambda R^2\right)}{2(1-\rho)}+\frac{1}{2(1-\rho)}\left\{\rho R+\frac{\rho^2 RI}{(1-\rho)}+2\rho RE[Q(0)]+\rho\lambda\mathrm{R}^2+\rho RI\right\}$$

$$=\frac{1}{2(1-\rho)}\left\{\left(2(1-\rho)\left(E[Q(0)]R+\frac{1}{2}\lambda R^2\right)\right)+\rho R+\frac{\rho^2 RI}{(1-\rho)}+2\rho RE[Q(0)]+\right.$$
$$\left.\rho\lambda\mathrm{R}^2+\rho RI\right\}$$

$$=\frac{1}{2(1-\rho)}\left\{2E[Q(0)]R-2\rho E[Q_0]R+\lambda R^2-\rho\lambda R^2+\rho R+\frac{\rho^2 RI}{(1-\rho)}+2\rho RE[Q(0)]+\right.$$
$$\left.\rho\lambda\mathrm{R}^2+\rho RI\right\}$$

$$=\frac{1}{2(1-\rho)}\left\{2E[Q(0)]R+\lambda R^2+\rho R(1+I)+\frac{\rho^2 RI}{(1-\rho)}\right\}$$

$$=\frac{\lambda R}{2(1-\rho)}\left\{\frac{2}{\lambda}E[Q(0)]+R+\frac{\rho}{\lambda}(1+I)+\frac{\rho^2 I}{\lambda(1-\rho)}\right\}$$

$$=\frac{\lambda R}{2(1-\rho)}\left\{\frac{2}{\lambda}E[Q_0]+R+\frac{1}{\mu}(1+I)+\frac{\rho I}{\mu(1-\rho)}\right\}$$

$$=\frac{\lambda R}{2(1-\rho)}\left\{\frac{2}{\lambda}E[Q(0)]+R+\frac{1}{\mu(1-\rho)}\left((1+I)(1-\rho)+\rho I\right)\right\}$$

$$= \frac{\lambda R}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{2}{\lambda} E[Q(0)] + R + \frac{1}{\mu(1-\rho)} (1 - \rho + I - \rho I + \rho I) \right\}$$

$$= \frac{\lambda R}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{2}{\lambda} E[Q(0)] + R + \frac{1}{\mu(1-\rho)} (1 - \rho + I) \right\}$$

$$= \frac{\lambda R}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{2}{\lambda} E[Q(0)] + R + \frac{1}{\mu} \left(\frac{(1-\rho)}{(1-\rho)} + \frac{I}{(1-\rho)} \right) \right\}$$

$$= \frac{\lambda R}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{2}{\lambda} E[Q(0)] + R + \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{I}{(1-\rho)} \right) \right\}$$

$$E[W] = \frac{\lambda R}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{2}{\lambda} E[Q(0)] + R + \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{I}{1-\rho} \right) \right\}$$

Sehingga total waktu tunggu setiap kendaraan saat berada dalam antrian dalam 1 cycle yang merupakan hasil pembagian antara total waktu tunggu seluruh kendaraan saat berada dalam antrian selama satu *cycle* (kendaraan.detik) dengan rata-rata kendaraan yang masuk ke dalam antrian selama selama 1 *cycle* (kendaraan) adalah

$$d = \frac{E[W]}{E[N(T)]}$$

$$= \frac{\frac{\lambda R}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{2}{\lambda} EQ(0) + R + \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{I}{1-\rho} \right) \right\}}{\lambda T}$$

$$= \frac{1}{2} r (1-\rho)^{-1} \{ 2\lambda^{-1} E[Q(0)] + R + \mu^{-1} [1 + I(1-\rho)^{-1}] \}$$

Dimana:

d = Waktu tunggu setiap kendaraan dalam antrian (detik)

$E[W]$ = Total waktu tunggu seluruh kendaraan dalam antrian selama satu *cycle* (kendaraan.detik)

$E[N(T)]$ = Rata-rata kendaraan yang masuk ke dalam antrian selama satu *cycle*, $\{0 \le t \le T\}$ (kendaraan)

T = Waktu yang dibutuhkan untuk 1 fase lampu merah dan 1 fase lampu hijau (detik)

R = Waktu yang dibutuhkan untuk 1 fase lampu merah (detik)

r = Perbandingan antaran lama waktu fase lampu merah dengan fase lampu hijau $\left(\frac{R}{T}\right)$.

λ = Rata-rata banyaknya kedatangan kendaraan ke dalam antrian (kendaraan/detik)

μ = Rata-rata banyaknya keberangkatan kendaraan meninggalkan antrian (kendaraan/detik)

ρ = Perbandingan antara rata-rata banyaknya kedatangan kendaraan ke dalam antrian setiap detiknya dengan rata-rata banyaknya keberangkatan kendaraan meninggalkan antrian setiap detiknya $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$.

$E[Q(0)]$ = Jumlah kendaraan yang tersisa dari *cycle* sebelumnya (kendaraan)

I = Perbandingan antatra variansi kedatangan kendaraan pada 1 *cycle* dengan rata-rata kedatangan kendaraan,

BAB 4

KESIMPULAN DAN SARAN

I. KESIMPULAN

Dalam menentukan model dari lama waktu tunggu kendaraan di dalam antrian pada persimpangan lampu lalu lintas, diperlukan pola kedatangan kendaraan yang deterministik, sehingga dapat terbentuk pola dari panjang antrian kendaraan di lalu lintas tersebut.

Jika dengan distribusi kedatangan kendaraan pada pola yang sama serta distribusi keberangkatan kendaraan yang konstan, maka waktu tunggu kendaraan selama 1 *cycle* adalah:

$$d = \frac{E[W]}{E[N(T)]}$$

Dengan

$$E[W] = E[W_1] + E[W_2]$$

$$E[W] = \left(E[Q(0)]R + \frac{1}{2}\lambda R^2\right) + \int_R^T Q(t)dt$$

Sedangkan model waktu tunggu untuk antrian dengan pola kedatangan kendaraan berdistribusi *compound poisson* adalah sebagai berikut:

$$d = \frac{r}{2(1-\rho)}\left\{\frac{2}{\lambda}E[Q(0)] + R + \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{I}{(1-\rho)}\right]\right\}$$

Dimana:

d = Waktu tunggu setiap kendaraan dalam antrian (detik)

T = Waktu yang dibutuhkan untuk 1 fase lampu merah dan 1 fase lampu hijau (detik)

$E[W]$ = Total waktu tunggu seluruh kendaraan saat berada dalam antrian selama satu *cycle* (kendaraan.detik)

$E[N(T)]$ = Rata-rata kendaraan yang masuk ke dalam antrian selama satu *cycle*, $\{0 \leq t \leq T\}$ (kendaraan)

$E[W_1]$ = Total waktu tunggu seluruh kendaraan saat berada dalam antrian pada fase lampu merah, $\{0 \leq t \leq R\}$ (kendaraan.detik)

$E[W_2]$ = Total waktu tunggu seluruh kendaraan saat berada dalam antrian pada fase lampu hijau, $\{R \leq t \leq T\}$ (kendaraan.detik)

$E[Q(0)]$ = Banyaknya kendaraan yang tersisa dari *cycle* sebelumnya (kendaraan)

R = Waktu yang dibutuhkan untuk 1 fase lampu merah (detik)

λ = Rata-rata banyaknya kedatangan kendaraan ke dalam antrian (kendaraan/detik)

$Q(t)$ = Banyaknya kendaraan dalam antrian pada waktu t (kendaraan)

r = Perbandingan antaran lama waktu fase lampu merah dengan fase lampu hijau $\left(\frac{R}{T}\right)$.

μ = Rata-rata banyaknya keberangkatan kendaraan meninggalkan antrian (kendaraan/detik)

ρ = Perbandingan antara rata-rata banyaknya kedatangan kendaraan ke dalam antrian dengan rata-rata banyaknya keberangkatan kendaraan meninggalkan antrian $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$.

I = Perbandingan antara variansi kedatangan kendaraan pada 1 *cycle* dengan rata-rata kedatangan kendaraan,

II. SARAN

Topik skripsi tentang permodelan lampu lalu lintas ini diharapkan dapat diimplementasikan dalam penentuan model waktu tunggu pada persimpangan lampu lalu lintas di Jakarta. Selain itu, diharapkan pada penelitian selanjutnya ada yang membahas tentang penentuan model waktu tunggu dalam sistem beberapa persimpangan lampu lalu lintas.

DAFTAR PUSTAKA

Edwin J. Purcell, Dale Varberg, Steven E. Rigdon. 2003. Kalkulus jilid 1 edisi 8. Jakarta : Erlangga.

Gross & Harris. 1985. Fundamentals of Queueing Theory, 2nd edition. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Hogg, Craig. 1978. *Introduction to Mathematical Statistics*. New Jersey: Prentice-Hall International, Inc.

McNeil. 1968. A Solution to The Fixed-Cycle Traffic Light Problem for Compound Poisson Arrivals. Israel. Journal of Applied Probability. Vol. 5, No. 3 (Dec., 1968), pp. 624-635

Ortuzar & Willumsen. 1990. *Modelling Transport*. Chicester: John Wiley & Sons Ltd.

Ross. 1996. Stochastic Processes, 2nd edition. California: John Wiley & Sons, Inc.

Rouphail, Tarko, & Li. 2001. *Traffic Flow at Signalized Intersection*. Traffic Flow Theory Monograph, *Chapter* 9.

Walpole, RE. 1993. *Pengantar Statistika Edisi ke-3*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama

Webster, F. V. (1958). *Traffic Signal Settings*. Road Research Laboratory Technical Paper No. 39, HMSO. London.