UNIVERSITAS INDONESIA

PEMETAAN KOMPATIBEL DI RUANG METRIK Q-*FUZZY*

TESIS

SITI JULAEHA
1006734621

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

PEMETAAN KOMPATIBEL DI RUANG METRIK Q-*FUZZY*

TESIS
Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Magister Sains

SITI JULAEHA
1006734621

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	**: Siti Julaeha**
NPM	**: 1006734621**
Tanda Tangan	**:**
Tanggal	**: 10 Juli 2012**

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh	:
Nama	: Siti Julaeha
NPM	: 1006734621
Program Studi	: Magister Matematika
Judul Tesis	: Pemetaan Kompatibel di Ruang Metrik Q-*Fuzzy*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	: Prof. Dra. Belawati H. W., M.Sc., Ph.D.	(Belawati)
Pembimbing II	: Arie Wibowo, S,Si., M.Si.	( )
Penguji	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom.	(Sri Mardiyati)
Penguji	: Dr. Kiki Ariyanti Sugeng	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 10 Juli 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobil ‘alamin, segala puji dan syukur hanya bagi Allah SWT Tuhan yang Maha Kuasa dan Maha Pengasih yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul Pemetaan Kompatibel di Ruang Metrik Q-*Fuzzy*. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains Program Studi Magister Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis sangat menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih banyak terdapat kekurangan meskipun bimbingan dari banyak pihak telah banyak membantu, namun keterbatasan penulis sebagai manusia yang membuatnya menjadi tidak sempurna. Penulis juga menyadari bahwa selama penyusunan tesis ini, penulis mendapat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, perkenankan penulis untuk menghaturkan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dra. Belawati H. Widjaja, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing pertama yang telah banyak memberikan masukan dan membagi ilmu yang beliau miliki agar penulis dapat menyelesaikan tesis ini;
2. Bapak Arie Wibowo, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing kedua yang telah begitu teliti membaca dan mengoreksi pekerjaan penulis agar penulis menyelesaikan tesis dengan benar;
3. Bapak Prof. Dr. Djati Kerami, selaku Ketua Program Studi Magister Matematika;
4. Bapak Dr. Hengki Tasman, M.Si., selaku dosen Pembimbing akademik;
5. Bapak Dr. Yudi Satria, M. T., selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA UI;
6. Seluruh staf pengajar di Program Studi Magister Matematika UI, atas bimbingan dan ilmu pengetahuan yang telah diberikan selama perkuliahan;

7. Bapak Dr. H. Subandi, Drs., Ir., MP., selaku Dekan Sains dan Teknologi UIN Sunan Gunung Djati Bandung;
8. Ibu Dr. Elis Ratna Wulan, M.T., selaku Ketua Jurusan Matematika UIN Sunan Gunung Djati Bandung;
9. Orangtua tercinta (Andi Rahmansyah dan Karmilah) dan mertua tercinta (Maman Hermana dan Euis Rohaeti) yang telah memberikan dukungan yang begitu besar baik moril, materiil maupun doa yang selalu terucap;
10. Agung Ramdani, suamiku tercinta dan putra putriku tersayang Kayla Khairunnisa Ramdani, Arkan Naufal Ramdani dan Raisha Shafana Ramdani, atas segala cinta, dukungan, perhatian, kesabaran, semangat, dan doa;
11. Keluarga besarku dan keluarga besar suamiku yang tidak bisa kusebutkan satu persatu, terima kasih atas dukungan dan doanya;
12. Teman-teman seperjuangan Sagita, Meilisa, mba Tri, Kak Risda, Rida, Titi, mba Fathin, Desti, Dewi, Iif, Mia, Feni, Nurma, Uun, Rifkos, Pak Pije, Pak Iwan, yang selalu saling memberi semangat dan dorongan;
13. Kepada semua teman-teman yang telah berjuang bersama dan memberi semangat terutama teman-teman magister matematika angkatan 2010;
14. Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan tesis ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu persatu, penulis ucapkan terima kasih.

Akhir kata, penulis berharap dan berdoa semoga Allah SWT yang Maha Pemurah berkenan membalas semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya, terutama untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis,

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Julaeha
NPM : 1006734621
Program Studi : Magister Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalty-Free Right***) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Pemetaan Kompatibel di Ruang Metrik Q-*Fuzzy*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/ formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 10 Juli 2012

Yang menyatakan

(Siti Julaeha)

ABSTRAK

Nama : Siti Julaeha
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Pemetaan Kompatibel di Ruang Metrik Q-*fuzzy*

Pada suatu himpunan tak kosong X, dapat ditentukan himpunan *fuzzy* $A \subseteq X$ oleh sebuah fungsi $\mu_A: X \to [0,1]$ yang disebut sebagai fungsi keanggotaan di A. Dengan konsep itu telah didefinisikan ruang metrik *fuzzy* $(X, \mu_M, *)$dan ruang metrik Q-*fuzzy* $\left(X, \mu_Q, *\right)$. Pada ruang metrik (X, d) telah dikenal pemetaan kompatibel, pada tesis ini akan dibahas pemetaan kompatibel di ruang metrik, pemetaan kompatibel di ruang G-metrik, pemetaan kompatibel di ruang metrik *fuzzy* dan pemetaan kompatibel di ruang metrik Q-*fuzzy*.

Kata kunci: ruang metrik, ruang metrik *fuzzy*, ruang metrik Q-*fuzzy*, pemetaan kompatibel.

ABSTRACT

Name : Siti Julaeha
Study Program: Magister of Mathematics
Title : Compatible Mapping on Q-fuzzy Metric Space

On a nonempty set X, can be determined a fuzzy set $A \subseteq X$ by a function $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ is called a membership function in A. With that concept has been defined fuzzy metric spaces $(X, \mu_M, *)$ and Q-fuzzy metric spaces $(X, \mu_Q, *)$. In the metric space (X, d) has been known compatible mapping, in this thesis will discuss compatible mapping on metric spaces, compatible mapping on G-metric spaces, compatible mapping on fuzzy metric spaces and compatible mapping on Q-fuzzy metric space.

Keywords: metric space, fuzzy metric space, Q-fuzzy metric space, compatible mapping.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Manusia adalah makhluk berakal yang tak pernah berhenti untuk memikirkan dan mencoba menyelesaikan masalah-masalah yang ditemuinya. Sebagaimana diketahui, dunia ini penuh dengan ketidakpastian. Seperti informasi yang diperoleh dari lingkungan, data yang dihasilkan dari pengamatan dan pengertian yang digunakan ada yang tidak jelas atau samar-samar. Gagasan seperti himpunan *fuzzy* diharapkan bisa menangani ketidakpastian tersebut dengan cara lebih matematis dan jelas.

Pada tahun 1965 konsep himpunan *fuzzy* pertama kali didefinisikan oleh Zadeh. Sejak saat itu banyak peneliti yang mempelajari himpunan *fuzzy* dan aplikasinya. Khususnya Kramosil dan Michalek (1975), dengan konsep himpunan *fuzzy* mereka memperkenalkan ruang metrik *fuzzy*. George dan Veeramani (1994) memodifikasi gagasan ruang metrik *fuzzy* dengan bantuan norm-t kontinu. Lalu Mustafa dan Sims (2006) yang memperkenalkan definisi ruang G-metrik sebagai perumuman dari ruang metrik. Terakhir Guangpeng dan Kai (2010) mendefinisikan ruang metrik Q-*fuzzy* yang bisa dianggap sebagai perumuman dari ruang metrik *fuzzy* .

Gagasan metrik *fuzzy* berkembang dalam dua perspektif yang berbeda. Satu kelompok ahli matematika mempertimbangkan metrik *fuzzy* sebagai fungsi bernilai real tak negatif yang memenuhi aksioma seperti pada metrik biasa, sedangkan kelompok lain lebih mempertimbangkan pada ke"*fuzzy*"an di metrik itu sendiri. Pendekatan yang digunakan dalam tesis ini adalah menurut perspektif yang kedua.

Sampai saat ini telah banyak penelitian mengenai pemetaan di ruang metrik *fuzzy* untuk berbagai tujuan. Kebanyakan penelitian itu merupakan pengembangan dari ruang metrik biasa. Pada ruang metrik (X, d) telah dikenal pemetaan kompatibel. Oleh karenanya di tesis ini akan dibahas mengenai pemetaan kompatibel di ruang metrik Q-*fuzzy*. Selain itu, akan dibahas pula pemetaan kompatibel di ruang G-metrik dan pemetaan kompatibel di ruang metrik *fuzzy*.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada tesis ini adalah mengenai ruang metrik, ruang G-metrik, ruang metrik *fuzzy*, ruang metrik Q-*fuzzy* dan pemetaan kompatibel di masing-masing ruang metrik tersebut.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan permasalahan di atas, tujuan penelitian ini adalah untuk mempelajari ruang metrik, ruang G-metrik, ruang metrik *fuzzy*, ruang metrik Q-*fuzzy* dan pemetaan kompatibel di masing-masing ruang metrik tersebut.

1.4 Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, tesis ataupun makalah yang relevan dengan topik penelitian.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Tujuan dari bab ini adalah untuk memberikan informasi tentang definisi-definisi dan beberapa contoh yang berguna untuk pemahaman tentang ruang metrik Q-*fuzzy*. Pembahasan akan dimulai dari himpunan *fuzzy*, ruang metrik, ruang G-metrik, ruang metrik *fuzzy* dan pemetaan kompatibel di masing-masing ruang metrik tersebut.

2.1 Himpunan *Fuzzy*

Ada berbagai macam jenis himpunan di sekitar kita. Tetapi tidak semua himpunan itu terdefinisi secara jelas. Misalnya himpunan orang kaya, himpunan orang pintar, himpunan orang tinggi dan lain sebagainya. Pada himpunan orang tinggi, tidak dapat ditentukan secara tegas apakah seseorang tinggi atau tidak. Misal didefinisikan bahwa "orang tinggi" adalah orang yang tinggi badannya lebih tinggi atau sama dengan 180 cm. Maka orang dengan tinggi badan 179 cm menurut definisi itu tidak termasuk orang tinggi. Sulit diterima bahwa orang dengan tinggi badan 179 cm bukan orang tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa batas antara kelompok orang tinggi dengan orang yang tidak tinggi tidak dapat ditentukan secara jelas. Oleh karena itu untuk mengatasi permasalahan himpunan dengan batas yang tidak jelas itu, Zadeh pada tahun 1965, memperkenalkan konsep himpunan *fuzzy*.

Dalam bahasa Indonesia, kata "*fuzzy*" berarti kabur atau tidak jelas. Misal X adalah sebuah himpunan sembarang dengan anggota dari X dinotasikan sebagai x. Himpunan *fuzzy* A di X dikarakterisasikan oleh suatu fungsi yang dinamakan fungsi keanggotaan dari A. Nilai fungsi ini pada suatu x di X disebut tingkat keanggotaan x di A. Dalam teori himpunan klasik, fungsi keanggotaan ini bernilai 0 atau 1 dan disebut fungsi karakteristik dari himpunan A.

Secara matematis himpunan *fuzzy* bisa didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Zadeh, 1965)

Himpunan *fuzzy* A di X ditentukan oleh fungsi $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$. Dengan demikian himpunan *fuzzy* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A = \{(x, \mu_A(x)): x \in X \text{ dan } \mu_A(x) \text{ menyatakan tingkat keanggotaan } x \text{ di } A\} \quad (2.1.1)$$

Selanjutnya diberikan contoh dari himpunan *fuzzy*.

Contoh 2.2

Misalnya $X = \{1,2,3, \ldots, 20\}$, pada X bisa didefinisikan sebuah himpunan *fuzzy* A dengan fungsi keanggotaan $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ sebagai berikut:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2} \quad (2.1.2)$$

Maka diperoleh:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,0.01), (2,0.01)(3,0.02), (4,0.02), (5,0.03), (6,0.05), (7,0.1), \\ (8,0.2), (9,0.5), (10,1), (11,0.5), (12,0.2), (13,0.1), (14,0.05), \\ (15,0.03), (16,0.02), (17,0.02), (18,0.01), (19,0.01), (20,0.009) \end{array} \right\} \quad (2.1.3)$$

Himpunan *fuzzy* A disebut sebuah himpunan bilangan asli yang “dekat ke 10”.

Contoh 2.3 (Klir dan Yuan, 1995)

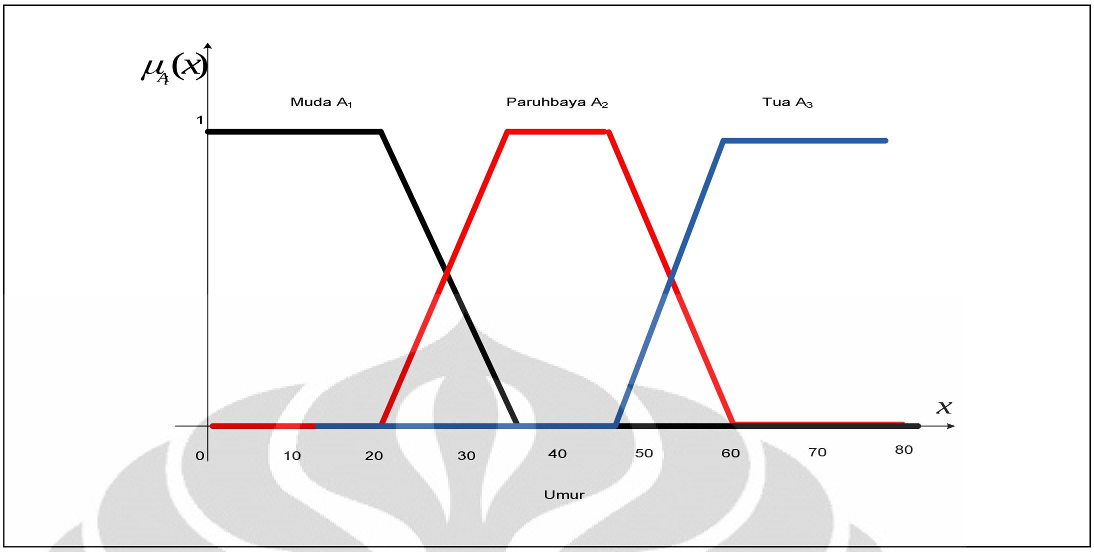
Misal X adalah himpunan orang. Pada X bisa didefinisikan himpunan *fuzzy* A_1, A_2 dan A_3 yang merepresentasikan secara berurutan konsep muda, paruhbaya dan tua terkait umur seorang manusia pada interval (0, 80] dengan fungsi keanggotaan $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ sebagai berikut:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 20 \\ (35-x)/15 & , 20 < x < 35 \\ 0 & , x \geq 35 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 20 \text{ atau } x \geq 60 \\ \frac{(x-20)}{15} & , \quad 20 < x < 35 \\ \frac{(60-x)}{15} & , \quad 45 < x < 60 \\ 1 & , \quad 35 \leq x \leq 45 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\mu_{A_3}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 45 \\ (x-45)/15 & , 45 < x < 60 \\ 1 & , x \geq 60 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

tiga fungsi keanggotaan tersebut dapat dilihat dalam grafik di gambar 2.1.



Gambar 2.1 Grafik Fungsi Keanggotaan untuk Himpunan *Fuzzy* A_1, A_2 dan A_3

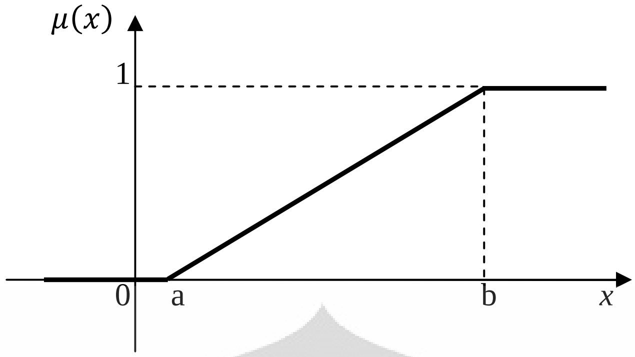
Terdapat beberapa macam fungsi keanggotaan dalam himpunan *fuzzy*, diantaranya sebagai berikut:

1. Fungsi Keanggotaan Linier (Klir dan Yuan, 1995)

Pada fungsi keanggotaan linier, fungsi keanggotaannya digambarkan sebagai suatu garis lurus. Bentuk ini paling sederhana dan menjadi pilihan yang baik untuk mendekati suatu konsep yang kurang jelas. Fungsi keanggotaan linier terdiri dari dua bentuk, yaitu fungsi keanggotaan linier naik dan fungsi keanggotaan linier turun. Pada fungsi keanggotaan linier naik, garis lurus dimulai pada nilai yang memiliki tingkat keanggotaan nol bergerak ke kanan menuju nilai yang memiliki tingkat keanggotaan lebih tinggi dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a \\ (x-a)/(b-a) & , \; a \leq x \leq b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases} \tag{2.1.7}$$

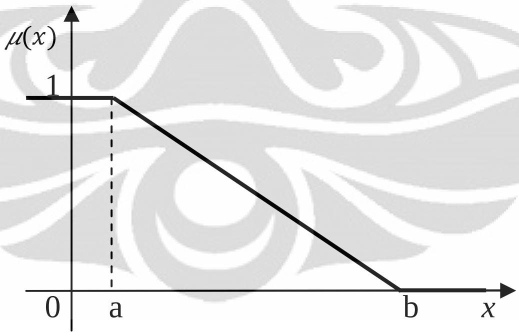
Gambar grafik fungsi keanggotaan linier naik adalah:



Gambar 2.2 Grafik Fungsi Keanggotaan Linier Naik

Sedangkan pada fungsi keanggotaan linier turun, garis lurus dimulai dari nilai dengan tingkat keanggotaan tertinggi pada sisi kiri, kemudian bergerak menurun ke nilai yang memiliki tingkat keanggotaan lebih rendah dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq a \\ (b-x)/(b-a) & , \quad a \leq x \leq b \\ 0 & , \quad x \geq b \end{cases} \tag{2.1.8}$$



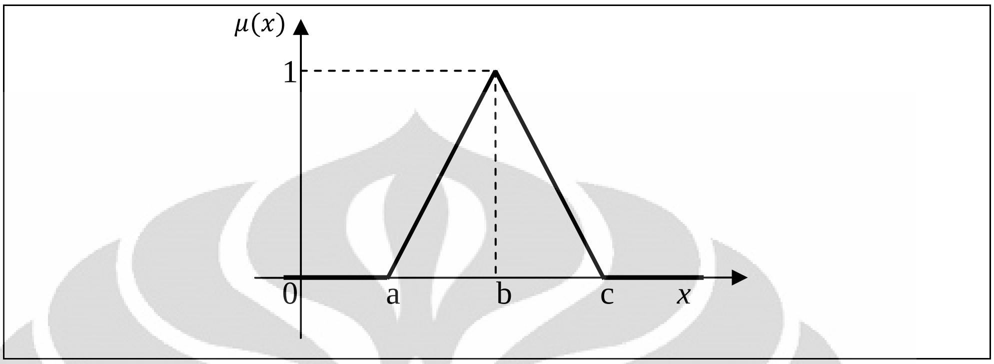
Gambar 2.3 Grafik Fungsi Keanggotaan Linier Turun

2. Fungsi Keanggotaan Segitiga (Klir dan Yuan, 1995)

Fungsi keanggotaan segitiga pada dasarnya merupakan gabungan antara dua garis. Adapun persamaan untuk bentuk segitiga ini adalah:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , x \le a \text{ atau } x \ge c \\ (x-a)/(b-a), & a \le x \le b \\ (c-x)/(c-b), & b \le x \le c \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Gambar grafik fungsi keanggotaan segitiga adalah:



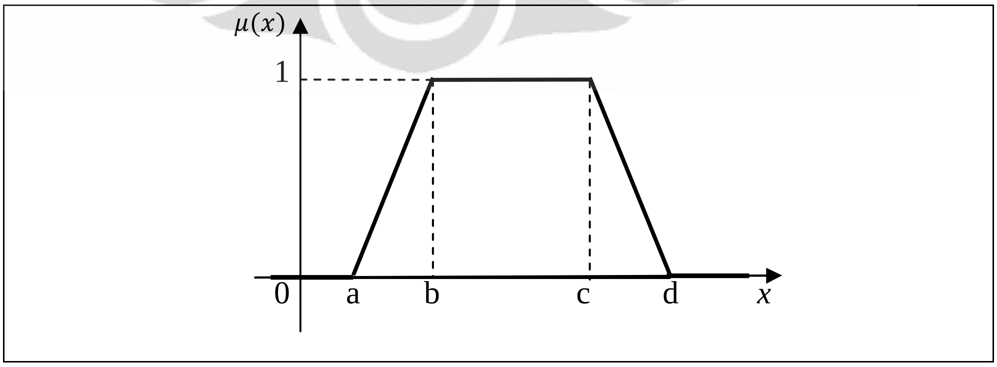
Gambar 2.4 Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga

3. Fungsi Keanggotaan Trapesium (Klir dan Yuan, 1995)

Kurva trapesium pada dasarnya seperti bentuk segitiga, hanya saja ada beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan 1. Adapun persamaan untuk kurva trapesium ini adalah :

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le a \text{ atau } x \ge d \\ (x-a)/(b-a) & , \quad a \le x \le b \\ 1 & , \quad b \le x \le c \\ (d-x)/(d-c) & , \quad c \le x \le d \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Grafik fungsi keanggotaannya adalah:



Gambar 2.5 Grafik Fungsi Keanggotaan Trapesium

Selanjutnya akan dibahas operasi yang berlaku pada himpunan *fuzzy* seperti pada himpunan biasa.

2.1.1 Operasi pada Himpunan *Fuzzy* (Zadeh, 1965)

Misalkan himpunan A dan B merupakan dua himpunan *fuzzy* dengan fungsi keangotaan $\mu_A(x)$ dan $\mu_B(x)$ untuk setiap $x \in X$. Adapun operasi-operasi dasar himpunan *fuzzy* terdiri dari :

1. $A = B$ jika dan hanya jika $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ untuk setiap $x \in X$.
2. Komplemen himpunan *fuzzy* A diberi tanda $\bar{A}$ yang memiliki fungsi keanggotaan:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{2.1.11}$$

3. $A \subset B$ jika dan hanya jika $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ untuk setiap $x \in X$.
4. Gabungan dua himpunan *fuzzy* A dan B adalah himpunan *fuzzy* C yang memiliki fungsi keanggotaan:

$$\mu_C(x) = \max\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \text{ untuk setiap } x \in X \tag{2.1.12}$$

atau disingkat dengan

$$\mu_C = \mu_A \vee \mu_B \tag{2.1.13}$$

5. Irisan dua himpunan *fuzzy* A dan B adalah himpunan *fuzzy* C yang memiliki fungsi keanggotaan:

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \text{ untuk setiap } x \in X \tag{2.1.14}$$

atau disingkat dengan

$$\mu_C = \mu_A \wedge \mu_B \tag{2.1.15}$$

Contoh 2.4

Pada contoh 2.3 sebelumnya telah didefinisikan himpunan *fuzzy* A_1, A_2 dan A_3 yang merepresentasikan secara berurutan konsep muda, paruhbaya dan tua terkait umur seorang manusia pada interval (0, 80] dengan fungsi keanggotaan $\mu_A: X \to [0,1]$ sebagai berikut:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 20 \\ (35 - x)/15 & , 20 < x < 35 \\ 0 & , x \geq 35 \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 20 \text{ atau } x \geq 60 \\ \dfrac{(x-20)}{15} & , \quad 20 < x < 35 \\ \dfrac{(60-x)}{15} & , \quad 45 < x < 60 \\ 1 & , \quad 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$\mu_{A_3}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 45 \\ (x-45)/15 & , 45 < x < 60 \\ 1 & , x \geq 60 \end{cases}$$

Maka

1. $A_1 \neq A_2$, $A_2 \neq A_3$ dan $A_1 \neq A_3$ karena $\mu_{A_1}(x) \neq \mu_{A_2}(x)$, $\mu_{A_2}(x) \neq \mu_{A_3}(x)$ dan $\mu_{A_1}(x) \neq \mu_{A_3}(x)$ untuk setiap $x \in X$.
2. Gabungan dua himpunan *fuzzy* A_1 dan A_2 adalah himpunan *fuzzy* C yang memiliki fungsi keanggotaan:

$$\mu_C(x) = \text{maks } \{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\} \tag{2.1.16}$$

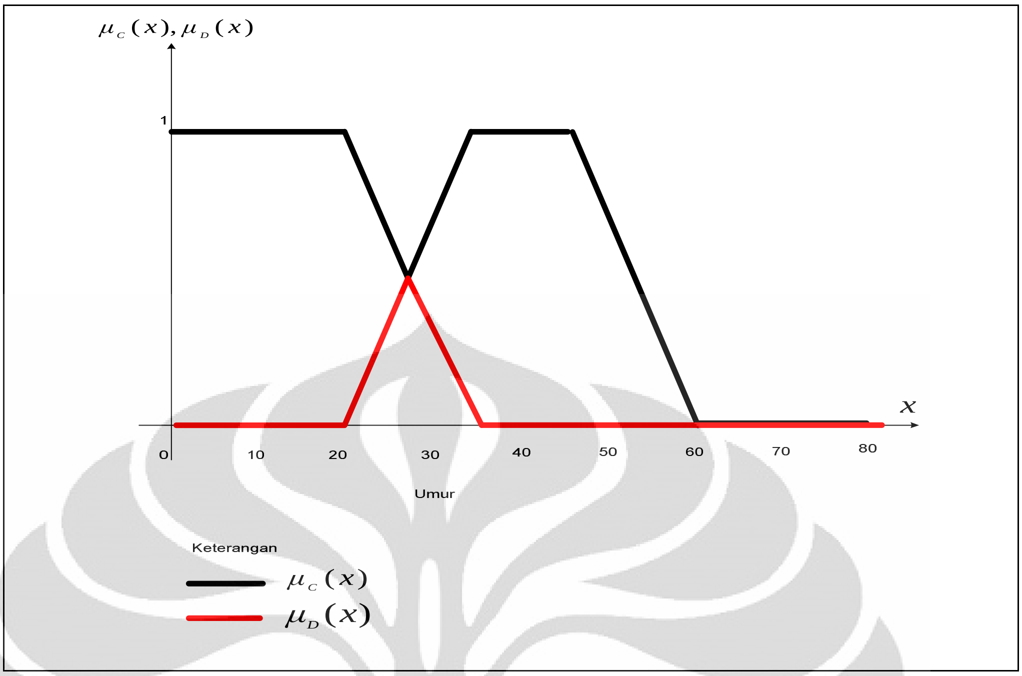
$$= \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 20 \text{ atau } 35 \leq x \leq 45 \\ \frac{(35-x)}{15} & , \quad 20 < x \leq 27.5 \\ \frac{(x-20)}{15} & , \quad 27.5 < x < 35 \\ \frac{(60-x)}{15} & , \quad 45 < x < 60 \\ 0 & , \quad x \geq 60 \end{cases} \tag{2.1.17}$$

3. Irisan dua himpunan *fuzzy* A_1 dan A_2 adalah himpunan *fuzzy* D yang memiliki fungsi keanggotaan:

$$\mu_D(x) = \min \{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\} \tag{2.1.18}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 20 \text{ atau } x \geq 35 \\ \frac{(x-20)}{15} & , \quad 20 < x \leq 27.5 \\ \frac{(35-x)}{15} & , \quad 27.5 < x < 35 \end{cases} \tag{2.1.19}$$

Grafik hasil operasi gabungan dan irisan himpunan *fuzzy* A_1 dan A_2 bisa dilihat di grafik berikut:



Gambar 2.6 Grafik Operasi Gabungan dan Irisan Himpunan *Fuzzy* A_1 dan A_2

2.2 Ruang Metrik

Pada materi kalkulus telah dipelajari fungsi-fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real $\mathcal{R}$. Selain itu juga telah dipelajari jarak dari suatu titik ke titik lain yaitu: jarak antara titik *x* dan *y* dengan $x, y \in \mathcal{R}$ yang didefinisikan dengan:

$$d(x,y) = |x - y|, \text{ untuk setiap } x, y \in \mathcal{R}. \tag{2.2.1}$$

Dapat pula dipelajari jarak pada ruang yang lebih umum dan fungsi yang didefinisikan pada ruang tersebut. Metode yang digunakan untuk jarak dan fungsi pada $\mathcal{R}$ akan membantu dalam memahami jarak dan fungsi pada ruang yang lebih umum.

Definisi 2.5 (Istratescu, 1981)

Misal X adalah sebuah himpunan tak kosong. Sebuah metrik pada X adalah sebuah pemetaan $d: X \times X \to \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$, yang memenuhi syarat-syarat berikut:

(i) $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$;

(ii) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

Contoh 2.6 (Istratescu, 1981)

Himpunan bilangan real $\mathcal{R}$ dengan fungsi d yang didefinisikan oleh $d(a, b) = |a - b|$ untuk setiap $a, b \in \mathcal{R}$ adalah sebuah ruang metrik di himpunan bilangan real $\mathcal{R}$.

Penjelasan:

(i) $d(a, b) = |a - b| \geq 0$ untuk semua $a, b \in \mathcal{R}$;

(ii) $d(a, b) = |a - b| = 0$ jika dan hanya jika $a = b$;

(iii) $d(a, b) = |a - b| = |b - a| = d(b, a)$ untuk semua $a, b \in \mathcal{R}$;

(iv) $d(a, c) = |a - c|$

$$= |(a - b) + (b - c)|$$
$$\leq |a - b| + |b - c|$$
$$= d(a, b) + d(b, c).$$

Dari (i)-(iv) terbukti bahwa $(\mathcal{R}, d)$ adalah ruang metrik.

Selanjutnya akan dibahas suatu barisan di ruang metrik (X, d).

Definisi 2.7 (Shirali, 2000)

Misal (X, d) ruang metrik. Suatu fungsi $f: \mathbb{N} \to X$ disebut barisan sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n \in X$. Suku-suku x_n di X merupakan barisan titik di X dan dinotasikan dengan (x_n).

Definisi 2.8 (Istratescu, 1981)

Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$d(x_n, x) < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \tag{2.2.2}$$

Contoh 2.9

Misalkan $X = \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$. Maka barisan (x_n) yang didefinisikan oleh $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik (X, d) konvergen ke 0.

Penjelasan:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka menurut sifat Archimedean terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Oleh karena itu, jika $n \geq n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$. Sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi barisan x_n konvergen ke 0.

Definisi 2.10 (Istratescu, 1981)

Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \ \forall n, m \geq n_0 \tag{2.2.3}$$

Setiap barisan (x_n) yang konvergen disebut barisan Cauchy.

Contoh 2.11

Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ di ruang metrik (X, d) pada contoh 2.9 adalah barisan Cauchy.

Penjelasan:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka menurut sifat Archimedean terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Oleh karena itu, jika $n, m \geq n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$. Sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n}+\frac{1}{m} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi barisan x_n adalah barisan Cauchy.

Definisi 2.12 (Istratescu, 1981)

Ruang metrik (X, d) disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy (x_n) adalah konvergen ke suatu titik di X.

Contoh 2.13

Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ di ruang metrik (X, d) pada contoh 2.9 sebelumnya telah dibuktikan konvergen dan Cauchy. Oleh karenanya menurut definisi 2.12, ruang metrik (X, d) adalah ruang metrik lengkap.

Selanjutnya akan dibahas pemetaan kompatibel di ruang metrik (X, d).

Definisi 2.14. (Jungck, 1986)

Dua pemetaan $f: X \to X$ dan $g: X \to X$ pada ruang metrik (X, d) disebut kompatibel jika $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$ mengakibatkan $\lim_{n\to\infty} d\left(f\big(g(x_n)\big), g\big(f(x_n)\big)\right) = 0$ untuk sembarang barisan (x_n) di X.

Contoh 2.15

Misal (x_n) adalah barisan di ruang metrik $(\mathcal{R}, d)$. Maka $f(x) = x^3$ dan $g(x) = 2 - x$ adalah pemetaan kompatibel.

Penjelasan:

Karena $|f(x_n) - g(x_n)| = |x_n - 1||x_n^2 + x_n + 2| \to 0$ jika $x_n \to 1$ dan $\lim_{n\to\infty}\left|f\big(g(x_n)\big) - g\big(f(x_n)\big)\right| = \lim_{n\to\infty} 6|x_n - 1|^2 = 0$ jika $x_n \to 1$ maka f dan g adalah pemetaan kompatibel di ruang metrik $(\mathcal{R}, d)$.

2.3. Ruang G-metrik

Penelitian tentang ruang metrik terus berkembang sampai akhirnya Mustafa dan Sims (2006) memperkenalkan ruang G-metrik sebagai berikut:

Definisi 2.16 (Mustafa dan Sims, 2006)
Misal X adalah himpunan tak kosong dan $G: X \times X \times X \to \mathcal{R}^{+} \cup \{0\}$ adalah sebuah fungsi yang memenuhi:

$(G1)$ $G(x, y, z) = 0$ jika $x = y = z$;

$(G2)$ $G(x, x, y) > 0$ untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x \neq y$;

$(G3)$ $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dengan $z \neq y$;

$(G4)$ $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = G(y, x, z) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (sifat simetri).

$(G5)$ $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ untuk setiap $x, y, z, a \in X$.

(sifat ketaksamaan segiempat)

Fungsi *G* disebut sebuah G-metrik pada *X*, dan pasangan (*X*,*G*) adalah ruang G-metrik.

Definisi 2.17 (Mustafa dan Sims, 2006)
Ruang G-metrik (X, G) disebut simetris jika $G(x, y, y) = G(x, x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Selanjutnya diberikan contoh ruang G-metrik.

Contoh 2.18 (Mustafa dan Sims, 2006)
Misal (X, d) adalah ruang metrik. Definisikan $G: X \times X \times X \to \mathcal{R}^{+} \cup \{0\}$ dengan $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$.
(X, G) adalah ruang G-metrik.

Penjelasan:
$(G1)$ Akan ditunjukkan $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) = 0$ jika $x = y = z$.

Karena $x = y = z$, maka $G(x, y, z) = d(x, x) + d(x, x) + d(x, x) = 0$.

$(G2)$ Akan ditunjukkan $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) > 0$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dengan $x \neq y$.

karena d adalah sebuah metrik dan $x \neq y$, maka $d(x,y) > 0$, $d(y,z) \geq 0$ dan $d(z,x) \geq 0$, sehingga:

$$G(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) > 0.$$

$(G3)$ Akan ditunjukkan $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$ untuk setiap $x,y,z \in X$ dengan $z \neq y$.

Karena

$$G(x,x,y) = d(x,x) + d(x,y) + d(y,x)$$

sedangkan $d(x,x) = 0$, sehingga:

$$G(x,x,y) = d(x,y) + d(y,x)$$

Karena d metrik, maka $d(y,x) \leq d(y,z) + d(z,x)$. Sehingga:

$$\begin{aligned} G(x,x,y) = d(x,y) + d(y,x) &\leq d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &= G(x,y,z) \end{aligned}$$

Jadi $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$ untuk setiap $x,y,z \in X$ dengan $z \neq y$.

$(G4)$ Sifat simetri dibuktikan berdasarkan sifat komutatif dan asosiatif penjumlahan bilangan real dan sifat metrik:

$d(x,y) = d(y,x)$, $d(y,z) = d(z,y)$ dan $d(z,x) = d(x,z)$. Sehingga:

- $$\begin{aligned} G(x,y,z) &= d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &= d(z,x) + d(y,z) + d(x,y) \\ &= d(x,z) + d(z,y) + d(y,x) \\ &= G(x,z,y) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} G(x,y,z) &= d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &= d(y,z) + d(z,x) + d(x,y) \\ &= G(y,z,x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} G(x,y,z) &= d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) \\ &= d(x,y) + d(z,x) + d(y,z) \\ &= d(y,x) + d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

$= G(y, x, z)$

- $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$
  $= d(z, x) + d(x, y) + d(y, z)$
  $= G(z, x, y)$
- $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$
  $= d(y, z) + d(x, y) + d(z, x)$
  $= d(z, y) + d(y, x) + d(x, z)$
  $= G(z, y, x)$

Jadi $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = G(y, x, z) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$

$(G5)$ Sifat ketaksamaan segiempat $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ untuk setiap $x, y, z, a \in X$ dibuktikan sebagai berikut:

Karena d adalah sebuah metrik, maka berlaku:

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$$

$$d(z, x) \leq d(z, a) + d(a, x)$$

Jadi,

$$\begin{aligned} G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) &\leq d(x, a) + d(a, y) + d(y, z) \\ &\quad + d(z, a) + d(a, x) \\ &\leq \big(d(x, a) + d(a, a) + d(a, x)\big) \\ &\quad + \big(d(a, y) + d(y, z) + d(z, a)\big) \\ &= G(x, a, a) + G(a, y, z) \end{aligned}$$

Dari $(G1)$ - $(G5)$ terbukti bahwa (X, G) adalah ruang G-metrik.

Karena $G(x, y, y) = d(x, y) + d(y, y) + d(y, x)$
$= d(y, y) + d(x, y) + d(y, x)$
$= d(x, y) + d(y, x)$
$= d(x, x) + d(x, y) + d(y, x)$

$$= G(x, x, y) \text{ untuk setiap } x, y \in X$$

maka ruang G-metrik (X, G) disebut simetris.

Selanjutnya dibahas suatu barisan di ruang G-metrik.

Definisi 2.19 (Mustafa dan Sims, 2006)
Misal (X, G) adalah ruang G-metrik, maka barisan (x_n) di X disebut G-Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$, untuk setiap $n, m, l \geq n_0$.

Definisi 2.20 (Mustafa dan Sims, 2006)
Misal (X, G) adalah ruang G-metrik, maka barisan (x_n) di X disebut G-konvergen ke x jika $\lim_{n,m\to\infty} G(x, x_n, x_m) = 0$. Artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(x, x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq n_0$.

Definisi 2.21 (Mustafa dan Sims, 2006)
Ruang G-metrik (X, G) dengan setiap barisan G-Cauchy di (X, G) adalah G-konvergen disebut ruang G-Metrik lengkap.

Selanjutnya akan dibahas mengenai pemetaan kompatibel di ruang G-metrik yang didefinisikan oleh Kumar (2012).

Definisi 2.22 (Kumar, 2012)
Dua pemetaan $f: X \to X$ dan $g: X \to X$ pada ruang G-metrik (X, G) disebut kompatibel jika $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$ mengakibatkan $\lim_{n\to\infty} G\Big(f\big(g(x_n)\big), g\big(f(x_n)\big), g\big(f(x_n)\big)\Big) = 0$ untuk sembarang barisan (x_n) di X.

Contoh 2.23
Misal $X = [-1,1]$ dan G adalah G-metrik pada $X \times X \times X$ dengan $G(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Misal (x_n) adalah barisan di X. Definisikan $f: X \to X$ dan $g: X \to X$ dengan $f(x) = \frac{x}{6}$ dan $g(x) = \frac{x}{2}$. Maka f, g adalah pemetaan kompatibel di ruang G-metrik.

Penjelasan:

Karena $|f(x_n) - g(x_n)| = \frac{1}{3}|x_n| \to 0$ jika $|x_n| \to 0$ dan $\lim_{n\to\infty} G\left(f\left(\frac{x_n}{2}\right), g\left(\frac{x_n}{6}\right), g\left(\frac{x_n}{6}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} G\left(\frac{x_n}{12}, \frac{x_n}{12}, \frac{x_n}{12}\right) = 0$ maka f dan g adalah pemetaan kompatibel di ruang G-metrik.

2.4 Ruang Metrik *Fuzzy*

Cara mendefinisikan ruang metrik *fuzzy* adalah salah satu masalah mendasar dalam matematika. Menurut Grabiec (1988) setidaknya ada lima konsep yang berbeda tentang ruang metrik *fuzzy*. Dalam tesis ini konsep yang akan digunakan tentang ruang metrik *fuzzy* adalah menurut Kramosil dan Michalek (1975). Mereka berpendapat bahwa dalam prakteknya jarak tidak akan pernah bisa diukur secara tepat. Hal ini bisa dilihat dari beberapa kali pengukuran jarak yang sama, hasilnya mungkin berbeda. Biasanya nilai rata-rata yang diambil dalam kasus seperti itu.

Berdasarkan konsep ruang metrik *fuzzy* yang didefinisikan oleh Kramosil dan Michalek itulah, George dan Veeramani pada tahun 1994 memodifikasi pengertian ruang metrik *fuzzy* dengan bantuan norm-t kontinu. Sebelum membahas definisi ruang metrik *fuzzy*, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai norm-t kontinu sebagai berikut:

Definisi 2.24 (Schweizer dan Sklar, 1960)

Operasi biner $*: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ disebut norm-t kontinu jika $*$ memenuhi kondisi:

(i) $*$ komutatif dan assosiatif;

(ii) $*$ kontinu;

(iii) $a * 1 = a$ untuk setiap $a \in [0,1]$;

(iv) Jika $a \leq c$ dan $b \leq d$, maka $a * b \leq c * d$ untuk $a, b, c, d \in [0,1]$.

Contoh 2.25 (Schweizer dan Sklar, 1960)

Operasi biner $*: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, didefinisikan dengan:

$$a * b = ab,\ a, b \in [0,1] \tag{2.4.1}$$

Maka * adalah norm-t kontinu.

Penjelasan:

(i) $a * b = ab$ dan $b * a = ba$ (komutatif)

$a * (b * c) = a * (bc) = abc = (ab) * c = (a * b) * c$ (assosiatif)

(ii) Akan ditunjukkan * kontinu.

$*$ adalah sebuah fungsi yang didefinisikan oleh: $*: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, dimana $*\ (a, b) = ab,\ a, b \in [0,1]$.

Karena $a, b \in [0,1]$ kontinu maka $*\ (a, b) = ab$ kontinu.

Jadi $*$ kontinu.

(iii) $a * 1 = a$ untuk setiap $a \in [0,1]$.

(iv) Akan ditunjukkan Jika $a \leq c$ dan $b \leq d$, maka $a * b \leq c * d$ untuk $a, b, c, d \in [0,1]$.

$$\text{Jika } a \leq c \text{ maka } a * b = ab \leq cb = c * b \tag{2.4.2}$$

$$\text{Jika } b \leq d \text{ maka } b * c = bc \leq dc = d * c \tag{2.4.3}$$

Dari persamaan (2.4.2) dan (2.4.3) diperoleh $a * b = ab \leq cb = bc \leq dc = cd = c * d$ sehingga $a * b \leq c * d$.

Dari (i) – (iv) terbukti bahwa * adalah norm-t kontinu.

Selanjutnya adalah definisi ruang metrik *fuzzy* yang didefinisikan oleh George dan Veeramani (1995):

Definisi 2.26 (George dan Veeramani, 1994)

X adalah himpunan tak kosong, $*$ adalah norm-t kontinu dan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan μ_M yang memenuhi kondisi berikut, untuk setiap $x, y, z \in X, s, t > 0$,

$(f1)$ $\mu_M(x, y, t) > 0$;

$(f2)$ $\mu_M(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$;

$(f3)$ $\mu_M(x, y, t) = \mu_M(y, x, t)$;

$(f4)$ $\mu_M(x, y, t) * \mu_M(y, z, s) \leq \mu_M(x, z, t + s)$;

$(f5)$ $\mu_M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0,1]$ kontinu.

μ_M disebut metrik *fuzzy* pada X dan $\mu_M(x, y, t)$ merepresentasikan derajat kedekatan antara x dan y terhadap t. Maka 3-tupel $(X, \mu_M, *)$ disebut ruang metrik *fuzzy*.

Lemma 2.27 (Aphane, 2009)

Jika $(X, \mu_M, *)$ adalah ruang metrik fuzzy, maka $\mu_M(x, y, t)$ adalah fungsi tak turun terhadap t untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti:

Andaikan $\mu_M(x, y, t) > \mu_M(x, y, s)$ untuk $0 < t < s$. Menurut definisi 2.26 sifat $(f4)$, diperoleh:

$$\mu_M(x, y, t) * \mu_M(y, y, s - t) \leq \mu_M(x, y, s) < \mu_M(x, y, t) \tag{2.4.4}$$

Karena $\mu_M(y, y, s - t) = 1$ maka $\mu_M(x, y, t) < \mu_M(x, y, t)$, kontradiksi. Jadi haruslah $\mu_M(x, y, t)$ fungsi tak turun terhadap t untuk setiap $x, y \in X$. ■

Selanjutnya diberikan contoh sebuah ruang metrik *fuzzy*. Yaitu:

Contoh 2.28 (Aphane, 2009)

Misal (X, d) adalah sebuah ruang metrik dengan $X = \mathcal{R}$. Definisikan $a * b = ab$ untuk semua $a, b \in [0,1]$ dan misalkan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\right]^{-1} \tag{2.4.5}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$. Maka $(X, \mu_M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Penjelasan:

Bisa ditunjukkan bahwa μ_M adalah sebuah metrik *fuzzy*, yaitu:

$(f1)$ $\mu_M(x,y,t) = \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\right]^{-1} > 0$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$.

$(f2)$ Akan dibuktikan $\mu_M(x,y,t) = \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\right]^{-1} = 1$ jika dan hanya jika $x = y$.

$(\Leftarrow)$

Jika $x = y$ maka $\mu_M(x,y,t) = \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\right]^{-1} = 1$.

$\forall t > 0$, misal $x = y$ maka $|x-y| = 0$. Sehingga

$$\left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\right]^{-1} = 1$$

Jadi,

$$\mu_M(x,y,t) = 1.$$

$(\Rightarrow)$

Jika $\mu_M(x,y,t) = 1$ maka $x = y$.

Karena $\mu_M(x,y,t) = 1$ maka $\left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\right]^{-1} = 1$. Jadi

$$\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right) = \exp(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|x-y|}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-y| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y$$

Sehingga terbukti bahwa $\mu_M(x,y,t) = \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\right]^{-1} = 1$ jika dan hanya jika $x = y$.

$(f3)$ Akan dibuktikan $\mu_M(x,y,t) = \mu_M(y,x,t)$.

Karena $|x-y| = |y-x|$ maka $\mu_M(x,y,t) = \mu_M(y,x,t)$.

$(f4)$ Akan dibuktikan $\mu_M(x,y,t) * \mu_M(y,z,s) \leq \mu_M(x,z,t+s)$. Untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $t, s > 0$ berlaku

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \tag{2.4.6}$$

$$|x-z| \leq \left(1+\frac{s}{t}\right)|x-y| + \left(1+\frac{t}{s}\right)|y-z| \tag{2.4.7}$$

$$|x-z| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)|x-y| + \left(\frac{t+s}{s}\right)|y-z| \tag{2.4.8}$$

atau

$$\frac{|x-z|}{t+s} \leq \frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s} \tag{2.4.9}$$

Karena $\exp(x)$ adalah fungsi naik, maka

$$\exp\left(\frac{|x-z|}{t+s}\right) \leq \exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\exp\left(\frac{|y-z|}{s}\right) \tag{2.4.10}$$

$$\Leftrightarrow \left[\exp\left(\frac{|x-z|}{t+s}\right)\right]^{-1} \geq \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right)\right]^{-1}\left[\exp\left(\frac{|y-z|}{s}\right)\right]^{-1} \tag{2.4.11}$$

Jadi terbukti bahwa $\mu_M(x,y,t) * \mu_M(y,z,s) \leq \mu_M(x,z,t+s)$.

$(f5)$ Akan dibuktikan $\mu_M(x,y,\cdot): (0,\infty) \to (0,1]$ kontinu.

Ambil barisan $(t_n) \in (0,\infty)$ sedemikian sehingga barisan (t_n) konvergen ke $t \in (0,\infty)$ yaitu

$$\lim_{n\to\infty}|t_n - t| = 0 \tag{2.4.12}$$

Karena fungsi $\exp(t)$ adalah fungsi kontinu di $\mathcal{R}$, maka $\frac{|x-y|}{t_n}$ konvergen ke $\frac{|x-y|}{t}$ saat (t_n) konvergen ke t. Oleh karena itu $\mu_M(x,y,\cdot): (0,\infty) \to [0,1]$ adalah fungsi kontinu.

Dari $(f1)$ – $(f5)$ terbukti bahwa $(X, \mu_M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Pada contoh 2.28 himpunan bilangan real $\mathcal{R}$ bisa diganti dengan himpunan tak kosong X dan metrik biasa pada $\mathcal{R}$ diganti dengan metrik sembarang d. Contoh selanjutnya menunjukkan bahwa ruang metrik menginduksi ruang metrik *fuzzy*.

Contoh 2.29 (George dan Veeramani, 1994)

Misal (X,d) adalah sebuah ruang metrik. Definisikan $a * b = ab$ untuk semua $a,b \in [0,1]$ dan misalkan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0,\infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} \tag{2.4.13}$$

untuk setiap $x,y \in X$ dan $t > 0$. Maka $(X, \mu_{M_d}, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*. μ_{M_d} disebut metrik *fuzzy* standar yang diinduksi oleh metrik d.

Penjelasan:

$(f1)$ Akan dibuktikan $\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} > 0.$

Karena d metrik, maka $d(x,y) \geq 0$ dan karena $t > 0$ diperoleh:

$$\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} > 0$$

$(f2)$ Akan dibuktikan $\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} = 1$ jika dan hanya jika $x = y.$

$(\Longrightarrow)$

Karena $\frac{t}{t+d(x,y)} = 1$, maka $t = t + d(x,y)$. Sehingga $d(x,y) = 0$, karena d metrik, maka $x = y$.

$(\Longleftarrow)$

Karena $x = y$, maka $d(y,y) = 0$ sehingga $\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} = \frac{t}{t} = 1.$

$(f3)$ Akan dibuktikan $\mu_{M_d}(x,y,t) = \mu_{M_d}(y,x,t).$

$$\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$$

karena d metrik maka $d(x,y) = d(y,x)$. Sehingga:

$$\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} = \frac{t}{t+d(y,x)} = \mu_{M_d}(y,x,t)$$

$(f4)$ Akan dibuktikan $\mu_{M_d}(x,y,t) * \mu_{M_d}(y,z,s) \leq \mu_{M_d}(x,z,t+s).$

$$\begin{aligned}\mu_{M_d}(x,y,t) * \mu_{M_d}(y,z,s) &= \frac{t}{t+d(x,y)} * \frac{s}{s+d(y,z)} \\ &= \frac{ts}{\big(t+d(x,y)\big)\big(s+d(y,z)\big)}\end{aligned}$$

Karena d metrik dan $s,t > 0$, maka

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \text{ untuk setiap } x,y,z \in X$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} tsd(x,z) &\leq ts(d(x,y) + d(y,z)) \\ \Leftrightarrow\ (t+s)ts + tsd(x,z) &\leq (t+s)ts + ts(d(x,y) + d(y,z)) \\ &\leq (t+s)ts + tsd(x,y) + tsd(y,z) + t^2d(y,z) \\ &\quad +s^2d(x,y) + (t+s)d(x,y)d(y,z) \\ &= (t+s)ts + (t+s)sd(x,y) + (t+s)td(y,z) \\ &\quad +(t+s)d(x,y)d(y,z) \end{aligned}$$

$$= (t+s)(ts + sd(x,y) + td(y,z) + d(x,y)d(y,z)$$
$$= (t+s)\big(t + d(x,y)\big)\big(s + d(y,z)\big)$$

$\Leftrightarrow \frac{ts}{(t+d(x,y))(s+d(y,z))} \leq \frac{t+s}{t+s+d(x,z)}$

Jadi,

$\mu_{M_d}(x,y,t) * \mu_{M_d}(y,z,s) = \frac{ts}{(t+d(x,y))(s+d(y,z))} \leq \frac{t+s}{t+s+d(x,z)} = \mu_{M_d}(x,z,t+s).$

$(f5)$ Akan dibuktikan $\mu_{M_d}(x,y,t)\colon (0,\infty) \to [0,1]$ kontinu.

$$\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$$

Misal

$$\mu_{M_d}(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)} = \frac{f(t)}{g(t)}$$

Karena $f(t) = t > 0$ kontinu dan $g(t) = t + d(x,y) > 0$ kontinu, maka $\frac{t}{t+d(x,y)}$ kontinu.

Dari $(f1)$ – $(f5)$ terbukti bahwa $(X, \mu_{M_d}, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Selanjutnya akan dibahas suatu barisan di ruang metrik *fuzzy* $(X, \mu_M, *)$ yaitu:

Definisi 2.30 (Aphane, 2009)

Misal $(X, \mu_M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*. Maka

1. Suatu barisan (x_n) di X konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $t > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\mu_M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_0$.
2. Suatu barisan (x_n) di X disebut Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $t > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\mu_M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq n_0$.
3. Ruang metrik *fuzzy* dengan setiap barisan Cauchy konvergen disebut lengkap.

Akibat 2.31 (Aphane, 2009)
Misal (x_n) adalah suatu barisan di ruang metrik (X, d), maka barisan (x_n) adalah barisan Cauchy di (X, d) jika dan hanya jika (x_n) barisan Cauchy di $(X, \mu_{M_d}, *)$ dengan $\mu_{M_d}(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$.

Selanjutnya diberikan contoh ruang metrik *fuzzy* lengkap.

Contoh 2.32
Pada contoh 2.29 sebelumnya telah dibuktikan bahwa $(X, \mu_{M_d}, *)$ dengan $\mu_{M_d}(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ adalah ruang metrik *fuzzy*. Misal $X = \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$ dengan metrik yang didefinisikan sebagai berikut $d(x, y) = |x - y|$. Maka barisan (x_n) yang didefinisikan oleh $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik *fuzzy* $(X, \mu_{M_d}, *)$ adalah barisan Cauchy. Jadi $(X, \mu_{M_d}, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy* lengkap.

Penjelasan:
Pada contoh 2.11 telah ditunjukkan bahwa barisan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik (X, d) adalah barisan Cauchy, maka barisan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik $(X, \mu_{M_d}, *)$ adalah barisan Cauchy. Jadi $(X, \mu_{M_d}, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy* lengkap.

Beberapa jenis pemetaan di ruang metrik *fuzzy* telah banyak diteliti untuk berbagai tujuan. Kebanyakan penelitian itu merupakan pengembangan dari pemetaan di ruang metrik biasa. Adapun pemetaan yang akan dibahas di tesis ini adalah pemetaan yang dikembangkan oleh Jungck (1986) yaitu pemetaan kompatibel. Oleh karena itu selanjutnya akan dijelaskan mengenai pemetaan kompatibel di ruang metrik *fuzzy*.

Definisi 2.33 (Jungck, 1986)
Dua pemetaan $f: X \to X$ dan $g: X \to X$ pada ruang metrik *fuzzy* $(X, \mu_M, *)$ disebut kompatibel jika $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$ mengakibatkan $\lim_{n\to\infty} \mu_M\big(f\big(g(x_n)\big), g\big(f(x_n)\big), t\big) = 1$ untuk sembarang barisan (x_n) di X.

Contoh 2.34

Pada contoh 2.29 sebelumnya telah dibuktikan bahwa $(X, \mu_{M_d}, *)$ dengan $X = \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$ adalah ruang metrik *fuzzy*. Misal (x_n) adalah barisan di X. Maka $f: X \to X$ dan $g: X \to X$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^3$ dan $g(x) = x$ adalah pemetaan kompatibel di X.

Penjelasan:

Karena $|f(x_n) - g(x_n)| = |x_n||x_n^2 - 1| \to 0$ jika $|x_n| \to 0$ dan $\lim_{n\to\infty} \mu_{M_d}\big(f\big(g(x_n)\big), g\big(f(x_n)\big), t\big) = \lim_{n\to\infty} \mu_{M_d}(x_n^3, x_n^3, t) = 1$ maka f dan g adalah pemetaan kompatibel di X.

Setelah mempelajari definisi-definisi, operasi dan contoh-contoh tentang himpunan *fuzzy*, ruang metrik, ruang G-metrik, dan ruang metrik *fuzzy* serta barisan dan pemetaan kompatibel, bab berikut akan menjelaskan tentang ruang metrik Q-*fuzzy* yang merupakan perumuman dari ruang metrik *fuzzy*. Akan dibahas pula barisan dan pemetaan kompatibel di ruang tersebut.

BAB 3
RUANG METRIK Q-*FUZZY*

Bahasan utama pada bab ini adalah tentang ruang metrik Q-*fuzzy* serta contoh dan pemetaan kompatibel di ruang metrik tersebut.

3.1 Ruang Metrik Q-*fuzzy*

Guangpeng dan Kai (2010) mengenalkan definisi ruang metrik Q-*fuzzy* yang bisa dianggap sebagai perumuman dari ruang metrik *fuzzy*. Berikut adalah definisinya:

Definisi 3.1 (Guangpeng dan Kai, 2010)
X adalah himpunan tak kosong, $*$ adalah norm-t kontinu dan Q adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan μ_Q yang memenuhi kondisi berikut, untuk setiap $x, y, z, a \in X$ dan $s, t > 0$:

$(Q1)$ $\mu_Q(x, x, y, t) > 0$ dan $\mu_Q(x, x, y, t) \leq \mu_Q(x, y, z, t)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dengan $z = y$

$(Q2)$ $\mu_Q(x, y, z, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y = z$

$(Q3)$ $\mu_Q(x, y, z, t) = \mu_Q(y, x, z, t) = \mu_Q(y, z, x, t) = \mu_Q(y, x, z, t)$

$= \mu_Q(z, x, y, t) = \mu_Q(z, y, x, t) = \mu_Q(x, y, z, t)$ (simetri)

$(Q4)$ $\mu_Q(x, a, a, t) * \mu_Q(a, y, z, s) \leq \mu_Q(x, y, z, t + s)$

$(Q5)$ $\mu_Q(x, y, z, \cdot): (0, \infty) \to [0,1]$ kontinu.

μ_Q disebut metrik Q-*fuzzy* pada X dan $\mu_Q(x, y, t)$ merepresentasikan derajat kedekatan antara x, y dan z terhadap t. Maka 3-tupel $(X, \mu_Q, *)$ disebut ruang metrik Q-*fuzzy*.

Ruang metrik Q-*fuzzy* disebut simetris jika $\mu_Q(x, y, y, t) = \mu_Q(x, x, y, t)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Contoh 3.2 (Guangpeng dan Kai, 2010)

Misal *(X,G)* adalah ruang G-metrik yang simetris. Definisikan $a * b = ab$ untuk semua $a, b \in [0,1]$ dan misalkan Q adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_Q(x, y, z, t) = \frac{t}{t + G(x,y,z)} \tag{3.1.1}$$

untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $t > 0$. Maka $(X, \mu_Q, *)$ adalah ruang metrik Q-*fuzzy*.

Penjelasan:

$(Q1)$ Akan dibuktikan $\mu_Q(x, x, y, t) = \frac{t}{t+G(x,x,y)} > 0$.

Karena G adalah G-metrik dan $t > 0$, maka $\mu_Q(x, x, y, t) = \frac{t}{t+G(x,x,y)} > 0$.

Selanjutnya, akan dibuktikan $\mu_Q(x, x, y, t) \leq \mu_Q(x, y, z, t)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dengan $z = y$. Maka

$$\mu_Q(x, x, y, t) = \frac{t}{t+G(x,x,y)} \tag{3.1.2}$$

$$\mu_Q(x, y, y, t) = \frac{t}{t+G(x,y,y)} \tag{3.1.3}$$

Karena G adalah G-metrik yang simetris maka

$$G(x, x, y) = G(x, y, y) \qquad (3.1.3)$$

sehingga untuk $t > 0$:

$$\frac{t}{t+G(x,x,y)} \leq \frac{t}{t+G(x,y,y)} \tag{3.1.4}$$

Jadi, $\mu_Q(x, x, y, t) = \frac{t}{t+G(x,x,y)} \leq \frac{t}{t+G(x,y,y)} = \frac{t}{t+G(x,y,z)} = \mu_Q(x, y, z, t)$ untuk semua $x, y, z \in X$ dengan $z = y$.

$(Q2)$ Akan dibuktikan $\mu_Q(x, y, z, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y = z$;

$(\Longrightarrow)$

Karena $\mu_Q(x, y, z, t) = \frac{t}{t+G(x,y,z)} = 1$ maka $t = t + G(x, y, z)$. Sehingga $G(x, y, z) = 0$, karena G adalah G-metrik maka $x = y = z$.

$(\Longleftarrow)$

Karena $x = y = z$ maka $\mu_Q(x, x, x, t) = \frac{t}{t+G(x,x,x)} = \frac{t}{t} = 1$.

$(Q3)$ Akan dibuktikan $\mu_Q(x, y, z, t)$ simetri.

Karena G adalah G-metrik, maka:

$$\mu_Q(x, y, z, t) = \frac{t}{t+G(x,y,z)} = \frac{t}{t+G(x,z,y)} = \frac{t}{t+G(z,x,y)} = \frac{t}{t+G(y,z,x)} = \frac{t}{t+G(y,x,z)}$$

$$= \frac{t}{t+G(z,y,x)}$$

Jadi $\mu_Q(x, y, z, t) = \mu_Q(x, z, y, t) = \mu_Q(z, x, y, t) = \mu_Q(y, z, x, t) = \mu_Q(y, x, z, t)$

$= \mu_Q(z, y, x, t)$ (simetri)

$(Q4)$ Akan dibuktikan $\mu_Q(x, a, a, t) * \mu_Q(a, y, z, s) \leq \mu_Q(x, y, z, t + s)$.

$$\mu_Q(x, a, a, t) * \mu_Q(a, y, z, s) = \frac{t}{t+G(x,a,a)} * \frac{s}{s+G(a,y,z)}$$

$$= \frac{ts}{(t+G(x,a,a))(s+G(a,y,z))}$$

Karena G adalah G-metrik dan $s, t > 0$, maka

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z) \text{ untuk setiap } x, y, z \in X$$

$$tsG(x, y, z) \leq ts\big(G(x, a, a) + G(a, y, z)\big)$$

$$(t + s)ts + tsG(x, y, z) \leq (t + s)ts + ts\big(G(x, a, a) + G(a, y, z)\big)$$

$$\leq (t + s)ts + tsG(x, a, a) + tsG(a, y, z)$$

$$+t^2G(a,y,z)+s^2G(x,a,a)$$

$$+(t+s)G(x,a,a)G(a,y,z)$$

$$=(t+s)ts+(t+s)sG(x,a,a)+(t+s)tG(a,y,z)$$

$$+(t+s)G(x,a,a)G(a,y,z)$$

$$=(t+s)(ts+sG(x,a,a)+tG(a,y,z)$$

$$+G(x,a,a)G(a,y,z))$$

$$=(t+s)\big(t+G(x,a,a)\big)\big(s+G(a,y,z)\big)$$

$\Leftrightarrow \frac{ts}{(t+G(x,a,a))(s+G(a,y,z))} \leq \frac{t+s}{(t+s)+G(x,y,z)}$

Jadi,

$\mu_Q(x,a,a,t) * \mu_Q(a,y,z,s) = \frac{ts}{(t+G(x,a,a))(s+G(a,y,z))} \leq \frac{t+s}{(t+s)+G(x,y,z)} = \mu_Q(x,y,z,t+s)$

$(Q5)$ Akan dibuktikan $\mu_Q(x,y,z,t)\colon (0,\infty) \to [0,1]$ kontinu.

$$\mu_Q(x,y,z,t) = \frac{t}{t+G(x,y,z)}$$

Misal

$$\mu_Q(x,y,z,t) = \frac{t}{t+G(x,y,z)} = \frac{f(t)}{g(t)}$$

Karena $f(t) = t > 0$ kontinu, dan $g(t) = t + G(x,y,z) > 0$ kontinu, maka

$\mu_Q(x,y,z,t) = \frac{t}{t+G(x,y,z)}$ kontinu.

Dari $(Q1)$ - $(Q5)$ terbukti bahwa $(X, \mu_Q, *)$ adalah ruang metrik Q-*fuzzy*.

Karena $\mu_Q(x,y,y,t) = \frac{t}{t+G(x,y,y)}$

$= \frac{t}{t+G(x,x,y)} = \mu_Q(x,x,y,t)$ untuk setiap $x, y \in X$

maka ruang metrik Q-*fuzzy* $(X, \mu_Q, *)$ disebut simetris.

Berikut akan dibahas mengenai sifat-sifat dari ruang metrik Q-*fuzzy* yaitu:

Lemma 3.3 (Guangpeng dan Kai, 2010)
Jika $(X, \mu_Q, *)$ adalah ruang metrik Q-*fuzzy*, maka $\mu_Q(x, y, z, t)$ adalah fungsi tak turun terhadap *t* untuk setiap *x*, *y*, *z* di *X*.

Bukti:
Misal $a = x$, menurut definisi 3.1 sifat $Q(4)$, diperoleh:

$$\mu_Q(x, x, x, t) * \mu_Q(x, y, z, s) \leq \mu_Q(x, y, z, t + s) \qquad (3.1.5)$$

Karena $\mu_Q(x, x, x, t) = 1$ maka $\mu_Q(x, y, z, t + s) \geq \mu_Q(x, y, z, t)$ untuk setiap $x, y, z \in X$. ■

Definisi 3.4 (Guangpeng dan Kai, 2010)
Pada ruang metrik Q-*fuzzy* $(X, \mu_Q, *)$, apabila $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ dan $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ dan $\lim_{n\to\infty} \mu_Q(x, y, z, t_n) = \mu_Q(x, y, z, t)$ mengakibatkan $\lim_{n\to\infty} \mu_Q(x_n, y_n, z_n, t_n) = \mu_Q(x, y, z, t)$ maka μ_Q disebut fungsi kontinu pada $X \times X \times X \times (0, \infty)$.

Selanjutnya dibahas tentang barisan di ruang metrik Q-*fuzzy*. yaitu:

Definisi 3.5 (Guangpeng dan Kai, 2010)
Misal $(X, \mu_Q, *)$ adalah ruang metrik Q-*fuzzy*. Maka

1. Suatu barisan (x_n) di X konvergen ke $x \in X$ jika $\varepsilon > 0$ dan setiap $t > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $Q(x_m, x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq n_0$.
2. Suatu barisan (x_n) di X disebut Cauchy jika untuk setiap $0 < \varepsilon < 1$ dan $t > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\mu_Q(x_m, x_n, x_l, t) > 1 - \varepsilon$ untuk setiap $l, m, n \geq n_0$.
3. Ruang metrik Q-*fuzzy* dengan setiap barisan Cauchy konvergen disebut lengkap.

Selanjutnya akan dibahas pemetaan kompatibel di ruang metrik Q-*fuzzy*, yaitu:

3.2 Pemetaan Kompatibel di Ruang Metrik Q-*Fuzzy*

Selanjutnya akan dibahas tentang pemetaan kompatibel pada ruang metrik Q-*fuzzy*.

Definisi 3.6 (Guangpeng dan Kai, 2010)

$(X, \mu_Q, *)$ adalah ruang metrik Q-*fuzzy*. Dua pemetaan $f: X \to X$ dan $g: X \to X$ pada ruang metrik Q-*fuzzy* $(X, \mu_Q, *)$ disebut kompatibel jika $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$ mengakibatkan $\lim_{n\to\infty} \mu_Q(f(g(x_n)), g(f(x_n)), g(f(x_n)), t) = 1$ untuk sembarang barisan (x_n) di X.

Contoh 3.7

Pada contoh 3.2 sebelumnya telah dibuktikan bahwa $(X, \mu_Q, *)$ dengan $\mu_Q(x, y, z, t) = \frac{t}{t + G(x,y,z)}$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $t > 0$ adalah ruang metrik Q-*fuzzy*. Misal (x_n) adalah barisan di X. Maka $f: X \to X$ dan $g: X \to X$ dengan $f(x) = x^3$ dan $g(x) = x$ adalah pemetaan kompatibel di X.

Penjelasan:

Karena $|f(x_n) - g(x_n)| = |x_n||x_n^2 - 1| \to 0$ jika $|x_n| \to 0$ dan $\lim_{n\to\infty} \mu_Q(f(g(x_n)), g(f(x_n)), g(f(x_n)), t) = \lim_{n\to\infty} \mu_Q(x_n^3, x_n^3, x_n^3, t) = 1$, maka f dan g adalah pemetaan kompatibel di X.

BAB 4
PENUTUP

4.1 Rangkuman

Sebagai penutup pada penulisan tesis ini akan diberikan ringkasan dari hasil pembahasan terhadap topik penelitian. Pembahasan tesis ini adalah terkait dengan perluasan ruang metrik ke ruang metrik Q-*fuzzy* dan pemetaan kompatibel di ruang tersebut.

Pada definisi 3.1 telah dipelajari definisi ruang metrik Q-*fuzzy*, yaitu misal X adalah himpunan tak kosong, $*$ adalah norm-t kontinu dan Q adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan μ_Q yang memenuhi kondisi berikut, untuk setiap $x, y, z, a \in X$ dan $s, t > 0$:

$(Q1)$ $\mu_Q(x, x, y, t) > 0$ dan $\mu_Q(x, x, y, t) \leq \mu_Q(x, y, z, t)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dengan $z = y$

$(Q2)$ $\mu_Q(x, y, z, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y = z$

$(Q3)$ $\mu_Q(x, y, z, t) = \mu_Q(y, x, z, t) = \mu_Q(y, z, x, t) = \mu_Q(y, x, z, t)$

$= \mu_Q(z, x, y, t) = \mu_Q(z, y, x, t) = \mu_Q(x, y, z, t)$ (simetri)

$(Q4)$ $\mu_Q(x, a, a, t) * \mu_Q(a, y, z, s) \leq \mu_Q(x, y, z, t + s)$

$(Q5)$ $\mu_Q(x, y, z, \cdot): (0, \infty) \to [0,1]$ kontinu.

μ_Q disebut metrik Q-*fuzzy* pada X dan $\mu_Q(x, y, t)$ merepresentasikan derajat kedekatan antara x, y dan z terhadap t. Maka 3-tupel $(X, \mu_Q, *)$ disebut ruang metrik Q-*fuzzy*.

Ruang metrik Q-*fuzzy* disebut simetris jika $\mu_Q(x, y, y, t) = \mu_Q(x, x, y, t)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Telah dibahas pula pemetaan kompatibel di ruang metrik Q-*fuzzy*. Yaitu, dua pemetaan $f: X \to X$ dan $g: X \to X$ pada ruang metrik Q-*fuzzy* $\left(X, \mu_Q, *\right)$ disebut kompatibel jika $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$, mengakibatkan $\lim_{n\to\infty} \mu_Q(f(g(x_n)), g(f(x_n)), g(f(x_n)), t) = 1$ untuk sembarang barisan (x_n) di X.

4.2 Saran

Penelitian ini bisa dilanjutkan pada ruang metrik yang lebih umum misalnya ruang metrik dengan hinpunan *fuzzy* pada $X \times X \times X \times X \times (0, \infty)$.

DAFTAR PUSTAKA

Aage, C. T., dan Salunke, J. N. (2010). On Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces. *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, Volume 3 No. 2 halaman 123-131.

Aphane, M. (2009). *On Some Results of Analysis in Metric Spaces and Fuzzy Metric Spaces*. Thesis. University of South Africa.

Cho, Y. J., Jungck, G. dan Kang, S. M., (1990). Common Fixed Points of Compatible Mappings. *Internat. J. Math. Sci*., Volume 13 No. 1 halaman 285-288.

Butt, A. R. (2010). *Fixed Points of Set Valued Maps*. Thesis. Department of Mathematics , Lahore University of Management Science: Lahore, Pakistan.

George, A. dan Veeramani, P. (1994). On Some Results in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 64 halaman 395 – 399.

Grabiec, M. (1988). Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 27 halaman 385-389.

Guangpeng, S. dan Kai. Y. (2010). Generalized Fuzzy Metric Spaces with Properties. *Research Journal of Applied Science, Engineering and Technology*, Volume 2 No. 7 halaman 673-678.

Mustafa, Z. dan Sims, B. (2006). A New Approach to Generalized Metric Spaces. *Journal of Nonlinier and Convex Analysis*, Volume 7 No. 2 halaman 289-297.

Istratescu. V. I. (1981). *Fixed Point Theory: An Introduction*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht: Holland.

Jungck, G. (1986). Compatible Mappings and Common Fixed Points. *Internat. J. Math. Sci*., Volume 9 No. 4 halaman 771-779.

Klir, G. J. dan Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*: *Theory and Application*. Prentice Hall: USA.

Kramosil, I., dan Michalek, J. (1975). Fuzzy Metrics and Statistical Metric Spaces. *Kybernetika*, Volume 11 No. 5 halaman 336-344.

Kumar, M. (2012). Compatible Maps in G-Metric Spaces. *Int. Journal of Math. Analysis*, Volume 6 No. 29 halaman 1415 – 1421.

Sapena, A. (2001). A Contribution to The Study of Fuzzy Metric Spaces. *Applied General Topology*, Volume 2 No. 1 halaman 63-75.

Sessa, S. (1982). On a Weak Commutativity Condition of Mappings in Fixed Point Considerations. *Publications De L' Institut Mathematique* 32 (46) halaman 149-153.

Schweizer, B. dan Sklar, A. (1960). Statistical Metric Spaces. *Pacific J. Math*. 10, halaman 313 – 334.

Shirali, S. dan Vasudeva, H. L. (2006). *Metric Spaces*. SPI Publisher Services: Pondichery, India.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets, *Information and Control*, volume 8 halaman 338 – 353.