UNIVERSITAS INDONESIA

FUNGSI PEMBANGKIT DARI POLINOMIAL CHEBYSHEV BERDASARKAN EKSPANSI BINOMIAL $(\mathbf{1} - \boldsymbol{t}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\theta}})^{-\boldsymbol{\mu}}$

SKRIPSI

SITI AYU SETIA NASTITI
0806325730

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

FUNGSI PEMBANGKIT DARI POLINOMIAL CHEBYSHEV BERDASARKAN EKSPANSI BINOMIAL $(\mathbf{1} - \boldsymbol{te^{i\theta}})^{-\mu}$

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

SITI AYU SETIA NASTITI
0806325730

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Siti Ayu Setia Nastiti
NPM	:	0806325730
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	Juli 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	:	Siti Ayu Setia Nastiti
NPM	:	0806325730
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Fungsi Pembangkit dari Polinomial Chebyshev berdasarkan Ekspansi Binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dra. Suarsih Utama, M.Si	( )
Penguji I	:	Rahmi Rusin, S.Si.,M.Sc.Tech	( )
Penguji II	:	Dra. Nora Hariadi, M.Si	( )
Penguji III	:	Dr. Hengki Tasman, M.Si	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 18 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil 'aalamiin, segala puji bagi Allah SWT, Tuhan pencipta alam semesta. Atas ridha dan karunia-Nya lah penulis telah diberikan kesempatan untuk menyelesaikan tugas akhir ini

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang terdapat dalam tugas akhir ini, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik serta saran untuk menyempurnakannya. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua yang telah sangat berjasa membantu penulis hingga akhirnya tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik, terutama kepada:

1. Ibu Dra. Suarsih Utama, M.Si selaku pembimbing tugas akhir yang telah banyak memberi motivasi penulis, menyediakan waktu, memberi saran serta memberikan banyak ilmu yang sangat berharga dan bermanfaat selama penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Ibu Dra. Netty Sunandi, M.Si selaku Pembimbing Akademis penulis yang telah mendukung penulis dalam masa perkuliahan di tiap semesternya maupun saat penulis mulai mengerjakan tugas akhir sampai dengan menyelesaikan sidang sarjana.
3. Bapak Dr. Yudhi Satria, M.T. selaku Ketua Departemen Matematika, Ibu Rahmi Rusin, S.Si., M.ScTech. selaku Sekretaris Departemen Matematika, Ibu Mila Novita, M.Si selaku Koordinator Kemahasiswaan, dan Ibu Dr. Dian Lestari, DEA selaku Koordinator Pendidikan yang banyak membantu penulis dalam masa perkuliahan maupun organisasi selama penulis menjalani kuliah disini.
4. Ibu dan ayah penulis, yang selalu mendoakan serta mendukung penulis selama penulis menjalani masa perkuliahan serta seluruh keluarga besar penulis baik yang berada di Medan, Bogor dan Lampung. Terima kasih atas doa dan semangat yang telah diberikan sampai saat ini.
5. Seluruh bapak ibu dosen di Departemen Matematika yang tidak dapat disebutkan namanya satu per satu, terima kasih telah mengajar penulis dari tahun pertama hingga tahun akhir serta banyak menyumbangkan ilmu

pengetahuan baru yang menarik yang belum pernah penulis dapatkan sebelumnya.

6. Seluruh staf tata usaha serta perpustakaan, Mba Santi, Pak Saliman, Pak Ansori, Mas Salman, Mba Rusmi, Mba Via, Pak Turino, Mas Iwan, yang telah banyak membantu seluruh kegiatan penulis selama perkuliahan serta Mas Tatang dan Mas Wawan yang banyak membantu saat penulis membutuhkan bantuan.
7. Teman-teman baik penulis Math '08, Dheni, Adhi, Andy, Arief, Cindy, Sita, Risya, Tuti, Numa, Hindun, Qq, Ade, Dhila dan teman - teman lain yang selalu mendukung Awe, Bowo, Umbu, Ega, Nita, Arman, Agy, Citra, Danis, Purwo, Arkies, Agy, Ko Hen, Mas Puput, Dede, Masykur, Juni, Dewe, Mei, Siwi, Vika, Nora, Janu, Resti, Ifah, Eka, Emy, Icha, May TA, Fani, Olin, Yulial & Yulian, Agnes, Maul, Dian, Wulan, Anisah, Uchi D, Nadia dan Uchi L, terima kasih selama ini telah mengajak penulis berbagi senyum tawa, pengalaman, cerita, dorongan semangat, selama penulis disini. *One Math, One Family*!
8. Sahabat terbaik penulis di SMA Harapan I Medan, Alviera Yuliandra, Siti Aisyah, Ayu Sari Anastasia, Kharissa Pratiwi, Ngesti Rahayu dan Taya Rizki Arini. Terima kasih atas persahabatan selama 7 tahun ini, cerita dan pengalaman yang dibagi, serta kesediaan waktu yang diluangkan untuk sekedar bertemu apabila penulis berada di Medan.
9. Sahabat terbaik penulis selama menjalani kuliah di Jakarta, Muhammad Rizky F, Muhammad Anshor, Putri Kencana, Ela Ramdhani, Faisal Putra, Patton Otlivio, dan Christiana Daraclaudia. Terimakasih telah menjadi partner karaoke dan *skating* selama ini
10. Ade Ichsan Yasir, terima kasih atas segala perhatian, dukungan, semangat yang diberikan kepada penulis dan menjadi teman jalan-jalan terbaik selama di Bandung
11. Teman hidup penulis selama 4 tahun , Yiska Natasha, Risya Priwarnela, Sri Astuti, Nuruma Nurul Malik. Terima kasih atas kuliner, monopoli, halma, runningman, belanja, karaoke dan lain-lain yang telah kita lakukan bersama selama 4 tahun yang berharga ini.

12. Ka Ajat Adriansyah dan Hendry Tanuwijaya yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan pembuktian-pembuktian pada tugas akhir ini. Terima kasih telah meluangkan waktunya selama penulis mengerjakan tugas akhir ini. #YNWA
13. Kakak - kakak angkatan 2004,2005,2006,2007. Terima kasih sudah menjadi kakak angkatan yang baik dan banyak memberi bantuan serta pengalaman berorganisasi selama ini.
14. Adik - adik angkatan 2009,2010,2011 terutama kepada Eja, Bernard, Yosua, Aid, Mario, Marsel, Rio, Nuel, Bayu dan Fariz, yang telah membuat hari-hari suram selama proses pembuatan tugas akhir ini menjadi lebih ceria.
15. Teman-teman HMD Matematika 2010 dan keluarga besar Departemen Pengabdian Masyarakat BEM FMIPA UI 2009, terima kasih atas kritik dan saran kepada penulis selama penulis menjalani organisasi maupun perkuliahan
16. Teman-teman, kakak-kakak, dan adik adik dalam seluruh kepanitiaan yang penulis jalani, terutama kepanitiaan MICEL 2009,2010,2011, FORSIL, DISKRET, LOGIKA, dan PDM.
17. Keluarga besar SMA Harapan I Medan dan SMP N 1 Binjai
18. Keluarga besar Salemba Group Depok Lama dan Nusantara.
19. Semua pihak yang telah membantu namun tidak dapat disebutkan satu per satu karena keterbatasan tempat dan daya ingat.

Dan seluruh manusia, teman, keluarga yang penulis kenal, baik saat senang maupun susah. Semoga tugas akhir ini menjadi sesuatu yang bermanfaat bagi siapapun. Maaf atas segala kekurangan yang ada. Terima kasih.

Penulis
2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Siti Ayu Setia Nastiti
NPM	:	0806325730
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Fungsi Pembangkit untuk Polinomial Chebyshev dengan Ekspansi Binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/ format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : Juli 2012

Yang menyatakan

(Siti Ayu Setia Nastiti)

ABSTRAK

Nama : Siti Ayu Setia Nastiti
Program Studi : Matematika
Judul : Fungsi Pembangkit dari Polinomial Chebyshev dengan Ekspansi Binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$

Pada tugas akhir ini akan dibahas mengenai fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev. Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua diturunkan dari ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$. Sedangkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat diturunkan dari hasil kali ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ dengan $e^{\frac{i\theta}{2}}$. Selanjutnya dengan mengintegrasikan ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ terhadap $te^{i\theta}$ untuk $\mu = 1$ akan didapat fungsi pembangkit lainnya dari Chebyshev polinomial jenis pertama dan kedua. Sedangkan fungsi pembangkit dari Chebyshev polinomial jenis ketiga dan keempat didapat dari hasil kali integrasi ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ terhadap $te^{i\theta}$ dengan $e^{-\frac{i\theta}{2}}$.

Kata Kunci : fungsi pembangkit, polinomial Chebyshev, ekspansi binomial
XIII + 61 halaman ; 4 gambar
Daftar Pustaka : 14 (1972-2010)

ABSTRACT

Name : Siti Ayu Setia Nastiti
Study Program : Mathematics
Title : Generating Function of Chebyshev Polynomials derived from Binomial Expansion of $(1-te^{i\theta})^{-\mu}$

In this minithesis, a study on generating functions of Chebyshev polinomials is carried out. The generating functions of Chebyshev polinomials of the first and second kind are derived from binomial expansion $(1-te^{i\theta})^{-\mu}$. In addition, the generating functions of the Chebyshev polinomials of the third and fourth kind can be derived from the product of binomial expansion $(1-te^{i\theta})^{-\mu}$ and $e^{\frac{i\theta}{2}}$. Furthermore, by integrating binomial expansion $(1-te^{i\theta})^{-\mu}$ to $te^{i\theta}$ for $\mu = 1$, the other generating function of Chebyshev polinomial of the first and second kind can be derived. Moreover, the other generating functions of Chebyshev polinomial of the third and fourth kind can be derived from the product of the result of the integration and $e^{-\frac{i\theta}{2}}$ for $\mu = 1$.

Keyword : generating function, Chebyshev polynomials, binomial expansion
XIII + 61 pages ; 4 pictures
Bibliography : 14 (1972-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam menyelesaikan masalah matematika, ada banyak sekali metode atau pendekatan yang dapat digunakan. Misalnya saja metode kontraposisi ataupun induksi matematika dapat digunakan dalam metode pembuktian.

Begitu juga dalam matematika diskrit, ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan. Salah satunya adalah dengan menggunakan fungsi pembangkit atau *generating function*.

Fungsi pembangkit adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan beberapa permasalahan dalam bidang matematika. Dengan mentransformasi persoalan ke dalam bentuk fungsi pembangkit, maka sifat-sifat khusus dari fungsi pembangkit dapat digunakan sebagai jalan untuk memecahkan masalah. Fungsi pembangkit ini bisa diperlakukan sebagaimana fungsi-fungsi pada umumnya. Misalnya saja pada fungsi pembangkit dapat dilakukan operasi penjumlahan, perkalian dengan suatu konstanta, maupun diferensial.

Fungsi pembangkit memiliki banyak kegunaan, misalnya untuk menyelesaikan permasalahan rekurensi, *counting*, membuktikan identitas kombinatorika, maupun aplikasi-aplikasi lain yang beragam. Dalam hal ini, fungsi pembangkit pada polinomial Chebyshev dapat digunakan untuk menyederhanakan formula deret yang rumit menjadi ekspresi aljabar sederhana.

Dalam tugas akhir ini akan dicari fungsi pembangkit dari keempat jenis polinomial Chebyshev dengan menggunakan ekspansi binomial.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup Masalah

Dalam tugas akhir ini, yang menjadi permasalahan adalah bagaimana penurunan fungsi pembangkit untuk keempat jenis Polinomial Chebyshev?

Ruang lingkup masalah pada tugas akhir ini hanya menggunakan ekspansi binomial $\left(1 - te^{i\theta}\right)^{-\mu}$ untuk nilai $\mu = 1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2$

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah menurunkan fungsi pembangkit dari keempat jenis polinomial Chebyshev dengan menggunakan ekspansi binomial.

1.4 Metode Penelitian

Metode penelitian pada tugas akhir ini adalah studi literatur.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan definisi fungsi pembangkit dan definisi polinomial Chebyshev. Selain itu akan dibahas beberapa teorema dan lemma yang diperlukan untuk mencari fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev dengan menggunakan ekspansi binomial.

2.1 Fungsi Pembangkit

Fungsi pembangkit adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam dunia matematika antara lain permasalahan rekurensi, *counting*, membuktikan identitas kombinatorika, maupun aplikasi-aplikasi lain yang beragam. Dengan mengaitkan persoalan ke dalam dunia fungsi pembangkit, maka sifat-sifat khusus dari fungsi pembangkit dapat digunakan sebagai jalan untuk memecahkan masalah.

Fungsi pembangkit ini dapat diperlakukan sebagaimana fungsi-fungsi pada umumnya. Misalnya suatu fungsi pembangkit dapat didiferensialkan.

Berikut ini akan diberikan definisi dari fungsi pembangkit.

Definisi 2.1 Diberikan barisan S (tak hingga atau terhingga) $a_0(\xi), a_1(\xi), a_2(\xi), \ldots$ dapat didefinisikan bentuk

$$G(x) = a_0(\xi) + a_1(\xi)x + a_2(\xi)x^2 + a_3(\xi)x^3 + \cdots \qquad (2.1)$$

atau $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\xi)x^i$ sebagai fungsi pembangkit dari barisan S.

(Rosen, 1995)

Selanjutnya akan didefinisikan keempat jenis polinomial Chebyshev

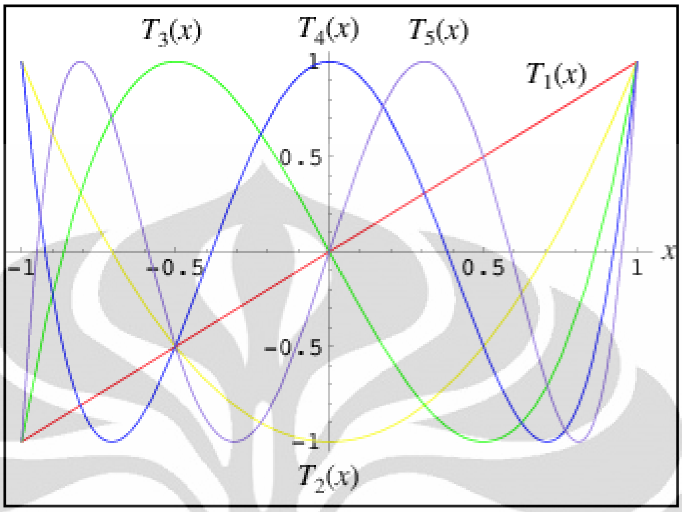
2.2 Polinomial Chebyshev

Definisi 2.2 Polinomial Chebyshev jenis pertama $T_n(x)$ adalah polinomial dalam x dengan derajat n yang didefinisikan dengan hubungan

$$T_n(x) = \cos n\theta \,,$$

dimana $x = \cos\theta\,, x \in [-1,1]\,, \theta \in [0,\pi], n \in N.$ (2.2)

(Mason & Handscomb, 2003)



Gambar 2. 1 Polinomial Chebyshev jenis pertama

[Sumber : http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html]

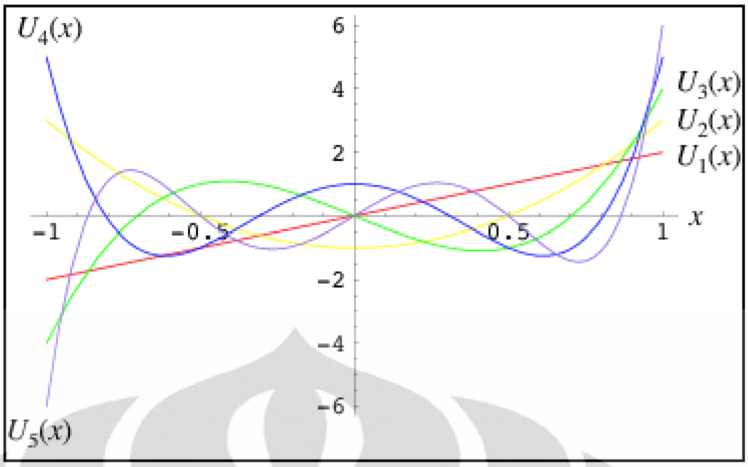
Gambar 2.1 merupakan representasi polinomial Chebyshev jenis pertama untuk nilai $n = 1, 2, 3, 4, 5.$

Definisi 2.3 Polinomial Chebyshev jenis kedua $U_n(x)$ adalah polinomial dalam x dengan derajat n yang didefinisikan sebagai

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

dimana $x = \cos\theta\,, x \in [-1,1]\,, \theta \in [0,\pi], n \in N.$ (2.3)

(Mason & Handscomb, 2003)



Gambar 2. 2 Polinomial Chebyshev jenis kedua

[Sumber: http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheSecondKind.html]

Gambar 2.2 merupakan representasi polinomial Chebyshev jenis kedua untuk nilai $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Definisi 2.4 Polinomial Chebyshev jenis ketiga $V_n(x)$ adalah polinomial dalam x dengan derajat n yang didefinisikan sebagai

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n + {}^{1}/_{2}\right)\theta}{\cos {}^{\theta}/_{2}},$$

dimana $x = \cos\theta\,, x \in [-1,1]\,, \theta \in [0,\pi], n \in N.$ (2.4)

(Mason & Handscomb, 2003)

Definisi 2.5 Polinomial Chebyshev jenis keempat $W_n(x)$ adalah polinomial dalam x dengan derajat n yang didefinisikan sebagai

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n + {}^{1}/_{2}\right)\theta}{\sin {}^{\theta}/_{2}},$$

dimana $x = \cos\theta\,, x \in [-1,1]\,, \theta \in [0,\pi], n \in N.$ (2.5)

(Mason & Handscomb, 2003)

Untuk menentukan fungsi pembangkit dengan menggunakan ekspansi binomial diperlukan beberapa identitas dalam bilangan kompleks. Oleh karena itu, berikut ini akan dibahas definisi dan beberapa sifat dari bilangan kompleks.

2.3 Bilangan Kompleks dan Sifat-sifatnya

2.3.1 Definisi Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks didefinisikan sebagai pasangan berurut (x, y) dari bilangan real yang dapat diinterpretasikan sebagai suatu titik di bidang kompleks. Karena bilangan real x dinyatakan sebagai titik $(x, 0)$ pada sumbu real, maka himpunan bilangan real merupakan subset dari himpunan bilangan kompleks. Bilangan kompleks dalam bentuk $(0, y)$ merujuk pada titik di sumbu y dan disebut *pure imaginary numbers* atau bilangan imajiner asli. Sumbu y yang dimaksud adalah sumbu imajiner dalam bidang kompleks.

Definisi 2.6 Bilangan kompleks (x, y) didefinisikan sebagai berikut

$$z = (x, y) = x + iy. \tag{2.6}$$

Bilangan real *x* dan *y* disebut bagian real dan imajiner dari *z*, maka dapat ditulis

$$\text{Re}\,(z) = x \text{ dan } \text{Im}\,(z) = y. \tag{2.7}$$

(Brown & Churchill, 2004)

Sebuah bilangan kompleks $z = x + iy$ juga dapat dinotasikan dalam bentuk eksponensial yang dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2.7 Misalkan r dan θ adalah kordinat polar dari titik (x, y) yang bersesuaian dengan sebuah bilangan kompleks tidak nol $z = x + iy$. Karena $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, bilangan z dapat ditulis dalam bentuk polar sebagai

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (2.8)$$

dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\theta = \arg z$.

Notasi $e^{i\theta}$ atau exp $(i\theta)$ dikenal sebagai *Euler's formula* dan didefinisikan sebagai berikut

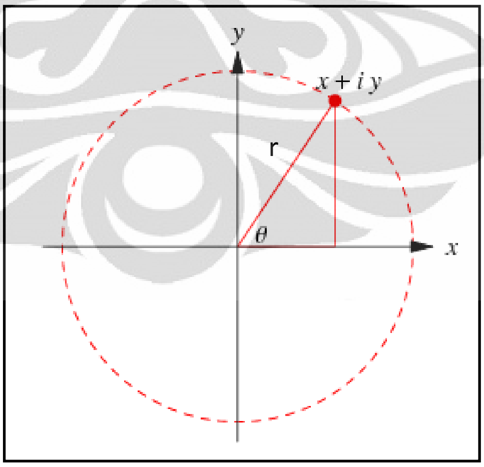
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\ , \qquad (2.9)$$

dimana θ diukur dalam satuan radian. Persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai berikut

$$z = re^{i\theta}\ . \qquad (2.10)$$

(Brown & Churchill, 2004)

Arti geometri r dan θ pada bidang kompleks ditunjukkan pada diagram berikut:



Gambar 2. 3 Diagram Argand dari titik *x+iy*

[sumber : http://mathworld.wolfram.com/ComplexNumber.html]

2.3.2 Sifat-Sifat Bilangan Kompleks

Dalam menurunkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev diperlukan beberapa sifat bilangan kompleks yang dinyatakan sebagai berikut.

Jika $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$ maka hasil penjumlahan dan perkalian dari z_1 dan z_2 didefinisikan sebagai berikut

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \tag{2.11}$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + y_2 x_1)\,. \tag{2.12}$$

(Brown & Churchill, 2004)

Jika $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ maka hasil perkalian dari z_1 dan z_2 didefinisikan sebagai berikut

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \tag{2.13}$$

(Brown & Churchill, 2004)

Lemma 2.1

Untuk sebuah bilangan kompleks $z = x + iy$ maka

$$\sqrt{x + iy} = \left(\frac{\sqrt{r + x}}{\sqrt{2}} + i\, sgn\,(y) \frac{\sqrt{r - x}}{\sqrt{2}} \right), \tag{2.14}$$

dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

dan

$$sgn(y) = \begin{cases} -1\,, y < 0 \\ \ \ 0\,, y = 0 \\ \ \ 1\,, y > 0 \end{cases}.$$

(Abramowitz & Stegun, 1972)

Bukti

Karena $r \geq |x|$ maka persamaan berikut berlaku

$$\left(\frac{\sqrt{r + x}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{r + x}{2}.$$

$$\left(\frac{\sqrt{r - x}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{r - x}{2}.$$

Dari kedua persamaan di atas diperoleh

$$\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{2}=\frac{|y|}{2}.$$

Maka

$$\left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)^2=x+i\,|y|.$$

Untuk $y>0$

$$\left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)^2=x+i\,y$$

Untuk $y<0$

$$\left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)^2=x-i\,y$$

Maka terbukti

$$\sqrt{x+iy}=\left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}}+i\,sgn\,(y)\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)$$

dengan

$$sgn(y)=\begin{cases}-1\,,y<0\\ 0\,,y=0\\ 1\,,y>0\end{cases}.$$

Lemma 2.2

Untuk suatu bilangan kompleks $z=x+iy$ maka

$$\frac{1}{\sqrt{x+iy}}=\frac{\left(\sqrt{r+x}-sgn\,(y)\sqrt{r-x}\right)}{\sqrt{2}r},\qquad(2.15)$$

dengan $r=\sqrt{x^2+y^2}$

dan

$$sgn(y)=\begin{cases}-1\,,y<0\\ 0\,,y=0\\ 1\,,y>0\end{cases}.$$

Bukti :

Dari Lemma 2.1 diperoleh

$$\sqrt{x+iy}=\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}}+i\,sgn\,(y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right).$$

Maka

$$\frac{1}{\sqrt{x+iy}}=\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}}+i\,sgn\,(y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)}\frac{\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}}-i\,sgn\,(y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}}-i\,sgn\,(y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{r+x}{2}}-i\,sgn\,(y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}}{\frac{r+x}{2}+\frac{r-y}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{r+x}{2}}-i\,sgn\,(y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}}{r}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{r+x}-sgn\,(y)\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}r}$$

Terbukti bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{x+iy}}=\frac{\left(\sqrt{r+x}-sgn\,(y)\sqrt{r-x}\right)}{\sqrt{2}r},$$

dengan

$$sgn(y)=\begin{cases}-1\,, y<0\\ 0\,, y=0\\ 1\,, y>0\end{cases}.$$

Lemma 2.3

Untuk suatu bilangan kompleks $z=x+iy$ berlaku identitas berikut

$$\ln z=\ln r+i\theta\,. \tag{2.16}$$

Bukti

Untuk suatu bilangan kompleks $z=re^{i\theta}$ lakukan operasi logaritma natural pada kedua ruas persamaan (2.16) maka diperoleh

$$\ln z=\ln\left(re^{i\theta}\right)=\ln r+\ln e^{i\theta}=\ln r+i\,\theta\,.$$

2.4 Ekspansi Binomial dalam Bilangan Kompleks

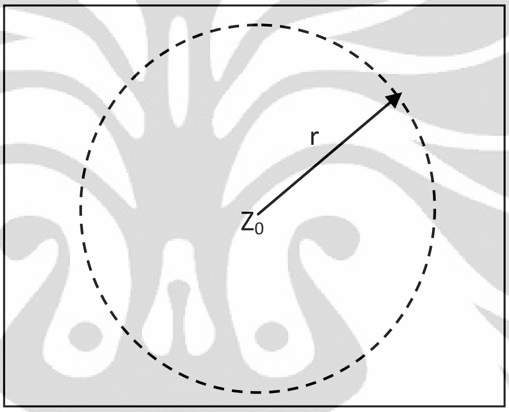
Dalam subbab ini dibahas beberapa definisi dan teorema yang digunakan dalam ekspansi binomial pada bilangan kompleks seperti deret Taylor, deret Maclaurin dan teorema binomial.

2.4.1 Deret Taylor

Definisi 2.8 Suatu fungsi dengan peubah bilangan kompleks $f(z)$ dikatakan analitik di daerah R jika dapat didiferensialkan di setiap titik pada daerah R. (Bak & Newman, 2010)

Definisi 2.9 Sebuah cakram dengan pusat z_0 dan radius r, dinotasikan dengan $|z - z_0| < r$ adalah himpunan titik titik z yang jaraknya dari z_0 kurang dari r.

Gambar 2.4 merupakan contoh cakram terbuka dengan pusat z_0 dan radius r



Gambar 2. 4 Cakram dengan pusat z_0 radius r

Sumber : http://mathworld.wolfram.com/OpenDisk.html

Teorema 2.1

Misalkan sebuah fungsi f analitik pada sebuah cakram $|z - z_0| < R_0$. Maka $f(z)$ mempunyai representasi deret

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ ; \ |z - z_0| < R_0 \,, \qquad (2.17)$$

dimana

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ ; \ n = 0,1,2, \dots . \qquad (2.18)$$

Deret pada persamaan (2.17) konvergen ke $f(z)$ ketika z berada di dalam cakram yang terbuka dengan pusat z_0 dan jari-jari R_0.

(Brown & Churchill, 2004)

Persamaan (2.17) merupakan ekspansi dari fungsi $f(z)$ dalam deret Taylor di sekitar titik z_0, dengan kesepakatan bahwa $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ dan 0! = 1 . Persamaan (2.17) dapat ditulis menjadi

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots \qquad (2.19)$$

Untuk $z_0 = 0$ persamaan dapat ditulis menjadi

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots \quad ; |z| < R_0. \qquad (2.20)$$

yang merupakan bentuk khusus dari deret Taylor yaitu deret Maclaurin.

Selanjutnya pada subbab berikut dibahas mengenai teorema binomial dan koefisien binomial pada bilangan kompleks.

2.4.2 Teorema Binomial

Dalam matematika, teorema binomial adalah rumus penting yang memberikan ekspansi pangkat dari penjumlahan. Pertama-tama akan didefinisikan koefisien binomial. Koefisien binomial dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi faktorial sebagai berikut.

Definisi 2.10 Untuk $k \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{R}$, maka kombinasi k dari p didefisikan sebagai b

$$\binom{p}{k} = C_k^p = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k!}. \qquad (2.21)$$

Selanjutnya akan didefinisikan bentuk umum dari deret binomial.

Definisi 2.11 Bentuk umum deret binomial dapat dinyatakan sebagai

$$(a + x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k a^{p-k} \ . \qquad (2.22)$$

(Abramowitz, Stegun, 1972)

Selanjutnya akan dibuktikan sebuah lemma yang akan menjadi dasar dalam pembuktian teorema-teorema pada Bab 3.

Lemma 2.4

Untuk suatu bilangan kompleks z , maka persamaan berikut berlaku

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{n} z^n . \qquad (2.23)$$

Bukti

untuk $f(z) = (1-z)^{-(\beta+1)}$ maka $f(0) = 1$

$f'(z) = (\beta+1)(1-z)^{-\beta-2}$ maka $f'(0) = \beta + 1$

$f''(z) = (\beta+1)(\beta+2)(1-z)^{-\beta-3}$ maka $f''(0) = (\beta+1)(\beta+2)$

$\vdots$

Dari deret Maclaurin diperoleh

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + (\beta+1)z + (\beta+1)(\beta+2)z^2 + \cdots \\ &= \binom{\beta}{0} + \binom{\beta+1}{1} z + \binom{\beta+2}{2} z^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{n} z^n . \end{aligned}$$

2.5 Fungsi Gamma

Definisi 2.11 Fungsi Gamma dari bilangan p atau ditulis sebagai $\Gamma(\mathrm{p})$ untuk p bilangan real positif didefinisikan sebagai

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx . \qquad (2.24)$$

Karena $\Gamma(1) = 1$ maka untuk p bilangan real positif berlaku persamaan berikut

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \qquad (2.25)$$

Selanjutnya untuk $p = n$ dimana n adalah bilangan bulat positif berlaku

$$\Gamma(n) = (n-1)! . \qquad (2.26)$$

(Bronson, 2003)

BAB 3
FUNGSI PEMBANGKIT DARI POLINOMIAL CHEBYSHEV BERDASARKAN EKSPANSI BINOMIAL $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$

Pada bab ini dibahas himpunan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama, kedua, ketiga, dan keempat. Ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk menentukan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev. Pada tugas akhir ini digunakan ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ untuk memperoleh fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev. Dari ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ diperoleh bentuk umum utama dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama, kedua, ketiga dan keempat yaitu

$$\frac{1}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n} + \mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}.$$

Dari bentuk umum utama ini dapat diperoleh fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua. Jika kedua ruas pada persamaan yang menyatakan bentuk umum utama ini di kalikan dengan $e^{\frac{i\theta}{2}}$ maka akan didapat

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n} + \mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n \left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + i \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

yang merupakan bentuk umum dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat. Bila kedua ruas pada persamaan yang menyatakan bentuk umum utama ini di integralkan terhadap $te^{i\theta}$ untuk $\mu = 1$ diperoleh bentuk umum yang lain dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua yaitu

$$-\ln\left(1 - te^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}{n+1}.$$

Jika kedua ruas dari persamaan diatas dikalikan dengan $e^{\frac{-i\theta}{2}}$ akan diperoleh

$$\sqrt{\frac{x+1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$
$$+i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

yang merupakan bentuk umum fungsi pembangkit yang lain dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat.

Pada Subbab 3.1 dibahas penurunan bentuk umum utama dari semua fungsi pembangkit polinomial Chebyshev berdasarkan ekspansi binomial $(1-te^{i\theta})^{-\mu}$. Dari bentuk umum utama ini diturunkan bentuk umum dari masing-masing fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama, kedua, ketiga dan keempat.

Pada Subbab 3.2 dibahas fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua untuk nilai $\mu = 1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2$. Sedangkan pada Subbab 3.3 dibahas fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshv jenis ketiga dan keempat untuk nilai $\mu = 1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2$. Untuk selanjutnya akan digunakan notasi $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, dan $R = \sqrt{1-2xt+t^2}$.

3.1 Bentuk Umum Fungsi Pembangkit Polinomial Chebyshev

Pertama-tama akan dibahas bentuk umum utama dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama, kedua , ketiga dan keempat seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.1.1

Untuk $|t| < 1$, ekspansi binomial dari $(1-te^{i\theta})^{-\mu}$ dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^n e^{in\theta}\ .$$

Bukti :

Dari Lemma 2.4 didapat

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{n} z^n \ ,$$

Untuk $z = te^{i\theta}$ dan $\beta + 1 = \mu$ diperoleh

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\mu-1}{n} (te^{i\theta})^n$$

$$= \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\ldots(\mu+1)\mu}{n!} \times \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}$$

$$= \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\ldots(\mu+1)\Gamma(\mu+1)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta} .$$

Jadi terbukti bahwa

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta} . \tag{3.1}$$

Persamaan (3.1) merupakan bentuk umum dari fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama, kedua, ketiga dan keempat. Fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama bisa diturunkan dari bagian real pada persamaan (3.1) untuk berbagai nilai μ . Sedangkan bagian imajiner pada persamaan (3.1) dapat diturunkan menjadi fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis 2 untuk berbagai nilai μ.

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dapat pula diturunkan dari hasil integrasi persamaan (3.1) terhadap $te^{i\theta}$ untuk nilai $\mu = 1$. Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dapat diturunkan dari bagian real hasil integrasi tersebut sedangkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis kedua diturunkan dari bagian imajinernya.

Berikut ini dibuktikan suatu identitas yang merupakan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua untuk nilai $\mu = 1$.

Teorema 3.1.2

Untuk nilai $|t| < 1$ maka persamaan berikut berlaku

$$-\ln\left(1 - te^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{n+1}.$$

Bukti:

Dari persamaan (3.1) diperoleh

$$\frac{1}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n} + \mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}.$$

Integralkan kedua ruas pada persamaan (3.1) terhadap $te^{i\theta}$ untuk $\mu = 1$.

Susbtitusikan $u = 1 - te^{i\theta}$, maka diperoleh hasil integrasi ruas kiri persamaan (3.1) adalah

$$\int \frac{1}{1 - te^{i\theta}} d(\,te^{i\theta}) = -\int \frac{1}{u} du$$

$$= -\ln u + c = -\ln\,(1 - te^{i\theta}) + c\,. \tag{3.2}$$

Sedangkan hasil integrasi ruas kanan persamaan (3.1) adalah

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n} + 1)}{n!\,\Gamma(1)} t^n e^{in\theta}\, d\left(te^{i\theta}\right) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!\,\Gamma(1)} t^n e^{in\theta}\, d\left(te^{i\theta}\right)$$

$$= \int \sum_{n=0}^{\infty} \left(te^{i\theta}\right)^n d\left(te^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(te^{i\theta}\right)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}{n+1}. \tag{3.3}$$

Dari persamaan (3.2) dan (3.3) didapat

$$-\ln\left(1 - te^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}{n+1}\ . \tag{3.4}$$

Persamaan (3.4) merupakan bentuk umum dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua untuk nilai $\mu = 1$.

Selanjutnya akan dibuktikan suatu identitas yang didapat dari hasil kali kedua ruas persamaan (3.1) dengan $e^{\frac{i\theta}{2}}$ yang merupakan bentuk umum fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat dan dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 3.1.3

Bentuk umum fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat adalah

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n \left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + i \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

Bukti:

Dari persamaan (3.1) didapat

$$\frac{1}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}.$$

Jika kita kalikan kedua ruas persamaan (3.1) dengan $e^{\frac{i\theta}{2}}$ maka didapat

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right). \qquad (3.5)$$

Maka terbukti bahwa persamaan (3.5) merupakan bentuk umum dari fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat.

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga bisa diturunkan dari bagian real pada persamaan (3.5) untuk berbagai nilai μ . Sedangkan bagian imajiner pada persamaan (3.5) dapat diturunkan menjadi fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis keempat untuk berbagai nilai μ.

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat dapat pula diturunkan dari hasil kali persamaan (3.4) dengan $e^{\frac{-i\theta}{2}}$. Fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis ketiga dapat diturunkan dari bagian real hasil kali persamaan (3.4) dengan $e^{\frac{-i\theta}{2}}$. Sedangkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis keempat dapat diturunkan dari bagian imajinernya.

Berikut ini akan dibuktikan suatu teorema yang merupakan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat dan dinyatakan dalam persamaan berikut

Teoremsa 3.1.4

Untuk nilai $|t| < 1$ maka persamaan berikut berlaku

$$\sqrt{\frac{x+1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$+ i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}\cos(n+\frac{1}{2})\theta + i\,t^{n+1}\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{n+1}.$$

Bukti

Pertama-tama akan dicari bentuk lain dari persamaan (3.4) . Dari persamaan (3.4) diperoleh

$$-\ln\left(1 - te^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{n+1}.$$

Ruas kiri dari persamaan (3.4) dapat juga dinyatakan sebagai berikut

$$-\ln\left(1 - te^{i\theta}\right) = -\ln(1 - t\cos\theta - i\,t\sin\theta). \tag{3.6}$$

Berdasarkan Lemma 2.3 maka persamaan (3.6) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}
-\ln\left(1 - te^{i\theta}\right) &= -\ln(\sqrt{(1 - t\cos\theta)^2 + (-t\sin\theta^2)}) - i\ \tan^{-1}\left(\frac{-t\sin\theta}{1 - t\cos\theta}\right) \\
&= -\ln(\sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta}) \\
&\qquad + i\ \tan^{-1}\left(\frac{t\sin\theta}{1 - t\cos\theta}\right) \\
&= -\ln\sqrt{1 - 2tx + t^2} + i\ \tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1 - x^2}}{1 - tx}\right) \\
&= -\ln(1 - 2xt + t^2)^{1/2} + i\ \tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1 - x^2}}{1 - tx}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1 - 2xt + t^2) + i\ \tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1 - x^2}}{1 - tx}\right)\ .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sedangkan untuk ruas kanan dari persamaan (3.4) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta)}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}\cos(n+1)\theta + i\,t^{n+1}\sin(n+1)\theta}{n+1}\ .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Berdasarkan persamaan (3.7) dan (3.8) maka didapat

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+i\ \tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-tx}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\cos(n+1)\theta+i\,t^{n+1}\sin(n+1)\theta}{n+1}\ . \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) merupakan bentuk lain dari persamaan (3.4) .Selanjutnya akan dicari hasil kali kedua ruas persamaan (3.9) dengan $e^{\frac{-i\theta}{2}}$.

Kalikan ruas kiri persamaan (3.9) dengan $e^{\frac{-i\theta}{2}}$ maka diperoleh

$$e^{\frac{-i\theta}{2}}\left(-\ln\left(1-te^{i\theta}\right)\right)=e^{\frac{-i\theta}{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+i\ \tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$=\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+i\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\ln(1-2xt+t^2)+i\cos\frac{\theta}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)$$

$$+i\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\ln(1-2xt+t^2)$$

$$+\sin\frac{\theta}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}\ln(1-2xt+t^2)+i\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)$$

$$+i\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\ln(1-2xt+t^2)$$

$$+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$+i\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)\ . \tag{3.10}$$

Sedangkan hasil kali ruas kanan persamaan (3.9) dengan $e^{-\frac{i\theta}{2}}$adalah

$$e^{-\frac{i\theta}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right))\theta+i\,t^{n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}. \quad (3.11)$$

Dari persamaan (3.10) dan (3.11) diperoleh

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$
$$+i\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+i\,t^{n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1} \quad (3.12)$$

Persamaan (3.12) merupakan bentuk umum lainnya dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat untuk nilai $\mu=1$.

3.2 Fungsi Pembangkit Polinomial Chebyshev Jenis Pertama dan Kedua

Pada subbab ini akan diturunkan fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dengan menggunakan bagian real dan bagian imajiner dari kedua ruas persamaan (3.1). Teorema – teorema yang menyatakan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua merupakan akibat dari Teorema 3.1.1 untuk nilai $\mu=1,2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-2$.

Selain itu juga akan diturunkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua dengan menggunakan bagian real dan imajiner dari kedua ruas persamaan (3.4) . Teorema – teorema yang menyatakan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua merupakan akibat dari Teorema 3.1.2 untuk nilai $\mu=1$.

Akibat 3.2.1

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua untuk nilai $\mu = 1$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}.$$

Bukti

Dari persamaan (3.1) didapat

$$\frac{1}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n} + \mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}$$

Oleh karena itu, untuk nilai $\mu = 1$ persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$\left(\frac{1}{1 - te^{i\theta}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n} + 1)}{n!\,\Gamma(1)} t^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{n}!}{n!} t^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)\,. \tag{3.13}$$

Bentuk $\frac{1}{1 - te^{i\theta}}$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{1}{1 - te^{i\theta}} = \frac{1}{1 - t(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta}$$

$$= \left(\frac{1}{1 - tx - ity}\right)\left(\frac{(1 - tx) + ity}{(1 - tx) + ity}\right) = \frac{(1 - tx) + ity}{(i - tx)^2 + (-ty)^2}$$

$$= \frac{1 - tx + ity}{1 - 2tx + t^2x^2 + t^2(1 - x^2)} = \frac{1 - tx + ity}{1 - 2tx + t^2} \tag{3.14}$$

Jadi dari persamaan (3.13) dan (3.14) didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \frac{1 - tx + ity}{1 - 2tx + t^2}. \tag{3.15}$$

Dari persamaan (3.15) dapat diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis pertama dan kedua yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.15).

Untuk bagian real persamaan (3.15) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n(\cos n\theta) = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}.$$

Untuk bagian imajiner persamaan (3.15) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n(\sin n\theta) = \frac{t\ sin\theta}{1 - 2tx + t^2}$$

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n(\sin n\theta) = \frac{t\ sin\theta}{1 - 2tx + t^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{t}^{\mathrm{n+1}} \sin(n+1)\theta = \frac{t\ sin\theta}{1 - 2tx + t^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{t}^{\mathrm{n}} \sin(n+1)\theta = \frac{sin\theta}{1 - 2tx + t^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{1 - 2tx + t^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}.$$

Akibat 3.2.2

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua untuk nilai $\mu = 2$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, t^n T_n(x) = \frac{1 - 2tx + 2x^2t^2 - t^2}{(1 - 2tx + t^2)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\, t^n U_n(x) = \frac{2(1 - xt)}{(1 - 2tx + t^2)^2}.$$

Bukti

Dari persamaan (3.1) diperoleh

$$\frac{1}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}.$$

Oleh karena itu, untuk nilai $\mu = 2$ persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{1}{(1 - te^{i\theta})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+2)}{n!\,\Gamma(2)} t^n e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{n}+1)!}{n!\,1!} t^n e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n \cos n\theta + i(n+1)t^n \sin n\theta. \qquad (3.16)$$

Sedangkan $\frac{1}{\left(1 - te^{i\theta}\right)^2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^2} = \frac{1}{1-2t(\cos\theta + i\sin\theta) + t^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}$$

$$= \frac{1}{1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta + i(-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)}$$

$$\left(\frac{1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta - i(-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)}{1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta - i(-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)}\right)$$

$$= \frac{1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta + i(2t\sin\theta - t^2\sin 2\theta)}{(1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta)^2 + (-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)^2}. \qquad (3.17)$$

Jika dimisalkan

$$a = (1-2\cos\theta + t^2\cos 2\theta)^2$$

$$= (1-2t\cos\theta)^2 + 2(1-2t\cos\theta)t^2\cos 2\theta + (t^2\cos 2\theta)^2$$

$$= 1 - 4t\cos\theta + 4t^2\cos^2\theta + 2t^2\cos 2\theta - 4t^3\cos\theta\cos 2\theta + t^4\cos^2 2\theta$$

dan

$$b = (-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)^2$$

$$= 4t^2\sin^2\theta - 4t^3\sin\theta\sin 2\theta + t^4\sin^2 2\theta$$

Maka didapat

$$a + b = 1 - 4t\cos\theta + 4t^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2t^2\cos 2\theta$$
$$- 4t^3(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) + t^4(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)$$

$$= 1 - 4t\cos\theta + 4t^2 + 2t^2(2cos^2\theta - 1) - 4t^3\cos\theta + t^4$$

$$= 1 - 4t\cos\theta + 4t^2 + 4t^2cos^2\theta - 2t^2 - 4t^3\cos\theta + t^4.$$

Maka persamaan (3.17) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^2} = \frac{1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta + i(2t\sin\theta - t^2\sin 2\theta)}{1-4t\cos\theta + 4t^2 + 4t^2cos^2\theta - 2t^2 - 4t^3\cos\theta + t^4}$$

$$= \frac{1-2t\cos\theta + t^2(2\cos^2\theta - 1) + i(2t\sin\theta - t^2 2\sin\theta\cos\theta)}{1-4tx + 4t^2 + 4t^2x^2 - 2t^2 - 4t^3x + t^4}$$

$$= \frac{1 - 2tx + t^2(2x^2 - 1) + i\,2t(1 - xt)\sin\theta}{(1 - 2tx + t^2)^2} \quad . \tag{3.18}$$

Jadi dari persamaan (3.16) dan (3.18) didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n \cos n\theta + i(n+1)t^n \sin n\theta$$

$$= \frac{1 - 2tx + t^2(2x^2 - 1) + i\,2t(1 - xt)\sin\theta}{(1 - 2tx + t^2)^2} \quad . \tag{3.19}$$

Dari persamaan (3.19) diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis pertama dan kedua yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.19).

Untuk bagian real persamaan (3.19) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n(\cos n\theta) = \frac{1 - 2tx + t^2(2x^2 - 1)}{(1 - 2tx + t^2)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n T_n(x) = \frac{1 - 2tx + t^2(2x^2 - 1)}{(1 - 2tx + t^2)^2}.$$

Sedangkan untuk bagian imajiner persamaan (3.19) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n \sin n\theta = \frac{2t(1 - xt)\sin\theta}{(1 - 2tx + t^2)^2}$$

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, t^n \sin n\theta = \frac{2t(1 - xt)\sin\theta}{(1 - 2tx + t^2)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, t^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{2t(1 - xt)\sin\theta}{(1 - 2tx + t^2)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, t^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{2(1 - xt)}{(1 - 2tx + t^2)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, t^n U_n(x) = \frac{2(1 - xt)}{(1 - 2xt + t^2)^2}$$

Akibat 3.2.3

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua untuk nilai $\mu = \frac{1}{2}$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n T_n(x) = \frac{\sqrt{1-xt+R}}{\sqrt{2}R},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}R\sqrt{1-xt+R}},$$

dimana $R = \sqrt{1-2tx+t^2}$.

Bukti:

Dari Teorema 3.1 didapat

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}.$$

Oleh karena itu, untuk nilai $\mu = \frac{1}{2}$ persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1-te^{i\theta}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (t^n \cos n\theta + it^n \sin n\theta). \tag{3.20}$$

Sedangkan bentuk $\frac{1}{\sqrt{1-te^{i\theta}}}$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1-te^{i\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{1-t(\cos\theta + i\sin\theta)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - t\cos\theta - it\sin\theta}} . \tag{3.21}$$

Berdasarkan Lemma 2.2 , persamaan (3.21) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1 - t\cos\theta - it\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - t\cos\theta + \sqrt{(1 - t\cos\theta)^2 + (-tsin\,\theta)^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{(1 - t\cos\theta)^2 + (-tsin\,\theta)^2}}$$

$$+ \frac{i\sqrt{\sqrt{(1 - t\cos\theta)^2 + (-tsin\,\theta)^2} - (1 - t\cos\theta)}}{\sqrt{2}\sqrt{(1 - t\cos\theta)^2 + (-tsin\,\theta)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - t\cos\theta + \sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2cos^2\theta + t^2sin^2\theta}}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2cos^2\theta + t^2sin^2\theta}}$$

$$+ i\frac{\sqrt{\sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2cos^2\theta + t^2sin^2\theta} - (1 - t\cos\theta)}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2cos^2\theta + t^2sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - tx + \sqrt{1 - 2tx + t^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - 2tx + t^2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{1 - 2tx + t^2} - (1 - tx)}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - tx + R}}{\sqrt{2}R} + i\frac{\sqrt{R - (1 - tx)}}{\sqrt{2}R} . \tag{3.22}$$

Jadi, dari persamaan (3.20) dan (3.22) didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (t^n \cos n\theta + it^n \sin n\theta) = \frac{\sqrt{1 - tx + R}}{\sqrt{2}R} + i\frac{\sqrt{R - (1 - tx)}}{\sqrt{2}R} \tag{3.23}$$

Dari persamaan (3.23) diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis pertama dan kedua yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.23)

Untuk bagian real persamaan (3.23) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n \cos n\theta = \frac{\sqrt{1 - tx + R}}{\sqrt{2}R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n T_n(x) = \frac{\sqrt{1-tx+R}}{\sqrt{2}R}.$$

Sedangkan untuk bagian imajiner persamaan (3.23) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n \sin n\theta = \frac{\sqrt{R-(1-tx)}}{\sqrt{2}R}$$

$$0+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n \sin n\theta = \frac{\sqrt{R-(1-tx)}}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\sqrt{R+(1-tx)}}{\sqrt{R+(1-tx)}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{\sqrt{R-(1-tx)}}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\sqrt{R+(1-tx)}}{\sqrt{R+(1-tx)}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{\sqrt{R^2-(1-tx)^2}}{\sqrt{2}R\sqrt{R+(1-tx)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{\sqrt{(1-2tx+t^2)-(1-tx)^2}}{\sqrt{2}R\sqrt{R+(1-tx)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{\sqrt{(1-2tx+t^2)-(1-2tx+t^2x^2)}}{\sqrt{2}R\sqrt{R+(1-tx)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{\sqrt{t^2(1-x^2)}}{\sqrt{2}R\sqrt{1-xt+R}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{t\sin\theta}{\sqrt{2}R\sqrt{1-xt+R}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}R\sqrt{1-xt+R}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^n U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}R\sqrt{1-xt+R}}.$$

Akibat 3.2.4

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua untuk nilai $\mu = -\frac{1}{2}$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n T_n(x) = \frac{\sqrt{1-xt+R}}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} U_n(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1-xt+R}},$$

dimana $R = \sqrt{1-2tx+t^2}$.

Bukti:

Dari persamaan (3.1) didapat

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n e^{in\theta}\ .$$

Oleh karena itu, untuk nilai $\mu = -\frac{1}{2}$ persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\sqrt{1-te^{i\theta}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n \cos n\theta + it^n \sin n\theta. \quad (3.24)$$

Sedangkan bentuk $\sqrt{1-te^{i\theta}}$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\sqrt{1-te^{i\theta}} = \sqrt{1-t(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= \sqrt{1 - t\cos\theta - it\sin\theta}\ . \quad (3.25)$$

Berdasarkan Lemma 2.1 maka persamaan (3.25) dapat ditulis kembali sebagai

$$\sqrt{1 - t\cos\theta - it\sin\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - t\cos\theta + \sqrt{(1-t\cos\theta)^2 + (-tsin\,\theta)^2}}}{\sqrt{2}}$$

$$- i\,\frac{\sqrt{\sqrt{(1-t\cos\theta)^2 + (-tsin\,\theta)^2} - (1-t\cos\theta)}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - t\cos\theta + \sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2cos^2\theta + t^2sin^2\theta}}}{\sqrt{2}}$$

$$- i\,\frac{\sqrt{\sqrt{1 - 2t\cos\theta + t^2cos^2\theta + t^2sin^2\theta} - (1-t\cos\theta)}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - tx + \sqrt{1-2tx+t^2}}}{\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{\sqrt{1-2tx+t^2} - (1-tx)}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-tx+R}}{\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{R-(1-tx)}}{\sqrt{2}}. \quad (3.26)$$

Jadi, dari persamaan (3.24) dan (3.26) didapat persamaan berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n \cos n\theta + it^n \sin n\theta = \frac{\sqrt{1-tx+R}}{\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{R-(1-tx)}}{\sqrt{2}} \quad (3.27)$$

Dari persamaan (3.27) dapat diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis pertama dan kedua yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.27).

Untuk bagian real persamaan (3.27) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n \cos n\theta = \frac{\sqrt{1-tx+R}}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n T_n(x) = \frac{\sqrt{1-tx+R}}{\sqrt{2}}.$$

Sedangkan untuk bagian imajiner persamaan (3.27) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n \sin n\theta = -\frac{\sqrt{R-(1-tx)}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{R+(1-tx)}}{\sqrt{R+(1-tx)}}\right)$$

$$0+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n \sin n\theta = -\frac{\sqrt{R^2-(1-tx)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{R+(1-tx)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = -\frac{\sqrt{R^2-(1-tx)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{R+(1-tx)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = -\frac{\sqrt{(1-2tx+t^2)-(1-tx)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{R+(1-tx)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta$$

$$= -\frac{\sqrt{(1-2tx+t^2)-(1-2tx+t^2x^2)}}{\sqrt{2}\sqrt{R+(1-tx)}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^{n+1} \sin(n+1)\theta = -\frac{\sqrt{t^2(1-x^2)}}{\sqrt{2}\sqrt{1-xt+R}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^{n+1}\sin(n+1)\theta=\frac{-t\sin\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1-xt+R}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^{n}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1-xt+R}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^{n+1}U_n(x)=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1-xt+R}}$$

Akibat 3.2.5

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua untuk nilai $\mu=-1$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nT_n(x)}{n(n-1)\Gamma(-1)}=1-xt,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n+1)\Gamma(-1)}U_n(x)=-1.$$

Bukti:

Dari persamaan (3.1) didapat

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^ne^{in\theta}\,.$$

Oleh karena itu, untuk nilai $\mu=-1$ persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$\left(1-te^{i\theta}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}-1)}{n!\,\Gamma(-1)}t^ne^{in\theta}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!\,\Gamma(-1)}t^ne^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{in\theta}}{n(n-1)\Gamma(-1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)}{n(n-1)\Gamma(-1)}. \qquad (3.28)$$

Sedangkan bentuk $1 - te^{i\theta}$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$1 - te^{i\theta} = 1 - t(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 1 - t\cos\theta - it\sin\theta$$

$$= 1 - tx - ity\,. \qquad (3.29)$$

Jadi dari persamaan (3.28) dan (3.29) didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)}{n(n-1)\Gamma(-1)} = 1 - tx - ity. \qquad (3.30)$$

Dari persamaan (3.30) dapat diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis pertama dan kedua yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.30) .

Untuk bagian real persamaan (3.30) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n(\cos n\theta)}{n(n-1)\Gamma(-1)} = 1 - tx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n T_n(x)}{n(n-1)\Gamma(-1)} = 1 - tx\,.$$

Sedangkan untuk bagian imajiner persamaan (3.30) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \sin n\theta}{n(n-1)\Gamma(-1)} = -t\sin\theta$$

$$0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n \sin n\theta}{n(n-1)\Gamma(-1)}=-t\sin\theta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\sin(n+1)\theta}{n(n+1)\Gamma(-1)}=-t\sin\theta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)\Gamma(-1)}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=-t$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{n(n+1)\Gamma(-1)}U_n(x)=-1\,.$$

Akibat 3.2.6

Fungsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua sebagai untuk nilai $\mu=-2$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nT_n(x)}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}=1-2tx+2t^2x^2-t^2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nU_n(x)}{n(n+1)(n-1)\Gamma(-2)}=2(tx-1).$$

Bukti

Dari persamaan (3.1) didapat

$$\frac{1}{(1-te^{i\theta})^{\mu}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^ne^{in\theta}.$$

Oleh karena itu, untuk nilai $\mu=-2$ persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$\left(1-te^{i\theta}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}-2)}{n!\,\Gamma(-2)}t^ne^{in\theta}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-3)!}{n(n-1)(n-2)(n-3)!\,\Gamma(-2)}t^ne^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{in\theta}}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}. \tag{3.31}$$

Sedangkan bentuk $\left(1 - te^{i\theta}\right)^2$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\left(1 - te^{i\theta}\right)^2 &= 1 - 2te^{i\theta} + t^2 e^{i2\theta} \\
&= 1 - 2t(\cos\theta + i\sin\theta) + t^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\
&= 1 - 2t\cos\theta - i2t\sin\theta + t^2\cos 2\theta + it^2\sin 2\theta \\
&= 1 - 2t\cos\theta + t^2(2\cos^2\theta - 1) + i(-2t\sin\theta + 2t^2\sin\theta\cos\theta) \\
&= 1 - 2t\cos\theta + t^2 2\cos^2\theta - t^2 + i2t\sin\theta\,(t\cos\theta - 1) \\
&= 1 - 2tx + 2t^2x^2 - t^2 + i2t\sin\theta\,(tx - 1). \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Jadi dari persamaan (3.31) dan (3.32) didapat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)} = 1 - 2tx + 2t^2x^2 - t^2 + i2t\sin\theta\,(tx - 1) \tag{3.33}$$

Dari persamaan (3.33) dapat diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis pertama dan kedua yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.33).

Untuk bagian real persamaan (3.33) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n(\cos n\theta)}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)} = 1 - 2tx + 2t^2x^2 - t^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n T_n(x)}{(n-1)(n-2)\Gamma(-2)} = 1 - 2tx + 2t^2x^2 - t^2.$$

Sedangakan untuk bagian imajiner persamaan (3.33) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{t}^{\mathrm{n}} \sin n\theta}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)} = 2t \sin\theta\,(tx \quad -1)$$

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{t}^{\mathrm{n}} \sin n\theta}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)} = 2t \sin\theta\,(tx \quad -1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{t}^{\mathrm{n+1}} \sin(n+1)\theta}{n(n+1)(n-1)\Gamma(-2)} = 2t \sin\theta\,(tx \quad -1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{t}^{\mathrm{n+1}}}{n(n+1)(n-1)\Gamma(-2)} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = 2t(tx \quad -1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{t}^{\mathrm{n}}}{n(n+1)(n-1)\Gamma(-2)} U_n(x) = 2(tx \quad -1).$$

Akibat 3.2.7

Untuk nilai $|t| < 1$, fungsi pembangkit lainnya dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1} T_{n+1}(x)}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n T_n(x)}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2xt + t^2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1} U_n(x) = \frac{1}{t\sqrt{1-x^2}} \tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-tx}\right).$$

Bukti :

Fungsi pembangkit lainnya dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua didapat dari bentuk lain persamaan (3.4) yang telah dinyatakan pada persamaan (3.9) yaitu,

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+i\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-tx}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\cos(n+1)\theta+i\,t^{n+1}\sin(n+1)\theta}{n+1}$$

Dari persamaan ini diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis pertama dan kedua yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.9).

Untuk bagian real persamaan (3.9) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\cos(n+1)\theta}{n+1}=-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}T_{n+1}(x)}{n+1}=-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nT_n(x)}{n}=-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2).$$

Sedangkan untuk bagian imajiner persamaan (3.9) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\sin(n+1)\theta}{n+1}=arc\tan\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-tx}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\sin(n+1)\theta}{n+1}\times\frac{1}{t\sin\theta}=arc\tan\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-tx}\right)\times\frac{1}{t\sin\theta}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}\sin(n+1)\theta}{(n+1)\sin\theta}=\frac{1}{t\sqrt{1-x^2}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-tx}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{n+1}U_n(x)=\frac{1}{t\sqrt{1-x^2}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-tx}\right).$$

3.3 Fungsi Pembangkit Polinomial Chebyshev Jenis Ketiga dan Keempat

Pada subbab ini diturunkan fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat dengan menggunakan bagian real dan bagian imajiner dari persamaan (3.5). Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat merupakan akibat dari Teorema 3.3 untuk nilai $\mu = 1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2$.

Selain itu juga diturunkan fungsi pembangkit lainnya dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat dengan menggunakan bagian real dan imjiner dari hasil kali kedua ruas persamaan (3.4) dengan $e^{-\frac{i\theta}{2}}$. Hasil kali tersebut dinyatakan pada persamaan (3.12) . Fungsi pembangkit lainnya dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat merupakan akibat dari Teorema 3.4 untuk nilai $\mu = 1$.

Akibat 3.3.1

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat untuk nilai $\mu = 1$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n V_n(x) = \frac{1-t}{1-2tx+t^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(x) = \frac{1+t}{1-2tx+t^2}.$$

Bukti

Dari Teorema 3.3 diperoleh

$$\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

Oleh karena itu untuk nilai $\mu = 1$ ruas kiri pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{(1-te^{i\theta})}=\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{1-t\cos\theta-it\sin\theta}\right)\left(\frac{1-t\cos\theta+it\sin\theta}{1-t\cos\theta+it\sin\theta}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-t\cos\theta)+it\sin\theta\cos{}^{\theta}\!/_{2}+}{(1-tcos\,\theta)^2+(t\sin\theta)^2}$$

$$+\frac{i\sin\frac{\theta}{2}(1-t\cos\theta)-t\sin\theta\sin{}^{\theta}\!/_{2}}{(1-tcos\,\theta)^2+(t\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-t\cos\theta)-t\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{(1-tcos\,\theta)^2+(t\sin\theta)^2}$$

$$+i\frac{\left(t\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}(1-t\cos\theta)\right)}{(1-tcos\,\theta)^2+(t\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-t\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta-t\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2\cos^2\theta+t^2\sin^2\theta}$$

$$+i\frac{t\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}-t\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta}{1-2t\cos\theta+t^2\cos^2\theta+t^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-t\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta-\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)}{1-2t\cos\theta+t^2}$$

$$+i\frac{\sin\frac{\theta}{2}+t\left(\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)}{1-2t\cos\theta+t^2}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-t\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)}{1-2tx+t^2}+i\frac{\sin\frac{\theta}{2}+t\sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)}{1-2tx+t^2}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-t\cos\frac{\theta}{2}}{R^2}+i\frac{\sin\frac{\theta}{2}+t\sin\frac{\theta}{2}}{R^2}\ . \qquad (3.34)$$

Sedangkan untuk $\mu=1$ ruas kanan pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+1)}{n!\,\Gamma(1)} t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right). \quad (3.35)$$

Dari persamaan (3.34) dan (3.35) diperoleh

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2} - t\cos\frac{\theta}{2}}{R^2} + i\frac{\sin\frac{\theta}{2} + t\sin\frac{\theta}{2}}{R^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right). \quad (3.36)$$

Dari persamaan (3.36) diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis ketiga dan keempat yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.36).

Untuk bagian real persamaan (3.36) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - t\cos\frac{\theta}{2}}{R^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-t)}{R^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1-t}{R^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n V_n(x) = \frac{1-t}{1-2tx+t^2}.$$

Untuk bagian imajiner persamaan (3.36) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis keempat yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + t\sin\frac{\theta}{2}}{R^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2}(1+t)}{R^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1+t}{R^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(x) = \frac{1+t}{1-2tx+t^2}.$$

Akibat 3.3.2

Fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat untuk nilai $\mu = 2$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n V_n(x) = \frac{1-2t+t^2(2x-1)}{(1-2tx+t^2)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n W_n(x) = \frac{1+2t-t^2(2x+1)}{(1-2tx+t^2)^2}.$$

Bukti

Dari Teorema 3.3 diperoleh

$$\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{(1-te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

Oleh karena itu untuk nilai $\mu = 2$ ruas kiri pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{(1-te^{i\theta})^2} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{1-2te^{i\theta}+t^2e^{i2\theta}}$$

$$=\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{1-2t(\cos\theta+\sin\theta)+t^2(\cos 2\theta+i\ sin\ 2\theta)}\right)$$

$$=\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta+i(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)}\right)$$

$$\left(\frac{1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta-i(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)}{1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta-i(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)-i\cos\frac{\theta}{2}(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)}{(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)^2+(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)^2}$$
$$+\frac{i\sin\frac{\theta}{2}(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)+\sin\frac{\theta}{2}(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)}{(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)^2+(-2t\sin\theta+t^2\sin 2)^2}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)+\sin\frac{\theta}{2}(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)}{(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)^2+(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)^2}$$
$$+i\,\frac{\cos\frac{\theta}{2}(2t\sin\theta-t^2\sin 2\theta)+\sin\frac{\theta}{2}(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)}{(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)^2+(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)^2}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-2t\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta+t^2\cos 2\theta\cos\frac{\theta}{2}}{(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)^2+(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)^2}$$
$$+\frac{t^2\sin 2\theta\sin\frac{\theta}{2}-2t\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)^2+(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)^2}$$
$$+i\left(\frac{2t\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta-t^2\sin 2\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)^2+(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{t^2\cos 2\theta\sin\frac{\theta}{2}-2t\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}{(1-2t\cos\theta+t^2\cos 2\theta)^2+(-2t\sin\theta+t^2\sin 2\theta)^2}\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - 2t\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)}{(1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta)^2 + (-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)^2}$$
$$+ \frac{t^2\left(\cos 2\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin 2\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)}{(1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta)^2 + (-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)^2}$$
$$+ i\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2} + 2t\left(\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)}{(1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta)^2 + (-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{t^2\left(\sin 2\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos 2\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)}{(1-2t\cos\theta + t^2\cos 2\theta)^2 + (-2t\sin\theta + t^2\sin 2\theta)^2}\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - 2t\cos\left(\frac{\theta}{2} - \theta\right) + t^2\cos\left(2\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{1 - 4t\cos\theta + 4t^2 + 4t^2cos^2\theta - 2t^2 - 4t^3\cos\theta + t^4}$$
$$+ i\frac{\sin\frac{\theta}{2} + 2t\sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) - t^2\sin\left(2\theta - \frac{\theta}{2}\right)}{1 - 4t\cos\theta + 4t^2 + 4t^2cos^2\theta - 2t^2 - 4t^3\cos\theta + t^4}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - 2t\cos\frac{\theta}{2} + t^2\cos\frac{3\theta}{2}}{1 - 4tx + 4t^2 + 4t^2x^2 - 2t^2 - 4t^3x + t^4}$$
$$+ i\frac{\sin\frac{\theta}{2} + 2t\sin\frac{\theta}{2} - t^2\sin\frac{3\theta}{2}}{1 - 4tx + 4t^2 + 4t^2x^2 - 2t^2 - 4t^3x + t^4}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - 2t\cos\frac{\theta}{2} + t^2\cos\frac{\theta}{2}(2\cos\theta - 1)}{(1-2tx+t^2)^2}$$
$$+ \frac{\sin\frac{\theta}{2} + 2t\sin\frac{\theta}{2} - t^2\sin\frac{\theta}{2}(2x+1)}{(1-2tx+t^2)^2}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 - 2t + t^2(2x-1))}{R^4} + \frac{\sin\frac{\theta}{2}(1 + 2t - t^2(2x+1))}{R^4}. \tag{3.37}$$

Sedangkan untuk nilai $\mu = 2$ ruas kanan pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n}+2)}{n!\,\Gamma(2)} t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right). \qquad (3.38)$$

Dari persamaan (3.37) dan (3.38) diperoleh

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-2t+t^2(2x-1))}{R^4} + \frac{\sin\frac{\theta}{2}(1+2t-t^2(2x+1))}{R^4}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n \left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right). \qquad (3.39)$$

Dari persamaan (3.39) dapat diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis ketiga dan keempat yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.39).

Untuk bagian real persamaan (3.39) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-2t+t^2(2x-1))}{R^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{(1-2t+t^2(2x-1))}{R^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n V_n(x) = \frac{\left(1-2t+t^2(2x-1)\right)}{(1-2tx+t^2)^2}.$$

Untuk bagian imajiner persamaan (3.39) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis keempat yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2}(1+2t-t^2(2x+1))}{R^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,t^n\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{(1+2t-t^2(2x+1))}{R^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,t^nW_n(x)=\frac{\left(1+2t-t^2(2x+1)\right)}{(1-2tx+t^2)^2}.$$

Akibat 3.3.3

Fugsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat untuk nilai $\mu=\frac{1}{2}$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^nV_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{(1-t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^nW_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{(1+t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right),$$

dimana $R=\sqrt{1-2tx+t^2}$.

Bukti:

Dari Teorema 3.3 diperoleh

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{(1-te^{i\theta})^{\mu}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

Oleh karena itu untuk nilai $\mu=\frac{1}{2}$ ruas kiri pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{1-te^{i\theta}}}=\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{1-t(\cos\theta+i\sin\theta)}}$$

$$=\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{1-t\cos\theta+i\sin\theta}}$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}+i\sqrt{R-(1-tx)}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}+i\sqrt{R-(1-tx)}\ \frac{\sqrt{1-tx+R}}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}\right.$$
$$\left.+\,i\ \frac{\sqrt{R-Rxt+R^2-1+xt-R+xt-x^2t^2+Rtx}}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}+i\ \frac{\sqrt{R^2-1+2xt-x^2t^2}}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}+i\ \frac{\sqrt{1-2tx+t^2-1+2xt-x^2t^2}}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}+i\ \frac{\sqrt{t^2-x^2t^2}}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}+i\ \frac{\sqrt{t^2(1-x^2)}}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}+i\ \frac{t\sin\theta}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{1-tx+R}+i\ \frac{t\sin\theta}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{1-tx+R}+i\cos\frac{\theta}{2}\frac{t\sin\theta}{\sqrt{1-tx+R}}}{\sqrt{2R}}$$
$$+\frac{i\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-tx+R}-\sin\frac{\theta}{2}\frac{t\sin\theta}{\sqrt{1-tx+R}}}{\sqrt{2R}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{1-tx+R} - \sin\frac{\theta}{2}\frac{t\sin\theta}{\sqrt{1-tx+R}}}{\sqrt{2}R} + i\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}\frac{t\sin\theta}{\sqrt{1-xt+R}} + \sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-xt+R}}{\sqrt{2}R}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-xt+R) - t\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-tx+R}} + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}(1-xt+R) + t\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-xt+R) - t\cos\frac{\theta}{2}(1-x)}{\sqrt{1-tx+R}} + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}(1-xt+R) - t\sin\frac{\theta}{2}(1+x)}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}\ (1-xt+R-t+tx)}{\sqrt{1-tx+R}} + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}\ (1-xt+R+t+tx)}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}\ (1-t+R)}{\sqrt{1-tx+R}} + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}\ (1+t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right). \qquad (3.40)$$

Sedangkan untuk nilai $\mu = \frac{1}{2}$ ruas kanan pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}+\frac{1}{2})}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right). \quad (3.41)$$

Dari persamaan (3.40) dan (3.41) diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}\ (1-t+R)}{\sqrt{1-tx+R}}+i\frac{\sin\frac{\theta}{2}\ (1+t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}+\frac{1}{2})}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) \qquad (3.42)$$

Dari persamaan (3.42) dapat diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis ketiga dan keempat yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.42).

Untuk bagian real persamaan (3.42) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^n\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{(1-t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^nV_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{(1-t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right).$$

Sedangkan untuk bagian imajiner persamaan (3.42) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis keempat yaitu,

$$\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}\ (1+t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^n\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{(1+t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^nW_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{(1+t+R)}{\sqrt{1-xt+R}}\right).$$

Akibat 3.3.4

Fugsi pembangkit polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat untuk nilai $\mu = -\frac{1}{2}$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n} - \frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1 - 2x + R + t}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\mathrm{n} - \frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} t^n W_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1 - 2tx + R - t}{\sqrt{1 - tx + R}}\right),$$

dimana $R = \sqrt{1 - 2tx + t^2}$.

Bukti:

Dari Teorema 3.3 diperoleh

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n} + \mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n \left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

Oleh karena itu untuk nilai $\mu = -{}^{1}/_{2}$ ruas kiri pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$e^{\frac{i\theta}{2}}\left(\sqrt{1 - te^{i\theta}}\right) = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(\sqrt{1 - t(\cos\theta + i\sin\theta)}\right)$$

$$= e^{\frac{i\theta}{2}}\left(\sqrt{1 - t\cos\theta - it\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - tx + R} - i\sqrt{R - (1 - tx)}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - tx + R} - i\sqrt{R - (1 - tx)}\,\frac{\sqrt{1 - tx + R}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - tx + R}\right.$$

$$\left. - i\ \frac{\sqrt{R - Rxt + R^2 - 1 + xt - R + xt - x^2t^2 + Rtx}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - tx + R} - i\ \frac{\sqrt{R^2 - 1 + 2xt - x^2t^2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - tx + R} - i\ \frac{\sqrt{1 - 2tx + t^2 - 1 + 2xt - x^2t^2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - tx + R} - i\ \frac{\sqrt{t^2 - x^2t^2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - tx + R} - i\ \frac{\sqrt{t^2(1 - x^2)}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - tx + R} - i\frac{t\sin\theta}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\left(\sqrt{1 - tx + R}\right) - i\frac{t\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right.$$

$$\left. + i\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1 - tx + R} + \frac{t\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{1 - tx + R} + \frac{t\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right.$$

$$\left. + i\left(\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1 - tx + R} - \frac{t\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 - tx + R) + t\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right.$$

$$\left. + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}(1 - tx + R) - t\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 - tx + R) - t\cos\frac{\theta}{2}(x - 1)}{\sqrt{1 - tx + R}}\right.$$

$$\left. + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}(1 - tx + R) - t\sin\frac{\theta}{2}(x + 1)}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 - 2tx + R + t)}{\sqrt{1 - tx + R}} + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}(1 - 2tx + R - t}{\sqrt{1 - tx + R}}\right). \quad (3.43)$$

Sedangkan untuk nilai $\mu = -\frac{1}{2}$ ruas kanan pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n} + \mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^n\left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n} - \frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^n\left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right). \quad (3.44)$$

Dari persamaan (3.43) dan (3.44) diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 - 2tx + R + t)}{\sqrt{1 - tx + R}} + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}(1 - 2tx + R - t)}{\sqrt{1 - tx + R}}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n} - \frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^n\left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right). \quad (3.45)$$

Dari persamaan (3.45) dapat diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis ketiga dan keempat yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.45).

Untuk bagian real persamaan (3.45) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}(1-2tx+R+t)}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^n\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-2tx+R+t}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^nV_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-2tx+R+t}{\sqrt{1-tx+R}}\right).$$

Untuk bagian imajiner persamaan (3.45) didapat fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis keempat

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}(1-2tx+R-t)}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^n\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-2tx+R-t}{\sqrt{1-tx+R}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^nW_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-2tx+R-t}{\sqrt{1-tx+R}}\right).$$

Akibat 3.3.5

Fugsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat untuk nilai $\mu=-1$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)\Gamma(-1)}V_n(x)=1-2tx+t,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)\Gamma(-1)}\,W_n(x)=1-2tx-t.$$

Bukti:

Dari Teorema 3.3 diperoleh

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{(1-te^{i\theta})^{\mu}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}+\mu)}{n!\,\Gamma(\mu)}t^{n}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

Oleh karena itu untuk nilai $\mu=-1$ ruas kiri pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$e^{\frac{i\theta}{2}}\left(1-te^{i\theta}\right)=e^{\frac{i\theta}{2}}-te^{\frac{i3\theta}{2}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}-t\left(\cos\frac{3\theta}{2}+i\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}-t\cos\frac{3\theta}{2}+i\left(\sin\frac{\theta}{2}-t\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}-t\cos\frac{\theta}{2}(2x-1)+i\left(\sin\frac{\theta}{2}-t\sin\frac{\theta}{2}(2x+1)\right)$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}(1-2tx+t)+i\sin\frac{\theta}{2}(1-2tx-t). \qquad (3.46)$$

Sedangkan untuk nilai $\mu=-1$ ruas kanan pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}-1)}{n!\,\Gamma(-1)}t^{n}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{n}-2)!}{n(n-1)(n-2)!\,\Gamma(-1)}t^{n}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right.$$

$$\left.+\,i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{n(n-1)\Gamma(-1)}\ . \qquad (3.47)$$

Dari persamaan (3.46) dan (3.47) diperoleh

$$\cos\frac{\theta}{2}(1-2tx+t)+i\sin\frac{\theta}{2}(1-2tx-t)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{n(n-1)\Gamma(-1)}\ . \qquad (3.48)$$

Dari persamaan (3.48) diperoleh fungsi pembangkit dari polinomal Chebyshev jenis ketiga dan keempat yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.48).

Untuk bagian real persamaan (3.48) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n(n-1)\Gamma(-1)}=\cos\frac{\theta}{2}(1-2tx+t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)\Gamma(-1)}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}=(1-2tx+t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)\Gamma(-1)}V_n(x)=(1-2tx+t).$$

Untuk bagian imajiner persamaan (3.48) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis keempat yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n(n-1)\Gamma(-1)}=\sin\frac{\theta}{2}(1-2tx-t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)\Gamma(-1)}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=1-2tx-t$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)\Gamma(-1)}\ W_n(x)=1-2tx-t.$$

Akibat 3.3.6

Fugsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat untuk nilai $\mu = -2$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)} V_n(x) = (1 - 4tx + 2t + 4t^2x^2 - 2t^2x - t^2),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)} W_n(x) = (1 — 4tx - 2t + 4t^2x^2 + 2t^2x - t^2).$$

Bukti:

Dari Teorema 3.3 diperoleh

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{(1 - te^{i\theta})^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mathrm{n} + \mu)}{n!\,\Gamma(\mu)} t^n \left(\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

Oleh karena itu untuk nilai $\mu = -2$ ruas kiri pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$e^{\frac{i\theta}{2}}(1 - te^{i\theta})^2 = e^{\frac{i\theta}{2}}(1 - 2te^{i\theta} + t^2e^{i2\theta})$$

$$= e^{\frac{i\theta}{2}} - 2te^{\frac{i3\theta}{2}} + t^2e^{\frac{i5\theta}{2}}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} - 2t\left(\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right) + t^2\left(\cos\frac{5\theta}{2} + i\sin\frac{5\theta}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} - 2t\cos\frac{3\theta}{2} + t^2\cos\frac{5\theta}{2} + i\left(\sin\frac{\theta}{2} - 2t\sin\frac{3\theta}{2} + t^2\sin\frac{5\theta}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} - 2t\cos\frac{\theta}{2}(2x-1) + t^2\cos\frac{\theta}{2}(4x^2-2x-1)$$
$$+ i\left(\sin\frac{\theta}{2} - 2t\sin\frac{\theta}{2}(2x+1)\right)$$
$$+ t^2\sin\frac{\theta}{2}(4x^2+2x-1)$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}(1-4tx+2t+4t^2x^2-2t^2x-t^2)$$
$$+ i\sin\frac{\theta}{2}(1—4tx-2t+4t^2x^2+2t^2x-t^2). \quad (3.48)$$

Sedangkan untuk nilai $\mu = -2$ ruas kanan pada Teorema 3.3 dapat ditulis sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathrm{n}-2)}{n!\,\Gamma(-2)}t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{n}-3)!}{n(n-1)(n-2)(\mathrm{n}-3)!\,\Gamma(-2)}t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right.$$
$$\left.+ i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}. \quad (3.49)$$

Dari persamaan (3.48) dan (3.49) diperoleh

$$\cos\frac{\theta}{2}(1-4tx+2t+4t^2x^2-2t^2x-t^2)$$
$$+ i\sin\frac{\theta}{2}(1—4tx-2t+4t^2x^2+2t^2x-t^2)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}. \quad (3.50)$$

Dari persamaan (3.50) diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis ketiga dan keempat yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.50).

Untuk bagian real persamaan (3.50) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}=\cos\frac{\theta}{2}(1-4tx+2t+4t^2x^2-2t^2x-t^2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$=(1-4tx+2t+4t^2x^2-2t^2x-t^2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}V_n(x)=(1-4tx+2t+4t^2x^2-2t^2x-t^2).$$

Untuk bagian imajiner persamaan (3.50) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis keempat yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}=\sin\frac{\theta}{2}(1—4tx-2t+4t^2x^2+2t^2x-t^2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$=(1—4tx-2t+4t^2x^2+2t^2x-t^2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n(n-1)(n-2)\Gamma(-2)}W_n(x)=(1—4tx-2t+4t^2x^2+2t^2x-t^2).$$

Akibat 3.3.7

Untuk $|t|<1$, fungsi pembangkit lainnya dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat dinyatakan sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}V_n(x)=\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}W_n(x)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right).$$

Bukti

Fungsi pembangkit lainnya dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat didapat dari hasil kali integrasi persamaan (3.1) untuk nilai $\mu = 1$ dengan $e^{\frac{-i\theta}{2}}$ yang dinyatakan dalam persamaan (3.12)

$$\sqrt{\frac{x+1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$+i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+i\,t^{n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}$$

Dari persamaan (3.12) diperoleh fungsi pembangkit polinomal Chebyshev jenis ketiga dan keempat yang diambil dari bagian real dan imajiner persamaan (3.12).

Untuk bagian real persamaan (3.12) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}$$

$$=\sqrt{\frac{x+1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}$$

$$=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{x+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n+1}$$

$$=\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}$$

$$=\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}V_n(x)=\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right).$$

Untuk bagian imajiner persamaan (3.12) didapat fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis keempat yaitu,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}$$

$$=\sqrt{\frac{1-x}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2)+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}$$

$$= \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-x}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{1-x}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n+1}$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}W_n(x) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\tan^{-1}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{1-xt}\right)\right).$$

BAB 4
KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Bentuk umum fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis pertama dan kedua didapat dari ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ yang ditunjukkan pada Teorema 3.1.1. Dari bagian real ekspansi binomial tersebut dapat diturunkan fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama, sedangkan dari bagian imajinernya dapat diturunkan fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua.

Bentuk umum fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat didapat dari hasil kali ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ dengan $e^{i\frac{\theta}{2}}$ yang ditunjukkan pada Teorema 3.1.3. Fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga dapat diturunkan dari bagian real hasil kali tersebut, sedangkan fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis keempat dapat diturunkan dari bagian imajinernya.

Bentuk umum fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis prtama dan kedua juga dapat diturunkan dari integrasi ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ terhadap $te^{i\theta}$ yang ditunjukkan pada Teorema 3.1.2. Fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis pertama juga dapat diturunkan dari bagian real hasil integrasi tersebut , sedangkan fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis kedua juga dapat diturunkan dari bagian imajinernya

Bentuk umum fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev jenis ketiga dan keempat juga dapat diturunkan dari hasil kali $e^{\frac{-i\theta}{2}}$ dengan hasil integrasi ekspansi binomial $(1 - te^{i\theta})^{-\mu}$ terhadap $te^{i\theta}$ yang ditunjukkan pada Teorema 3.1.4. Fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis ketiga juga dapat diturunkan dari bagian real hasil kali tersebut , sedangkan fungsi pembangkit untuk polinomial Chebyshev jenis keempat juga dapat diturunkan dari bagian imajinernya.

Untuk nilai $\mu = 1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ diperoleh fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev. Sedangkan untuk nilai $\mu = -1$ dan $\mu = -2$ tidak diperoleh fungsi pembangkit dari polinomial Chebyshev. Karena nilai dari Γ(-1) dan Γ(-2) tidak terdefinisi.

Oleh karena itu, bentuk umum dari fungsi pembangkit polinomial Chebyshev berlaku untuk semua nilai μ kecuali untuk $\mu = 0, -1, -2, \dots$.

DAFTAR PUSTAKA

Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Function.*

Bak, J., & Newman, D. J. (2010). *Complex Analysis 3rd edition.* New York: Springer.

Bronson, R. (2003). *Schaum Easy Outline Differentials Equation.* Mc. Graw Hill.

Brown, J. W., & Churchill, R. C. (2004). *Complex Variables and Applications.* Michigan: Mc Graww Hill.

Doman, B. G. (2010). Generating Function For Chebyshev Polynomials. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* , 197-205.

Mason, J., & Handscomb, D. (2003). *Chebyshev Polynomials.* Chapman and Hall.

Rosen, K. H. (1995). *Discrete Mathematics and Its Applications 3rd ed.* Mc Graw Hill.

Weisstein, E.W. "Open Disk." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/OpenDisk.html

Weisstein, E.W. "Chebyshev Polynomial of the First Kind." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html

Weisstein, E.W. "Chebyshev Polynomial of the Second Kind." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheSecondKind.html

Wilf, H. S. (1990). *generatingfunctionolgy.* Pennsylvania: Academic Press.