UNIVERSITAS INDONESIA

PENGUJIAN KESAMAAN KOEFISIEN KORELASI DARI BEBERAPA POPULASI

SKRIPSI

ADI GUNARYO
0706261493

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PENGUJIAN KESAMAAN KOEFISIEN KORELASI DARI BEBERAPA POPULASI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

ADI GUNARYO
0706261493

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Adi Gunaryo
NPM	: 0706261493
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 8 Desember 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Adi Gunaryo
NPM : 0706261493
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Pengujian Kesamaan Koefisien Korelasi dari Beberapa Populasi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Sarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dra. Rianti Setiadi, M.Si ( )

Penguji : Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si ( )

Penguji : Sarini Abdullah, M.Stats ( )

Penguji : Fevi Novkaniza, M.Si ( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 27 Desember 2011

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allahu Robbul Izzati, karena atas berkat dan rahmat-Nya, saya dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Dra. Rianti Setiadi, M.Si, selaku dosen pembimbing yang telah bersedia membimbing, mengarahkan, memotivasi, mengingatkan, membantu menyelesaikan permasalahan dan memberikan saran terbaik untuk terselesaikannya tugas akhir ini. Mohon maaf jika saya selama proses pembuatan tugas akhir ini banyak kesalahan dan selalu merepotkan Ibu.

(2) Dra. YahmaWisnani, M.Kom, selaku pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan teknis dan non teknis selama saya menjalani masa-masa kuliah.

(3) Dr. Yudi Satria, M.T., selaku kepala Departemen Matematika. Rahmi Rusin, M.Sc. Tech., selaku sekretaris Departemen Matematika. Dr. Dian Lestari, DEA, selaku koordinator pendidikan Departemen Matematika.

(4) Bapak dan Ibu penulis atas semua kasih sayang, motivasi, nasihat, doa dan bantuan yang tiada pernah pudar. Mohon maaf jika selama ini belum mampu membanggakan Bapak dan Ibu.

(5) Kakak dan kakak ipar, Mba Rini dan Bang Puji, Mas Agung dan Mba Siti, Mas Agus dan Mba Friska beserta Mba Peny dan Mas Dudi yang telah banyak membantu.

(6) Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si., Sarini Abdullah, M.Stats., Fevi Novkaniza, M.Si., selaku dosen penguji kolokium.

(7) Bapak dan Ibu dosen di Departemen Matematika atas semua ilmu dan bimbingan yang diberikan selama masa-masa berkuliah.

(8) Para staf Departemen Matematika atas bantuan dan pengarahannya.

(9) M. Try Sutrisno Gaus, S.Si sebagai kakak, guru, teman, motivator bagi penulis selama berjuang di kampus dan kuliah.

(10) Dwi Wahyu Prabowo, S.Si, Ashari Nurhidayat dan Zulfalah Zainudin atas semua bantuan, motivasi dan saran-saran kepada penulis.

(11) Teman-teman 2007, 2006 dan 2008 yang berjuang untuk skripsi sekaligus para penghuni tetap perpustakaan Matematika (Misda, KaTika, Putri, Mita, Sica, Siti, Hikma, Andi, Siska, Yos, Anis, Amanda, Fauzan, Syahrul, Riski, Afni, Nora, Hanif, Dheni dan Cimz).

(12) Teman-teman 2007 yang terlebih dahulu telah memperoleh gelar S.Si (Adit, Arif, Anggun, Anjar, Dita, Dhanar, Farah, Ferdi, Gamar, Isna, Lois, Nene, Putu, Shafira, Shafa, Stefi, Toto, Wiwi, Widi, Widya dan Winda).

(13) Keluarga HMD Matematika 2009 dan BPH BEM FMIPA 2010.

(14) Teman-teman 2008, 2009, 2010 dan 2011.

(15) Perpustakaan Departemen Matematika, Perpustakaan Masjid UI, Perpustakaan Pusat Universitas Indonesia, Perpustakaan Universitas Negeri Jakarta dan Perpustakaan Statistika dan Matematika Institut Pertanian Bogor.

(16) dr. Ludfi Ananda atas bantuan psikologis dan jasa konsultasi kesehatannya.

(17) Seluruh staf dan pengajar BTA Cijantung atas bantuan motivasinya.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu dalam penyusunan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat untuk ilmu pengetahuan.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Adi Gunaryo
NPM	: 0706261493
Program Studi	: Sarjana Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

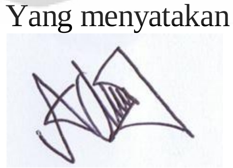
demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Pengujian Kesamaan Koefisien Korelasi dari Beberapa Populasi

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 8 Desember 2011
Yang menyatakan



(Adi Gunaryo)

ABSTRAK

Nama : Adi Gunaryo
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul : Pengujian Kesamaan Koefisien Korelasi dari Beberapa Populasi

Pengujian kesamaan koefisien korelasi digunakan untuk membandingkan beberapa koefisien korelasi antara dua variabel. Pengujian tersebut didasarkan pada metode uji rasio *likelihood*. Metode ini akan diterapkan pada suatu contoh kasus untuk menguji kesamaan koefisien korelasi antara jumlah pembelian dan jumlah maksimum kredit yang diberikan oleh suatu distributor obat di Jakarta dari tiga kelompok pelanggan yaitu supermarket, toko obat dan warung.

Kata Kunci : rasio *likelihood*, koefisien korelasi, kesamaan beberapa koefisien korelasi.
xiii+63 halaman : 4 tabel
Daftar Pustaka : 8 (1974-2006)

ABSTRACT

Name : Adi Gunaryo
Program Study : Mathematics

Title : Test for Equality of Correlation Coefficients from Several Populations

Test for equality of correlation coefficients is used to compare several correlation coefficients between two variables. The test is based on likelihood ratio test methods. This method will be employed to compare coefficient correlations between the number of purchases and the maximum amount of kredit granted by a drug distributor in Jakarta from three groups of customers (supermarkets, drug stores and food stalls).

Key Words : likelihood ratio, correlation coefficient, equality of several correlation coefficients.
xiii+63 pages : 4 tables
Bibliography : 8 (1974-2006)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Koefisien korelasi adalah suatu ukuran yang digunakan untuk mengetahui besarnya kekuatan hubungan linear antara dua variabel. Besarnya nilai koefisien korelasi yaitu antara atau sama dengan -1 dan 1. Koefisien korelasi bernilai nol menyatakan tidak ada hubungan linear antara dua variabel. Jika koefisien korelasi bernilai 1 menyatakan hubungan linear positif yang sempurna antara dua variabel. Sedangkan koefisien korelasi bernilai -1 menyatakan hubungan linear negatif yang sempurna antara dua variabel.

Korelasi antara dua variabel menunjukkan sejauh mana perubahan perilaku variabel yang satu akan berkaitan dengan perubahan perilaku variabel yang lainnya. George G. Roussas di dalam buku nya yang berjudul *A Course in Mathematical Statistics* (1997) menunjukkan jika dua variabel berkorelasi maka dapat dibentuk garis yang menyatakan hubungan linear antara variabel tersebut. Dengan persamaan garis tersebut, jika diketahui nilai salah satu variabel maka nilai variabel lain dapat diprediksi. Prediksi nilai variabel tersebut akan akurat jika nilai koefisien korelasi antara variabel terkait adalah 1 atau -1.

Seringkali dalam penelitian-penelitian tertentu yang dilakukan di beberapa populasi yang saling lepas, peneliti perlu mengetahui apakah besar koefisien korelasi yang signifikan di beberapa populasi tersebut sama atau tidak. Jika ternyata besar koefisien korelasi di beberapa populasi tersebut sama, maka besarnya koefisien korelasi dari variabel terkait dapat dicari dan diartikan secara keseluruhan atau dipilih untuk satu populasi kemudian digeneralisasi. Tetapi jika hasilnya berbeda, maka besarnya koefisien korelasi antara variabel terkait perlu dicari dan diartikan untuk setiap populasi secara terpisah.

Untuk variabel yang berdistribusi normal, pengujian ada tidaknya korelasi antar dua variabel seringkali dilakukan dengan menggunakan statistik uji yang didasarkan pada koefisien korelasi pearson. Biasanya metode statistik yang dipelajari berkaitan dengan koefisien korelasi antara dua variabel hanya dibatasi pada mencari taksiran titik dan pengujian koefisien korelasi dari satu populasi. Namun masalahnya adalah bagaimana mengetahui kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi atau dengan kata lain bagaimana melakukan uji hipotesis untuk menguji kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi. Dalam tugas akhir ini akan dibahas mengenai pengujian hipotesis untuk menguji kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi. Metode yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah uji rasio *likelihood*.

Metode ini akan diterapkan pada suatu contoh kasus untuk menguji kesamaan koefisien korelasi antara jumlah pembelian dan jumlah maksimum kredit yang diberikan oleh suatu distributor obat di Jakarta dari tiga kelompok pelanggan yaitu supermarket, toko obat dan warung. Data pada contoh tersebut adalah data administrasi yang diterima penulis.

1.2 Permasalahan

Bagaimana melakukan pengujian hipotesis untuk menguji kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi.

1.3 Tujuan Penulisan

Melakukan pengujian hipotesis untuk menguji kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi.

1.4 Pembatasan Masalah

- Kedua variabel yang akan dicari korelasi nya berdistribusi bivariat normal untuk setiap populasi.
- Pengujian kesamaan koefisien korelasi dilakukan dengan metode uji rasio *likelihood*.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

Bab 1 Terdiri dari latar belakang, permasalahan, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab 2 Berisi uraian mengenai teori-teori dasar yang relevan dengan permasalahan yang dikaji, seperti koefisien korelasi, distribusi bivariat normal, taksiran maksimum *likelihood* dan uji rasio *likelihood*.

Bab 3 Berisi penjelasan mengenai pengujian hipotesis untuk menguji kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi dengan metode rasio *likelihood*.

Bab 4 Berisi suatu contoh kasus pengujian kesamaan koefisien korelasi antara jumlah pembelian dan jumlah maksimum kredit yang diberikan oleh suatu distributor obat di Jakarta dari tiga kelompok pelanggan yaitu supermarket, toko obat dan warung.

Bab 5 Berisi kesimpulan dan saran.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas teori-teori yang mendasari tugas akhir ini yaitu teori mengenai koefisien korelasi, distribusi bivariat normal, taksiran maksimum *likelihood* dan uji rasio *likelihood*.

2.1 Koefisien Korelasi

Koefisien korelasi adalah suatu ukuran yang digunakan untuk mengukur besarnya kekuatan hubungan linear antara dua variabel.

Misalkan X dan Y adalah variabel-variabel acak yang memiliki pdf bersama $f(x,y)$. Misalkan $u(x,y)$ adalah fungsi dari x dan y dan diasumsikan ekspektasi $u(x,y)$ yaitu $E[u(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)f(x,y)dxdy$ terdefinisi.

Variabel acak X memiliki pdf marginal yaitu $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ dan variabel acak Y memiliki pdf marginal yaitu $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$.

Jika $u(x,y) = x$,

$$E[u(X,Y)] = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} x\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx = \mu_x \text{ (mean dari X)} .$$

Jika $u(x,y) = y$,

$$E[u(X,Y)] = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} y\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy = \mu_y \text{ (mean dari Y) .}$$

Jika $u(x,y) = (x - \mu_x)^2$,

$$E[u(X,Y)] = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x,y) dy dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f_1(x) dx = {\sigma_x}^2 \text{ (variansi dari X) .}$$

Jika $u(x,y) = (y - \mu_y)^2$,

$$E[u(X,Y)] = E[(Y - \mu_y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 f_2(y) dy = {\sigma_y}^2 \text{ (variansi dari Y) .}$$

Dapat dibuktikan bahwa ${\sigma_x}^2 = E(X^2) - {\mu_x}^2$.

$${\sigma_x}^2 = E[(X - \mu_x)^2] = E(X^2 - 2X\mu_x + {\mu_x}^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu_x E(X) + {\mu_x}^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu_x \mu_x + {\mu_x}^2$$

$$= E(X^2) - 2{\mu_x}^2 + {\mu_x}^2$$

$$= E(X^2) - {\mu_x}^2$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa ${\sigma_y}^2 = E(Y^2) - {\mu_y}^2$.

Jika $u(x,y) = (x - \mu_x)(y - \mu_y)$,

$$E[u(X,Y)] = E\big[(X - \mu_x)\big(Y - \mu_y\big)\big] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x,y)dydx$$

$$= cov(X,Y) \qquad \text{(covariansi dari X dan Y)} .$$

Dapat dibuktikan bahwa $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

$$cov(X,Y) = E\big[(X - \mu_x)\big(Y - \mu_y\big)\big] = E(XY - X\mu_y - Y\mu_x + \mu_x\mu_y)$$

$$= E(XY) - \mu_y E(X) - \mu_x E(Y) + \mu_x\mu_y$$

$$= E(XY) - \mu_y\mu_x - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y$$

$$= E(XY) - \mu_x\mu_y$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

Definisikan

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{E\big[(X - \mu_x)\big(Y - \mu_y\big)\big]}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{E(XY) - \mu_x\mu_y}{\sigma_x\sigma_y}$$

sebut ρ adalah koefisien korelasi dari X dan Y .

Dapat dibuktikan bahwa $-1 \le \rho \le 1$. Untuk membuktikan $-1 \le \rho \le 1$ diperlukan lemma dan teorema di bawah ini:

Lemma 2.1.1

Misalkan X dan Y adalah variabel acak dimana

$E(X) = E(Y) = 0$ dan $\sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 = 1$

maka dapat dibuktikan $E^2(XY) \leq 1$ yang equivalen dengan $-1 \leq E(XY) \leq 1$.

Bukti:

$$0 \leq E(X-Y)^2 = E(X^2 - 2XY + Y^2)$$

$$= E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2)$$

$$= \sigma_x{}^2 + \mu_x{}^2 - 2E(XY) + \sigma_y{}^2 + \mu_y{}^2$$

$$= 1 + 0 - 2E(XY) + 1 + 0$$

$$= 2 - 2E(XY)$$

$E(XY) \leq 1$

$$0 \leq E(X+Y)^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2)$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

$$= \sigma_x{}^2 + \mu_x{}^2 + 2E(XY) + \sigma_y{}^2 + \mu_y{}^2$$

$$= 1 + 0 + 2E(XY) + 1 + 0$$

$$= 2 + 2E(XY)$$

$E(XY) \geq -1$

Terbukti $-1 \leq E(XY) \leq 1$ yang equivalen dengan$E^2(XY) \leq 1$.

Teorema 2.1.2

Misalkan X dan Y adalah variabel acak dengan mean μ_x , μ_y dan variansi $\sigma_x{}^2$, $\sigma_y{}^2$ maka $E^2\big[(X-\mu_x)\big(Y-\mu_y\big)\big] \le \sigma_x{}^2\,\sigma_y{}^2$.

Bukti:

Bentuk

$$X_1 = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \qquad , \qquad Y_1 = \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}$$

$$E(X_1) = E\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{E(X)-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{\mu_x-\mu_x}{\sigma_x} = 0$$

$$E(Y_1) = E\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right) = \frac{E(Y)-\mu_y}{\sigma_y} = \frac{\mu_y-\mu_y}{\sigma_y} = 0$$

$$var(X_1) = var\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sigma_x{}^2}\,var(X-\mu_x)$$

$$= \frac{1}{\sigma_x{}^2}\,var(X) = \frac{1}{\sigma_x{}^2}\,.\,\sigma_x{}^2 = 1$$

$$var(Y_1) = var\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right) = \frac{1}{\sigma_y{}^2}\,var\big(Y-\mu_y\big)$$

$$= \frac{1}{\sigma_y{}^2}\,var(Y) = \frac{1}{\sigma_y{}^2}\,.\,\sigma_y{}^2 = 1$$

Karena diperoleh $E(X_1) = E(Y_1) = 0$, $var(X_1) = var(Y_1) = 1$ oleh karena itu berdasarkan lemma 2.1.1 maka $E^2(X_1Y_1) \le 1$.

$$E^2(X_1Y_1) \le 1 \leftrightarrow E^2\left[\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right] \le 1$$

$$\leftrightarrow \frac{E^2\big[(X-\mu_x)\big(Y-\mu_y\big)\big]}{\sigma_x{}^2\,\sigma_y{}^2} \le 1 \leftrightarrow E^2\big[(X-\mu_x)\big(Y-\mu_y\big)\big] \le \sigma_x{}^2\,\sigma_y{}^2$$

Terbukti $E^2\left[(X-\mu_x)\left(Y-\mu_y\right)\right] \leq \sigma_x{}^2\, \sigma_y{}^2$.

Berdasarkan teorema 2.1.2, diperoleh

$$E^2\left[(X-\mu_x)\left(Y-\mu_y\right)\right] \leq \sigma_x{}^2\, \sigma_y{}^2 \leftrightarrow \frac{E^2\left[(X-\mu_x)\left(Y-\mu_y\right)\right]}{\sigma_x{}^2\, \sigma_y{}^2} \leq 1$$

$$\leftrightarrow \rho^2 \leq 1 \leftrightarrow -1 \leq \rho \leq 1$$

sehingga terbukti bahwa $-1 \leq \rho \leq 1$.

Nilai $\rho > 0$ menyatakan adanya hubungan linear positif antara dua variabel (X dan Y). Dengan perkataan lain, jika nilai X semakin besar maka nilai Y semakin besar dan sebaliknya jika nilai X makin kecil maka nilai Y semakin kecil. Nilai $\rho < 0$ menyatakan adanya hubungan linear negatif antara dua variabel (X dan Y). Dengan perkataan lain, jika nilai X semakin besar maka nilai Y semakin kecil dan sebaliknya jika nilai X makin kecil maka nilai Y semakin besar. Nilai $\rho = 0$ menyatakan tidak adanya hubungan linear antara dua variabel (X dan Y) .

Sebut pdf bersyarat dari Y diberikan $X = x$ adalah

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

maka mean bersyarat dari Y diberikan $X = x$ adalah

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy = u(x)\,.$$

Jika $u(x)$ adalah fungsi linear dari x, yaitu $u(x) = a + bx$ maka mean bersyarat dari Y diberikan $X = x$ adalah linear dalam x atau dengan perkataan lain ada konstanta

a dan b sedemikian sehingga mean bersyarat dari Y diberikan $X = x$ dapat dituliskan sebagai $u(x) = a + bx$.

Pandang

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy = a + bx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dy = (a + bx)\, f_1(x)\,. \tag{2.1.1}$$

Jika persamaan (2.1.1) dikalikan dengan x kemudian diintegralkan terhadap x maka akan diperoleh

$$x\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dy = (ax + bx^2)\, f_1(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dy\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + bx^2)f_1(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} axf_1(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} bx^2f_1(x)dx$$

$$E(XY) = a\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} x^2f_1(x)dx$$

$$E(XY) = aE(X) + bE(X^2) = a\mu_x + bE(X^2)$$

$$\rho\sigma_x\sigma_y + \mu_x\mu_y = a\mu_x + bE(X^2)\,. \tag{2.1.2}$$

Jika persamaan (2.1.1) diintegralkan terhadap x maka akan diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}(a+bx)f_1(x)dx$$

$$E(Y) = a\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx$$

$$E(Y) = a + bE(X)$$

$$\mu_y = a + b\mu_x\,. \tag{2.1.3}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (2.1.2) dan (2.1.3) secara bersama-sama maka akan diperoleh

$$a = \mu_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x \qquad \text{dan} \qquad b = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,.$$

Sehingga mean bersyarat dari Y diberikan $X = x$ linear dalam x adalah

$$E(Y|x) = a + bx = \mu_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

$$E(Y|x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\,. \tag{2.1.4}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa mean bersyarat dari X diberikan $Y = y$ linear dalam y adalah

$$E(X|y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right).$$

2.2 Distribusi Bivariat Normal

Variabel acak X dan Y berdistribusi bivariat normal jika X dan Y mempunyai pdf bersama

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-q}{2}} \quad , \qquad -\infty < x < \infty \ , \qquad -\infty < y < \infty$$

dimana $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$, $-1 < \rho < 1$ dan

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\mu_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right].$$

Jika X dan Y berdistribusi bivariat normal maka dapat ditunjukkan:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$
2. X berdistribusi $N(\mu_x, {\sigma_x}^2)$ dan Y berdistribusi $N(\mu_y, {\sigma_y}^2)$
3. ρ adalah koefisien korelasi dari X dan Y

Bukti:

Terlebih dahulu akan ditunjukkan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$$

dan X berdistribusi $N(\mu_x, {\sigma_x}^2)$, Y berdistribusi $N(\mu_y, {\sigma_y}^2)$.

Perhatikan bentuk:

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

$$q(1-\rho^2) = \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

$$q(1-\rho^2) = \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

$$q(1-\rho^2) = \left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) - \rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$q(1-\rho^2) = \left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) - \frac{1}{\sigma_y}\rho\sigma_y\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$q(1-\rho^2) = \left[\frac{1}{\sigma_y}\left((y-\mu_y) - \rho\sigma_y\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right)\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$q(1-\rho^2) = \left[\frac{1}{\sigma_y}\left(y - \left(\mu_y + \rho\sigma_y\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right)\right)\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$q(1-\rho^2) = \left(\frac{1}{\sigma_y}(y-b)\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2,$$

$$\text{dimana } b = \mu_y + \rho\sigma_y\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)$$

$$q = \frac{\frac{(y-b)^2}{\sigma_y{}^2} + (1-\rho^2)\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x{}^2}}{(1-\rho^2)}$$

$$q = \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x{}^2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}.$$

Jika $f_1(x)$ adalah pdf marginal dari X maka diperoleh

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-q}{2}} dy$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}\right) dy$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\ exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}\right) dy$$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}\right) dy$$

karena faktor kedua pada ruas kanan adalah pdf dari distribusi normal $\left(b, \sigma_y{}^2(1-\rho^2)\right)$ maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y{}^2(1-\rho^2)}\right) dy = 1$$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}\right).1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}\right)$$

sehingga terbukti

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}\right) = 1\,.$$

Berdasarkan perhitungan diatas diperoleh

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2{\sigma_x}^2}\right)$$

maka variabel acak X berdistribusi $N(\mu_x, {\sigma_x}^2)$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} exp\left(-\frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{2{\sigma_y}^2}\right)$$

yang berarti variabel acak Y berdistribusi $N\left(\mu_y, {\sigma_y}^2\right)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ρ adalah koefisien korelasi dari X dan Y.

Bukti:

Perhatikan bentuk:

$$f(x,y) = f_1(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\ exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2{\sigma_y}^2(1-\rho^2)}\right)$$

dimana $b = \mu_y + \rho\sigma_y\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\ exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2{\sigma_y}^2(1-\rho^2)}\right)$$

dimana $b = \mu_y + \rho\sigma_y\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)$.

Pdf bersyarat dari Y diberikan $X = x$ pada persamaan diatas merupakan pdf normal dengan mean $\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$ dan variansi ${\sigma_y}^2(1-\rho^2)$.

Berarti pada distribusi bivariat normal, mean bersyarat dari Y diberikan $X = x$ adalah linear dalam x yaitu

$$E(Y|x) = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) \,. \tag{2.2.1}$$

Pada (2.1.4) jika $E(Y|x)$ merupakan fungsi linear dari x telah diperoleh mean bersyarat dari Y diberikan $X = x$ adalah $E(Y|x) = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$ dimana ρ merupakan koefisien korelasi dari X dan Y. Dengan membandingkan (2.1.4) dan (2.2.1) dimana $E(Y|x)$ merupakan fungsi linear dari x maka dapat disimpulkan ρ pada distribusi bivariat normal merupakan koefisien korelasi dari X dan Y.

2.3 Taksiran Maksimum *Likelihood*

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah suatu sampel acak berukuran *n* dari suatu distribusi dengan pdf $f(x;\theta)$, yang bergantung pada $\theta \epsilon \Omega$, Ω disebut ruang parameter. Karena $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan sampel acak, pdf bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$ dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) = f(x_1;\theta).f(x_2;\theta) \dots f(x_n;\theta) \,.$$

Pdf bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$ mengandung parameter θ, sehingga $f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta)$ dapat dianggap sebagai fungsi dari θ dan dituliskan sebagai berikut:

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1;\theta).f(x_2;\theta) \dots f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \tag{2.3.1}$$

L(θ) disebut fungsi *likelihood*.

Taksiran maksimum *likelihood* dari θ adalah nilai dari θ yang memaksiumkan L(θ). Untuk mempermudah perhitungan dalam mencari nilai θ, L(θ) seringkali dimodifikasi ke dalam bentuk ln, karena nilai θ yang memaksimumkan ln L(θ) sama dengan nilai θ yang memaksimumkan L(θ). Sehingga persamaan (2.3.1) dapat dimodifikasi menjadi:

$$lnL(\theta) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\right) = \sum_{i=1}^{n} ln\ f(x_i;\theta)\ .$$

Nilai θ yang memaksimumkan ln L(θ), diperoleh dengan mendifferensialkan ln L(θ) terhadap θ dan menyamakannya dengan 0 dan memastikan bahwa turunan keduanya kurang dari 0 atau dengan perkataan lain

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$$

$$\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} < 0$$

Nilai θ yang memaksimumkan ln L(θ) disebut sebagai taksiran maksimum *likelihood* dari θ dan dinotasikan dengan $\hat{\theta}$.

2.4 Uji Rasio *Likelihood*

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ menyatakan *n* variabel acak yang saling bebas dan masing-masing memiliki pdf $f_i(x_i;\theta_1,\theta_2,..,\theta_m)$ untuk *i* = 1, 2, …., *n* . Himpunan yang terdiri dari setiap titik parameter ($\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$) dinotasikan dengan Ω yang disebut ruang parameter dengan dimensi m . Misalkan ω merupakan subset dari ruang parameter Ω dan ω berdimensi $r\ ;\ r \le m$. Misalkan akan diuji hipotesis $H_0: (\theta_1,\theta_2,..,\theta_m) \epsilon\ \omega$ terhadap $H_1: (\theta_1,\theta_2,..,\theta_m) \notin\ \omega$.

Definisikan fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i;\theta_1,\theta_2,..,\theta_m) \quad , \quad (\theta_1,\theta_2,..,\theta_m) \epsilon\ \omega$$

dan

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, .., \theta_m) \quad , \quad (\theta_1, \theta_2, .., \theta_m) \epsilon\, \Omega\,.$$

Misalkan $L(\widehat{\omega})$ adalah nilai maksimum dari $L(\omega)$ dan $L(\widehat{\Omega})$ nilai maksimum dari $L(\Omega)$. Rasio dari $L(\widehat{\omega})$ dan $L(\widehat{\Omega})$ disebut rasio *likelihood* dan dinotasikan dengan $\Lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}$.

Karena $L(\widehat{\omega})$ dan $L(\widehat{\Omega})$ bernilai non negatif sehingga Λ akan bernilai non negatif atau dengan perkataan lain $\Lambda \geq 0$. Kemudian karena ω adalah subset dari Ω maka $L(\widehat{\omega}) \leq L(\widehat{\Omega})$ yang berarti nilai $\Lambda \leq 1$. Sehingga diperoleh $0 \leq \Lambda \leq 1$.

Jika H_0 benar maka $\Lambda \approx 1$ dan jika H_0 salah maka $\Lambda \approx 0$.

Oleh karena itu untuk menguji hipotesis di atas dapat digunakan aturan keputusan berdasarkan statistik uji sebagai berikut:

H_0 akan ditolak jika Λ bernilai kecil (mendekati nol) atau dengan perkataan lain untuk suatu tingkat signifikansi α , H_0 akan ditolak jika $\Lambda \leq$ c dimana c adalah suatu konstanta sedemikian sehingga $\Pr(\Lambda \leq c) = \alpha$. Untuk memperoleh c, diperlukan distribusi dari Λ tetapi distribusi dari Λ sulit untuk didapatkan.

Untuk mengatasi hal tersebut, akan dicari statistik uji lain yang merupakan fungsi dari Λ dengan menggunakan teorema sebagai berikut:

Teorema 2.4.1

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menyatakan *n* variabel acak yang saling bebas dan masing-masing memiliki pdf $f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, .., \theta_m)$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, $(\theta_1, \theta_2, .., \theta_m) \epsilon \Omega$ dimana Ω adalah ruang parameter dengan dimensi m dan misalkan ω adalah subset dari Ω yang berdimensi r . Dapat dibuktikan bahwa distribusi *asymptotic* dari $\Lambda^* = -2\ln\Lambda$ adalah χ^2_{m-r} . (bukti terdapat pada lampiran 2)

Sehingga diperoleh suatu aturan keputusan sebagai berikut:

H_0 akan ditolak jika $\Lambda^* = -2\ln\Lambda \geq c^*$ dimana c^* adalah suatu konstanta dari tabel χ^2_{m-r} yang memenuhi Pr $(\Lambda^* \geq c^*) = \alpha$ dimana α merupakan suatu tingkat signifikansi yang digunakan.

BAB 3
PENGUJIAN KESAMAAN KOEFISIEN KORELASI DARI BEBERAPA POPULASI

Sebelum menjelaskan tentang pengujian kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai taksiran maksimum *likelihood* untuk parameter-parameter pada distrbusi bivariat normal.

3.1 Taksiran Maksimum *Likelihood* untuk Parameter-Parameter pada Distribusi Bivariat Normal

Misalkan $\left(X_{ij}, Y_{ij}\right)$, $j = 1,2,..,n_i$, $i = 1,2,\ldots,k$ merupakan n_i sampel acak dari populasi ke $-\, i$ yang berdistribusi bivariat normal dengan mean (μ_{xi}, μ_{yi}) , standar deviasi $(\sigma_{xi}, \sigma_{yi})$ dan koefisien korelasi ρ_i . Dengan demikian fungsi *likelihood* nya dapat dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
L(x,y) = &\left(f(x_{11}, y_{11}) f(x_{12}, y_{12}) \ldots f\left(x_{1n_1}, y_{1n_1}\right)\right) \\
&\left(f(x_{21}, y_{21}) f(x_{22}, y_{22}) \ldots f\left(x_{2n_2}, y_{2n_2}\right)\right) \\
&\ldots \\
&\left(f(x_{k1}, y_{k1}) f(x_{k2}, y_{k2}) \ldots f\left(x_{kn_k}, y_{kn_k}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$L(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{y1}\sqrt{1-\rho_1^2}}\right)^{n_1} exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2 - 2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right) + \left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)\right)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x2}\sigma_{y2}\sqrt{1-\rho_2^2}}\right)^{n_2} exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2 - 2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right) + \left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)\right)$$

...

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{xk}\sigma_{yk}\sqrt{1-\rho_k^2}}\right)^{n_k} exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_k^2)}\sum_{j=1}^{n_k}\left(\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)^2 - 2\rho_k\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right) + \left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)^2\right)\right).$$

Fungsi log *likelihood* nya yaitu

$$l(x,y) = lnL(x,y)$$

$$= ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{y1}\sqrt{1-\rho_1^2}}\right)^{n_1} + ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x2}\sigma_{y2}\sqrt{1-\rho_2^2}}\right)^{n_2} + \cdots$$

$$+ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{xk}\sigma_{yk}\sqrt{1-\rho_k^2}}\right)^{n_k} -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2-2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2-2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)-$$

...

$$-\frac{1}{2(1-\rho_k^2)}\sum_{j=1}^{n_k}\left(\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)^2-2\rho_k\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)^2\right)$$

$$l(x,y)=-n_1\left(ln2\pi+ln\left(\left(\sigma_{x1}\sigma_{y1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+ln(1-\rho_1^2)^{\frac{1}{2}}\right)-$$

$$n_2\left(ln2\pi+ln\left(\left(\sigma_{x2}\sigma_{y2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+ln(1-\rho_2^2)^{\frac{1}{2}}\right)-$$

...

$$-n_k\left(ln2\pi+ln\left(\left(\sigma_{xk}\sigma_{yk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+ln(1-\rho_k^2)^{\frac{1}{2}}\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2-2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2-2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)-$$

…

$$-\frac{1}{2(1-\rho_k^2)}\sum_{j=1}^{n_k}\left(\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)^2-2\rho_k\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)^2\right)$$

$$l(x,y)=-(n_1+n_2+\cdots+n_k)ln2\pi-$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(ln\sigma_{x1}{}^2+ln\sigma_{yi}{}^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}n_i\,ln(1-\rho_i^2)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2-2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2-2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)-$$

…

$$-\frac{1}{2(1-\rho_k^2)}\sum_{j=1}^{n_k}\left(\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)^2-2\rho_k\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)^2\right).$$

Selanjutnya akan dicari taksiran maksimum *likelihood* untuk μ_{xi} , μ_{yi} , ${\sigma_{xi}}^2$, ${\sigma_{yi}}^2$ dan ρ_i dimana $i = 1,2,\dots,k$.

Fungsi log *likelihood* untuk populasi 1 $(i = 1)$ dapat dinyatakan sebagai

$$l(x,y) = -n_1 ln2\pi - \frac{n_1}{2}\left(ln{\sigma_{x1}}^2 + ln{\sigma_{y1}}^2\right) - \frac{n_1}{2}ln(1-\rho_1^2) -$$
$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2-2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right).$$

Langkah pertama adalah mencari taksiran maksimum *likelihood* untuk populasi 1 $(i = 1)$ yaitu μ_{x1} , μ_{y1} , ${\sigma_{x1}}^2$, ${\sigma_{y1}}^2$ dan ρ_1

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{x1}} = 0$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\mu_{x1})}{{\sigma_{x1}}^2(1-\rho_1^2)} - \frac{\rho_1\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j}-\mu_{y1})}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)} = 0$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_1}x_{1j}-\sum_{j=1}^{n_1}\mu_{x1}}{{\sigma_{x1}}^2(1-\rho_1^2)} - \frac{\rho_1\left(\sum_{j=1}^{n_1}y_{1j}-\sum_{j=1}^{n_1}\mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)} = 0$$

$$\frac{n_1(\bar{x}_1-\mu_{x1})}{{\sigma_{x1}}^2(1-\rho_1^2)} - \frac{n_1\rho_1(\bar{y}_1-\mu_{y1})}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)} = 0$$

$$\frac{n_1}{\sigma_{x1}(1-\rho_1^2)}\left(\frac{(\bar{x}_1-\mu_{x1})}{\sigma_{x1}}-\frac{\rho_1(\bar{y}_1-\mu_{y1})}{\sigma_{y1}}\right)=0$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\mu_{x1})}{\sigma_{x1}}=\frac{\rho_1(\bar{y}_1-\mu_{y1})}{\sigma_{y1}} \qquad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{y1}}=0$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j}-\mu_{y1})}{\sigma_{y1}{}^2(1-\rho_1^2)}-\frac{\rho_1\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\mu_{x1})}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)}=0$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_1}y_{1j}-\sum_{j=1}^{n_1}\mu_{y1}}{\sigma_{y1}{}^2(1-\rho_1^2)}-\frac{\rho_1\left(\sum_{j=1}^{n_1}x_{1j}-\sum_{j=1}^{n_1}\mu_{x1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)}=0$$

$$\frac{n_1(\bar{y}_1-\mu_{y1})}{\sigma_{y1}{}^2(1-\rho_1^2)}-\frac{n_1\rho_1(\bar{x}_1-\mu_{x1})}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)}=0$$

$$\frac{n_1}{\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)}\left(\frac{(\bar{y}_1-\mu_{y1})}{\sigma_{y1}}-\frac{\rho_1(\bar{x}_1-\mu_{x1})}{\sigma_{x1}}\right)=0$$

$$\frac{(\bar{y}_1-\mu_{y1})}{\sigma_{y1}}=\frac{\rho_1(\bar{x}_1-\mu_{x1})}{\sigma_{x1}}. \qquad (3.1.2)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.1.1) dan (3.1.2) maka akan diperoleh

$$\bar{x}_1-\mu_{x1}=\bar{y}_1-\mu_{y1}=0$$

$$\mu_{x1}=\bar{x}_1$$

$$\mu_{y1}=\bar{y}_1$$

sehingga taksiran taksiran maksimum *likelihood* untuk μ_{x1} dan μ_{y1} berturut-turut adalah

$\hat{\mu}_{x1} = \bar{x}_1$,

$\hat{\mu}_{y1} = \bar{y}_1$.

$$\frac{\partial l}{\partial {\sigma_{x1}}^2} = 0$$

$$-\frac{n_1}{2{\sigma_{x1}}^2} + \frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)^2}{2{\sigma_{x1}}^4(1-\rho_1^2)} - \frac{\rho_1 \sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)}{2(1-\rho_1^2)\sigma_{y1}{\sigma_{x1}}^3} = 0$$

$$-n_1(1-\rho_1^2) + \frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)^2}{{\sigma_{x1}}^2} - \frac{\rho_1 \sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}} = 0$$

$$n_1(1-\rho_1^2) = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)^2}{{\sigma_{x1}}^2} - \frac{\rho_1 \sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}} \tag{3.1.3}$$

$$\frac{\partial l}{\partial {\sigma_{y1}}^2} = 0$$

$$-\frac{n_1}{2{\sigma_{y1}}^2} + \frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)^2}{2{\sigma_{y1}}^4(1-\rho_1^2)} - \frac{\rho_1 \sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)}{2(1-\rho_1^2)\sigma_{x1}{\sigma_{y1}}^3} = 0$$

$$-n_1(1-\rho_1^2) + \frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)^2}{{\sigma_{y1}}^2} - \frac{\rho_1 \sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}} = 0$$

$$n_1(1-\rho_1^2) = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)^2}{{\sigma_{y1}}^2} - \frac{\rho_1 \sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j} - \mu_{x1}\right)\left(y_{1j} - \mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}} . \tag{3.1.4}$$

Jika persamaan (3.1.3) ditambah dengan persamaan (3.1.4) maka akan diperoleh

$$2n_1(1-\rho_1^2)=\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)^2}{{\sigma_{x1}}^2}+\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)^2}{{\sigma_{y1}}^2}-\frac{2\rho_1\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}\,. \qquad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \rho_1}=0$$

$$\frac{n_1\rho_1}{(1-\rho_1^2)}-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1^2)^2}\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)^2}{{\sigma_{x1}}^2}-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1^2)^2}\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)^2}{{\sigma_{y1}}^2}+\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}\frac{(1+\rho_1^2)}{(1-\rho_1^2)^2}=0$$

$$n_1(1-\rho_1^2)-\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)^2}{{\sigma_{x1}}^2}-\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)^2}{{\sigma_{y1}}^2}+\frac{(1+\rho_1^2)}{\rho_1}\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}=0$$

$$n_1(1-\rho_1^2)=\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)^2}{{\sigma_{x1}}^2}+\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)^2}{{\sigma_{y1}}^2}-\frac{(1+\rho_1^2)}{\rho_1}\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}\,. \qquad (3.1.6)$$

Jika persamaan (3.1.5) dikurang dengan persamaan (3.1.6) maka akan diperoleh

$$n_1(1-\rho_1^2)=\frac{(1+\rho_1^2)}{\rho_1}\frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}-\frac{2\rho_1\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1j}-\mu_{x1}\right)\left(y_{1j}-\mu_{y1}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}$$

$$n_1(1-\rho_1^2) = \left(\frac{1+\rho_1^2}{\rho_1} - \frac{2\rho_1^2}{\rho_1}\right)\frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\mu_{x1})(y_{1j}-\mu_{y1})}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}$$

$$n_1(1-\rho_1^2) = \frac{(1-\rho_1^2)}{\rho_1}\frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\mu_{x1})(y_{1j}-\mu_{y1})}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}$$

$$\rho_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\mu_{x1})(y_{1j}-\mu_{y1})}{n_1\sigma_{x1}\sigma_{y1}}\,. \qquad (3.1.7)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.1.7) ke persamaan (3.1.3) dan (3.1.4) diperoleh

$${\sigma_{x1}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\mu_{x1})^2}{n_1}\,,$$

$${\sigma_{y1}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j}-\mu_{y1})^2}{n_1}\,.$$

Sehingga taksiran maksimum *likelihood* untuk ${\sigma_{x1}}^2$, ${\sigma_{y1}}^2$ dan ρ_1 berturut-turut adalah

$${\hat{\sigma}_{x1}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\hat{\mu}_{x1})^2}{n_1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\bar{x}_1)^2}{n_1}\,,$$

$${\hat{\sigma}_{y1}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j}-\hat{\mu}_{y1})^2}{n_1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j}-\bar{y}_1)^2}{n_1}\,,$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\hat{\mu}_{x1})(y_{1j}-\hat{\mu}_{y1})}{n_1\hat{\sigma}_{x1}\hat{\sigma}_{y1}} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\bar{x}_1)(y_{1j}-\bar{y}_1)}{n_1\hat{\sigma}_{x1}\hat{\sigma}_{y1}}\,.$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan untuk $i = 2$ taksiran maksimum *likelihood* untuk μ_{x2} , μ_{y2} , ${\sigma_{x2}}^2$, ${\sigma_{y2}}^2$ dan ρ_2 berturut-turut adalah

$$\hat{\mu}_{x2} = \bar{x}_2 ,$$

$$\hat{\mu}_{y2} = \bar{y}_2 ,$$

$${\hat{\sigma}_{x2}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(x_{2j} - \hat{\mu}_{x2}\right)^2}{n_2} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right)^2}{n_2} ,$$

$${\hat{\sigma}_{y2}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(y_{2j} - \hat{\mu}_{y2}\right)^2}{n_2} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(y_{2j} - \bar{y}_2\right)^2}{n_2} ,$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(x_{2j} - \hat{\mu}_{x2}\right)\left(y_{2j} - \hat{\mu}_{y2}\right)}{n_2\hat{\sigma}_{x2}\hat{\sigma}_{y2}} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}\left(x_{2j} - \bar{x}_2\right)\left(y_{2j} - \bar{y}_2\right)}{n_2\hat{\sigma}_{x2}\hat{\sigma}_{y2}} .$$

Sehingga dengan cara yang sama dapat ditunjukkan untuk $i = 1,2, \dots, k$ taksiran maksimum *likelihood* untuk μ_{xi} , μ_{yi} , ${\sigma_{xi}}^2$, ${\sigma_{yi}}^2$ dan ρ_i berturut-turut adalah

$$\hat{\mu}_{xi} = \bar{x}_i ,$$

$$\hat{\mu}_{yi} = \bar{y}_i ,$$

$${\hat{\sigma}_{xi}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \hat{\mu}_{xi}\right)^2}{n_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}{n_i} ,$$

$${\hat{\sigma}_{yi}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \hat{\mu}_{yi}\right)^2}{n_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{n_i} ,$$

$$\hat{\rho}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \hat{\mu}_{xi}\right)\left(y_{ij} - \hat{\mu}_{yi}\right)}{n_i\hat{\sigma}_{xi}\hat{\sigma}_{yi}} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)}{n_i\hat{\sigma}_{xi}\hat{\sigma}_{yi}} .$$

3.2 Pengujian Kesamaan Koefisien Korelasi

3.2.1 Untuk Dua Populasi

Misalkan (X_{ij}, Y_{ij}) , $j = 1,2, .., n_i$, $i = 1,2$ merupakan n_i sampel acak dari populasi ke $-\ i$ yang berdistribusi bivariat normal dengan mean (μ_{xi}, μ_{yi}) , standar deviasi $(\sigma_{xi}, \sigma_{yi})$ dan koefisien korelasi ρ_i . Dengan demikian fungsi *likelihood* nya dapat dinyatakan sebagai

$$L(x,y) = \left(f(x_{11}, y_{11}) f(x_{12}, y_{12}) \dots f\left(x_{1n_1}, y_{1n_1}\right)\right)$$

$$\left(f(x_{21}, y_{21}) f(x_{22}, y_{22}) \dots f\left(x_{2n_2}, y_{2n_2}\right)\right)$$

$$L(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{y1}\sqrt{1-\rho_1^2}}\right)^{n_1} exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right) + \left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)\right)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x2}\sigma_{y2}\sqrt{1-\rho_2^2}}\right)^{n_2} exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right) + \left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)\right).$$

Fungsi log *likelihood* nya yaitu

$$l(x,y) = lnL(x,y)$$

$$= ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{y1}\sqrt{1-\rho_1^2}}\right)^{n_1} + ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x2}\sigma_{y2}\sqrt{1-\rho_2^2}}\right)^{n_2} -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2-2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2-2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)$$

$$l(x,y)=-n_1\left(ln2\pi+ln\left(\left(\sigma_{x1}\sigma_{y1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+ln(1-\rho_1^2)^{\frac{1}{2}}\right)-$$

$$n_2\left(ln2\pi+ln\left(\left(\sigma_{x2}\sigma_{y2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+ln(1-\rho_2^2)^{\frac{1}{2}}\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2-2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2-2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)$$

$$l(x,y)=-(n_1+n_2)ln2\pi-$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}n_i\left(ln\sigma_{xi}{}^2+ln\sigma_{yi}{}^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}n_i\,ln(1-\rho_i^2)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2-2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2-2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right).$$

Pada subbab sebelumnya diperoleh $\mu_{xi}=\bar{x}_i$ dan $\mu_{yi}=\bar{y}_i$ untuk $i=1{,}2$ sehingga $l(x,y)$ dapat dinyatakan sebagai

$$l(x,y)=-(n_1+n_2)ln2\pi-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}n_i\left(ln\sigma_{xi}{}^2+ln\sigma_{yi}{}^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}n_i\,ln(1-\rho_i^2)-$$
$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\bar{x}_1}{\sigma_{x1}}\right)^2-2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\bar{x}_1}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\bar{y}_1}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\bar{y}_1}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)-$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\bar{x}_2}{\sigma_{x2}}\right)^2-2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\bar{x}_2}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\bar{y}_2}{\sigma_{y2}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_{2j}-\bar{y}_2}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)$$

$$l(x,y) = -Nln2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i \left(ln\sigma_{xi}{}^2 + ln\sigma_{yi}{}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i\, ln(1-\rho_i^2) -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{(1-\rho_i^2)}\left[\left(\frac{s_{xi}{}^2}{\sigma_{xi}{}^2}\right) - \left(\frac{2\rho_i\hat{\rho}_i s_{xi}s_{yi}}{\sigma_{xi}\sigma_{yi}}\right) + \left(\frac{s_{yi}{}^2}{\sigma_{yi}{}^2}\right)\right]$$

dimana

$$N = \sum_{i=1}^{2} n_i \;,\quad s_{xi}{}^2 = \sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2 \;,\quad s_{yi}{}^2 = \sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2 \;,$$

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{s_{xi}s_{yi}}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right).$$

Misalkan akan diuji hipotesis:

$H_0\colon \rho_1 = \rho_2 = \rho$ dan $H_1\colon \rho_1 \neq \rho_2$

maka fungsi log *likelihood* di bawah asumsi H_0 benar

$$l_0 = -Nln2\pi - \frac{n_1}{2}\left(ln\sigma_{x1}{}^2 + ln\sigma_{y1}{}^2\right) - \frac{n_2}{2}\left(ln\sigma_{x2}{}^2 + ln\sigma_{y2}{}^2\right) - \frac{n_1}{2}ln(1-\rho_1^2) -$$

$$\frac{n_2}{2}ln(1-\rho_2^2) - \frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\left(\left(\frac{s_{x1}{}^2}{\sigma_{x1}{}^2}\right) - \left(\frac{2\rho_1\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}\right) + \left(\frac{s_{y1}{}^2}{\sigma_{y1}{}^2}\right)\right) -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\left(\left(\frac{s_{x2}{}^2}{\sigma_{x2}{}^2}\right) - \left(\frac{2\rho_2\hat{\rho}_2 s_{x2}s_{y2}}{\sigma_{x2}\sigma_{y2}}\right) + \left(\frac{s_{y2}{}^2}{\sigma_{y2}{}^2}\right)\right)$$

$$l_0 = -Nln2\pi - \frac{n_1}{2}\left(ln\sigma_{x1}{}^2 + ln\sigma_{y1}{}^2\right) - \frac{n_2}{2}\left(ln\sigma_{x2}{}^2 + ln\sigma_{y2}{}^2\right) - \frac{n_1}{2}ln(1-\rho^2) -$$

$$\frac{n_2}{2}ln(1-\rho^2) - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{s_{x1}{}^2}{\sigma_{x1}{}^2}\right) - \left(\frac{2\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}}\right) + \left(\frac{s_{y1}{}^2}{\sigma_{y1}{}^2}\right)\right) -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{{s_{x2}}^2}{{\sigma_{x2}}^2}\right)-\left(\frac{2\rho\hat{\rho}_2 s_{x2}s_{y2}}{\sigma_{x2}\sigma_{y2}}\right)+\left(\frac{{s_{y2}}^2}{{\sigma_{y2}}^2}\right)\right)$$

$$l_0 = -Nln2\pi - \frac{n_1}{2}\left(ln{\sigma_{x1}}^2 + ln{\sigma_{y1}}^2\right) - \frac{n_2}{2}\left(ln{\sigma_{x2}}^2 + ln{\sigma_{y2}}^2\right) -$$

$$\frac{1}{2}ln(1-\rho^2)(n_1+n_2) - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{{s_{x1}}^2}{{\sigma_{x1}}^2} - \frac{2\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}} + \frac{{s_{y1}}^2}{{\sigma_{y1}}^2}\right) -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{{s_{x2}}^2}{{\sigma_{x2}}^2} - \frac{2\rho\hat{\rho}_2 s_{x2}s_{y2}}{\sigma_{x2}\sigma_{y2}} + \frac{{s_{y2}}^2}{{\sigma_{y2}}^2}\right). \qquad (3.2.1.1)$$

Taksiran maksimum *likelihood* untuk ${\sigma_{xi}}^2$, ${\sigma_{yi}}^2$, ρ dimana $i = 1{,}2$ di bawah asumsi H_0 benar.

Untuk $(i = 1)$

$$\frac{\partial l_0}{\partial {\sigma_{x1}}^2} = -\frac{n_1}{2{\sigma_{x1}}^2} + \frac{{s_{x1}}^2}{2{\sigma_{x1}}^4(1-\rho^2)} - \frac{\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}}{2(1-\rho^2)\sigma_{y1}{\sigma_{x1}}^3} = 0$$

$$\frac{{s_{x1}}^2}{2{\sigma_{x1}}^4(1-\rho^2)} = \frac{n_1}{2{\sigma_{x1}}^2} + \frac{\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}}{2(1-\rho^2)\sigma_{y1}{\sigma_{x1}}^3}$$

$$\frac{{s_{x1}}^2}{{\sigma_{x1}}^4} = \frac{n_1(1-\rho^2)}{{\sigma_{x1}}^2} + \frac{\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}}{{\sigma_{x1}}^3\sigma_{y1}}$$

$${s_{x1}}^2 = {\sigma_{x1}}^2 n_1(1-\rho^2) + \frac{\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}\sigma_{x1}}{\sigma_{y1}}$$

$${\sigma_{x1}}^2 n_1(1-\rho^2) = {s_{x1}}^2 - \frac{\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}\sigma_{x1}}{\sigma_{y1}}$$

$${\sigma_{x1}}^2 n_1(1-\rho^2) = {s_{x1}}^2 - \rho\hat{\rho}_1 s_{x1}\frac{s_{y1}\sigma_{x1}}{\sigma_{y1}}$$

karena ${}^{s_{x1}}/_{s_{y1}} = {}^{\sigma_{x1}}/_{\sigma_{y1}}$ maka

$$\sigma_{x1}{}^2 n_1(1-\rho^2) = s_{x1}{}^2 - \rho\hat{\rho}_1 s_{x1} s_{x1}$$

$$\sigma_{x1}{}^2 n_1(1-\rho^2) = s_{x1}{}^2 - \rho\hat{\rho}_1 s_{x1}{}^2$$

$$\sigma_{x1}{}^2 n_1(1-\rho^2) = s_{x1}{}^2(1 - \rho\hat{\rho}_1)$$

$$\sigma_{x1}{}^2 = \frac{s_{x1}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}{n_1(1-\rho^2)} \qquad (3.2.1.2)$$

dengan cara yang sama akan didapatkan

$$\sigma_{y1}{}^2 = \frac{s_{y1}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}{n_1(1-\rho^2)}\ . \qquad (3.2.1.3)$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan untuk $(i = 2)$ akan didapatkan

$$\sigma_{x2}{}^2 = \frac{s_{x2}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}{n_2(1-\rho^2)}\ , \qquad (3.2.1.4)$$

$$\sigma_{y2}{}^2 = \frac{s_{y2}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}{n_2(1-\rho^2)}\ . \qquad (3.2.1.5)$$

Fungsi log *likelihood* di bawah asumsi H_0 benar seperti pada persamaan (3.2.1.1) dapat dinyatakan sebagai

$$l_0 = -Nln2\pi - \frac{n_1}{2}\left(ln\frac{s_{x1}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}{n_1(1-\rho^2)} + ln\frac{s_{y1}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}{n_1(1-\rho^2)}\right) -$$

$$\frac{n_2}{2}\left(ln\frac{s_{x2}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}{n_2(1-\rho^2)} + ln\frac{s_{y2}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}{n_2(1-\rho^2)}\right) - \frac{1}{2}ln(1-\rho^2)(n_1+n_2) -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{{s_{x1}}^2 n_1(1-\rho^2)}{{s_{x1}}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}-\frac{2\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}n_1(1-\rho^2)}{s_{x1}s_{y1}(1-\rho\hat{\rho}_1)}+\frac{{s_{y1}}^2 n_1(1-\rho^2)}{{s_{y1}}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{{s_{x2}}^2 n_2(1-\rho^2)}{{s_{x2}}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}-\frac{2\rho\hat{\rho}_2 s_{x2}s_{y2}n_2(1-\rho^2)}{s_{x2}s_{y2}(1-\rho\hat{\rho}_2)}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{{s_{y2}}^2 n_2(1-\rho^2)}{{s_{y2}}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}\right)\right)$$

$$l_0=-Nln2\pi-\frac{n_1}{2}\left(ln\frac{{s_{x1}}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}{n_1(1-\rho^2)}+ln\frac{{s_{y1}}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}{n_1(1-\rho^2)}\right)-$$

$$\frac{n_2}{2}\left(ln\frac{{s_{x2}}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}{n_2(1-\rho^2)}+ln\frac{{s_{y2}}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}{n_2(1-\rho^2)}\right)-\frac{1}{2}ln(1-\rho^2)(n_1+n_2)-$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n_1}{(1-\rho\hat{\rho}_1)}-\frac{2\rho\hat{\rho}_1 n_1}{(1-\rho\hat{\rho}_1)}+\frac{n_1}{(1-\rho\hat{\rho}_1)}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{n_2}{(1-\rho\hat{\rho}_2)}-\frac{2\rho\hat{\rho}_2 n_2}{(1-\rho\hat{\rho}_2)}+\frac{n_2}{(1-\rho\hat{\rho}_2)}\right)\right)$$

$$l_0=-Nln2\pi-\frac{n_1}{2}\left(lns_{x1}{}^2+ln(1-\rho\hat{\rho}_1)-lnn_1-ln(1-\rho^2)+lns_{y1}{}^2\right.$$

$$\left.+ln(1-\rho\hat{\rho}_1)-lnn_1-ln(1-\rho^2)\right)-$$

$$\frac{n_2}{2}\left(lns_{x2}{}^2+ln(1-\rho\hat{\rho}_2)-lnn_2-ln(1-\rho^2)+lns_{y2}{}^2+ln(1-\rho\hat{\rho}_2)\right.$$

$$\left.-lnn_2-ln(1-\rho^2)\right)-$$

$$\frac{n_1}{2}ln(1-\rho^2)-\frac{n_2}{2}ln(1-\rho^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{2n_1-2\rho\hat{\rho}_1 n_1}{(1-\rho\hat{\rho}_1)}+\frac{2n_2-2\rho\hat{\rho}_2 n_2}{(1-\rho\hat{\rho}_2)}\right)$$

$$l_0=-Nln2\pi-\frac{n_1}{2}lns_{x1}{}^2-\frac{n_1}{2}lns_{y1}{}^2-\frac{n_2}{2}lns_{x2}{}^2-\frac{n_2}{2}lns_{y2}{}^2-n_1ln(1-\rho\hat{\rho}_1)-$$

$$n_2ln(1-\rho\hat{\rho}_2)+n_1lnn_1+n_2lnn_2+n_1ln(1-\rho^2)+n_2ln(1-\rho^2)-$$

$$\frac{n_1}{2}ln(1-\rho^2)-\frac{n_2}{2}ln(1-\rho^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{2n_1(1-\rho\hat{\rho}_1)}{(1-\rho\hat{\rho}_1)}+\frac{2n_2(1-\rho\hat{\rho}_2)}{(1-\rho\hat{\rho}_2)}\right)$$

$$l_0=-Nln2\pi-\frac{n_1}{2}\left(lns_{x1}{}^2+lns_{y1}{}^2\right)-\frac{n_2}{2}\left(lns_{x2}{}^2+lns_{y2}{}^2\right)-n_1ln(1-\rho\hat{\rho}_1)-$$

$$n_2ln(1-\rho\hat{\rho}_2)+n_1lnn_1+n_2lnn_2+\frac{n_1}{2}ln(1-\rho^2)+\frac{n_2}{2}ln(1-\rho^2)-$$

$$(n_1+n_2)$$

$$l_0=-Nln2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}n_i\left(lns_{xi}{}^2+lns_{yi}{}^2\right)-\sum_{i=1}^{2}n_iln(1-\rho\hat{\rho}_i)+\sum_{i=1}^{2}n_ilnn_1+$$

$$\frac{N}{2}ln(1-\rho^2)-N\,.$$

Terlebih dahulu akan dicari taksiran maksimum *likelihood* untuk ρ di bawah asumsi H_0 benar

$$\frac{\partial l_0}{\partial\rho}=\frac{n_1\hat{\rho}_1}{(1-\rho\hat{\rho}_1)}+\frac{n_2\hat{\rho}_2}{(1-\rho\hat{\rho}_2)}-\frac{n_1\rho}{(1-\rho^2)}-\frac{n_2\rho}{(1-\rho^2)}=0$$

$$\frac{n_1\hat{\rho}_1}{(1-\rho\hat{\rho}_1)}-\frac{n_1\rho}{(1-\rho^2)}+\frac{n_2\hat{\rho}_2}{(1-\rho\hat{\rho}_2)}-\frac{n_2\rho}{(1-\rho^2)}=0$$

$$\frac{n_1\hat{\rho}_1-n_1\hat{\rho}_1\rho^2-n_1\rho+n_1\hat{\rho}_1\rho^2}{(1-\rho\hat{\rho}_1)(1-\rho^2)}+\frac{n_2\hat{\rho}_2-n_2\hat{\rho}_2\rho^2-n_2\rho+n_2\hat{\rho}_2\rho^2}{(1-\rho\hat{\rho}_2)(1-\rho^2)}=0$$

$$\frac{n_1\hat{\rho}_1-n_1\rho}{(1-\rho\hat{\rho}_1)(1-\rho^2)}+\frac{n_2\hat{\rho}_2-n_2\rho}{(1-\rho\hat{\rho}_2)(1-\rho^2)}=0$$

$$\frac{n_1(\hat{\rho}_1-\rho)}{(1-\rho\hat{\rho}_1)(1-\rho^2)}+\frac{n_2(\hat{\rho}_2-\rho)}{(1-\rho\hat{\rho}_2)(1-\rho^2)}=0$$

$$\frac{n_1(\hat{\rho}_1-\rho)}{(1-\rho\hat{\rho}_1)}+\frac{n_2(\hat{\rho}_2-\rho)}{(1-\rho\hat{\rho}_2)}=0$$

sehingga diperoleh taksiran maksimum *likelihood* untuk ρ di bawah asumsi H_0 benar yaitu dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{n_1(\hat{\rho}_1-\hat{\rho})}{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_1)}+\frac{n_2(\hat{\rho}_2-\hat{\rho})}{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_2)}=0\,. \quad (3.2.1.6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.1.6) pada persamaan (3.2.1.2) sampai dengan (3.2.1.5) akan diperoleh taksiran maksimum *likelihood* untuk ${\sigma_{xi}}^2$, ${\sigma_{yi}}^2$ dimana $i=1{,}2$ berturut-turut adalah

$${\hat{\sigma}_{x1}}^2=\frac{{s_{x1}}^2(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_1)}{n_1(1-\hat{\rho}^2)}\,, \quad (3.2.1.7)$$

$${\hat{\sigma}_{y1}}^2=\frac{{s_{y1}}^2(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_1)}{n_1(1-\hat{\rho}^2)}\,, \quad (3.2.1.8)$$

$${\hat{\sigma}_{x2}}^2=\frac{{s_{x2}}^2(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_2)}{n_2(1-\hat{\rho}^2)}\,, \quad (3.2.1.9)$$

$${\hat{\sigma}_{y2}}^2=\frac{{s_{y2}}^2(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_2)}{n_2(1-\hat{\rho}^2)}\,. \quad (3.2.1.10)$$

Selanjutnya akan dicari fungsi log *likelihood* secara umum.

Telah dibuktikan pada sub bab (3.1) bahwa taksiran maksimum *likelihood* untuk ${\sigma_{xi}}^2$, ${\sigma_{yi}}^2$ dan ρ_i pada distribusi bivariat normal berturut-turut adalah ${{s_{xi}}^2}/{n_i}$, ${{s_{yi}}^2}/{n_i}, \hat{\rho}_i$ dimana $i=1{,}2$. Sehingga fungsi log *likelihood* secara umum dapat dinyatakan sebagai

$$l_1=-Nln2\pi-\frac{n_1}{2}\left(ln\frac{{s_{x1}}^2}{n_1}+ln\frac{{s_{y1}}^2}{n_1}\right)-\frac{n_2}{2}\left(ln\frac{{s_{x2}}^2}{n_2}+ln\frac{{s_{y2}}^2}{n_2}\right)-$$

$$\frac{n_1}{2}ln\left(1-\hat{\rho}_1{}^2\right)-\frac{n_2}{2}ln\left(1-\hat{\rho}_2{}^2\right)-$$

$$\frac{1}{2\left(1-\hat{\rho}_1{}^2\right)}\left(\frac{s_{x1}{}^2 n_1}{s_{x1}{}^2}-\frac{2\hat{\rho}_1{}^2 s_{x1}s_{y1}n_1}{s_{x1}s_{y1}}+\frac{s_{y1}{}^2 n_1}{s_{y1}{}^2}\right)-$$

$$\frac{1}{2\left(1-\hat{\rho}_2{}^2\right)}\left(\frac{s_{x2}{}^2 n_2}{s_{x2}{}^2}-\frac{2\hat{\rho}_2{}^2 s_{x2}s_{y2}n_2}{s_{x2}s_{y2}}+\frac{s_{y2}{}^2 n_2}{s_{y2}{}^2}\right)$$

$$l_1=-Nln2\pi-\frac{n_1}{2}\left(lns_{x1}{}^2+lns_{y1}{}^2\right)-\frac{n_2}{2}\left(lns_{x2}{}^2+lns_{y2}{}^2\right)+n_1lnn_1+$$

$$n_2lnn_2-\frac{n_1}{2}ln\left(1-\hat{\rho}_1{}^2\right)-\frac{n_2}{2}ln\left(1-\hat{\rho}_2{}^2\right)-$$

$$\frac{1}{2\left(1-\hat{\rho}_1{}^2\right)}\left(2n_1\left(1-\hat{\rho}_1{}^2\right)\right)-\frac{1}{2\left(1-\hat{\rho}_2{}^2\right)}\left(2n_2\left(1-\hat{\rho}_2{}^2\right)\right)$$

$$l_1=-Nln2\pi-\frac{n_1}{2}\left(lns_{x1}{}^2+lns_{y1}{}^2\right)-\frac{n_2}{2}\left(lns_{x2}{}^2+lns_{y2}{}^2\right)+n_1lnn_1+$$

$$n_2lnn_2-\frac{n_1}{2}ln\left(1-\hat{\rho}_1{}^2\right)-\frac{n_2}{2}ln\left(1-\hat{\rho}_2{}^2\right)-(n_1+n_2)$$

$$l_1=-Nln2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}n_i\left(lns_{xi}{}^2+lns_{yi}{}^2\right)+\sum_{i=1}^{2}n_ilnn_1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}n_iln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right)-N\ .$$

Selanjutnya akan dicari statistik uji dan aturan keputusan untuk menguji hipotesis $H_0: \rho_1=\rho_2=\rho$ dan $H_1: \rho_1\neq\rho_2$.

Akan digunakan statistik uji $\Lambda^* = -2\ln\Lambda$ untuk menguji hipotesis di atas.

$$\Lambda^* = -2ln\Lambda = -2ln\frac{L_0}{L_1} = -2(l_0-l_1) = 2(l_1-l_0)$$

$$\Lambda^* = 2\left(-Nln2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i\left(lns_{xi}{}^2 + lns_{yi}{}^2\right) + \sum_{i=1}^{2} n_i lnn_1\right.$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i ln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right) - N + Nln2\pi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i\left(lns_{xi}{}^2 + lns_{yi}{}^2\right)$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{2} n_i ln(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i) - \sum_{i=1}^{2} n_i lnn_1 - \frac{N}{2}ln(1-\hat{\rho}^2) + N\right)$$

$$\Lambda^* = 2\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i ln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right) + \sum_{i=1}^{2} n_i ln(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i) - \frac{N}{2}ln(1-\hat{\rho}^2)\right)$$

$$\Lambda^* = 2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} 2n_i ln(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i ln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i ln(1-\hat{\rho}^2)\right)$$

$$\Lambda^* = 2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} n_i\left(2ln(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i) - ln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right) - ln(1-\hat{\rho}^2)\right)\right)$$

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{2} n_i\left(ln(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i)^2 - ln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right) - ln(1-\hat{\rho}^2)\right)$$

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{2} n_i\left(ln\frac{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i)^2}{(1-\hat{\rho}_i^2)(1-\hat{\rho}^2)}\right).$$

Dengan menggunakan teorema (2.4.1) , statistik uji $\Lambda^* = -2ln\Lambda$ yang dalam hal ini

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{2} n_i\left(ln\frac{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i)^2}{(1-\hat{\rho}_i^2)(1-\hat{\rho}^2)}\right)$$

akan berdistribusi *chi square* dengan derajat bebas 1.

H_0 akan ditolak jika $\Lambda^* \geq c^*$ dimana c^* adalah suatu konstanta dari tabel χ_1^2 (*chi square* dengan derajat bebas 1) yang memenuhi Pr $(\Lambda^* \geq c^*) = \alpha$ dimana α merupakan suatu tingkat signifikansi yang digunakan.

3.2.2 Untuk *k* Populasi

Misalkan $\left(X_{ij}, Y_{ij}\right)$, $j = 1,2,..,n_i$, $i = 1,2,..,k$ merupakan n_i sampel acak dari populasi ke $-\ i$ yang berdistribusi bivariat normal dengan mean (μ_{xi}, μ_{yi}) , standar deviasi $(\sigma_{xi}, \sigma_{yi})$ dan koefisien korelasi ρ_i . Dengan demikian fungsi *likelihood* nya dapat dinyatakan sebagai

$$L(x,y) = \left(f(x_{11}, y_{11}) f(x_{12}, y_{12}) \dots f\left(x_{1n_1}, y_{1n_1}\right)\right)$$

$$\left(f(x_{21}, y_{21}) f(x_{22}, y_{22}) \dots f\left(x_{2n_2}, y_{2n_2}\right)\right)$$

$$\dots$$

$$\left(f(x_{k1}, y_{k1}) f(x_{k2}, y_{k2}) \dots f\left(x_{kn_k}, y_{kn_k}\right)\right)$$

$$L(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{y1}\sqrt{1-\rho_1^2}}\right)^{n_1} exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2 - 2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right) + \left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right)\right)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x2}\sigma_{y2}\sqrt{1-\rho_2^2}}\right)^{n_2} exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2 - 2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right) + \left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right)\right)$$

$$\dots$$

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{xk}\sigma_{yk}\sqrt{1-\rho_k^2}}\right)^{n_k} exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_k^2)}\sum_{j=1}^{n_k}\left(\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho_k\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)+\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)^2\right)\right).$$

Fungsi log *likelihood* nya yaitu

$$l(x,y) = lnL(x,y)$$

$$= ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{y1}\sqrt{1-\rho_1^2}}\right)^{n_1} + ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x2}\sigma_{y2}\sqrt{1-\rho_2^2}}\right)^{n_2} + \cdots$$

$$+ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{xk}\sigma_{yk}\sqrt{1-\rho_k^2}}\right)^{n_k} -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)^2 - 2\rho_1\left(\frac{x_{1j}-\mu_{x1}}{\sigma_{x1}}\right)\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{1j}-\mu_{y1}}{\sigma_{y1}}\right)^2\right) -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho_2^2)}\sum_{j=1}^{n_2}\left(\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)^2 - 2\rho_2\left(\frac{x_{2j}-\mu_{x2}}{\sigma_{x2}}\right)\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{2j}-\mu_{y2}}{\sigma_{y2}}\right)^2\right) -$$

...

$$-\frac{1}{2(1-\rho_k^2)}\sum_{j=1}^{n_k}\left(\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)^2 - 2\rho_k\left(\frac{x_{kj}-\mu_{xk}}{\sigma_{xk}}\right)\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y_{kj}-\mu_{yk}}{\sigma_{yk}}\right)^2\right).$$

Dengan cara yang sama seperti pada subbab (3.2.1) , fungsi log *likelihood* pada persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$l(x,y) = -Nln2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(ln\sigma_{xi}{}^2 + ln\sigma_{yi}{}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i \, ln(1-\rho_i^2) -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(1-\rho_i^2)}\left[\left(\frac{s_{xi}{}^2}{\sigma_{xi}{}^2}\right) - \left(\frac{2\rho_i\hat{\rho}_i s_{xi}s_{yi}}{\sigma_{xi}\sigma_{yi}}\right) + \left(\frac{s_{yi}{}^2}{\sigma_{yi}{}^2}\right)\right]$$

dimana

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i \ , \ \ s_{xi}{}^2 = \sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2 \ , \ \ s_{yi}{}^2 = \sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 \ ,$$

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{s_{xi}s_{yi}}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right).$$

Misalkan akan diuji hipotesis:

H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = \rho$ dan H_1: tidak demikian

maka fungsi log *likelihood* di bawah asumsi H_0 benar

$$l_0 = -Nln2\pi - \frac{n_1}{2}\left(ln\sigma_{x1}{}^2 + ln\sigma_{y1}{}^2\right) - \frac{n_2}{2}\left(ln\sigma_{x2}{}^2 + ln\sigma_{y2}{}^2\right) - \cdots$$

$$-\frac{n_k}{2}\left(ln\sigma_{xk}{}^2 + ln\sigma_{yk}{}^2\right) - \frac{1}{2}ln(1-\rho^2)(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) - \frac{1}{2(1-\rho^2)}$$

$$\left(\left(\frac{s_{x1}{}^2}{\sigma_{x1}{}^2} - \frac{2\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}} + \frac{s_{y1}{}^2}{\sigma_{y1}{}^2}\right) + \left(\frac{s_{x2}{}^2}{\sigma_{x2}{}^2} - \frac{2\rho\hat{\rho}_2 s_{x2}s_{y2}}{\sigma_{x2}\sigma_{y2}} + \frac{s_{y2}{}^2}{\sigma_{y2}{}^2}\right) + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{s_{xk}{}^2}{\sigma_{xk}{}^2} - \frac{2\rho\hat{\rho}_k s_{xk}s_{yk}}{\sigma_{xk}\sigma_{yk}} + \frac{s_{yk}{}^2}{\sigma_{yk}{}^2}\right)\right). \qquad (3.2.2.1)$$

Selanjutnya akan dicari taksiran maksimum *likelihood* dari ${\sigma_{xi}}^2$ dan ${\sigma_{yi}}^2$ dimana $i = 1,2, \dots, k$ di bawah asumsi H_0 benar.

Pada subbab (3.2.1) telah diperoleh taksiran maksimum *likelihood* dari ${\sigma_{xi}}^2$ dan ${\sigma_{yi}}^2$ dimana $i = 1,2$ di bawah asumsi H_0 benar seperti pada persamaan (3.2.1.7) sampai dengan (3.2.1.10) , dengan cara yang sama untuk $i = 1,2, \dots, k$ diperoleh taksiran maksimum *likelihood* dari ${\sigma_{xi}}^2$ dan ${\sigma_{yi}}^2$ dimana $i = 1,2, \dots, k$ di bawah asumsi H_0 benar yaitu

$$\hat{\sigma}_{xi}{}^2 = \frac{{s_{xi}}^2(1 - \hat{\rho}\hat{\rho}_i)}{n_i(1 - \hat{\rho}^2)},$$

$$\hat{\sigma}_{yi}{}^2 = \frac{{s_{yi}}^2(1 - \hat{\rho}\hat{\rho}_i)}{n_i(1 - \hat{\rho}^2)}.$$

Fungsi log *likelihood* di bawah asumsi H_0 benar seperti pada persamaan (3.2.2.1) dapat dinyatakan sebagai

$$l_0 = -Nln2\pi - \frac{n_1}{2}\left(ln\frac{{s_{x1}}^2(1 - \rho\hat{\rho}_1)}{n_1(1 - \rho^2)} + ln\frac{{s_{y1}}^2(1 - \rho\hat{\rho}_1)}{n_1(1 - \rho^2)}\right) -$$

$$\frac{n_2}{2}\left(ln\frac{{s_{x2}}^2(1 - \rho\hat{\rho}_2)}{n_2(1 - \rho^2)} + ln\frac{{s_{y2}}^2(1 - \rho\hat{\rho}_2)}{n_2(1 - \rho^2)}\right) -$$

$$\dots$$

$$-\frac{n_k}{2}\left(ln\frac{{s_{xk}}^2(1 - \rho\hat{\rho}_k)}{n_k(1 - \rho^2)} + ln\frac{{s_{yk}}^2(1 - \rho\hat{\rho}_k)}{n_k(1 - \rho^2)}\right) -$$

$$\frac{1}{2}ln(1 - \rho^2)(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) -$$

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{s_{x1}{}^2 n_1(1-\rho^2)}{s_{x1}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}-\frac{2\rho\hat{\rho}_1 s_{x1}s_{y1}n_1(1-\rho^2)}{s_{x1}s_{y1}(1-\rho\hat{\rho}_1)}+\frac{s_{y1}{}^2 n_1(1-\rho^2)}{s_{y1}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_1)}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{s_{x2}{}^2 n_2(1-\rho^2)}{s_{x2}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}-\frac{2\rho\hat{\rho}_2 s_{x2}s_{y2}n_2(1-\rho^2)}{s_{x2}s_{y2}(1-\rho\hat{\rho}_2)}\right.$$
$$\left.+\frac{s_{y2}{}^2 n_2(1-\rho^2)}{s_{y2}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_2)}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{s_{xk}{}^2 n_k(1-\rho^2)}{s_{xk}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_k)}-\frac{2\rho\hat{\rho}_k s_{xk}s_{yk}n_k(1-\rho^2)}{s_{xk}s_{yk}(1-\rho\hat{\rho}_k)}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{s_{yk}{}^2 n_k(1-\rho^2)}{s_{yk}{}^2(1-\rho\hat{\rho}_k)}\right)\right).$$

Dengan cara yang sama seperti pada subbab (3.2.1) , fungsi log *likelihood* di bawah asumsi H_0 benar pada persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$l_0=-Nln2\pi-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(lns_{xi}{}^2+lns_{yi}{}^2\right)-\sum_{i=1}^{k}n_i ln(1-\rho\hat{\rho}_i)+\sum_{i=1}^{k}n_i lnn_1+$$
$$\frac{N}{2}ln(1-\rho^2)-N\,.$$

Selanjutnya akan dicari taksiran maksimum *likelihood* untuk ρ di bawah asumsi H_0 benar.

Pada subbab (3.2.1) telah diperoleh taksiran maksimum *likelihood* untuk ρ di bawah asumsi H_0 benar seperti pada persamaan (3.2.1.6) , dengan cara yang sama untuk k populasi diperoleh taksiran maksimum *likelihood* untuk ρ di bawah asumsi H_0 benar yaitu dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{n_1(\hat{\rho}_1-\hat{\rho})}{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_1)}+\frac{n_2(\hat{\rho}_2-\hat{\rho})}{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_2)}+\cdots+\frac{n_k(\hat{\rho}_k-\hat{\rho})}{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_k)}=0$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i(\hat{\rho}_i-\hat{\rho})}{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i)}=0\,.$$

Selanjutnya akan dicari fungsi log *likelihood* secara umum.

Telah dibuktikan pada sub bab (3.1) bahwa taksiran maksimum *likelihood* untuk ${\sigma_{xi}}^2$, ${\sigma_{yi}}^2$ dan ρ_i pada distribusi bivariat normal berturut-turut adalah ${s_{xi}}^2/n_i$, ${s_{yi}}^2/n_i$, $\hat{\rho}_i$ dimana $i = 1,2, \dots, k$ sehingga dengan cara yang sama seperti pada sub bab (3.2.1) fungsi log *likelihood* secara umum dapat dinyatakan sebagai

$$l_1 = -Nln2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(lns_{xi}{}^2 + lns_{yi}{}^2\right) + \sum_{i=1}^{k} n_i lnn_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i ln\left(1 - \hat{\rho}_i{}^2\right) - N \; .$$

Selanjutnya akan dicari statistik uji dan aturan keputusan untuk menguji hipotesis $H_0 \colon \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = \rho$ dan H_1: tidak demikian .

Akan digunakan statistik uji $\Lambda^* = -2\ln\Lambda$ untuk menguji hipotesis di atas.

$$\Lambda^* = -2\ln\Lambda \; = -2ln\frac{L_0}{L_1} = -2(l_0 - l_1) = 2(l_1 - l_0)$$

$$\begin{aligned}\Lambda^* = 2\Bigg(& -Nln2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(lns_{xi}{}^2 + lns_{yi}{}^2\right) + \sum_{i=1}^{k} n_i lnn_1 \\ & - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i ln\left(1 - \hat{\rho}_i{}^2\right) - N + Nln2\pi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(lns_{xi}{}^2 + lns_{yi}{}^2\right) \\ & + \sum_{i=1}^{k} n_i ln(1 - \hat{\rho}\hat{\rho}_i) - \sum_{i=1}^{k} n_i lnn_1 - \frac{N}{2} ln(1 - \hat{\rho}^2) + N\Bigg)\end{aligned}$$

$$\Lambda^* = 2\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i ln\left(1 - \hat{\rho}_i{}^2\right) + \sum_{i=1}^{k} n_i ln(1 - \hat{\rho}\hat{\rho}_i) - \frac{N}{2} ln(1 - \hat{\rho}^2)\right)$$

$$\Lambda^* = 2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} 2n_i ln(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i ln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i ln(1-\hat{\rho}^2)\right)$$

$$\Lambda^* = 2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(2ln(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i) - ln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right) - ln(1-\hat{\rho}^2)\right)\right)$$

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(ln(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i)^2 - ln\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right) - ln(1-\hat{\rho}^2)\right)$$

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(ln\frac{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i)^2}{\left(1-\hat{\rho}_i{}^2\right)(1-\hat{\rho}^2)}\right).$$

Dengan menggunakan teorema (2.4.1) , statistik uji $\Lambda^* = -2ln\Lambda$ yang dalam hal ini

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(ln\frac{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i)^2}{(1-\hat{\rho}_i^2)(1-\hat{\rho}^2)}\right) \tag{3.2.2.2}$$

akan berdistribusi *chi square* dengan derajat bebas $(k-1)$.

H_0 akan ditolak jika $\Lambda^* \geq c^*$ dimana c^* adalah suatu konstanta dari tabel $\chi^2_{(k-1)}$ (*chi square* dengan derajat bebas $(k-1)$) yang memenuhi Pr $(\Lambda^* \geq c^*) = \alpha$ dimana α merupakan suatu tingkat signifikansi yang digunakan.

BAB 4
CONTOH PENERAPAN

Dalam bab ini akan diberikan contoh dalam menguji kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi yaitu korelasi antara jumlah pembelian dan jumlah maksimum kredit yang diberikan oleh suatu distributor obat di Jakarta dari tiga kelompok pelanggan yaitu supermarket, toko obat dan warung.

Jumlah pembelian seharusnya berkorelasi positif dengan jumlah maksimum kredit. Jika tidak berkorelasi atau berkorelasi negatif maka dicurigai terdapat indikasi kecurangan yang terjadi dalam pemberian kredit. Oleh karena itu adanya korelasi antara jumlah pembelian dan jumlah maksimum kredit perlu diperhatikan. Karena pelanggan dari distributor obat tersebut terdiri dari supermarket, toko obat dan warung maka koefisien korelasi di tiga kelompok pelanggan tersebut akan dibandingkan.

Jika diperoleh hasil pengujian kesamaan koefisien korelasi dari tiga kelompok pelanggan berbeda maka besarnya koefisien korelasi antara variabel jumlah pembelian dan jumlah maksimum kredit perlu dicari dan diartikan secara terpisah untuk masing-masing kelompok pelanggan. Jika diperoleh hasil pengujian kesamaan koefisien korelasi dari tiga kelompok pelanggan tidak berbeda maka besarnya koefisien korelasi antara variabel jumlah pembelian dan jumlah maksimum kredit dapat dicari dan diartikan secara keseluruhan atau dipilih untuk satu populasi kemudian digeneralisasi sehingga biaya pengambilan sampel dapat direduksi.

4.1 Sumber Data

Data yang akan dianalisis adalah data dari suatu distributor obat di Jakarta. Data meliputi variabel jumlah pembelian dan jumlah maksimum kredit yang diberikan dari tiga kelompok pelanggan yaitu supermarket, toko obat dan warung. Dalam contoh analisis ini akan dilakukan pengujian kesamaan koefisien korelasi antara jumlah pembelian dalam skala rupiah (selanjutnya disebut pembelian) dan jumlah maksimum kredit yang diberikan dalam skala rupiah (selanjutnya disebut kredit limit) dari tiga kelompok pelanggan yaitu supermarket, toko obat dan warung. Banyaknya data dari tiga kelompok tersebut adalah 330 pelanggan dimana 107 pelanggan supermarket, 119 pelanggan toko obat dan 104 pelanggan warung. Data terlampir.

4.2 Analisis Data

Berdasarkan data yang ada, sudah diperiksa bahwa pembelian dan kredit limit berdistribusi bivariat normal untuk setiap. Selanjutnya akan dicari koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk masing-masing kelompok pelanggan yaitu supermarket, toko obat dan warung. Dari data diperoleh koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk pelanggan supermarket, toko obat dan warung berturut-turut adalah $\hat{\rho}_1 = 0.815$, $\hat{\rho}_2 = 0.393$, $\hat{\rho}_3 = 0.552$.

Kemudian akan dilakukan pengujian hipotesis sebagai berikut:

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$ (koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit dari ketiga kelompok pelanggan adalah sama)

H_1: tidak demikian (koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit dari ketiga kelompok pelanggan adalah tidak sama) .

Untuk menguji hipotesis di atas akan digunakan statistik uji seperti pada persamaan (3.2.2.2) yaitu

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{3} n_i \left(ln \frac{(1-\hat{\rho}\hat{\rho}_i)^2}{(1-\hat{\rho}_i^2)(1-\hat{\rho}^2)} \right)$$

dimana n_i adalah banyak data pada populasi ke-i dan $\hat{\rho}$ adalah taksiran maksimum likelihood dari ρ .

Dengan aturan keputusan H_0 akan ditolak jika $\Lambda^* \geq c^*$ dimana c^* adalah suatu konstanta dari tabel χ_2^2 (*chi square* dengan derajar bebas 2) yang memenuhi $\Pr(\Lambda^* \geq c^*) = \alpha$ dimana α merupakan suatu tingkat signifikansi yang digunakan.

Dari data diperoleh $\hat{\rho} = 0.639$ dan $\Lambda^* = 30.99$. Oleh karena nilai $\Lambda^* = 30.99 > 5.99$ (konstanta dari tabel χ_2^2 dengan nilai $\alpha = 0.05$) maka diperoleh suatu aturan keputusan yaitu H_0 ditolak.

Dengan demikian koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit dari ketiga kelompok pelanggan adalah tidak sama dengan tingkat kepercayaan 95% . Dari hasil tersebut diperoleh kesimpulan

- Koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit bergantung pada kelompok pelanggan
- Untuk mencari dan mengartikan koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit, faktor kelompok pelanggan perlu diperhatikan. Dengan demikian untuk kasus ini, besarnya koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk supermarket, toko obat dan warung perlu dicari dan diartikan secara terpisah untuk masing-masing kelompok, sebagai berikut :

Tabel 4. 1

Hasil koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk kelompok supermarket

Correlations

		pembelian	kredit_limit
pembelian	Pearson Correlation	1	.815**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	107	107
kredit_limit	Pearson Correlation	.815**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	107	107

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Berdasarkan tabel di atas diperoleh koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk kelompok supermarket adalah $\hat{\rho}_1 = 0.815$. Berarti untuk kelompok supermarket semakin besar pembelian maka semakin besar kredit limit dan sebaliknya semakin kecil pembelian maka akan semakin kecil kredit limit. Dari tabel di atas juga dapat disimpulkan bahwa koefisien korelasi tersebut signifikan. Karena diperoleh $\hat{\rho}_1 = 0.815$ (cukup besar) maka dengan mengetahui besar pembelian, prediksi terhadap penentuan kredit limit dapat ditentukan dengan "akurat".

Tabel 4. 2

Hasil koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk kelompok toko obat

Correlations

		pembelian	kredit_limit
pembelian	Pearson Correlation	1	.393**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	119	119
kredit_limit	Pearson Correlation	.393**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	119	119

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Berdasarkan tabel di atas diperoleh koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk kelompok toko obat adalah $\hat{\rho}_2 = 0.393$. Berarti untuk kelompok toko obat semakin besar pembelian maka semakin besar kredit limit dan sebaliknya semakin kecil pembelian maka akan semakin kecil kredit limit. Dari tabel di atas juga dapat disimpulkan bahwa koefisien korelasi tersebut signifikan. Walaupun signifikan, nilai $\hat{\rho}_2 = 0.393$ tidak cukup besar untuk memprediksi secara "akurat" penentuan kredit limit berdasarkan jumlah pembelian walaupun ada kecenderungan semakin besar jumlah pembelian maka semakin besar kredit limit dan sebaliknya.

Tabel 4. 3

Hasil koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk kelompok warung

Correlations

		pembelian	kredit_limit
pembelian	Pearson Correlation	1	.552**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	104	104
kredit_limit	Pearson Correlation	.552**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	104	104

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Berdasarkan tabel di atas diperoleh koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit untuk kelompok warung adalah $\hat{\rho}_3 = 0.552$. Berarti untuk kelompok warung semakin besar pembelian maka semakin besar kredit limit dan sebaliknya semakin kecil pembelian maka akan semakin kecil kredit limit. Dari tabel di atas juga dapat disimpulkan bahwa koefisien korelasi tersebut signifikan. Walaupun signifikan, nilai $\hat{\rho}_3 = 0.552$ tidak cukup besar untuk memprediksi secara "akurat" penentuan kredit limit berdasarkan jumlah pembelian walaupun ada kecenderungan semakin besar jumlah pembelian maka semakin besar kredit limit dan sebaliknya.

Jika koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit secara keseluruhan (tidak memperhatikan kelompok pelanggan) tetap dicari maka akan diperoleh hasil seperti pada tabel 4.4

Tabel 4. 4

Hasil koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit secara keseluruhan

Correlations

		pembelian	kredit_limit
pembelian	Pearson Correlation	1	.378**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	330	330
kredit_limit	Pearson Correlation	.378**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	330	330

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Berdasarkan tabel di atas diperoleh koefisien korelasi antara pembelian dan kredit limit secara keseluruhan (tidak memperhatikan kelompok pelanggan) adalah 0.378 . Berarti secara keseluruhan semakin besar pembelian maka semakin besar kredit limit dan sebaliknya semakin kecil pembelian maka akan semakin kecil kredit limit. Dari tabel di atas juga dapat disimpulkan bahwa koefisien korelasi tersebut signifikan. Walaupun signifikan, nilai 0.378 tidak cukup besar untuk memprediksi secara “akurat” penentuan kredit limit berdasarkan jumlah pembelian walaupun ada kecenderungan semakin besar jumlah pembelian maka semakin besar kredit limit dan sebaliknya. Padahal saat di analisis secara terpisah, pada kelompok pelanggan supermarket diperoleh prediksi yang “akurat” penentuan kredit limit berdasarkan jumlah pembelian.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Pengujian kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi dapat dilakukan dengan pengujian rasio *likelihood* berdasarkan statistik uji yang berdistribusi *chi square*.

5.2 Saran

- Pengujian kesamaan koefisien korelasi dari beberapa populasi dapat menggunakan metode lain seperti metode c(alfa) statistik
- Metode dalam tugas akhir ini dapat digunakan untuk memeriksa dipenuhinya asumsi dalam penggunaan koefisien realibilitas *Alpha Chronbach*

DAFTAR PUSTAKA

Cox, D.R., and Hinkley, D.V. 1974. *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall.

Donner, Allan & Zou, Guangyong. 2002. *Testing the Equality of Dependent Interclass Correlation Coefficients*. Journal of the Royal Statistical Society. Vol. 51, No. 3, pp. 367-379.

Hogg, Robert V. & Aleen T, Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics Fifth Edition*. New Jersey: Prentice-Hall International, Inc.

Hogg, Robert V. , Mc Kean, Joseph W. & Aleen T, Craig. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics Sixth Edition*. New Jersey: Prentice-Hall International, Inc.

Ju Chen, Yi. 2006. *Robustness Properties of Generalized Correlation Cefficient with Application to Cross-Over Designs*. The Pennsylvania State University.

Paul, S.R. 1989. *Test for the Equality of Several Correlation Coefficients.* The Canadian Journal of Statistics, Vol. 17, No. 2, pp. 217-227.

Rencher, Alvin C. 1998. *Multivariate Statistical Inference and Applications*. New York: A Willey Interscience Publication.

Roussas, George G. 1997. *A Course in Mathematical Statistics Second Edition*. San Diego: Academic Press.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Menunjukkan bahwa θ memaksimumkan $L(\theta)$ jika dan hanya jika θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Bukti bahwa jika θ memaksimumkan $L(\theta)$ maka θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Karena θ memaksimumkan $L(\theta)$ maka:

♦ $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$,

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{1}{L(\theta)} . \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{L(\theta)} . 0 \rightarrow \frac{\partial lnL(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

♦ $\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$,

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} . \frac{1}{L(\theta)} < 0 . \frac{1}{L(\theta)} \rightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} . \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) . \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} . \frac{1}{L(\theta)} < \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) . \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) . \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} . \frac{1}{L(\theta)} < \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) . 0 + 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) . \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} . \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)} . \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right) < 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial \theta}\right) < 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 lnL(\theta)}{\partial\theta^2} < 0$$

Dengan perkataan lain θ juga memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Bukti bahwa jika θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$ maka θ memaksimumkan $L(\theta)$.

Karena θ memaksimumkan $lnL(\theta)$ maka:

♦ $\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial\theta} = 0$,

$$\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial\theta} = 0 \rightarrow \frac{1}{L(\theta)}.\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = 0 \rightarrow L(\theta).\frac{1}{L(\theta)}.\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = L(\theta).0$$

$$\rightarrow \frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = 0$$

♦ $\frac{\partial^2 lnL(\theta)}{\partial\theta^2} < 0$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}.\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}\right) < 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right).\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}.\frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right).0 + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}.\frac{1}{L(\theta)} < 0 \rightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}.\frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2}.\frac{1}{L(\theta)}.L(\theta) < 0.L(\theta)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2} < 0$$

Dengan perkataan lain θ juga memaksimumkan $L(\theta)$.

Terbukti bahwa θ memaksimumkan $L(\theta)$ jika dan hanya jika θ memaksimumkan $\ln L(\theta)$.

Lampiran 2

Teorema 2.4.1

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menyatakan n variabel random yang saling bebas dan masing-masing memiliki pdf $f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, .., \theta_m)$ untuk $i = 1, 2, \ldots., n$, $(\theta_1, \theta_2, .., \theta_m) \epsilon \Omega$ dimana Ω adalah ruang parameter dengan dimensi m dan misalkan ω adalah subset dari Ω yang berdimensi r . Dapat dibuktikan bahwa distribusi *asymptotic* dari $\Lambda^* = -2\ln\Lambda = -2\ln\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$ adalah χ^2_{m-r} .

Bukti

Misalkan diambil nilai taksiran parameter $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ dari ruang taksiran parameter $\hat{\omega}$ dan taksiran parameter $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{maks}$ dari ruang taksiran parameter $\widehat{\Omega}$, maka statistik uji Λ^* dapat ditulis sebagai berikut :

$$\Lambda^* = -2\ln\frac{L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{L(\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{maks})} = -2\left(l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - l(\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{maks})\right). \tag{1}$$

Pendekatan deret Taylor orde 2 untuk mencari nilai $l(\boldsymbol{\theta})$, saat nilai $\boldsymbol{\theta} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah :

$$l(\boldsymbol{\theta}) = l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + (\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{2}$$

karena $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ merupakan taksiran maksimum *likelihood* untuk $\boldsymbol{\theta}$ maka $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} = 0$. Dan $l(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ merupakan suatu kostanta sehingga persamaannya menjadi

$$l(\boldsymbol{\theta}) \approx K + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})$$

jika persamaan diatas dinyatakan dalam bentuk eksponensial akan menjadi

$$p(\boldsymbol{\theta}|x) \approx Cexp\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})\right) \tag{3}$$

dengan C adalah suatu konstanta.

Perhatikan peubah acak X berdistribusi multivariate normal ($\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$) , pdf nya adalah

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\boldsymbol{A}^{-1}|}} exp\left(\frac{-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right) \tag{4}$$

Jika persamaan (3) dan (4) dibandingkan maka dapat disimpulkan bahwa $p(\boldsymbol{\theta}|x)$ memiliki bentuk fungsional yang sama dengan distribusi multivariate normal dimana

$$\boldsymbol{\mu} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}\right)$$

sehingga distribusi multivariat normal sering digunakan untuk mengaproksimasi distribusi $p(\boldsymbol{\theta}|x)$,

$$p(\boldsymbol{\theta}|x) \sim N\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \left(\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right)$$

dimana

$$\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta}) = \left(-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}\right)$$

karena $\boldsymbol{\theta}$ adalah vektor parameter maka $\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})$ adalah matriks.

Dengan menggunakan informasi tersebut maka dengan menggunakan dalil limit pusat akan didapat

$$\frac{\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}}{\left(\mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1/2}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

sehingga

$$\left(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T \mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \sim \chi_r^2 .$$

Persamaan (2) dapat ditulis sebagai berikut :

$$l(\boldsymbol{\theta}) - l\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \approx -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T \mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

sehingga akan diperoleh $-2\left(l(\boldsymbol{\theta}) - l\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right) \approx \left(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T \mathrm{I}(\boldsymbol{\theta})\left(\boldsymbol{\theta}-\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ (5)

Dari persamaan (1) akan diperoleh

$$\Lambda^* = -2\left(l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{maks})\right)$$

$$= 2\left(l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{maks}) - l(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right)$$

$$= 2\left[\left(l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{maks}) - l(\boldsymbol{\theta}_{maks})\right) - \left(l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - l(\boldsymbol{\theta})\right) + \left(l(\boldsymbol{\theta}_{maks}) - l(\boldsymbol{\theta})\right)\right]$$

$$= 2\left(l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{maks}) - l(\boldsymbol{\theta}_{maks})\right) - 2\left(l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - l(\boldsymbol{\theta})\right) + 2\left(l(\boldsymbol{\theta}_{maks}) - l(\boldsymbol{\theta})\right) \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (5), kita mengetahui bahwa suku pertama pada persamaan (6) diatas berdistribusi *chi square* dengan derajat bebas *m*, sementara suku kedua berdistribusi *chi square* dengan derajat bebas *r*, dan suku ketiga merupakan suatu konstanta.

Jadi terbukti bahwa $\Lambda^* = -2\left(l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{maks})\right) \sim \chi^2_{m-r}$.

Lampiran 3

Data pembelian dan kredit limit dari tiga kelompok pelanggan

supermarket		toko obat		warung	
pembelian	kredit limit	pembelian	kredit limit	pembelian	kredit limit
5250028	11111942	340925	20000000	487109	6177062
4182711	10995811	345862	20000000	399752	5697698
2971119	10817501	348502.6	20000000	289266	5519021
2864936	10754453	432875	10000000	242232	5442871
2830270	9929517	437600	10000000	152955	5167848
2544825	9604649	465750	10000000	18320	5129074
2236423	9228499	465750	10000000	133332.1	4137012
2214805	9016810	466800	9795806	323598.9	3874815
1989761	8733983	480125	9389303	329345.5	3707192
1948050	8326754	488867.5	9304412	467754.7	3551372
1892476	8324939	491150	8632082	554441	3550545
1886859	8084923	505252.6	8151283	587350.5	3397206
1819273	7762135	528275	8142002	652543	3378582
1785924	7521665	529884.9	7910506	842045.7	2961725
1782355	7247025	543312	7792602	859765.6	2772734
1749556	6927480	549780	7482392	1116083	20816869
1734082	6702542	561000	6457094	1128822	14620721
1635182	6629034	563042.5	6158553	1249943	13498435
1440549	6233953	563255	6142415	1391202	13427984
1399467	6149769	571340	5603840	1437743	12099429
1355493	32722835	591025	374337	1484039	11188404
1331203	24643543	601725	501051	1561543	10917820
1329503	24204242	604400	735799	1588800	10883242
1315995	23992352	657600	959704	1645053	10832319
1285802	22846391	659736	1007524	1705219	9740982
1029640	21037211	664000	1334657	1780065	8765813
998930	19857291	679140	1654403	1892402	7921624
8747.01	19602166	679140	2127712	2038762	7363463
46738.43	17728363	691802	2656100	3673718	7016286
79754.2	16730157	693000	2739584	3795122	6524235
83728.9	15753103	693150	3169998	3974580	299212
154250.6	15179267	698625	3317178	3994780	280701
156358	14770886	708212.5	3578413	9510990	190310
168780.2	14437006	708212.5	3622490	7160978	9860.54
197606.2	14046332	708212.5	4437503	6175818	318483.4
217040.1	13688062	711392.5	4479625	4961491	402513.5
259770.1	13679296	727650	4571989	4954611	429483.4
277050.9	13452798	741749.9	4618071	2902984	455341.8

286045	11771458	741749.9	4625858	2513137	675377.4
286787.3	11403582	764841	4759002	2409087	906019.2
296406.7	5755647	770875	4788743	2088964	2771017
365185.8	5702561	770875	5021917	2016879	2701787
370065.7	5559000	770875	5146363	1904455	2556298
409770.1	5203252	779005.7	5351751	1629784	2501494
423428.2	4478591	781375	5434514	1502555	2236498
499574.8	4221807	789502.9	5766588	1437723	1960457
522428.8	3979745	810018	5894490	1415199	1881859
526873.6	3811935	859742.5	6083798	4540693	1280311
549450.9	3658672	896309.9	7193726	4519654	1222865
557424.2	3606930	908212.5	7422395	4105214	1052199
615224.5	2475698	908212.5	7796882	3814504	1041300
647841.5	2459050	908212.5	7828524	3617279	1477635
679654.8	2023319	908212.5	8393583	3506180	1832023
680802.6	1798229	908212.5	8408521	3361452	1901567
699178	1634314	908212.5	8569515	3350673	2045652
716018.1	995855	908212.5	8574497	3304317	2780438
781153.5	977071	908212.5	9354763	2930200	2939617
789665.2	446563	908212.5	9451681	1219639	3254470
805864.4	29759	908212.5	9489805	999546	3375055
819468.5	690716.9	982387.5	9760296	943165	3441438
884408.8	871532.4	991282	9876548	817508	3618080
933962.4	1020464	1010950	10018382	815648	3673672
1004077	1385291	1010950	10280880	718449	4269843
1019639	1523611	1036480	10985780	676347	4350912
1024132	2083763	682500	11129596	4127072	4387866
1122099	2346141	677280	11381684	4237748	4423491
1130733	2581040	224664	11920971	4364588	5428534
1154626	3067192	144716	12057842	4420512	6124005
1227238	3117123	77280	12821025	4477476	6557326
1284436	3466690	53295	13413590	4504668	6738870
1301410	3852007	45901	13594417	2277123	6907161
1444760	4151766	31350	14259888	2363094	7149271
1472615	4680117	12144	14660052	2531297	7286695
1494381	5108768	104417.5	14993928	2533944	7448139
1505075	6282024	105600	15503531	2537561	7709348
1557026	7561653	132000	16277135	2848577	8265594
1567710	9547604	139725	16945422	2990340	8458968
1616355	9611399	139725	17442517	3003040	9509317
1670012	9919003	139725	18010344	3014068	9605365
1702723	10353976	139725	18660509	3164781	9750010
1725203	10429521	139725	18829257	5703743	10200345

1791044	10624234	148500	18838995	5766949	10387276
1840700	10944650	159780	18866424	5924215	10952492
1896206	11047971	186300	19438012	6042973	11057218
1910119	11249290	197450	19540674	6055760	11162057
1950132	11363993	198000	19573872	6141913	11765860
2311741	11740048	213900	19970987	6366851	11901883
2319559	12158428	225225	20084402	6422651	11921554
2401839	12350274	231000	20300005	6772091	11932106
2420559	12570676	231000	20732957	6990015	12116049
2435204	12705949	232875	22209454	4598819	12116302
2445563	13086509	232875	22607940	4744979	13021725
2676146	13112277	232875	23095092	4970754	13340999
2732926	13388113	274725	23129924	4979552	13929391
2757593	13697092	277200	23378635	5013179	15352839
2827337	14351094	280150	25110614	5113878	15762803
2839038	14441284	315375	25556492	5182999	15883925
2989625	17991338	329553.8	25604992	5268107	16603565
3117527	18303215	331500	26663375	5351653	17322631
3211872	18435030	1042888	27816088	5454283	18684585
3244314	18792061	1086805	28023088	7248505	19382755
3264894	20452135	1106213	28481161	7598754	20554710
3429181	20787890	1111813	28731402	8470289	21354955
3535139	23329631	1112010	28834007	9388228	22758352
3764266	24215141	1114963	30229439		
4107733	25059124	1136480	32143674		
5205048	27534973	1326230	32437188		
		1358280	33778232		
		1358280	34557026		
		1358280	35381766		
		1358280	36529628		
		1358280	37816738		
		1416800	40313076		
		1432510	43704333		
		1488480	44088404		
		1504416	46093604		
		1549284	48710773		
		1788480	50599068		
		1788480	50994978		