



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**EFEK STRATEGI VAKSINASI KONSTAN DAN VAKSINASI  
DENYUT PADA MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN  
PENULARAN SECARA HORIZONTAL DAN VERTIKAL**

**TESIS**

**ILMIYATI SARI  
1006786146**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
DEPOK  
JUNI 2012**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**EFEK STRATEGI VAKSINASI KONSTAN DAN VAKSINASI  
DENYUT PADA MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN  
PENULARAN SECARA HORIZONTAL DAN VERTIKAL**

**TESIS**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Magister Sains**

**ILMIYATI SARI  
1006786146**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
DEPOK  
JUNI 2012**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Ilmiyati Sari

NPM : 1006786146

Tanda Tangan : 

Tanggal : 21 Juni 2012

## HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :  
Nama : Ilmiyati Sari  
NPM : 1006786146  
Program Studi : Matematika  
Judul Tesis : Efek Strategi Vaksinasi Konstan dan Vaksinasi Denyut  
pada Model Epidemik SIR dengan Penularan secara  
Horizontal dan Vertikal

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Hengki Tasman, M.Si.

Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami

Penguji : Bevina D. Handari, Ph.D.

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 21 Juni 2012

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah rabbil alamin. Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya yang tak berhingga kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini dan meraih gelar Magister Sains di Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Salawat serta salam semoga tercurah kepada junjungan besar Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga dan sahabatnya serta para pengikutnya yang senantiasa istiqomah sampai akhir zaman.

Pada tesis ini penulis menyadari bahwa dalam proses penyusunannya ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, dorongan, dan doa yang tulus dari banyak pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan yang berbahagia ini, dengan penuh rasa syukur dan kerendahan hati, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Hengki Tasman selaku pembimbing penulis yang dengan sabar telah memberikan bimbingan, motivasi, saran, pengarahan dan kemudahan lainnya, sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.
2. Suamiku tercinta “Sutrisno Wardoyo” atas segala perhatian, motivasi serta kasih sayang yang tak berhingga yang diberikan kepada penulis. Anak penulis tercinta “Arkan Jazmi Raziq” yang selalu memberikan kebahagiaan dan memberikan semangat pada penulis untuk segera menyelesaikan tesis ini.
3. Seluruh keluarga penulis yang selalu mendoakan penulis selalu memperoleh yang terbaik.
4. Seluruh dosen Departemen Matematika atas segala ilmu yang penulis peroleh selama menjadi mahasiswa Matematika UI.
5. Iffatul Mardhiyah selaku sahabat penulis yang selalu setia menemani penulis selama menyelesaikan tesis ini. Terima kasih untuk semua bantuannya selama ini.
6. Mba Rusmi, Mba Santi, Mas Salman, Pak Ansori dan seluruh karyawan Departemen Matematika lainnya yang telah banyak memberikan bantuan.

7. Teman-teman seperjuangan: Uun, Dewi, Desti , Feni, Nurma, Rifkos, PJ, Deby, Murti, Haryono, Rina, Iwan, Ahmad, Martin, Rida, Risda, Siti, Fathin, Lisa, Titi, Tri, Umar, Supri, Endaryono, Bob.
8. Seluruh mahasiswa Universitas Gunadarma yang telah memberikan dukungan, doa, serta rasa semangat kepada penulis untuk segera menyelesaikan tesis ini.
9. Seluruh sahabat tercinta dosen Gunadarma: Dina indarti, Ias, Nola, Murni, Handhi, Aini, Sabri, Onggo.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan dalam penulisan tesis ini. Untuk itu, penulis mengharapkan segala kritik dan saran yang membangun dari para pembaca untuk menyempurnakan tesis ini.

Akhir kata, penulis memohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan dalam tesis ini. Semoga tesis ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya, serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat untuk kepentingan orang banyak.

Penulis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS  
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ilmiyati Sari  
NPM : 1006786146  
Program Studi : Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

**Efek Strategi Vaksinasi Konstan dan Vaksinasi Denyut pada Model  
Epidemik SIR dengan Penularan secara Horizontal dan Vertikal**

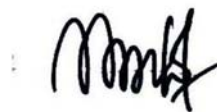
beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 21 Juni 2012

Yang menyatakan



( Ilmiyati Sari )

## ABSTRAK

Nama : Ilmiyati Sari  
Program Studi : Matematika  
Judul : Efek Strategi Vaksinasi Konstan dan Vaksinasi Denyut pada Model Epidemik SIR dengan Penularan secara Horizontal dan Vertikal

Penularan penyakit dari satu individu ke individu lainnya dapat terjadi secara horizontal maupun vertikal. Tesis ini membahas model epidemik SIR untuk penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal. Dinamika dari model ini digambarkan dari kelakuan titik kesetimbangannya, yaitu titik kesetimbangan epidemik dan titik kesetimbangan bebas-infeksi. *Basic reproduction number* digunakan untuk menentukan kriteria kestabilan titik kesetimbangan. Dalam upaya pencegahan penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dilakukan strategi pemberian vaksin. Strategi vaksinasi dibedakan menjadi dua, yaitu strategi vaksinasi konstan dan strategi vaksinasi denyut. Efek vaksinasi terhadap penyakit ini dapat dilihat dari dinamika model epidemik SIR dengan pengaruh vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut. Secara teori, analisa dinamik model SIR dengan vaksinasi konstan sama dengan analisa dinamik model SIR tanpa vaksinasi. Analisa dinamik untuk model SIR dengan vaksinasi denyut menghasilkan solusi periodik bebas-infeksi yang stabil. Selain itu, solusi periodik model SIR dengan vaksinasi denyut lebih cepat stabil dari pada model SIR dengan vaksinasi konstan dan tanpa vaksinasi jika periode pemberian vaksin untuk strategi vaksinasi denyut  $T$  kurang dari  $T_c$ . Untuk mendukung pembahasan teori di dalam penelitian ini, dilakukan simulasi dengan menggunakan software Matlab.

Kata Kunci : penularan secara horizontal, penularan secara vertikal, model epidemik SIR, titik kesetimbangan, titik kesetimbangan epidemik, titik kesetimbangan bebas-infeksi, kestabilan, *basic reproduction number*, vaksinasi konstan, vaksinasi denyut, solusi periodik bebas-infeksi.

x+55 halaman; 8 gambar; 4 tabel; 3 lampiran

Daftar Pustaka :16 (1983-2009)



## ABSTRACT

Name : Ilmiyati Sari  
Program Study : Mathematics  
Title : The Effect of Constant and Pulse Vaccination Strategies on SIR Epidemic Model with Horizontal and Vertical Transmission

Some disease may be passed from one individual to another via horizontal or vertical transmission. In this thesis, it is discussed the SIR epidemic model of disease that are both horizontally and vertically transmitted. The dynamics of this disease model is described from the behavior equilibrium point, that is epidemic equilibrium point and infection-free equilibrium point. *Basic reproduction number* of criteria is used to determine the stability of equilibrium point. In efforts to prevent outbreaks of diseases that are both horizontally and vertically transmitted is performed vaccination strategies. There are two vaccination strategies, namely constant vaccination and pulse vaccination. The effect of vaccination against this disease can be seen from the dynamics of SIR epidemic models with constant and pulse vaccination. Theoretical result shows that under constant vaccination, the dynamic behavior is similar to no vaccination. Under pulse vaccination, infection-free periodic solution is stable. In addition, this infection-free periodic solution is stable faster than SIR epidemic models with constant vaccination and no vaccination if vaccine delivery period for the pulse vaccination strategy  $T$  less than  $T_c$ . To support the discussion of the theory in this study, we perform some simulations using the software Matlab.

Key Words : horizontal transmission, vertical transmission, SIR epidemic model, equilibrium point, epidemic equilibrium point, infection-free equilibrium point, stability, basic reproduction number, constant vaccination, pulse vaccination, infection-free periodic solution.

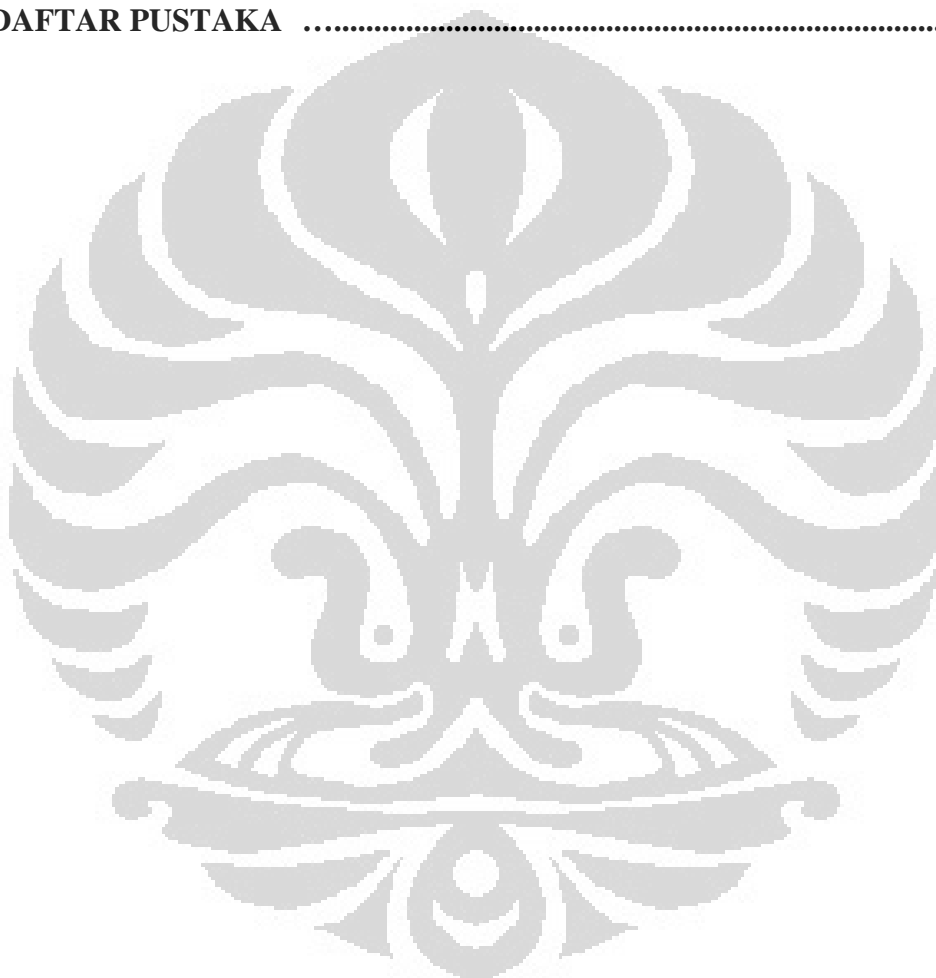
x+55 pages; 8 pictures; 4 tables; 3 appendixs

Bibliography :16 (1983-2009)

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS .....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
KATA PENGANTAR .....	iv
HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH .....	vi
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	viii
DAFTAR ISI .....	ix
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR TABEL .....	xi
DAFTAR LAMPIRAN .....	xi
<b>1. PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Permasalahan .....	2
1.3 Tujuan Penelitian .....	2
<b>2. LANDASAN TEORI .....</b>	<b>3</b>
2.1 Sistem Persamaan Diferensial .....	4
2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier .....	4
2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier .....	6
2.1.2.1 Linierisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier .....	6
2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan .....	7
2.3 Sistem Dinamik Diskrit .....	10
2.3.1 Pemetaan Stroboskopik .....	12
2.4 Teori Floquet .....	12
2.5 Basic Reproduction Number .....	14
<b>3. EFEK VAKSINASI PADA MODEL EPIDEMIK .....</b>	<b>16</b>
3.1 Model Epidemik SIR .....	16
3.1.1 Penurunan Basic Reproduction Number ( $R_0$ ) .....	19
3.1.2 Analisa Dinamika .....	21
3.1.2.1 Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas-Infeksi .....	22
3.1.2.2 Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan Epidemik .....	22
3.2 Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi Konstan .....	23
3.2.1 Penurunan Basic Reproduction Number ( $R_1$ ) .....	24
3.2.2 Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas-Infeksi .....	25
3.3 Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi Denyut .....	27
3.3.1 Solusi Periodik Bebas-Infeksi .....	29
3.3.2 Analisa Kestabilan Solusi Periodik Bebas-Infeksi .....	32
3.4 Perbandingan Strategi Vaksinasi Konstan dan Vaksinasi Denyut .....	36

<b>4. SIMULASI MODEL EPIDEMIK SIR</b> .....	<b>38</b>
4.1 Simulasi Model Epidemik SIR tanpa Efek Vaksinasi .....	38
4.2 Simulasi Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi Konstan .....	41
4.3 Simulasi Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi Denyut .....	43
4.4 Perbandingan Model SIR tanpa Vaksinasi Dengan vaksinasi Konstan dan Vaksinasi Denyut .....	46
<b>5. KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	<b>48</b>
5.1 Kesimpulan .....	48
5.2 Saran .....	49
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>50</b>



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Kestabilan titik kesetimbangan .....	9
Gambar 3.1. Dinamika populasi dalam model SIR dengan penyebaran secara horizontal dan vertikal .....	18
Gambar 4.1. Proporsi individu <i>susceptible</i> dan <i>infectious</i> pada model epidemik SIR tanpa vaksinasi dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 .....	39
Gambar 4.2. Proporsi individu <i>susceptible</i> dan <i>infectious</i> pada model epidemik SIR tanpa vaksinasi dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 .....	40
Gambar 4.3. Proporsi individu <i>susceptible</i> dan <i>infectious</i> pada model SIR dengan vaksinasi konstan dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 .....	41
Gambar 4.4. Proporsi individu <i>susceptible</i> dan <i>infectious</i> pada model SIR dengan vaksinasi konstan dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 .....	42
Gambar 4.5. Proporsi individu <i>susceptible</i> dan <i>infectious</i> pada model epidemik SIR dengan vaksinasi denyut dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 .....	44
Gambar 4.6. Proporsi individu <i>susceptible</i> dan <i>infectious</i> pada model epidemik SIR dengan vaksinasi denyut dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 .....	45

## DAFTAR TABEL

Tabel 4.1. Nilai parameter pada simulasi pertama .....	38
Tabel 4.2. Nilai parameter pada simulasi kedua .....	40
Tabel 4.3. Perbedaan sistem (3.4), (3.10), dan (3.15) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1. ....	47
Tabel 4.4. Perbedaan sistem (3.4), (3.10), dan (3.15) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2. ....	47

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Source code simulasi model epidemik SIR tanpa vaksinasi .....	52
Lampiran 2 Source code simulasi model epidemik SIR dengan vaksinasi konstan .....	53
Lampiran 3 Source code simulasi model epidemik SIR dengan vaksinasi denyut .....	54

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibawa ke dalam model matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Selanjutnya, dari model yang didapat dicari solusinya, baik dengan cara analitis maupun secara numerik.

Salah satu permasalahan di kehidupan nyata adalah mengenai penyebaran suatu penyakit. Pada tahun 1927, W. O. Kermack dan A. G. Mckendrick memperkenalkan sebuah model penyebaran penyakit. Model matematika yang dimaksud adalah model epidemik SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) klasik. Secara umum, model epidemik SIR klasik dapat disajikan sebagai sistem persamaan diferensial *autonomous*. Sampai saat ini, model epidemik SIR klasik tersebut telah dikembangkan oleh ilmuwan lain seperti Picollo dan Billings, dan K. J. Vareen untuk mempelajari penyebaran penyakit dalam kasus-kasus tertentu.

Hethcote menyebutkan bahwa dalam model epidemik SIR klasik, populasi dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu yang sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit (*susceptible*), kelompok individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit (*infected*), dan kelompok individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit (*recovered*). Secara garis besar, model epidemik SIR klasik menggambarkan alur penyebaran penyakit dari kelompok individu *susceptible* menjadi *infected* melalui kontak langsung atau perantara lain. Selanjutnya, kelompok individu *infected* yang mampu bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan memasuki kelompok *recovered*.

Dalam kehidupan nyata, seseorang dapat terinfeksi penyakit melalui kontak langsung dengan penderita, udara, batuk, dan bersin. Penularan penyakit melalui cara ini disebut penularan secara horizontal. Selain itu, ada pula penularan penyakit secara vertikal, yaitu seseorang yang terinfeksi suatu penyakit karena orang tuanya pengidap penyakit tersebut. Hepatitis B adalah contoh penyakit yang

dapat menular secara horizontal dan vertikal. Salah satu upaya yang dilakukan untuk mencegah penyebarluasnya penyakit tersebut adalah melalui program vaksinasi. Program vaksinasi dilakukan dengan memberikan antigen yang berfungsi untuk meningkatkan imunitas tubuh terhadap virus atau penyakit.

Strategi pemberian vaksin dibedakan menjadi dua yaitu strategi vaksinasi konstan dan strategi vaksinasi denyut. Strategi vaksinasi konstan adalah pemberian vaksin kepada bayi yang baru lahir, sedangkan strategi vaksinasi denyut adalah pemberian vaksin kepada sebagian individu *susceptible*.

Selanjutnya dalam penulisan ini akan dilihat pengaruh strategi pemberian vaksin yaitu vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut terhadap pencegahan epidemik suatu penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dengan menggunakan model epidemik SIR. Kemudian dari model ini akan dicari dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas infeksi (*infection-free equilibrium*) dan titik kesetimbangan epidemik (*epidemic equilibrium*). Pada kedua titik ini dilakukan pengujian kestabilan. Dalam penulisan ini juga dibandingkan pengaruh vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut sehingga diperoleh kesimpulan strategi vaksinasi mana yang lebih baik untuk diterapkan.

## 1.2 Permasalahan

Berdasarkan uraian pada latar belakang, permasalahan yang dibahas dalam penulisan tesis ini adalah bagaimana efek vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut pada model epidemik SIR dalam mencegah wabah penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah menjelaskan bagaimana efek strategi vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut dalam upaya pencegahan wabah penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal.

## BAB 2 LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan penjelasan teori-teori yang mendukung pembahasan di bab selanjutnya. Teori-teori yang diberikan adalah sistem persamaan diferensial, kestabilan titik kesetimbangan, pemetaan stroboskopik (*stroboscopic map*), teori Floquet (*Floquet theory*), dan *basic reproduction number*.

Tesis ini membahas efek vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut terhadap pencegahan penyebaran penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dengan menggunakan model epidemik SIR. Efek dari strategi vaksinasi dilihat dari perilaku masing-masing model. Perilaku model epidemik SIR dapat diketahui dari kestabilan solusi dari model tersebut. Pada umumnya, model epidemik SIR mempunyai dua bentuk solusi, yaitu solusi bebas-infeksi dan solusi epidemik. Karena model SIR pada tesis ini merupakan suatu sistem persamaan diferensial nonlinier, maka model tersebut dilinierisasi terlebih dahulu sebelum menentukan kestabilan solusinya. *Basic reproduction number* digunakan untuk menentukan kriteria kestabilan solusi tersebut.

Analisa kestabilan solusi dari model epidemik SIR merupakan analisa sistem dinamik, dengan solusi dari sistem tersebut adalah titik kesetimbangannya. Analisa sistem dinamik pada vaksinasi konstan yaitu dengan menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangannya, sedangkan analisa sistem dinamik pada vaksinasi denyut yaitu dengan menganalisa titik tetap pada pemetaan stroboskopik. Pemetaan stroboskopik ini terbentuk dari model epidemik SIR dengan efek strategi vaksinasi denyut. Selanjutnya karena solusi dari model epidemik SIR dengan efek vaksinasi denyut bersifat periodik, maka untuk menentukan kestabilan dari solusinya digunakan teori Floquet.

Berdasarkan penjelasan di atas, pada bab ini diberikan teori-teori yang mendukung tesis ini. Pada subbab 2.1 dibahas terlebih dahulu mengenai sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linier yang dibahas pada subbab 2.1.1 dan sistem persamaan diferensial nonlinier yang dijelaskan pada subbab 2.1.2. Selanjutnya

pada subbab 2.2 diberikan penjelasan kestabilan titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial nonlinier.

Teori yang penting dalam tesis ini adalah sistem dinamik. Penjelasan mengenai sistem dinamik diberikan pada subbab 2.3. Subbab 2.3 membahas sistem dinamik dengan waktu diskrit dan sistem dinamik dengan waktu kontinu sehingga pada subbab 2.3.1 diberikan penjelasan mengenai pemetaan stroboskopik yang menjelaskan hubungan sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Karena salah satu solusi pada tesis ini bersifat periodik sehingga pada subbab 2.4 diberikan penjelasan mengenai teori Floquet. Bab dua ini ditutup oleh *basic reproduction number* yang diberikan pada subbab 2.5.

## 2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial, secara matematis, dapat dituliskan dalam bentuk

$$\dot{X} = f(t, X), \quad (2.1)$$

dengan

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dX_n}{dt} \end{pmatrix},$$

$X \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ , dan  $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  merupakan fungsi kontinu di  $D$ .

Jika dalam persamaan (2.1) variabel  $t$  tidak dinyatakan secara eksplisit, maka persamaan (2.1) disebut sistem persamaan diferensial *autonomous* dan dapat dituliskan dalam bentuk

$$\dot{X} = f(X). \quad (2.2)$$

Untuk selanjutnya, dalam tesis ini sistem persamaan diferensial yang digunakan adalah sistem persamaan diferensial *autonomous*.

### 2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier

Sistem persamaan diferensial *autonomous* linier dapat dinyatakan ke dalam persamaan (2.2) dengan fungsi  $f$  pada persamaan (2.2) berbentuk linier. Karena fungsi  $f$  dalam (2.2) berbentuk linier, maka persamaan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk



$$\dot{X} = AX, \quad (2.3)$$

dengan  $A$  adalah matriks berukuran  $n \times n$ . Misalkan fungsi vektor  $X(t)$  adalah solusi dari persamaan (2.3),  $X(t)$  ini tergantung pada waktu  $t$  dan kondisi awal

$$X(0) = X_0.$$

Solusi umum untuk persamaan (2.3) adalah kombinasi linier dari  $n$  buah solusi yang bebas linier  $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)$ , dan dinyatakan sebagai berikut:

$$X(t) = c_1 X^{(1)}(t) + \dots + c_n X^{(n)}(t), \quad (2.4)$$

dimana  $n$  konstanta yang tidak diketahui  $c_1, \dots, c_n$  ditentukan dengan mensubstitusi kondisi awal  $X_0$  kedalam persamaan (2.4) (Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1983).

**Definisi 2.1 (Matriks Fundamental).** Misalkan  $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)$  adalah  $n$  buah solusi dari sistem persamaan (2.2) dan matriks  $\Omega(t)$  merupakan solusi dari sistem persamaan (2.2) yang dibentuk dari  $n$  buah solusi tersebut. Matriks  $\Omega(t)$  mempunyai bentuk

$$\Omega(t) = [X^{(1)}(t) \quad \dots \quad X^{(n)}(t)].$$

Jika  $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)$  bebas linier, maka matriks  $\Omega(t)$  disebut matriks Fundamental. Matriks  $\Omega(t)$  disebut matriks fundamental utama jika  $\Omega(0) = I$  ( $I$  adalah matriks identitas berukuran  $n \times n$ ) (Grimshaw, R., 1993).

Jika matriks  $A$  pada persamaan (2.3) mempunyai  $n$  vektor eigen yang bebas linier  $v^j, j = 1, 2, \dots, n$ , dengan nilai eigen yang bersesuaian  $\lambda_j$ , maka vektor kolom dari matriks fundamental utama adalah

$$X^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Setiap solusi dari persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk

$$X(t) = \Omega(t)C,$$

dengan  $C \in \mathbb{R}^n$  adalah vektor konstanta, dan dengan menambahkan kondisi awal  $X_0$ , akan diperoleh

$$X(t) = \Omega(t)\Omega^{-1}(0)X_0 \text{ (Verhulst, F., 1996).}$$

### 2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier

Sistem persamaan diferensial *autonomous* nonlinier dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (2.2) dengan fungsi  $f$  pada persamaan (2.2) berbentuk nonlinier. Perilaku dari sistem persamaan biasanya dilihat dari solusi sistem persamaan tersebut, namun solusi eksak dari sistem persamaan diferensial nonlinier tidak selalu dapat ditentukan. Oleh karena itu, perilaku dari sistem dilihat dengan menggunakan analisa kestabilan titik kesetimbangan. Sebelum membahas lebih lanjut mengenai kestabilan titik kesetimbangan, berikut ini diberikan definisi dari titik kesetimbangan.

**Definisi 2.2 (Titik Kesetimbangan).** Titik  $X^* \in \mathbb{R}^n$  dikatakan titik kesetimbangan dari persamaan (2.2) jika memenuhi persamaan  $f(X^*) = 0$  (Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1983).

Berikut ini adalah definisi titik kesetimbangan hiperbolik.

**Definisi 2.3 (Titik Kesetimbangan Hiperbolik).** Titik kesetimbangan  $X^*$  dikatakan titik kesetimbangan hiperbolik dari persamaan (2.2) jika

$$\frac{\partial f}{\partial X}(X^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(X^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n}(X^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1}(X^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n}(X^*) \end{pmatrix}$$

tidak mempunyai nilai eigen yang bagian riilnya bernilai nol (Perko, L., 1996).

Pada sistem persamaan diferensial nonlinier (2.2), kestabilan titik kesetimbangan dapat diwakili dengan bagian linier dari sistem persamaan tersebut. Bagian linier dari sistem persamaan ini diperoleh dengan melakukan linierisasi pada sistem persamaan (2.2) (Grimshaw, R., 1993).

#### 2.1.2.1 Linierisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier

Linierisasi sistem persamaan nonlinier (2.2) dilakukan untuk menganalisa kestabilan titik kesetimbangan. Misalkan  $X^*$  adalah titik kesetimbangan dari sistem persamaan (2.2). Linierisasi sistem (2.2) di titik  $X^*$  adalah mengekspansi  $f(X)$  dengan deret Taylor di titik  $X^*$ , yang dapat ditulis sebagai

$$f(X) = f(X^*) + \frac{\partial f}{\partial X}(X^*)(X - X^*) + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial X^n}(X^*)(X - X^*)^n + \dots \quad (2.5)$$

Karena  $X^*$  merupakan titik kesetimbangan, maka  $f(X^*) = 0$ . Dalam melinierisasikan sistem persamaan (2.2), suku pada persamaan (2.5) yang mempunyai orde lebih besar dari satu dapat diabaikan, sehingga persamaan (2.5) dapat ditulis menjadi

$$f(X) = \frac{\partial f}{\partial X}(X^*)(X - X^*), \quad (2.6)$$

sehingga dari persamaan (2.2) dan (2.6) diperoleh

$$\dot{X} = \frac{\partial f}{\partial X}(X^*)(X - X^*). \quad (2.7)$$

Misalkan  $y = X - X^*$  dan  $B = \frac{\partial f}{\partial X}(X^*)$ , maka persamaan (2.7) menjadi

$$\dot{y} = By, \quad (2.8)$$

dengan matriks  $B$  disebut matriks Jacobian dari sistem persamaan (2.2) di titik  $X^*$ . Selanjutnya, bagian ruas kanan persamaan (2.8) disebut bagian linier dari fungsi nonlinier  $f$  di titik  $X^*$ . Dengan demikian, kestabilan titik kesetimbangan dapat diwakili dengan linierisasinya.

**Definisi 2.4 (Linierisasi Sistem Nonlinier).** Misalkan  $X^* \in \mathbb{R}^n$  adalah titik kesetimbangan hiperbolik dari sistem nonlinier (2.2), maka sistem linier  $\dot{y} = By$  disebut linierisasi dari sistem nonlinier (2.2) di titik  $X^*$  dengan  $y = X - X^*$  dan  $B = \frac{\partial f}{\partial X}(X^*)$  disebut matriks Jacobian dari sistem persamaan (2.2) di titik  $X^*$  (Perko, L., 1996).

Pada subbab berikut ini diberikan definisi dan teorema-teorema yang dapat digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan.

## 2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan

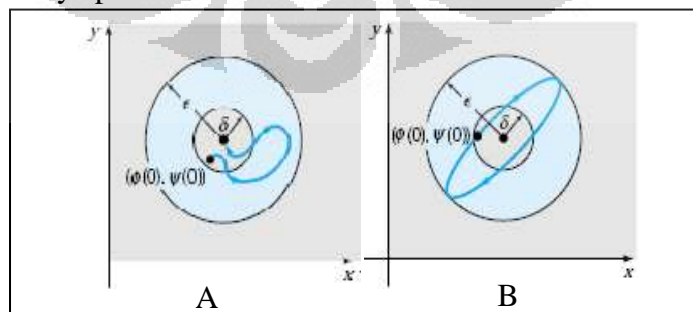
Perilaku suatu sistem persamaan di setiap titiknya dapat dilihat dari solusi eksaknya, namun tidak semua sistem persamaan dapat ditentukan dengan mudah solusi eksaknya. Oleh karena itu, diperlukan suatu informasi lain yang dapat digunakan untuk melihat perilaku sistem tersebut. Cara lain untuk melihat perilaku sistem ini yaitu dengan mengamati titik-titik dimana sistem ini tidak mengalami perubahan atau dalam keadaan yang setimbang. Titik-titik dimana sistem ini tidak mengalami perubahan disebut titik kesetimbangan.

Analisa perilaku sistem pada titik kesetimbangan dikenal dengan kestabilan. Secara intuisi, titik kesetimbangan  $X^*$  dari sistem persamaan (2.2) stabil jika perubahan kecil pada syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesaian. Titik kesetimbangan  $X^*$  dikatakan stabil asimtotik jika pengaruh dari perubahan kecil cenderung menghilang sama sekali (tidak berpengaruh), sedangkan titik kesetimbangan  $X^*$  menjadi tidak stabil jika perubahan kecil pada syarat awalnya akan berakibat perubahan besar pada penyelesaian. Definisi titik kesetimbangan secara formal diberikan pada definisi 2.5, sebagai berikut:

**Definisi 2.5 (Kestabilan Titik Kesetimbangan).** Misalkan  $X^*$  adalah titik kesetimbangan dari persamaan (2.2) dan  $X_0$  adalah titik awal.

1.  $X^*$  dikatakan stabil, jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta(\varepsilon) > 0$ , sedemikian sehingga untuk setiap  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  dengan  $\|X_0 - X^*\| < \delta$ , sembarang solusi  $\varphi(t, X_0)$  dari persamaan (2.2) memenuhi pertidaksamaan  $\|\varphi(t, X_0) - X^*\| < \varepsilon$  untuk setiap  $t \geq 0$ .
2.  $X^*$  dikatakan stabil asimtotik, jika  $X^*$  stabil dan terdapat  $r > 0$ , sedemikian sehingga  $\|\varphi(t, X_0) - X^*\| \rightarrow 0$  saat  $t \rightarrow \infty$  untuk semua  $X_0$  yang memenuhi  $\|X_0 - X^*\| < r$ .
3.  $X^*$  dikatakan tidak stabil, jika terdapat suatu  $\eta > 0$ , sedemikian sehingga untuk sebarang  $\delta > 0$  terdapat sebuah  $X_0$  dengan  $\|X_0 - X^*\| < \delta$  dan  $t > 0$  tapi  $\|\varphi(t, X_0) - X^*\| > \eta$  dengan  $\varphi(t, X_0)$  adalah solusi lain dari persamaan (2.2) (Hale, Jack K., & Koçak, H., 1991).

Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar berikut.



Keterangan: A = stabil asimtotik, B = stabil

[Sumber: Boyce, W.E., DiPrima, R.C., 2001 ]

Gambar 2.1. Kestabilan titik kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan, selain dapat dibuktikan dengan Definisi 2.5, dapat juga dibuktikan dengan Teorema Lyapunov, atau dikenal dengan kestabilan Lyapunov. Kestabilan Lyapunov dikenal setelah Aleksandr Lyapunov, matematikawan Rusia, mempublikasikan bukunya yang berjudul "The General Problem of Stability of Motion" pada tahun 1892. Kestabilan Lyapunov menyandarkan pada penemuan fungsi definit positif  $V, V: D \rightarrow \mathbb{R}$ , yang disebut fungsi Lyapunov.

**Teorema 2.1 (Kestabilan Lyapunov).** Misalkan  $X^*$  adalah titik kesetimbangan dari persamaan (2.2) dan  $V: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi yang terdiferensialkan, yang memenuhi:

1.  $V(X^*) = 0$  dan  $V(X) > 0$  jika  $X \neq X^*$ ; dan
2.  $\dot{V}(X) \leq 0$  di  $D - \{X^*\}$ .

Maka  $X^*$  stabil. Dan, jika

3.  $\dot{V}(X) < 0$  di  $D - \{X^*\}$ ;

maka  $X^*$  stabil asimtotik (Guckenheimer, J. dan Holmes, P., 1983).

Definisi 2.5 dan Teorema 2.1 digunakan untuk membuktikan titik kesetimbangan stabil global. Titik kesetimbangan  $X^*$  dikatakan stabil global jika titik tersebut stabil untuk semua kondisi awal  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , sedangkan jika kestabilan hanya terjadi disekitar titik kesetimbangan, maka titik kesetimbangan tersebut dikatakan stabil lokal.

Kestabilan lokal titik kesetimbangan dari persamaan diferensial nonlinier (2.2) dapat dianalisa dengan menggunakan nilai-nilai eigen dari matriks  $B$  pada persamaan (2.8), yaitu solusi atau akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristik

$$\det(B - \lambda I) = 0,$$

yang dapat ditulis dalam bentuk

$$b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0 = 0,$$

dengan  $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$  adalah konstanta.

Misalkan  $v^j, j = 1, 2, \dots, n$ , adalah vektor eigen dari nilai-nilai eigen yang bersesuaian  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$ , dari matriks  $B$  pada persamaan (2.8). Nilai-nilai

eigen tersebut dapat digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan dari sistem persamaan (2.2) sesuai dengan teorema berikut ini.

**Teorema 2.2.** Misalkan  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$  adalah nilai eigen dari matriks  $B$  pada persamaan (2.8). Titik kesetimbangan  $X^*$  dari sistem persamaan (2.2), dikatakan :

1. Stabil, jika  $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$ ;
2. Stabil asimtotik, jika  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$ ;
3. Tidak stabil, jika  $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$ , untuk suatu  $k$ .

Teorema 2.2 digunakan untuk membuktikan kestabilan titik kesetimbangan secara lokal. Teorema ini sering digunakan karena kemudahannya dalam membuktikan stabil atau tidaknya suatu titik kesetimbangan.

### 2.3 Sistem Dinamik Diskrit

Sistem dinamik adalah fungsi dengan suatu sikap atau kelakuan. Sistem dinamik melakukan sesuatu yang sama berulang-ulang. Sistem dinamik selalu tahu apa yang dilakukan selanjutnya (Scheinerman, E.R., 1996).

Ada dua jenis sistem dinamik: sistem dinamik dengan waktu kontinu dan sistem dinamik diskrit. Sistem dinamik dengan waktu kontinu dinyatakan dengan sistem persamaan diferensial pada persamaan (2.1). Oleh karena itu, perilaku sistem dinamik dengan waktu kontinu dapat dilihat dari sistem persamaan diferensial yang telah dibahas pada subbab 2.1.

Sistem dinamik dengan waktu diskrit, waktu dinotasikan dengan  $k$ , dituliskan dalam bentuk

$$F(X(k)) = X(k + 1), \quad (2.9)$$

dengan kondisi awal  $X(0) = X_0, X \in \mathbb{R}^n$ , dan  $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  merupakan fungsi kontinu di  $D$ .  $F^k$  pada persamaan (2.9) menotasikan penerapan  $F$  pada  $X_0$  sebanyak  $k$  kali, maka  $X(k) = F^k(X_0)$  (Scheinerman, E. R., 1996).

Perilaku dari sistem dinamik diskrit dapat dilihat dari perilaku titik tetapnya. Berikut ini adalah definisi titik tetap dari persamaan (2.9).

**Definisi 2.6 (Titik Tetap).** Titik  $\bar{X}$  disebut titik tetap untuk fungsi  $F$  pada persamaan (2.9) jika  $F(\bar{X}) = \bar{X}$  (Hale, Jack K., & Kocak, H., 1991).

Sama halnya dengan titik kesetimbangan, titik tetap dari persamaan (2.9) dapat diinvestigasi kestabilannya. Berikut ini adalah definisi kestabilan titik tetap dengan notasi yang disamakan dengan kestabilan titik kesetimbangan.

**Definisi 2.7 (Kestabilan Titik Tetap).** Misalkan  $\bar{X}$  adalah titik tetap dari persamaan (2.9) dan  $X_0$  adalah titik awal.

1.  $\bar{X}$  dikatakan stabil, jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta(\varepsilon) > 0$ , sedemikian sehingga untuk setiap  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  dengan  $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta$ , iterasi dari  $X_0$  memenuhi pertidaksamaan  $|F^n(X_0) - \bar{X}| < \varepsilon$  untuk semua  $n \geq 0$ .
2.  $\bar{X}$  dikatakan tidak stabil, jika  $\bar{X}$  tidak stabil.
3.  $\bar{X}$  dikatakan stabil asimtotik, jika  $\bar{X}$  stabil dan jika terdapat  $r > 0$ , sedemikian sehingga  $F^n(X_0) \rightarrow \bar{X}$  saat  $n \rightarrow +\infty$  untuk semua  $X_0$  yang memenuhi  $|X_0 - \bar{X}| < r$  (Hale, J.K., Kocak, H., 1991).

Teorema yang diberikan di bawah ini dapat mempermudah penulis untuk membuktikan kestabilan titik tetap.

**Teorema 2.3.** Misalkan  $F$  pada persamaan (2.9) adalah fungsi yang turunan pertamanya kontinu. Titik tetap  $\bar{X}$  dari fungsi  $F$  stabil asimtotik jika  $|F'(\bar{X})| < 1$ , dan  $\bar{X}$  tidak stabil jika  $|F'(\bar{X})| > 1$  (Hale, J.K., Kocak, H., 1991).

Pada subbab selanjutnya diberikan suatu fungsi yang menggambarkan hubungan sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu.

### 2.3.1 Pemetaan Stroboskopik

Hubungan sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu yang periodik digambarkan oleh suatu fungsi yang disebut fungsi stroboskopik atau lebih dikenal dengan pemetaan stroboskopik. Pemetaan stroboskopik adalah suatu fungsi yang digunakan untuk melihat perilaku dari sistem yang periodik.

Misalkan sistem dinamik kontinu pada persamaan (2.1) mempunyai solusi  $X(t)$ . Pemetaan

$$G_T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X(t) \mapsto X(t + T), \quad (2.10)$$

adalah pemetaan stroboskopik dengan periode waktu  $T$  (Ogninski, A., 2009).

## 2.4 Teori Floquet

Teori Floquet digunakan untuk menyelidiki kestabilan dari solusi sistem persamaan diferensial yang periodik. Oleh karena itu, sebelum membahas Teori Floquet, terlebih dahulu diberikan pengertian dari solusi periodik.

**Definisi 2.8 (Solusi Periodik).** Misalkan  $X(t)$  adalah solusi untuk persamaan (2.1). Jika terdapat bilangan positif  $T$  terkecil sedemikian sehingga  $X(t) = X(t + T)$  untuk setiap  $t \in \mathbb{R}$ , maka  $X(t)$  disebut solusi periodik dari persamaan (2.1) dengan periode  $T$  (Verhulst, F. 1996).

Misalkan matriks  $A$  pada sistem persamaan diferensial (2.3) adalah matriks periodik yang kontinu dengan periode  $T$ . Berikut ini diberikan teorema Floquet untuk persamaan (2.3).

**Teorema 2.4 (Teorema Floquet).** Setiap matriks fundamental  $\Omega(t)$  dari persamaan (2.3) bisa ditulis sebagai perkalian dari dua matriks berukuran  $n \times n$  yaitu:

$$\Omega(t) = P(t)C,$$

dengan  $P(t)$  adalah matriks periodik dengan periodenya sebesar  $T$  dan  $C$  adalah matriks konstan  $n \times n$  (Verhulst, F., 1996).

### Bukti Teorema 2.4

Akan dibuktikan bahwa  $P(t)$  merupakan matriks periodik dengan periodenya sebesar  $T$ , adapun langkahnya sebagai berikut.

Matriks fundamental  $\Omega(t)$  disusun dari  $n$  solusi independen,  $\Omega(t + T)$  juga merupakan matriks fundamental. Untuk menunjukkan hal ini misalkan  $\tau = t + T$ , maka

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A(\tau - T)X, \\ &= A(t)X. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Berdasarkan persamaan (2.11) dan karena  $\Omega(t)$  merupakan matriks fundamental dari persamaan (2.3), maka  $\Omega(t) = \Omega(t + T)$  terbukti merupakan matriks fundamental. Jelas bahwa matriks fundamental  $\Omega(t)$  dan  $\Omega(t + T)$  bergantung



linier, yang berarti terdapat matriks  $C$  yang merupakan matriks nonsingular berukuran  $n \times n$  sedemikian sehingga

$$\Omega(t + T) = \Omega(t)C. \quad (2.12)$$

Kemudian terdapat matriks konstan  $B$  sedemikian sehingga

$$C = e^{BT}.$$

Sekarang akan dibuktikan bahwa  $\Omega(t)e^{-Bt}$  merupakan fungsi periodik dengan periode  $T$ . Misalkan  $\Omega(t)e^{-Bt} = P(t)$ , maka

$$\begin{aligned} P(t + T) &= \Omega(t + T)e^{-B(t+T)}, \\ &= \Omega(t)Ce^{-BT}e^{-Bt}, \\ &= \Omega(t)e^{-Bt}, \\ &= P(t). \end{aligned}$$

Karena  $P(t + T) = P(t)$ , maka terbukti  $P(t)$  merupakan matriks periodik dengan periode  $T$ .

#### **Catatan 1.**

Matriks  $C$  pada persamaan (2.12) disebut dengan matriks monodromi (*monodromy matrix*) dari persamaan (2.3). Nilai eigen  $\lambda$  dari  $C$  disebut dengan pengali Floquet atau Floquet *multipliers* dan  $\lambda = e^{\mu T}$  disebut dengan *characteristic exponent* (Verhulst, F., 1996).

#### **Catatan 2.**

Syarat perlu solusi periodik dari persamaan (2.3) menjadi stabil adalah apabila semua modulus dari pengali Floquet (Floquet *multiplier*) nilainya lebih kecil atau sama dengan 1 (Verhulst, F., 1996).

### 2.5 Basic Reproduction Number

Pada subbab ini dijelaskan pengetahuan dasar dari *basic reproduction number* yang dinotasikan dengan  $R_0$ , yang mengacu pada Castillo-Chavez, C., Feng, Z. dan Huang, W. (2002), beserta metode yang digunakan dalam penurunan rumus *basic reproduction number* dari suatu model epidemik penyakit dalam suatu populasi.

**Definisi 2.8 (Basic Reproduction Number).** *Basic reproduction number* menyatakan rata-rata banyaknya kasus kedua (individu *infectious* baru) yang

disebabkan satu individu *infectious* selama masa terinfeksi dalam keseluruhan populasi *susceptible* (Castillo-Chavez, C., Feng, Z., Huang, W., 2002).

Dalam penurunan rumus  $R_0$  digunakan metode operator generasi selanjutnya (*the next generation operator*). Dalam metode ini,  $R_0$  didefinisikan sebagai radius spektral dari operator generasi selanjutnya. Berikut ini adalah definisi dari radius spektral.

**Definisi 2.9 (Radius Spektral).** Misalkan  $K$  adalah matriks berukuran  $n \times n$  dan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  adalah nilai eigen dari matriks  $K$ , maka radius spektral dari matriks  $K$  didefinisikan sebagai:

$$\rho(K) = \max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|.$$

### Metode Operator Generasi Selanjutnya

Misalkan model epidemik suatu penyakit dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= f(X, Y, Z), \\ \frac{dY}{dt} &= g(X, Y, Z), \\ \frac{dZ}{dt} &= h(X, Y, Z), \end{aligned} \tag{2.13}$$

dengan  $X \in \mathbb{R}^r$ ,  $Y \in \mathbb{R}^s$ , dan  $Z \in \mathbb{R}^n$ , dengan  $r, s, n \geq 0$  dan  $h(X, 0, 0) = 0$ .

Komponen  $X$  terdiri dari kelas-kelas individu yang tidak terinfeksi penyakit yang sedang diobservasi. Komponen  $Y$  terdiri dari kelas-kelas individu yang terinfeksi penyakit yang sedang diobservasi, tetapi tidak dapat menularkan penyakit tersebut. Komponen  $Z$  terdiri dari kelas-kelas individu yang terinfeksi penyakit yang sedang diobservasi dan dapat menularkan penyakit tersebut.

Misalkan:

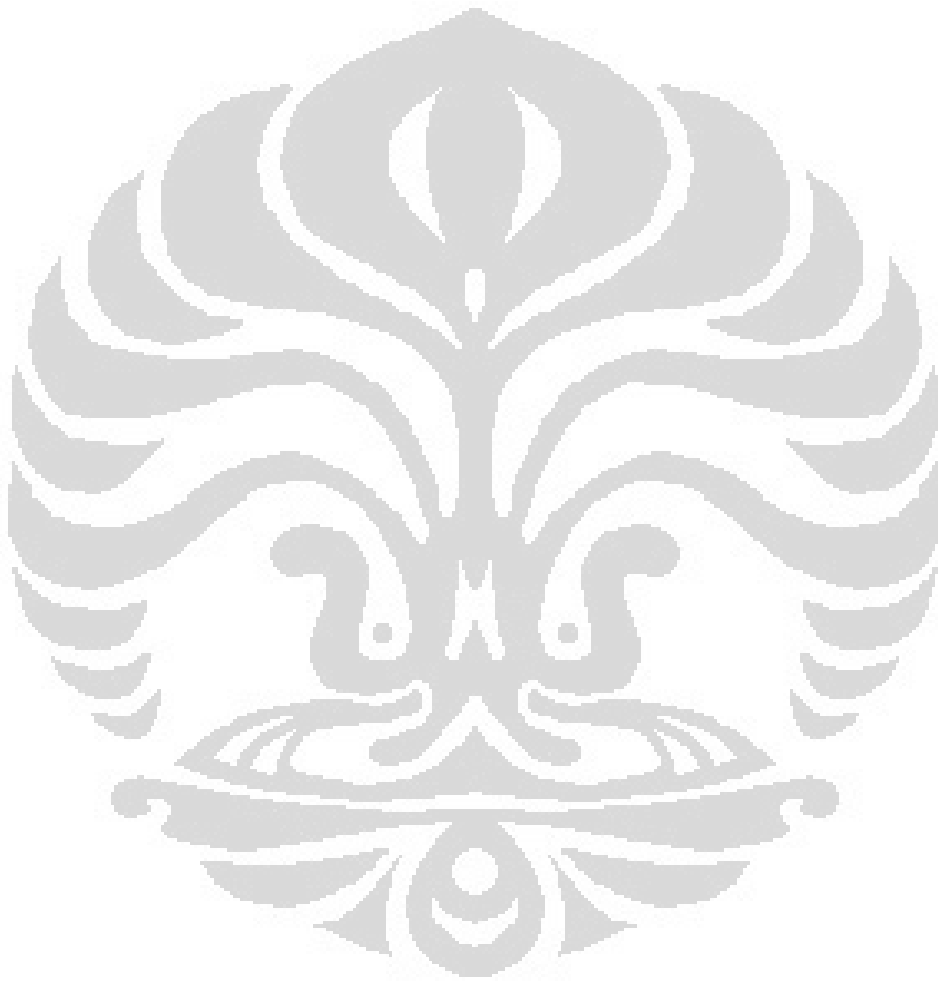
- $U_0 = (X^*, 0, 0) \in \mathbb{R}^{r+s+n}$  adalah titik kesetimbangan bebas-infeksi dari sistem persamaan (2.13), yaitu  $f(X^*, 0, 0) = g(X^*, 0, 0) = h(X^*, 0, 0) = 0$ .
- Persamaan  $g(X^*, Y, Z) = 0$  dapat diubah menjadi  $Y = \tilde{g}(X^*, Z)$ .
- $K = \frac{\partial}{\partial Z} h(X^*, \tilde{g}(X^*, 0), 0)$ .

Jika  $K$  dapat dituliskan dalam bentuk

$$K = M - D,$$

dengan  $M \geq 0$  ( $m_{ij} \geq 0$ ) dan  $D \geq 0$  adalah matriks diagonal, maka *basic reproduction number* didefinisikan sebagai radius spektral dari matriks  $MD^{-1}$ , sehingga berdasarkan definisi (2.9), diperoleh

$$R_0 = \rho(MD^{-1}).$$



## BAB 3

### EFEK VAKSINASI PADA MODEL EPIDEMIK SIR

Bab ini membahas beberapa hal yang menjadi tujuan dari tesis ini. Dalam subbab 3.1 dijelaskan proses pemodelan secara matematis epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal. Penyebaran penyakit ini dimodelkan dengan model SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*) yang pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model ini kemudian dianalisa untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangannya. Kriteria kestabilan titik kesetimbangan didasarkan pada *basic reproduction number* dari model tersebut.

Dalam upaya mencegah penyebaran penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal diberikan strategi vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut. Pada subbab 3.1 dibahas pembentukan model penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dengan model SIR tanpa pengaruh vaksinasi. Pada subbab 3.2 dan 3.3 dibahas model SIR yang telah diberi efek vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut. Masing-masing model yang diperoleh pada subbab 3.2 dan 3.3 dianalisa untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan bebas-infeksinya, dengan kriteria kestabilan titik kesetimbangan bebas-infeksi didasarkan pada *basic reproduction number* dari masing-masing model. Pada akhir dari bab ini, diberikan perbandingan antara vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut, sehingga diperoleh hasil secara matematis, mana vaksinasi yang lebih baik diterapkan.

#### 3.1 Model Epidemik SIR

Dalam proses pemodelan secara matematis dari epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal, populasi penduduk dibagi menjadi tiga kelas individu, yaitu:

1. individu *susceptible* adalah individu yang sehat dan dapat terinfeksi penyakit,
2. individu *infectious* adalah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakitnya,
3. individu *recovered* adalah individu yang telah sembuh dari penyakit.

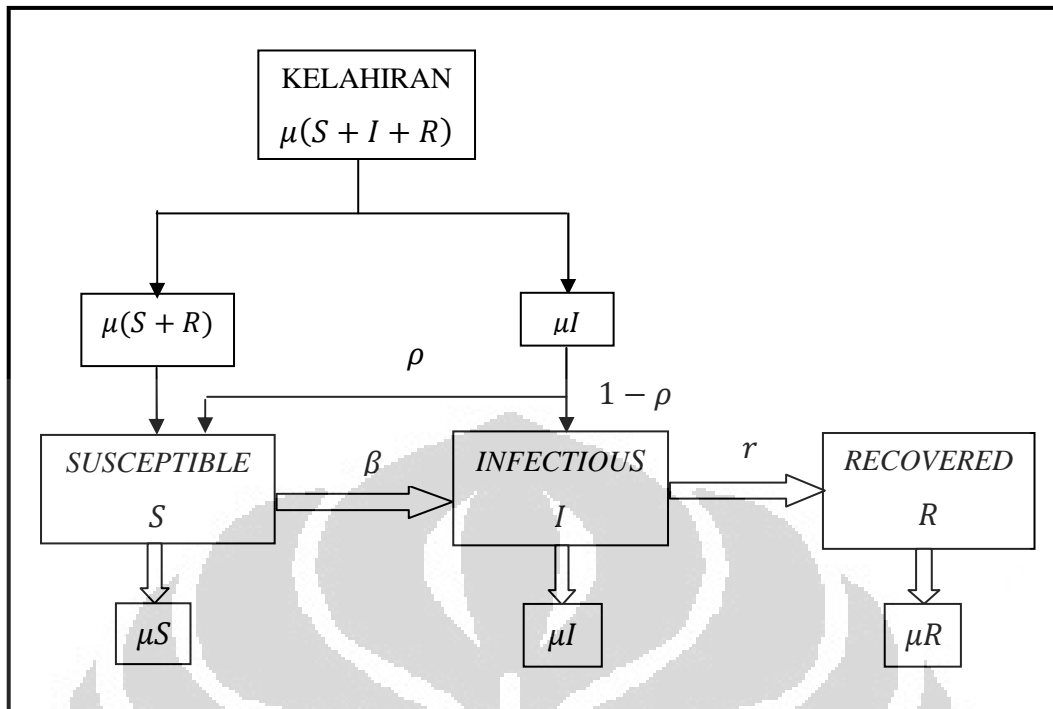
Asumsi-asumsi yang digunakan dalam proses pemodelan epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal adalah sebagai berikut:

1. Jumlah populasi tetap,
2. Populasi penduduk bersifat tertutup, dalam pengertian bahwa terjadinya penambahan atau pengurangan jumlah penduduk hanya melalui kelahiran dan kematian, sedangkan penambahan atau pengurangan jumlah penduduk melalui imigrasi atau emigrasi diabaikan,
3. laju kelahiran sama dengan laju kematian,
4. penyakit dapat disembuhkan,
5. seseorang yang sudah sembuh dari penyakit tersebut tidak akan terserang lagi karena telah mempunyai sistem kekebalan seumur hidup,
6. setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama untuk melakukan kontak dengan individu lain dalam populasi,
7. tidak ada masa inkubasi apabila terjadi proses penularan,
8. populasi bersifat homogen,
9. individu yang lahir dari orang tua yang *infectious* dan *recovered* mempunyai kekebalan sementara.

Dan, variabel-variabel serta parameter-parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

1.  $S$  menyatakan proporsi subpopulasi individu *susceptible* pada saat  $t$ ,  $S > 0$ ,
2.  $I$  menyatakan proporsi subpopulasi individu *infectious* pada saat  $t$ ,  $I \geq 0$ ,
3.  $R$  menyatakan proporsi subpopulasi individu *recovered* pada saat  $t$ ,  $R \geq 0$ ,
4.  $\mu$  menyatakan laju kematian dan kelahiran alami per kapita,
5.  $\beta$  menyatakan laju terjadinya kontak dengan individu *infectious*,
6.  $r$  menyatakan laju kesembuhan individu *infectious* per kapita,
7.  $\rho$  menyatakan probabilitas keturunan atau bayi yang lahir dari orang tua yang *infectious* adalah individu yang *susceptible*,  $0 < \rho < 1$ .

Berdasarkan asumsi-asumsi dan variabel-variabel serta parameter-parameter yang digunakan, maka secara skematis, dinamika populasi penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1. Dinamika populasi dalam model SIR dengan penularan secara horizontal dan vertikal

Keterangan:

- a. Perubahan proporsi subpopulasi individu *susceptible* ( $S$ ) terhadap waktu ( $t$ )  
 Pertambahan proporsi individu *susceptible* per satuan waktu dipengaruhi oleh proporsi kelahiran dari individu *susceptible* dan *recovered*, dinotasikan dengan  $\mu(S + R)$ , dan proporsi kelahiran individu *susceptible* yang lahir dari orang tua yang *infectious* sebesar  $\mu\rho I$ . Pengurangan proporsi individu *susceptible* per satuan waktu dipengaruhi oleh:  $\beta SI$ , yaitu proporsi individu *susceptible* yang terinfeksi penyakit per satuan waktu, dan  $\mu S$ , yaitu proporsi individu *susceptible* yang mati secara alami per satuan waktu, sehingga

$$\frac{dS}{dt} = \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu\rho I. \quad (3.1)$$

- b. Perubahan proporsi subpopulasi individu *infectious* ( $I$ ) terhadap waktu ( $t$ )  
 Pertambahan proporsi individu *infectious* per satuan waktu dipengaruhi oleh:  $\beta SI$ , yaitu proporsi individu *susceptible* yang terinfeksi penyakit per satuan waktu, dan proporsi kelahiran individu *infectious* yang lahir dari orang tua yang *infectious* sebesar  $(1 - \rho)I$ . Pengurangan proporsi individu *infectious* per satuan waktu dipengaruhi oleh:  $rI$ , yaitu proporsi kesembuhan individu

*infectious* per satuan waktu, dan  $\mu I$ , yaitu proporsi individu *infectious* yang mati secara alami per satuan waktu, sehingga

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI. \quad (3.2)$$

- c. Perubahan proporsi subpopulasi individu *recovered* ( $R$ ) terhadap waktu ( $t$ )  
 Pertambahan proporsi individu *recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh  $rI$ , yaitu proporsi kesembuhan individu *infectious* per satuan waktu.  
 Pengurangan proporsi individu *recovered* per satuan waktu dipengaruhi oleh  $\mu R$ , yaitu proporsi individu *recovered* yang mati secara alami per satuan waktu, sehingga

$$\frac{dR}{dt} = rI - \mu R. \quad (3.3)$$

Jadi, model epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dapat dimodelkan secara matematis ke dalam sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu berikut ini:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI, \\ \frac{dR}{dt} &= rI - \mu R. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pada sistem (3.4),  $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$ . Hal ini menunjukkan bahwa populasi berukuran tetap. Karena  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  berturut-turut menotasikan proporsi dari subpopulasi individu *susceptibles*, *infectious*, dan *recovered*, smaka  $S + I + R = 1$ .

### 3.1.1 Penurunan *Basic Reproduction Number* ( $R_0$ )

Berdasarkan teori pada subbab 2.5 mengenai metode yang digunakan dalam penurunan *basic reproduction number* ( $R_0$ ), yaitu metode pendekatan operator generasi selanjutnya, maka untuk sistem (3.4) berlaku:

$$\begin{aligned} X &= (S, R), \\ Z &= I, \\ f_S(X, Z) &= \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I, \\ f_R(X, Z) &= rI - \mu R, \\ h(X, Z) &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI. \end{aligned}$$

a. Misalkan  $U_0 = (X^*, 0) = (S^*, R^*, 0)$  adalah titik kesetimbangan bebas-infeksi, maka:

(i) Dari persamaan  $f_R(S^*, R^*, 0) = 0$  diperoleh  $R^* = 0$ ,

(ii) Dari  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ , diperoleh  $S^* = 1$ ,

sehingga  $U_0 = (S^*, R^*, 0) = (1, 0, 0)$ .

b. Misalkan  $K = \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, 0)$ .

$$\begin{aligned} \text{Karena } \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, 0) &= \beta 1 - \mu + (1 - \rho)\mu - r \\ &= \beta - \mu\rho - r. \end{aligned}$$

Maka  $K = \beta - \mu\rho - r$ . Karena  $K$  dapat dituliskan dalam bentuk  $K = M - D$  dengan  $M = \beta > 0$  dan  $D = \mu\rho + r > 0$ , maka

$$\begin{aligned} R_0 &= \sigma(MD^{-1}), \\ &= \frac{\beta}{\mu\rho + r}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

dengan  $\sigma(P)$ , menyatakan spektral radius dari matriks  $P$ .

Berdasarkan rumus  $R_0$  pada persamaan (3.5), terlihat bahwa faktor-faktor yang sangat berpengaruh terhadap penyebaran penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal adalah laju terjadinya kontak dengan individu *infectious* per individu ( $\beta$ ), laju kematian alami per individu ( $\mu$ ), probabilitas keturunan atau bayi yang lahir dari orang tua yang *infectious* adalah individu yang *susceptible* ( $\rho$ ), dan laju kesembuhan individu *infectious* per individu ( $r$ ). Semakin besar laju terjadinya kontak dengan individu *infectious* per individu, maka semakin besar kemungkinan terjadinya epidemik penyakit tersebut, begitu pula sebaliknya. Dan semakin besar laju kematian alami per individu, semakin besar probabilitas keturunan atau bayi yang lahir dari orang tua yang *infectious* adalah individu yang *susceptible*, atau laju kesembuhan individu *infectious* per individu, maka semakin kecil kemungkinan terjadinya epidemik, begitu pula sebaliknya. Atau dengan perkataan lain, untuk menghindari terjadinya epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal, maka setiap individu yang *susceptible* harus mengurangi kontak langsung dengan individu yang *infectious*, memperbesar laju kematian per individu dan setiap orang tua yang *infectious* harus berkonsultasi dengan dokter agar anak yang dilahirkannya tidak mengidap penyakit yang diderita orang tuanya.



### 3.1.2 Analisa Dinamika

Untuk mengetahui dinamik dari sistem (3.4), maka pada subbab ini dilakukan analisa dinamik terhadap sistem (3.4). Analisa dinamik dari sistem (3.4) yang dilakukan adalah analisa kestabilan titik kesetimbangan dari sistem (3.4). Sistem (3.4) memiliki dua titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan yang pertama dinamakan titik kesetimbangan bebas-infeksi, yaitu titik kesetimbangan  $(S^*, I^*)$  dari sistem (3.4) dengan  $I^* = 0$ . Titik kesetimbangan yang kedua dinamakan titik kesetimbangan epidemik, yaitu titik kesetimbangan  $(S_1^*, I_1^*)$  dari sistem (3.4) dengan  $I^* > 0$ . Analisa dinamik yang dilakukan adalah analisa kestabilan titik kesetimbangan bebas-infeksi dan titik kesetimbangan epidemik dari sistem (3.4).

Sistem (3.4) adalah sistem persamaan diferensial nonlinier dan berdasarkan teori pada subbab 2.1.2, maka untuk menganalisa kestabilan titik kesetimbangan bebas-infeksi dan titik kesetimbangan epidemik dari sistem (3.4), terlebih dahulu dilakukan linierisasi dari sistem (3.4) di sekitar titik kesetimbangan tersebut.

Karena populasi berukuran tetap, maka untuk menganalisa kestabilan titik kesetimbangan sistem (3.4) dapat dilakukan dengan menganalisa sistem berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu(1 - I) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI,\end{aligned}\tag{3.6}$$

Sistem (3.6) dapat disebut juga sebagai model SI.

Berdasarkan Definisi (2.2), kondisi kesetimbangan dipenuhi ketika

$$\begin{aligned}\mu(1 - I) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I &= 0, \\ \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI &= 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Dari persamaan (3.7) diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu

1. Titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S^*, I^*)$  yaitu kondisi dimana tidak terdapat individu *infectious* dalam populasi, secara matematis dinyatakan dengan

$$I^* = 0,$$

$$(S^*, I^*) = (1, 0).$$

2. Titik kesetimbangan epidemik  $(S_1^*, I_1^*)$  yaitu kondisi dimana terdapat individu *infectious* dalam populasi,  $I_1^* > 0$ ,

$$(S_1^*, I_1^*) = \left( \frac{\mu\rho+r}{\beta}, \frac{\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} \right).$$

Titik kesetimbangan epidemik ada jika  $R_0 > 1$ .

### 3.1.2.1 Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas-Infeksi

Misalkan  $A$  adalah matriks Jacobian dari sistem (3.6) di titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S^*, I^*)$ , maka

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & -\mu - \beta + \mu\rho \\ 0 & \beta - \mu\rho - r \end{pmatrix},$$

persamaan karakteristik dari matriks  $A$  adalah

$$(\lambda - \mu)(\lambda - \beta + \mu\rho + r) = 0, \quad (3.8)$$

dan akar-akar karakteristik dari persamaan (3.8) adalah

$$\lambda_1 = -\mu < 0,$$

$$\lambda_2 = \beta - (\mu\rho + r) = (R_0 - 1)(\mu\rho + r).$$

Dari akar-akar karakteristik persamaan (3.8), diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- a. Jika  $R_0 < 1$ , maka  $\lambda_2 < 0$ ,
- b. Jika  $R_0 > 1$ , maka  $\lambda_2 > 0$ ,

karena akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristik (3.8) bernilai negatif jika  $R_0 < 1$  dan terdapat satu akar karakteristik dari persamaan karakteristik (3.8) yang bernilai positif jika  $R_0 > 1$ , maka berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Jika  $R_0 < 1$ , maka titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S^*, I^*)$  bersifat stabil asimtotik lokal.
2. Jika  $R_0 > 1$ , maka titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S^*, I^*)$  bersifat tidak stabil.

### 3.1.2.2 Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan Epidemik

Misalkan  $B$  adalah matriks Jacobian dari sistem (3.6) di titik kesetimbangan epidemik  $(S_1^*, I_1^*)$ , maka

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-\beta\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} - \mu & -\mu - r \\ \frac{\beta\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks  $B$  adalah

$$\lambda^2 + \lambda \left( \frac{\beta\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} + \mu \right) + (\mu + r) \frac{\beta\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta} = 0. \quad (3.9)$$

Akar-akar persamaan karakteristik persamaan (3.9) bernilai negatif jika jumlah akar-akarnya bernilai kurang dari nol,  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$  dan hasil kali akar-akarnya bernilai lebih besar dari nol,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ . Agar kondisi  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$  dan  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$  terpenuhi, maka nilai  $R_0$  pada persamaan (3.9) harus lebih besar dari 1,  $R_0 > 1$ . Oleh karena itu, agar akar-akar persamaan karakteristik persamaan (3.9) bernilai negatif, maka  $R_0 > 1$ . Berdasarkan Teorema 2.2 (2), titik keseimbangan epidemik  $(S_1^*, I_1^*)$  stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$ , sedangkan jika  $R_0 < 1$ , titik kesetimbangan epidemik  $(S_1^*, I_1^*)$  tidak ada.

### 3.2 Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi konstan

Vaksinasi konstan adalah pemberian vaksin yang dilakukan kepada semua bayi yang baru lahir. Pada kenyataannya, vaksinasi konstan diberikan beberapa bulan setelah bayi lahir. Vaksin yang memproteksi infeksi virus campak telah diberikan secara rutin di Israel sejak Februari 1976 pada bayi yang berumur 9 bulan. Sejak 1971, karena persentase kegagalan vaksin yang tinggi, bayi diberikan vaksin pada umur 12 bulan, dan sejak tahun 1975 vaksin diberikan pada bayi yang berumur 15 bulan. (Agur, Z., Cojocar, L., Major, G., Anderson, R.M., & Danon, Y., 1993).

Berikut ini dijelaskan proses pembentukan model SIR dengan vaksinasi konstan:

Bayi yang lahir sehat, tanpa membawa penyakit dari orang tuanya, masuk ke dalam kelompok *susceptible*, sehingga proporsi bayi yang kebal terhadap penyakit karena telah memperoleh vaksin adalah  $\mu p S$ , dengan parameter  $p$  menyatakan proporsi bayi yang sukses divaksinasi,  $0 < p < 1$ . Proporsi bayi yang telah memperoleh vaksin sebesar  $\mu p S$  akan memasuki kelompok *recovered*, sehingga persamaan (3.3) menjadi

$$\frac{dR}{dt} = rI - \mu R + \mu p S,$$

sedangkan proporsi bayi yang tidak memperoleh vaksin sebesar  $\mu S - \mu p S = (1 - p)\mu S$  akan memasuki kelompok *susceptible* dan berpotensi terinfeksi penyakit, sehingga persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{dS}{dt} = \mu R - \beta SI - \mu S + \mu \rho I + (1 - p)\mu S.$$

Model penyebaran penyakit yang menyebar secara horizontal dan vertikal setelah diberikan vaksinasi konstan dapat dimodelkan secara matematis ke dalam sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu R - \beta SI - \mu S + \mu \rho I + (1 - p)\mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI, \\ \frac{dR}{dt} &= rI - \mu R + \mu p S, \end{aligned} \tag{3.10}$$

dengan  $S + I + R = 1$ .

### 3.2.1 Penurunan *Basic Reproduction Number* ( $R_1$ )

Berdasarkan teori pada subbab 2.5 mengenai metode yang digunakan dalam penurunan *basic reproduction number* ( $R_1$ ), yaitu metode pendekatan operator generasi selanjutnya, maka untuk sistem (3.10) berlaku:

$$X = (S, R),$$

$$Z = I,$$

$$f_S(X, Z) = \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I - \mu p S,$$

$$f_R(X, Z) = rI - \mu R + \mu p S,$$

$$h(X, Z) = \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI.$$

a. Misalkan  $U_1 = (X, 0) = (S_0, R_0, 0)$  adalah titik keseimbangan bebas-infeksi, maka:

(i) Dari persamaan  $f_S = (S_0, R_0, 0) = 0$  diperoleh  $S_0 = \frac{\mu}{\mu + \mu p}$ ,

(ii) Dari  $f_R = (S_0, R_0, 0) = 0$ , diperoleh  $R_0 = \frac{\mu p}{\mu + \mu p}$ ,

sehingga

$$U_1 = (S_0, R_0, 0) = \left( \frac{\mu}{\mu + \mu p}, \frac{\mu p}{\mu + \mu p}, 0 \right).$$

b. Misalkan  $K = \frac{\partial}{\partial I} h(S_0, R_0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \text{Karena } \frac{\partial}{\partial I} h(S_0, R_0, 0) &= \beta \left( \frac{\mu}{\mu + \mu p} \right) - \mu + (1 - \rho)\mu - r \\ &= \beta \left( \frac{\mu}{\mu + \mu p} \right) - \mu \rho - r, \end{aligned}$$

maka

$$K = \beta \left( \frac{\mu}{\mu + \mu p} \right) - \mu \rho - r.$$

Karena  $K$  dapat dituliskan dalam bentuk  $K = M - D$  dengan  $M = \beta \left( \frac{\mu}{\mu + \mu p} \right) > 0$  dan  $D = \mu \rho + r > 0$ , maka

$$\begin{aligned} R_1 &= \rho(MD^{-1}) \\ &= \left( \frac{\beta}{\mu \rho + r} \right) \left( \frac{\mu}{\mu + \mu p} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Analisa Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas-Infeksi

Dari sistem (3.10)

$$\frac{dS + dI + dR}{dt} = 0,$$

jadi populasi mempunyai jumlah yang tetap, yaitu  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ . Oleh karena itu, untuk menganalisa model SIR pada sistem (3.10) dapat digunakan hanya dengan mempertimbangkan model SI sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu - \mu I - \mu S - \beta SI + \mu \rho I - \mu p S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Titik keseimbangan bebas-infeksi dari sistem (3.12) adalah  $(S_0, I_0) = \left( \frac{\mu}{\mu + \mu p}, 0 \right)$ . Misalkan  $A$  adalah matriks Jacobian dari sistem (3.12) di titik keseimbangan bebas-infeksi, maka

$$A = \begin{pmatrix} -\mu - \mu p & -\mu - \frac{\beta \mu}{\mu + \mu p} + \mu \rho \\ 0 & \frac{\beta \mu}{\mu + \mu p} - \mu \rho - r \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks  $A$  adalah

$$(\lambda + \mu + \mu p) \left( \lambda + r + \mu \rho - \frac{\beta \mu}{\mu + \mu p} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Akar-akar karakteristik dari persamaan (3.13) adalah

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\mu + \mu p) < 0, \\ \lambda_2 &= -(\mu \rho + r) + \frac{\beta \mu}{\mu + \mu p} = (R_1 - 1)(\mu \rho + r). \end{aligned}$$

Dari akar-akar karakteristik persamaan (3.13), diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- a. Jika  $R_1 < 1$ , maka  $\lambda_2 < 0$ ,
- b. Jika  $R_1 > 1$ , maka  $\lambda_2 > 0$ .

Karena akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristik (3.13) bernilai negatif jika  $R_1 < 1$  dan terdapat suatu akar karakteristik dari persamaan karakteristik (3.13) yang bernilai positif jika  $R_1 > 1$ , maka berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Jika  $R_1 < 1$ , maka titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0)$  bersifat stabil asimtotik lokal.
2. Jika  $R_1 > 1$ , maka titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0)$  bersifat tidak stabil.

Untuk memeriksa kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0)$ , digunakan Teorema 2.1 pada subbab 2.3. Misalkan fungsi Lyapunov  $V(S, I) = I(t)$ . Teorema 2.1 (1) otomatis terpenuhi karena memilih fungsi Lyapunov  $V(S, I) = I(t)$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(S, I) &= \dot{I}(t), \\
 &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI \\
 &\leq \beta I - \mu \rho I - rI \\
 &= [\beta - (r + \mu\rho)]I \\
 &= [\beta - (r + \mu\rho)] \frac{r + \mu\rho}{r + \mu\rho} I \\
 &= \left[ \frac{\beta(r + \mu\rho)}{r + \mu\rho} - r + \mu\rho \right] I \\
 &= [R_0(r + \mu\rho) - (r + \mu\rho)]I \\
 &= (R_0 - 1)(r + \mu\rho)I
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

agar Teorema 2.1 (2) terpenuhi, maka  $(R_0 - 1)(r + \mu\rho)I \leq 0$ . Karena  $r + \mu\rho > 0$  dan  $I \geq 0$ , maka kondisi  $\dot{V}(S, I) \leq 0$  terpenuhi jika  $R_0 < 1$ . Berdasarkan Teorema 2.1 titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0)$  stabil global jika  $R_1 < R_0 < 1$ . Berdasarkan pemeriksaan kestabilan dari titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0)$  diperoleh proporsi vaksinasi kritis  $p_c$ , dengan  $p_c = (R_0 - 1)$ . Jika  $p < p_c$ , maka titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0)$  tidak stabil, sedangkan titik

kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0)$  stabil jika  $p > p_c$ . Atau dengan kata lain, agar pencegahan penyakit berhasil (tidak ada individu yang terinfeksi penyakit,  $I(t) = 0$ ), maka proporsi bayi yang diberikan vaksin harus besar. Hal inilah yang menjadi kekurangan dari vaksinasi konstan, karena dengan pemberian proporsi vaksin yang besar, maka biaya yang dibutuhkan juga besar.

### 3.3 Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi Denyut

Vaksinasi denyut adalah strategi pemberian vaksin yang diberikan pada sebagian subpopulasi *susceptible* yang dilakukan secara berkala setiap periode tertentu. Pada vaksinasi denyut ini, sebagian subpopulasi *susceptible* yang mendapatkan vaksin dinotasikan dengan  $p$ ,  $0 < p < 1$ , dan periode pemberian vaksin dinotasikan dengan  $T$ .

Pada prinsipnya pemberian vaksinasi denyut adalah menjaga agar laju pertumbuhan subpopulasi *infectious* tidak berkembang. Dengan kata lain pemberian vaksinasi denyut bertujuan mempertahankan agar  $\frac{dI}{dt} < 0$  untuk  $t \geq 0$ , sehingga strategi ini menjamin bahwa  $I$  adalah fungsi yang menurun terhadap waktu, dan kondisi  $\frac{dI}{dt} < 0$  akan selalu terpenuhi jika proporsi subpopulasi *susceptible*,  $S(t)$ , secara permanen selalu di bawah *epidemic threshold*,  $S_c$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &< 0, \\ \beta SI - \mu I - (1 - \rho)\mu I - rI &< 0, \\ \beta SI &< (r + \mu\rho)I, \\ S &< \frac{r + \mu\rho}{\beta} = S_c. \end{aligned}$$

Dengan perkataan lain, agar pemberian vaksinasi denyut berhasil harus diciptakan kondisi proporsi subpopulasi *susceptible* tidak lebih dari  $\frac{r + \mu\rho}{\beta}$ .

Strategi vaksinasi denyut merupakan pemberian vaksin yang dilakukan secara periodik dan misalkan waktu saat dilakukan program pemberian vaksin adalah  $t_n = nT$  dengan  $T$  adalah periode pemberian vaksin. Kemudian waktu pada saat tidak dilakukan pemberian vaksin adalah  $t \neq nT$ . Besaran  $nT^-$  menotasikan waktu sesaat sebelum pemberian vaksinasi denyut.

Pada saat vaksinasi tidak diberikan,  $t \neq nT$ , modelnya sama seperti pada persamaan (3.4), sehingga pada saat  $t \neq nT$  model penyebaran penyakit secara horizontal dan vertikal dimodelkan secara matematis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI, \\ \frac{dR}{dt} &= rI - \mu R. \quad t \neq nT, n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Pada saat vaksinasi denyut dilakukan yaitu pada saat  $t_n = nT$ , maka terjadi perubahan proporsi pada subpopulasi *susceptible* dan *recovered*. Pemberian vaksinasi denyut memberikan kekebalan seumur hidup, sehingga subpopulasi *susceptible* yang memperoleh vaksinasi denyut sebesar  $pS$ , pindah dari subpopulasi *susceptible* ke subpopulasi *recovered*. Proporsi subpopulasi individu *recovered* ketika vaksinasi denyut ke- $n$  diberikan  $R(t_n)$  adalah jumlah proporsi subpopulasi individu *recovered* sesaat sebelum vaksin diberikan  $R(nT^-)$  dan proporsi subpopulasi individu *susceptible* yang mendapatkan vaksin sesaat sebelum vaksin diberikan adalah  $pS(nT^-)$ , sehingga secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$R(t_n) = R(nT^-) + pS(nT^-).$$

Proporsi subpopulasi individu *susceptible* ketika vaksinasi denyut ke- $n$  diberikan  $S(t_n)$  adalah proporsi subpopulasi individu *susceptible* sesaat sebelum vaksinasi diberikan dikurangi proporsi subpopulasi individu *susceptible* yang memperoleh vaksin sesaat sebelum vaksin diberikan. Secara matematis dinyatakan sebagai:

$$S(t_n) = (1 - p)S(nT^-),$$

sedangkan proporsi subpopulasi individu *infectious* tidak mengalami perubahan. Proporsi subpopulasi individu *infectious* ketika vaksinasi diberikan adalah

$$I(t_n) = I(nT^-).$$

Model penyebaran penyakit yang menyebar secara horizontal dan vertikal setelah diberikan vaksinasi denyut dimodelkan secara matematis ke dalam sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu(S + R) - \beta SI - \mu S + \mu \rho I,$$



$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI, \\
\frac{dR}{dt} &= rI - \mu R, & t \neq nT, n = 0, 1, 2, \dots \\
S(t_n) &= (1 - p)S(nT^-), \\
I(t_n) &= I(nT^-), \\
R(t_n) &= R(nT^-) + pS(nT^-) & t_n = nT, n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.15}$$

dengan  $S + I + R = 1$ .

### 3.3.1 Solusi Periodik Bebas-Infeksi

Sebelum melakukan analisa dinamik dari sistem (3.15), terlebih dahulu dicari solusi bebas-infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t), \tilde{R}(t))$  dari sistem (3.15). Solusi bebas-infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t), \tilde{R}(t))$  diperoleh ketika tidak terdapat subpopulasi *infectious* dalam populasi secara permanen, atau secara matematis dapat ditulis sebagai berikut

$$I(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.16}$$

Berdasarkan persamaan (3.16), maka diperoleh solusi bebas-infeksi untuk variabel  $I(t)$  adalah  $\tilde{I}(t) = 0$ . Dengan mensubstitusi persamaan (3.16), sistem (3.15) menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu - \mu S, \\
\frac{dR}{dt} &= -\mu R, \\
S(t_n) &= (1 - p)S(nT^-), \\
R(t_n) &= R(nT^-) + pS(nT^-),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

dalam interval waktu  $t_n = nT \leq t \leq t_{n+1} = (n + 1)T$ .

Berikut ini dijelaskan proses untuk mendapatkan solusi bebas-infeksi untuk variabel  $S(t)$ , yaitu  $\tilde{S}(t)$ . Penyelesaian persamaan (3.17) untuk variabel  $S(t)$  pada interval  $t_n \leq t < t_{n+1}$  adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= (1 - S)\mu, \\
\int \frac{1}{1-S} dS &= \int \mu dt, \\
-\ln(1 - S) &= \mu t + c, \\
1 - S &= e^{-\mu t - c},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(t) &= 1 - e^{-\mu t - c}, \\
S(t_n) &= 1 - e^{-\mu t_n - c}, \\
e^{-c} &= \frac{1 - S(t_n)}{e^{-\mu t_n}}, \\
\tilde{S}(t) &= 1 - e^{-\mu t \frac{1 - S(t_n)}{e^{-\mu t_n}}}, \\
\tilde{S}(t) &= 1 - e^{-\mu t \frac{1 - S(t_n)}{e^{-\mu t_n}}}, \\
\tilde{S}(t) &= 1 + (S(t_n) - 1)e^{-\mu(t - t_n)}, \\
&= Q(t),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

sedangkan pada saat  $t = t_{n+1}$ , penyelesaian persamaan (3.17) adalah

$$\tilde{S}(t) = (1 - p)Q(t). \tag{3.19}$$

$S(t_n)$  menyatakan proporsi *susceptible* ketika vaksinasi denyut ke- $n$  diberikan.

Persamaan (3.18) merupakan solusi bebas-infeksi untuk variabel  $S(t)$  antara dua pelaksanaan vaksinasi yang berurutan yaitu  $t_n = nT$  dan  $t_{n+1} = (n + 1)T$ , sedangkan persamaan (3.19) merupakan solusi  $S(t)$  ketika pemberian vaksinasi ke- $n+1$ .

Dari persamaan (3.19), proporsi *susceptible* ketika vaksinasi ke- $(n+1)$  adalah

$$\begin{aligned}
S(t_{n+1}) &= (1 - p)Q(t), \\
&= (1 - p)[1 + (S(t_n) - 1)e^{-\mu((n+1)T - nT)}], \\
&= (1 - p)[1 + (S(t_n) - 1)e^{-\mu(T)}], \\
&= F(S(t_n)).
\end{aligned}$$

Berdasarkan subbab 2.3.1,  $F$  adalah pemetaan stroboskopik (*stroboscopic map*).

Dengan menggunakan Definisi 2.6 diperoleh titik tetap dari pemetaan  $F$  adalah

$$S^* = \frac{(1-p)(1-e^{-\mu T})}{1-(1-p)e^{-\mu T}}. \tag{3.20}$$

Selanjutnya dilihat perilaku dari titik tetap  $S^*$ . Karena titik tetap  $S^*$  pada persamaan (3.20) untuk  $S(t_n) = S^*$ , berlaku

$$\left| \frac{dF(S(t_n))}{ds} \right|_{S(t_n)=S^*} = (1 - p)e^{-\mu T} < 1,$$

maka berdasarkan Teorema 2.3 titik tetap  $S^*$  dari pemetaan  $F$  stabil asimtotik.

Oleh karena itu, pemberian vaksinasi denyut menghasilkan barisan  $S(t_n)$  yang konvergen ke titik tetap  $S^*$ .

Dengan mensubstitusi  $S(t_n) = S^*$  ke persamaan (3.18) diperoleh solusi lengkap bebas-infeksi untuk variabel  $S(t)$ , yaitu

$$\tilde{S}(t) = 1 - \frac{pe^{-\mu(t-t_n)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

Selanjutnya, solusi untuk variabel  $R(t)$  dengan mudah diperoleh karena jumlah populasi tetap dengan  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ , sehingga

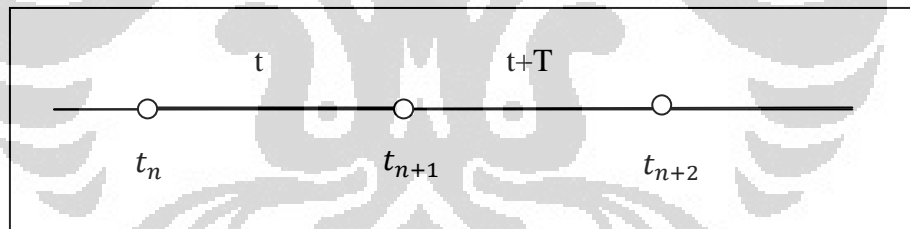
$$\begin{aligned} \tilde{R}(t) &= 1 - \tilde{S}(t) - \tilde{I}(t) \\ &= \frac{pe^{-\mu(t-t_n)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}. \end{aligned}$$

Jadi, solusi bebas infeksi sistem (3.15) adalah  $\left(1 - \frac{pe^{-\mu(t-t_n)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}}, 0, \frac{pe^{-\mu(t-t_n)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}}\right)$ .

Ternyata solusi bebas infeksi dari sistem (3.15) bersifat periodik dengan periode  $T$ . Berikut ini dibuktikan keperiodikan dari masing-masing variabel pada solusi bebas-infeksi.

#### Bukti Solusi Variabel $S(t)$ Bersifat Periodik

Sebelum membuktikan bahwa  $\tilde{S}(t+T) = \tilde{S}(t)$  terlebih dahulu perhatikan interval waktu pada Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Interval waktu pada strategi vaksinasi denyut

Berdasarkan Gambar 3.2 diperoleh interval waktu untuk  $\tilde{S}(t+T)$  adalah  $t_{n+1} \leq t+T < t_{n+2}$ . Batas bawah dari interval  $\tilde{S}(t+T)$  adalah  $t_{n+1}$ , sehingga

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t+T) &= 1 - \frac{pe^{-\mu((t+T)-(nT+T))}}{1-(1-p)e^{-\mu T}} \\ &= 1 - \frac{pe^{-\mu(t-nT)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}} \\ &= 1 - \frac{pe^{-\mu(t-t_n)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}} \\ &= \tilde{S}(t). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa solusi  $\tilde{S}(t)$  bersifat periodik.

### Bukti Solusi Variabel $I(t)$ Bersifat Periodik

Berdasarkan persamaan (3.16),

$$\tilde{I}(t + T) = 0 = \tilde{I}(t)$$

Jadi, terbukti bahwa solusi  $\tilde{I}(t)$  bersifat periodik.

### Bukti Solusi Variabel $R(t)$ Bersifat Periodik

Cara membuktikan bahwa solusi variabel  $R(t)$  bersifat periodik sama seperti membuktikan bahwa variabel  $S(t)$  bersifat periodik.

$$\begin{aligned}\tilde{R}(t + T) &= \frac{pe^{-\mu((t+T)-(nT+T))}}{1-(1-p)e^{-\mu T}} \\ &= \frac{pe^{-\mu(t-nT)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}} \\ &= \frac{pe^{-\mu(t-t_n)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}} \\ &= \tilde{R}(t).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa solusi  $\tilde{R}(t)$  bersifat periodik.

### 3.3.2 Analisa Kestabilan Solusi Periodik Bebas-Infeksi

Sama halnya seperti menganalisa kestabilan titik kesetimbangan bebas-infeksi pada strategi vaksinasi konstan. Analisa kestabilan solusi periodik bebas-infeksi pada strategi vaksinasi denyut dapat mempertimbangkan variabel  $S(t)$  dan  $I(t)$  saja. Hal ini boleh dilakukan karena ukuran populasi tetap. Model SI untuk sistem (3.15) adalah

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu(1 - I) - \beta SI - \mu S + \mu\rho I = f_1(S, I), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I + (1 - \rho)\mu I - rI = f_2(S, I).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Definisikan *basic reproduction number* ( $R_2$ ) untuk sistem (3.15), yaitu

$$R_2(T) = \frac{\beta}{(r+\mu\rho)T} \int_0^T \tilde{S}(\varepsilon) d\varepsilon,\tag{3.22}$$

dengan  $\tilde{S}(\varepsilon)$  adalah solusi periodik bebas-infeksi untuk variabel  $S(t)$ . Untuk kestabilan solusi periodik bebas-infeksi, diberikan teorema sebagai berikut:

**Teorema 3.1.** Jika  $R_2 < 1$ , maka solusi periodik bebas-infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t))$  stabil asimtotik lokal.

### Bukti Teorema 3.1

Misalkan variabel  $x_1(t)$  adalah gangguan kecil (*perturbation*) untuk solusi periodik bebas-infeksi dari variabel  $S(t)$  dan  $x_2(t)$  adalah gangguan kecil untuk solusi periodik bebas-infeksi dari variabel  $I(t)$ . Kestabilan solusi bebas-infeksi diperoleh dengan linierisasi persamaan (3.21) pada solusi bebas-infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t))$ , yaitu dengan memisalkan

$$\begin{aligned} S(t) &= \tilde{S}(t) + x_1(t), \\ I(t) &= \tilde{I}(t) + x_2(t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

Persamaan (3.21) diperluas dengan ekspansi Taylor dua variabel, dan setelah menghilangkan suku-suku berderajat tinggi serta menggunakan pemisalan (3.23), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d(\tilde{S}+x_1)}{dt} &\approx f_1(\tilde{S}, \tilde{I}) + \frac{\partial f_1(\tilde{S}, \tilde{I})}{\partial S} (S - \tilde{S}) + \frac{\partial f_1(\tilde{S}, \tilde{I})}{\partial I} (I - \tilde{I}), \\ \frac{d(\tilde{I}+x_2)}{dt} &\approx f_2(\tilde{S}, \tilde{I}) + \frac{\partial f_2(\tilde{S}, \tilde{I})}{\partial S} (S - \tilde{S}) + \frac{\partial f_2(\tilde{S}, \tilde{I})}{\partial I} (I - \tilde{I}). \end{aligned}$$

Karena  $(\tilde{S}, \tilde{I})$  adalah solusi bebas-infeksi maka  $f_1(\tilde{S}, \tilde{I}) = f_2(\tilde{S}, \tilde{I}) = 0$  dan  $\frac{d\tilde{S}}{dt} = \frac{d\tilde{I}}{dt} = 0$ , sehingga persamaan linier dari persamaan (3.21) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\mu x_1 + (\mu\rho - \mu - \beta\tilde{S}(t)) x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(\beta\tilde{S}(t) - \mu\rho - r). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Persamaan (3.23) dapat dinyatakan sebagai

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

dengan  $\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$ ,  $A(t) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu\rho - \mu - \beta\tilde{S}(t) \\ 0 & \beta\tilde{S}(t) - \mu\rho - r \end{pmatrix}$ , dan  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Telah

dibuktikan bahwa  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t))$  bersifat periodik, sehingga matriks  $A(t)$  dapat dibuktikan bersifat periodik dengan periode  $T$ . Karena hal ini, untuk melihat kestabilan dari solusi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t))$  digunakan Teori Floquet

Sebelum menggunakan Catatan 2 pada subbab 2.4, dicari terlebih dahulu matriks fundamental dari persamaan (3.24). Misalkan

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

adalah matriks fundamental dari persamaan (3.24) untuk interval  $0 \leq t \leq T$ , dengan  $(x_{11}(t), x_{21}(t))$  dan  $(x_{12}(t), x_{22}(t))$  merupakan solusi dari persamaan (3.24) yang mempunyai nilai awal adalah

$$\begin{aligned} x_{11}(0) &= 1, x_{21}(0) = 0, \\ x_{12}(0) &= 0, x_{22}(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Solusi dari persamaan (3.24) dengan menggunakan nilai awal pada persamaan (3.26) adalah

$$\begin{aligned} x_{11}(t) &= e^{-\mu t}, \\ x_{21}(t) &= 0, \\ x_{22}(t) &= e^{\int_0^t (\beta \bar{s}(t) - (\mu\rho+r)) dt}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Karena pada (3.26) diperoleh nilai  $x_{21}(t) = 0$ , maka untuk analisis selanjutnya  $x_{12}(t)$  tidak perlu dicari nilai eksaknya. Akibatnya diperoleh matriks fundamental  $\Phi(t)$  dari sistem linier (3.24) yaitu

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-\mu t} & x_{12}(t) \\ 0 & e^{\beta \int_0^t \bar{s}(t) dt - (\mu\rho+r)t} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Setelah ditentukan matriks fundamental selanjutnya ditentukan matriks monodromi. Berdasarkan matriks fundamental (3.28) dan karena  $\Phi^{-1}(0) = I$ , maka diperoleh matriks monodromi  $\Phi(T)$  dari persamaan (3.23) adalah

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} e^{-\mu T} & x_2(T) \\ 0 & e^{\beta \int_0^T \bar{s}(t) dt - (\mu\rho+r)T} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Selanjutnya dari matriks monodromi (3.27) diperoleh dua pengali Floquet yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{-\mu T}, \\ \lambda_2 &= e^{\beta \int_0^T \bar{s}(t) dt - (\mu\rho+r)T}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Berdasarkan catatan 2 pada subbab 2.4 maka solusi dari persamaan (3.23) akan stabil jika harga mutlak dari semua pengali Floquet lebih kecil dari 1.

Pada persamaan (3.30) diperoleh nilai dari  $|\lambda_1|$  yaitu

$$|\lambda_1| = |e^{-\mu T}| < 1.$$

Karena nilai  $|\lambda_1| < 1$ , maka kestabilan dari solusi bebas-infeksi hanya bergantung pada  $\lambda_2$ . Berdasarkan catatan 2 dan persamaan (3.30) diperoleh

$$\begin{aligned} \left| e^{\beta \int_0^T \tilde{S}(t) dt - (\mu\rho+r)T} \right| &< 1, \\ \left| e^{\beta \int_0^T \tilde{S}(t) dt - (\mu\rho+r)T} \right| &< e^0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Kemudian dengan mengambil pangkat dari pertidaksamaan (3.31) diperoleh

$$\begin{aligned} \beta \int_0^T \tilde{S}(t) dt - (\mu\rho+r)T &< 0, \\ \beta \int_0^T \tilde{S}(t) dt - (\mu\rho+r)T &< 0, \\ \beta \int_0^T \tilde{S}(t) dt &< (\mu\rho+r)T, \\ \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T} \int_0^T \tilde{S}(\varepsilon) d\varepsilon &< 1, \\ R_2 &< 1. \end{aligned}$$

*Basic reproduction number*,  $R_2(t)$ , pada persamaan (3.22) dapat dinyatakan secara lengkap dengan mensubstitusi solusi bebas-infeksi  $\tilde{S}(t)$  dan mengintegalkannya, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} R_2(T) &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T} \int_0^T 1 - \frac{pe^{-\mu(\varepsilon-0)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}} d\varepsilon \\ &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T} \left( T - \frac{p}{1-(1-p)e^{-\mu T}} \int_0^T e^{-\mu\varepsilon} d\varepsilon \right) \\ &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T} \left( T - \frac{p}{1-(1-p)e^{-\mu T}} \left[ \frac{-e^{-\mu T}}{\mu} - \frac{-1}{\mu} \right] \right) \\ &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T} \left( T + \frac{pe^{-\mu T}}{(1-(1-p)e^{-\mu T})\mu} - \frac{p}{(1-(1-p)e^{-\mu T})\mu} \right) \\ &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T} \left( T - \frac{p(1-e^{-\mu T})}{(1-(1-p)e^{-\mu T})\mu} \right) \\ &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T} \left( T - \frac{p \left( \frac{e^{\mu T} - 1}{e^{\mu T}} \right)}{\left( \frac{e^{\mu T} - (1-p)}{e^{\mu T}} \right) \mu} \right) \\ &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T} \left( T - \frac{p(e^{\mu T} - 1)}{(e^{\mu T} - (1-p))\mu} \right) \\ &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T\mu} \left( \frac{\mu T e^{\mu T} - \mu T + \mu T p - p e^{\mu T} + p}{e^{\mu T} - 1 + p} \right) \\ &= \frac{\beta}{(\mu\rho+r)T\mu} \left( \frac{(\mu T - p)(e^{\mu T} - 1) + \mu T p}{e^{\mu T} - 1 + p} \right). \end{aligned}$$

Kondisi kestabilan  $R_2(T) < 1$  ekuivalen dengan  $\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{S}(\varepsilon) d\varepsilon < \frac{\mu\rho+r}{\beta} = S_c$ . Oleh karena itu, agar solusi bebas-infeksi stabil, cukup bahwa nilai rata-rata dari  $\tilde{S}(t)$  dalam satu periode denyut  $T$  kurang dari *epidemic threshold*,  $S_c$ . Bahkan, solusi bebas-infeksi tetap stabil walaupun  $S(t)$  melewati *epidemic threshold* untuk suatu waktu dalam interval antar pemberian vaksin.

### 3.4 Perbandingan Strategi Vaksinasi Konstan dan Vaksinasi Denyut

Dalam subbab 3.2 dan 3.3, telah dianalisa strategi vaksinasi konstan dan denyut dalam model SIR dari penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal. Pada subbab ini dibandingkan efek vaksinasi konstan dan denyut, sehingga didapatkan hasil strategi vaksinasi mana yang lebih baik digunakan untuk menghilangkan penyakit epidemik yang menular secara horizontal dan vertikal.

Pada persamaan (3.11), *basic reproduction number* dari vaksinasi konstan adalah

$$R_1 = \frac{\mu}{\mu+\mu p} \cdot \frac{\beta}{\mu\rho+r},$$

sedangkan *basic reproduction number* dari vaksinasi denyut adalah

$$R_2(T) = \frac{(\mu T - p)(e^{\mu T} - 1 + \mu T p)}{\mu T (e^{\mu T} - 1 + p)} \cdot \frac{\beta}{\mu\rho+r}.$$

Misalkan

$$h(T) = \frac{(\mu T - p)(e^{\mu T} - 1 + \mu T p)}{\mu T (e^{\mu T} - 1 + p)},$$

maka diperoleh

$$\frac{dh(T)}{dT} = \frac{g(T)}{[\mu T (e^{\mu T} - 1 + p)]^2},$$

dengan

$$g(T) = -p\mu e^{\mu T} (\mu T e^{\mu T} - T\mu + T\mu p) + (\mu e^{\mu T} + T\mu^2 e^{\mu T} - \mu + \mu p)(pe^{\mu T} - p).$$

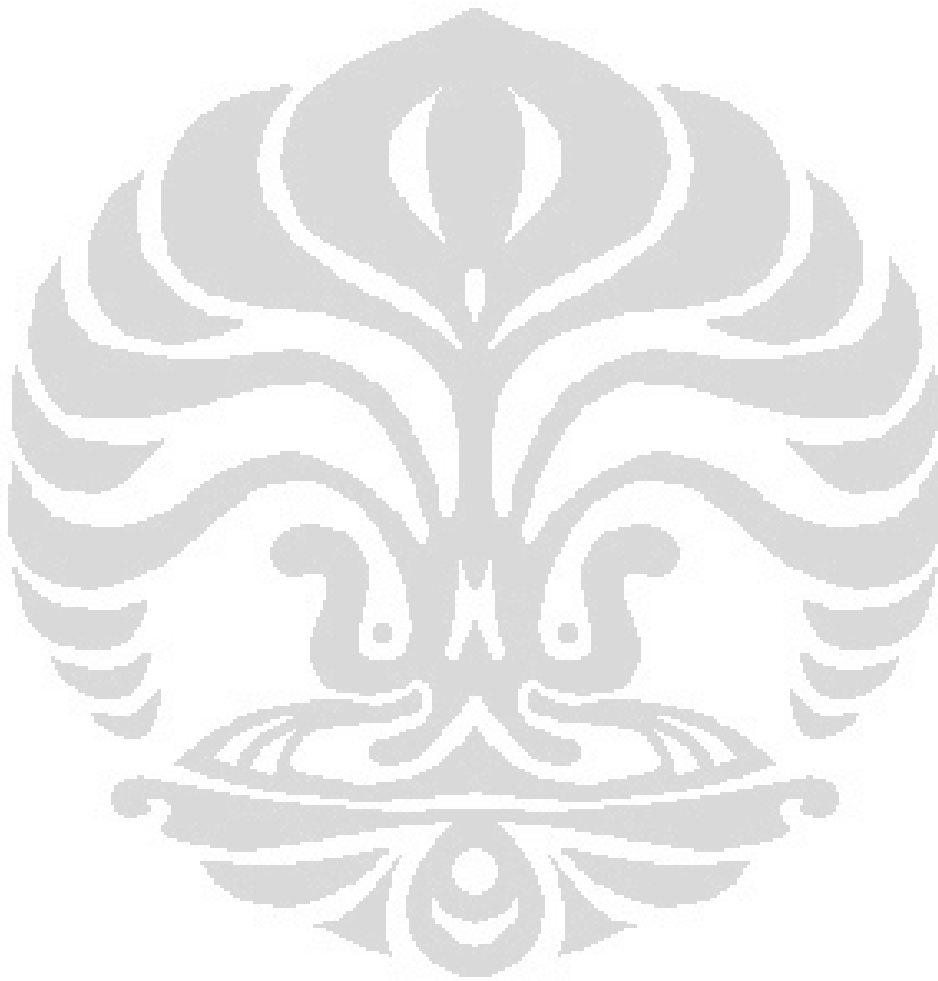
Jelas bahwa  $g(0) = 0$ . Karena  $\frac{dg(T)}{dT} = p\mu^2 e^{\mu T} (2e^{\mu T} - 2 - T\mu p) >$

$0$  ( $0 < p < 1$ ), maka  $g(T) > g(0) > 0$ , sehingga  $h(t)$  adalah fungsi naik. Oleh karena itu, ada konstanta unik  $T_c$ , sehingga

$$h(T_c) = \frac{\mu}{\mu+\mu p}.$$



Jika  $T < T_c$ , maka  $R_2(T) < R_1$ . Ini mengimplikasikan bahwa strategi vaksinasi denyut lebih baik digunakan untuk menghilangkan penyakit epidemik, Sedangkan jika  $T > T_c$ , maka  $R_1 < R_2(T)$ . Hal ini mengimplikasikan bahwa strategi vaksinasi konstan lebih mudah menghilangkan penyakit epidemik dari pada vaksinasi denyut. Dan jika  $T = T_c$ , maka  $R_2(T) = R_1$ , berarti sembarang penggunaan strategi vaksinasi konstan atau denyut akan menghasilkan efek yang sama.



## BAB 4

### SIMULASI MODEL EPIDEMIK SIR

Pada bab ini dibahas simulasi penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dengan model epidemik SIR dan mensimulasikan kestabilan model epidemik SIR yang telah diperoleh pada bab 3 dengan menggunakan *software* Matlab. Bab ini dibagi menjadi tiga subbab. Subbab 4.1 berisi simulasi model epidemik SIR tanpa pengaruh vaksinasi yang telah dibahas pada subbab 3.1. Simulasi untuk model epidemik SIR dengan pengaruh strategi vaksinasi konstan dan vaksinasi denyut diberikan pada subbab 4.2 dan 4.3. Subbab 4.4 berisi perbandingan hasil yang diperoleh pada subbab 4.1, 4.2, dan 4.3.

Keseluruhan simulasi dalam bab ini menggunakan kondisi awal yang sama, yaitu  $(0,5; 0,1)$ . Simulasi yang dilakukan pada bab ini, nilai parameter yang digunakan bukan berasal dari masalah nyata. Nilai parameter yang digunakan ditentukan oleh penulis.

#### 4.1 Simulasi Model Epidemik SIR Tanpa Efek Vaksinasi

Penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal yang dimodelkan dengan model epidemik SIR tanpa efek vaksinasi telah dibahas dalam subbab 3.1. Simulasi model epidemik SIR tanpa efek vaksinasi pada persamaan (3.4) dilakukan sebanyak dua kali. Pada simulasi pertama, nilai parameter diatur agar *basic reproduction number* ( $R_0$ ) pada persamaan (3.5) bernilai kurang dari satu, sedangkan nilai parameter pada simulasi kedua diatur agar *basic reproduction number* ( $R_0$ ) bernilai lebih besar dari satu.

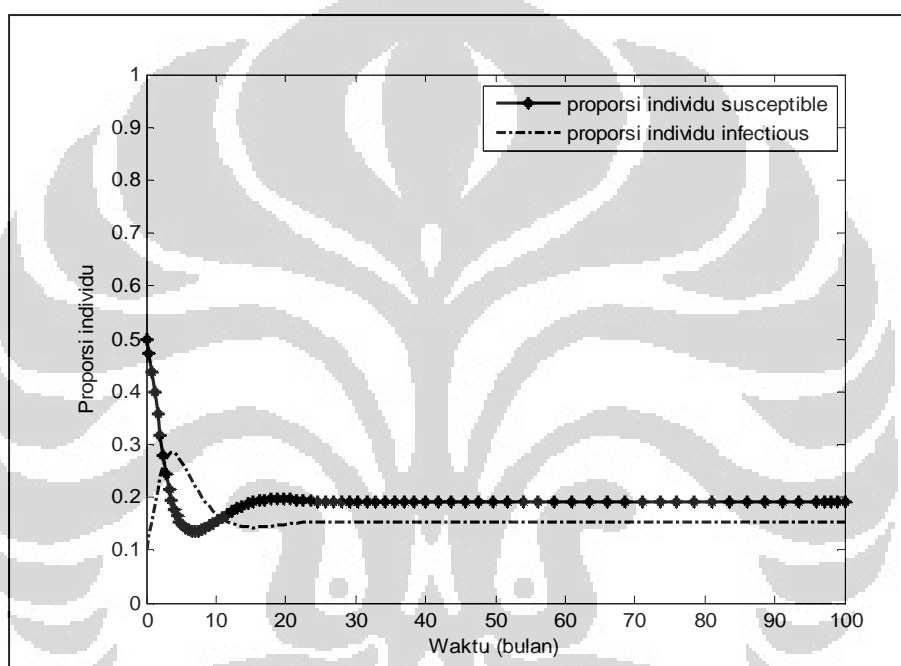
Nilai parameter yang digunakan pada simulasi pertama ini dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Nilai parameter pada simulasi pertama

Parameter	Nilai Parameter
$\mu$	0,07/bulan
$\beta$	1,9/bulan
$r$	0,3/bulan
$\rho$	0,9

*Basic reproduction number* ( $R_0$ ) dari sistem (3.4) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 adalah 5,342. Karena *basic reproduction number* dari simulasi ini bernilai lebih besar dari 1, maka berdasarkan hasil pada subbab 3.1.2, titik kesetimbangan epidemik,  $(S_1^*, I_1^*)$ , dari sistem (3.4) stabil, dengan  $(S_1^*, I_1^*) = (0,191; 0,153)$ .

Berikut ini adalah simulasi untuk model SIR pada persamaan (3.4) dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.1. *Source code* simulasi dapat dilihat pada lampiran tesis ini.



Gambar 4.1. Proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada model epidemik SIR tanpa vaksinasi dengan nilai parameter pada Tabel 4.1

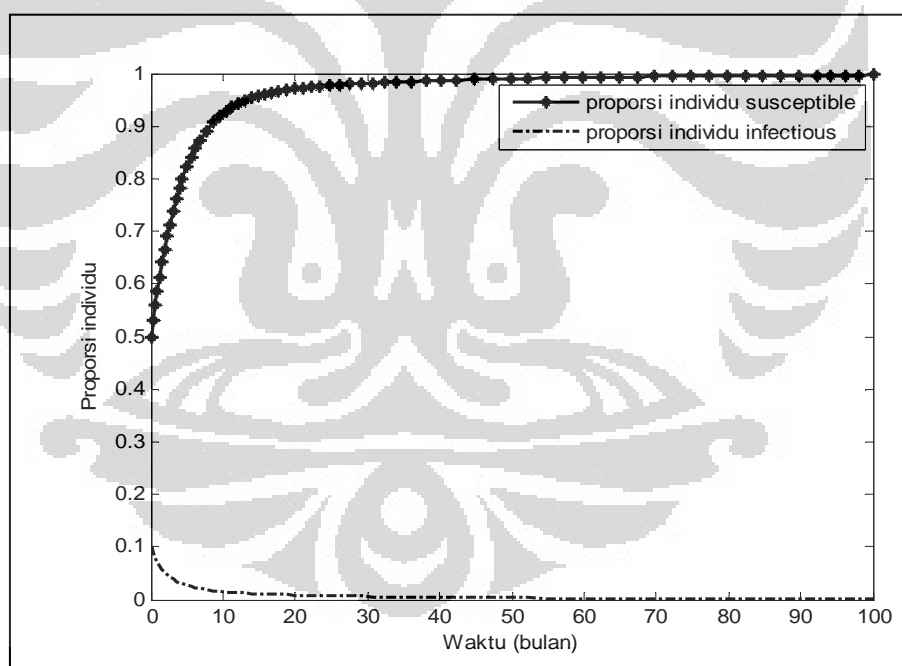
Berdasarkan Gambar 4.1 terlihat bahwa pada saat  $t = 0$ , proporsi individu *susceptible* adalah 0,5 dan proporsi individu *infectious* adalah 0,1; ini sesuai dengan kondisi awal yang diberikan. Setelah bulan ke-30, proporsi individu *susceptible* dan *infectious* tidak mengalami perubahan. Pada keadaan ini, sistem berada pada keadaan yang stabil. Dari Gambar 4.1 terlihat bahwa sistem dalam keadaan stabil ketika proporsi individu *susceptible* sebesar 0,1910 dan proporsi individu *infectious* sebesar 0,1530; hal ini mendukung teori yang diperoleh di bab 3.

Selanjutnya dilakukan simulasi ulang untuk sistem (3.4) dengan nilai parameter yang digunakan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Nilai parameter pada simulasi kedua

Parameter	Nilai Parameter
$\mu$	0,3/bulan
$\beta$	0,8/bulan
$r$	0,55/bulan
$\rho$	0,9

Berdasarkan teori yang dijelaskan pada Bab 3, *Basic reproduction number* ( $R_0$ ) dari sistem (3.4) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 adalah 0,9756. Sistem (3.4) ini stabil ke titik kesetimbangan bebas-infeksi ( $S^*, I^*$ ), dengan  $(S^*, I^*) = (1, 0)$ . Berikut ini hasil adalah hasil simulasi sistem (3.4) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2.



Gambar 4.2 Proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada model epidemik SIR tanpa vaksinasi dengan nilai parameter pada Tabel 4.2

Berdasarkan Gambar 4.2 terlihat bahwa proporsi individu *susceptible* lama kelamaan semakin bertambah seiring dengan berjalannya waktu, berbanding terbalik dengan proporsi individu *infectious* yang lama kelamaan semakin

berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Setelah bulan ke-50 dari penelitian proporsi individu *susceptible* dan *infectious* tidak mengalami perubahan. pada saat ini sistem stabil, dengan proporsi individu *susceptible* pada saat ini adalah 1 dan proporsi individu *infectious* adalah 0.

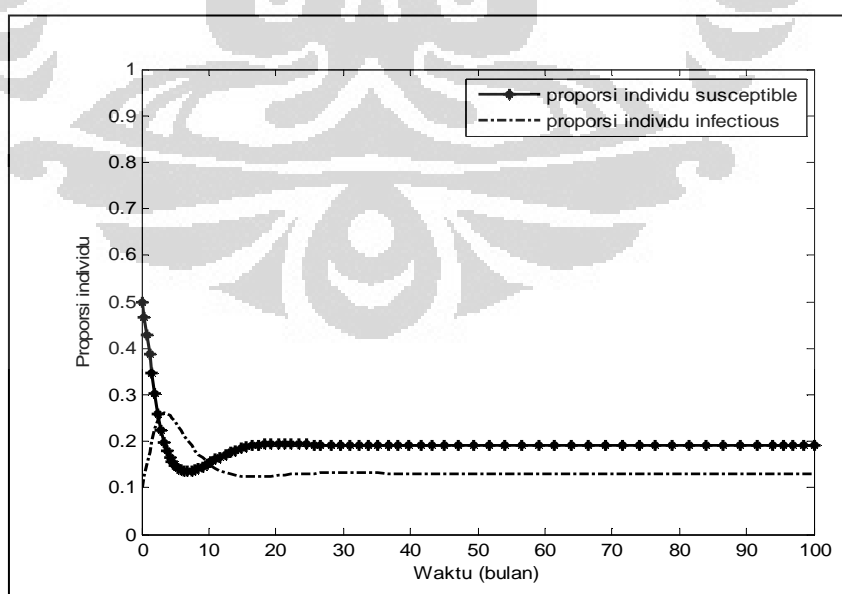
Dari kedua simulasi di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dapat hilang dengan sendirinya (tanpa melakukan pemberian vaksinasi) dari suatu populasi asalkan *basic reproduction number*-nya kurang dari satu.

Selanjutnya dilihat pengaruh vaksinasi konstan terhadap penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal.

#### 4.2 Simulasi Model SIR Dengan Vaksinasi Konstan

Model epidemik SIR dengan vaksinasi konstan pada persamaan (3.10) telah dibahas pada bab 3.2. *Source code* dari simulasi dapat dilihat pada lampiran dari tesis ini.

*Basic reproduction number* ( $R_1$ ) dari sistem (3.10) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 dan proporsi bayi yang sukses divaksinasi,  $p = 0,6$  adalah 3,2713. Berikut ini adalah hasil simulasi sistem (3.10) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 dan proporsi bayi yang sukses divaksinasi,  $p = 0,6$ .

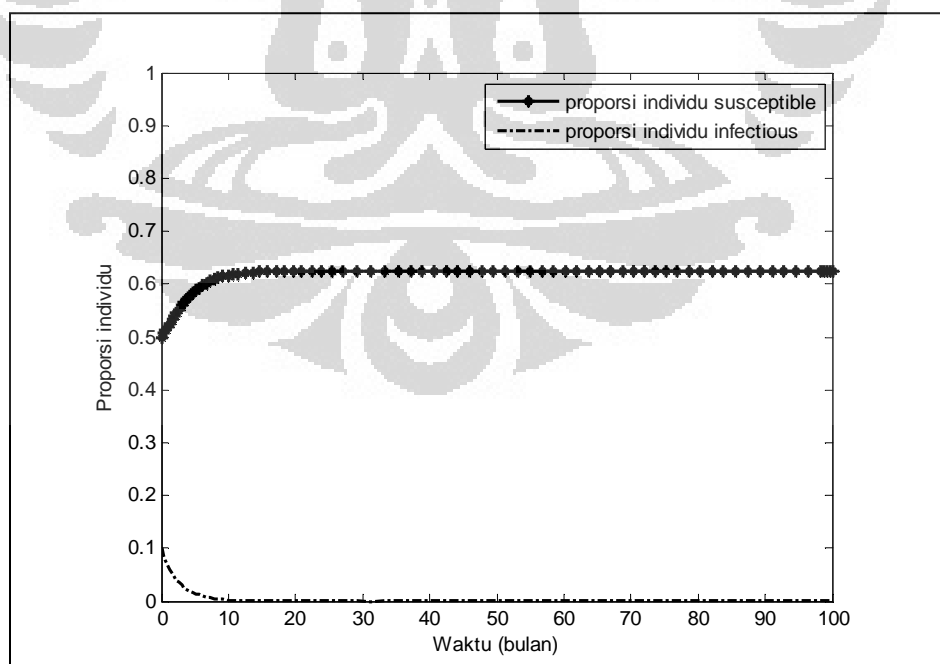


Gambar 4.3. Proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada model SIR dengan vaksinasi konstan dengan nilai parameter pada Tabel 4.1

Berdasarkan Gambar 4.3, proporsi individu *susceptible* dan *infectious* stabil setelah bulan ke-30. Setelah bulan ke-30, proporsi individu *susceptible* adalah 0,1911 dan proporsi individu *infectious* adalah 0,1314. Gambar 4.3 hampir sama dengan Gambar 4.1 untuk proporsi individu *susceptible*, artinya tidak ada pengaruh yang signifikan pada proporsi individu *susceptible* dengan vaksinasi konstan jika dibandingkan dengan proporsi individu *susceptible* tanpa vaksinasi. Pengaruh vaksinasi konstan terlihat pada proporsi individu *infectious*. Proporsi individu *infectious* pada Gambar 4.3 setelah bulan ke-30 kurang dari proporsi individu *infectious* pada Gambar 4.1.

Selanjutnya dibahas simulasi sistem (3.10) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 dan proporsi bayi yang sukses divaksinasi,  $p = 0,6$ . *Basic reproduction number* ( $R_1$ ) dari sistem ini adalah 0,6098. Berdasarkan teori pada subbab 3.2.2, Sistem (3.10) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 dan proporsi bayi yang sukses divaksinasi,  $p = 0,6$ , mempunyai titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0) = (0,625; 0)$ . Sistem ini stabil ke titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S_0, I_0)$ , karena  $R_1 = 0,6098 < 1$ .

Berikut ini adalah hasil simulasi sistem (3.10) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 dan proporsi bayi yang sukses divaksinasi,  $p = 0,6$ :



Gambar 4.4. Proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada model SIR dengan vaksinasi konstan dengan nilai parameter pada Tabel 4.2

Berdasarkan Gambar 4.4 terlihat bahwa proporsi individu *susceptible* lama kelamaan semakin bertambah seiring dengan berjalannya waktu, berbanding terbalik dengan proporsi individu *infectious* yang lama kelamaan semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Setelah bulan ke-20 dari penelitian proporsi individu *susceptible* dan *infectious* tidak mengalami perubahan. Pada keadaan tersebut, sistem berada pada keadaan stabil, dengan proporsi individu *susceptible* pada saat ini adalah 0,6253 dan proporsi individu *infectious* adalah 0.

Dari simulasi sistem (3.10) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 serta proporsi bayi yang sukses divaksinasi,  $p = 0,6$ , dapat disimpulkan bahwa penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dapat hilang dari populasi asalkan *basic reproduction number* ( $R_1$ ) kurang dari satu.

Simulasi sistem (3.4) dan (3.10) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 serta untuk sistem (3.10) ada pengaruh vaksinasi konstan dengan proporsi bayi yang sukses divaksinasi sebesar 0,6 menghasilkan kesimpulan yang sama yaitu penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal hilang dari populasi asalkan *basic reproduction number* dari masing-masing sistem bernilai kurang dari 1. Perbedaan kedua sistem ini terletak pada waktu yang dibutuhkan agar populasi bebas dari infeksi. Sistem (3.10) membutuhkan waktu yang lebih cepat agar populasi bebas dari penyakit dari pada sistem (3.4).

Selanjutnya dilihat pengaruh vaksinasi denyut terhadap penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal.

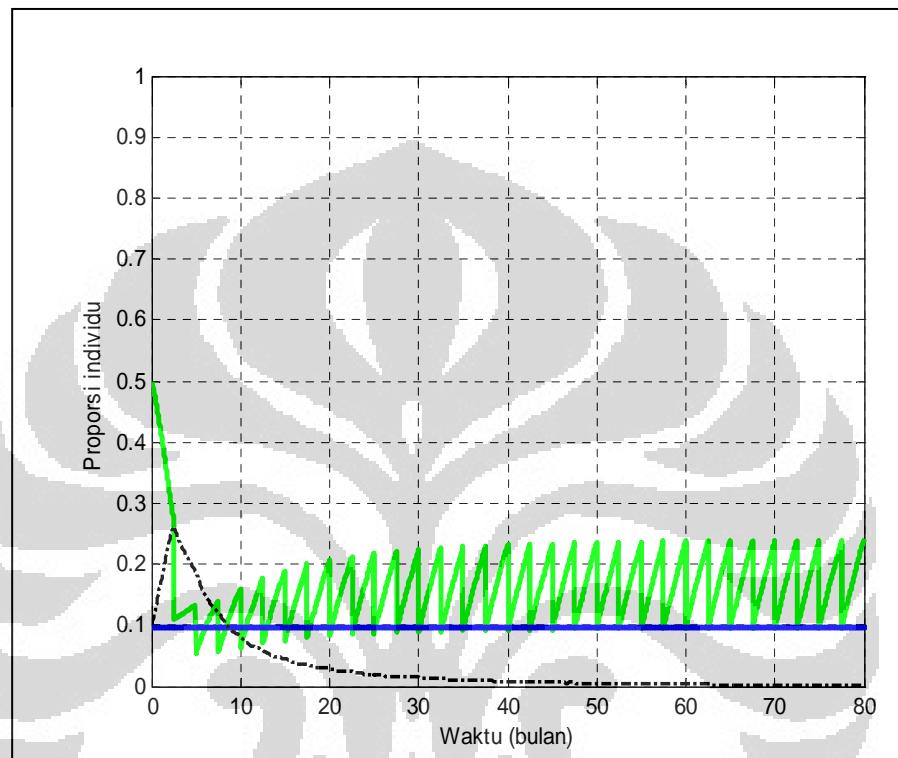
#### 4.3 Simulasi Model SIR dengan Vaksinasi Denyut

Model epidemik SIR dengan vaksinasi denyut pada persamaan (3.15) telah dibahas pada subbab 3.3. Pada subbab ini dilakukan dua simulasi sistem (3.15) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2. *Source code* dari simulasi dapat dilihat pada lampiran dari tesis ini.

Sesuai Teori pada subbab 3.3.1, sistem (3.15) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 dan proporsi individu *susceptible* yang divaksinasi,  $p = 0,6$  serta periode pemberian vaksin adalah 2,5 bulan, mempunyai solusi periodik bebas-infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t)) = (0,2417; 0)$ . *Basic reproduction number* ( $R_2$ ) dari sistem ini

adalah 0,4909. Berdasarkan Teorema 3.1, sistem ini stabil ke solusi periodik bebas-infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t))$ , karena  $R_2 < 1$ .

Berikut ini adalah hasil simulasi sistem (3.15) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1, proporsi individu *susceptible* yang divaksinasi,  $p = 0,6$ , dan periode pemberian vaksin,  $T = 2,5$  bulan.



Keterangan : — = titik tetap  $S^*$  (3.20)  
 — = pergerakan  $S(t)$  untuk sistem (3.15)  
 - - - = pergerakan  $I(t)$  untuk sistem (3.15)

Gambar 4.5 Proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada model epidemik SIR dengan vaksinasi denyut dengan nilai parameter pada Tabel 4.1

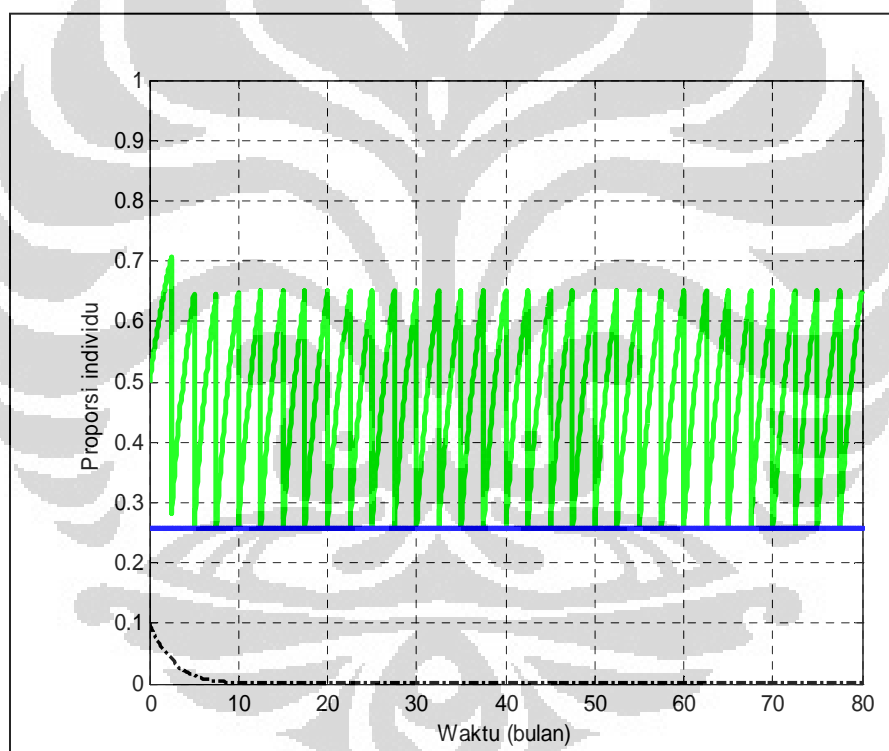
Berdasarkan Gambar 4.5 terlihat bahwa proporsi individu *susceptible* dan proporsi individu *infectious* pada awal penelitian adalah 0,5 dan 0,1; hal ini sesuai dengan kondisi awal yang diberikan. Proporsi individu *susceptible* saat terjadi vaksinasi sebelum bulan ke-40 berada di bawah titik tetap  $S^*$ . Setelah bulan ke-40 dari penelitian, proporsi individu *susceptible* saat terjadi vaksinasi konvergen ke titik tetap  $S^* = 0,0967$ . Hal ini mendukung teori pada subbab 3.3.1. Setelah bulan ke-40 dari penelitian, pergerakan  $S(t)$  tidak mengalami perubahan, sedangkan  $I(t)$  tidak mengalami perubahan setelah bulan ke-70. Proporsi individu *infectious*



setelah bulan ke-70 adalah 0 (tidak ada individu yang terinfeksi) atau dengan perkataan lain, simulasi ini stabil ke solusi periodik bebas-infeksi.

Analisa sistem (3.15) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 dan proporsi individu *susceptible* yang divaksinasi sebesar 0,6 serta periode pemberian vaksinasi adalah 2,5 bulan, sebagai berikut:

*Basic reproduction number* ( $R_2$ ) dari sistem (3.15) dengan nilai parameter yang digunakan pada Tabel 4.2 dan proporsi individu *susceptible* yang divaksinasi sebesar 0,6 serta periode pemberian vaksin 2,5 bulan adalah 0,4410. Berdasarkan Teorema 3.1, sistem ini stabil ke solusi periodik bebas-infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t))$ , karena  $R_2 < 1$ , dengan solusi periodik bebas-infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t)) = (0,6506; 0)$ . Hal ini dapat dilihat pada gambar berikut:



Keterangan : — = titik tetap  $S^*$  (3.20)  
 — = pergerakan  $S(t)$  untuk sistem (3.15)  
 - - - - - = pergerakan  $I(t)$  untuk sistem (3.15)

Gambar 4.6 Proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada model epidemik

SIR dengan vaksinasi denyut dengan nilai parameter pada Tabel 4.2

Berdasarkan Gambar 4.6 terlihat bahwa proporsi individu *susceptible* dan *infectious* pada awal penelitian adalah 0,5 dan 0,1; hal ini sesuai dengan kondisi

awal yang diberikan. Proporsi individu *susceptible* saat terjadi vaksinasi dari awal penelitian selalu berada di atas titik tetap  $S^*$ . Mulai dari pemberian vaksinasi denyut ke-2 yaitu pada bulan ke-5 dari penelitian proporsi individu *susceptible* pada saat pemberian vaksin konvergen ke titik tetap  $S^* = 0,2602$  dan mulai pada saat itu juga pergerakan  $S(t)$  tidak mengalami perubahan. Sedangkan proporsi individu *infectious* pada gambar diatas semakin berkurang seiring dengan berjalannya waktu. Proporsi individu *infectious* mulai stabil pada bulan ke-10 dari penelitian dengan proporsi individu *infectious* adalah 0.

Sistem (3.15) dengan proporsi individu *susceptible* yang divaksinasi sebesar 0,6, selalu stabil ke solusi periodik bebas-infeksi baik dengan nilai parameter pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2. Analisa perbedaaan model SIR untuk penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal tanpa vaksinasi, dan dengan vaksinasi denyut dan vaksinasi konstan dibahas pada subbab selanjutnya, yaitu subbab 4.4.

#### 4.4 Perbandingan Model SIR tanpa Vaksinasi, Dengan Vaksinasi Konstan Dan Vaksinasi Denyut

Perbandingan ketiga sistem yaitu sistem (3.4), sistem (3.10), dan sistem (3.15) didasarkan pada nilai parameter yang digunakan. Perbedaan yang dilihat adalah nilai *basic reproduction number* dari masing-masing model, titik kesetimbangan, dan lama waktu yang dibutuhkan agar sistem stabil.

Perbedaan yang diperoleh dengan menggunakan nilai parameter Tabel 4.1, diberikan dalam Tabel 4.3 di bawah ini.

Tabel 4.3 Perbedaan sistem (3.4), (3.10), dan (3.15) dengan nilai parameter pada Tabel 4.1

Kriteria	Sistem (3.4) Model SIR tanpa vaksinasi	Sistem (3.10) Model SIR dengan vaksinasi konstan	Sistem (3.15) Model SIR dengan vaksinasi denyut
<i>Basic reproduction number</i>	$R_0 = 5,342$	$R_1 = 3,2713$	$R_2 0.4909$
$(S_{200}, I_{200})$	$(S_1^*, I_1^*)$ $= (0,1911; 0,1530)$	$= (0,1911; 0,1314)$	$(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t))$ $= (0,2417; 0)$
Waktu yang diperlukan agar sistem stabil	30 bulan	30 bulan	70 bulan

Perbedaan yang diperoleh dengan menggunakan nilai parameter Tabel 4.2, di berikan dalam Tabel 4.4 di bawah ini.

Tabel 4.4 Perbedaan sistem (3.4), (3.10), dan (3.15) dengan nilai parameter pada Tabel 4.2

Kriteria	Sistem (3.4) Model SIR tanpa vaksinasi	Sistem (3.10) Model SIR dengan vaksinasi konstan	Sistem (3.15) Model SIR dengan vaksinasi denyut
<i>Basic reproduction number</i>	$R_0 = 0,9756$	$R_1 = 0,6098$	$R_2 = 0.4410$
$(S_{200}, I_{200})$	$(S^*, I^*) = (1,0)$	$(S_0, I_0)$ $= (0,6253; 0)$	$(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t))$ $= (0,6506; 0)$
Waktu yang diperlukan agar sistem stabil	50 bulan	20 bulan	10 bulan

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi kesimpulan berdasarkan hasil pembahasan di bab-bab sebelumnya, serta saran yang dapat diberikan oleh penulis untuk penelitian selanjutnya.

#### 5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penulisan tesis ini dapat dirinci sebagai berikut:

1. Model epidemik SIR untuk penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dinyatakan dalam sistem (3.4). *Basic reproduction number* ( $R_0$ ) dari sistem ini adalah  $\frac{\beta}{\mu\rho+r}$ .
  - a. Jika  $R_0 < 1$ , titik kesetimbangan bebas-infeksi  $(S^*, I^*) = (1, 0)$  stabil asimtotik lokal.
  - b. Jika  $R_0 > 1$ , titik kesetimbangan epidemik  $(S_1^*, I_1^*) = \left(\frac{\mu\rho+r}{\beta}, \frac{\mu(R_0-1)}{\mu R_0(1-\rho)+\beta}\right)$  stabil asimtotik lokal.
2. Model epidemik SIR untuk penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dengan vaksinasi konstan dinyatakan dalam sistem (3.10). *Basic reproduction number* ( $R_1$ ) dari sistem (3.10) adalah  $\frac{\beta}{\mu\rho+r} \cdot \frac{\mu}{\mu+\mu\rho}$ . Jika  $R_1 < 1$ , maka titik kesetimbangan bebas infeksi  $(S_0, I_0) = \left(\frac{\mu}{\mu+\mu\rho}, 0\right)$  stabil asimtotik lokal. Dan titik kesetimbangan bebas infeksi  $(S_0, I_0)$  stabil global jika  $R_1 < R_0 < 1$ .
3. Model epidemik SIR untuk penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dengan vaksinasi denyut dinyatakan dalam sistem 3.15. *Basic reproduction number* ( $R_2$ ) dari sistem ini adalah  $\frac{\beta}{\mu\rho+r} \cdot \frac{(\mu T-p)(e^{\mu T}-1+\mu T p)}{\mu T(e^{\mu T}-1+p)}$ . Solusi periodik bebas infeksi  $(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t)) = \left(1 - \frac{p e^{-\mu T(t-t_n)}}{1-(1-p)e^{-\mu T}}, 0\right)$  stabil asimtotik lokal jika  $R_2(T) < 1$ .

4. Parameter  $\rho$ , yang menotasikan probabilitas bayi dari orang tua yang *infectious* adalah individu *susceptible*, mempengaruhi kecepatan kestabilan dari solusi periodik bebas infeksi. *Basic reproduction number* dari model SIR dengan vaksinasi konstan ( $R_1$ ) dan *basic reproduction number* dari model SIR dengan vaksinasi denyut ( $R_2$ ) menurun ketika  $\rho$  meningkat, sehingga dengan memperbesar nilai  $\rho$  akan mempermudah kondisi kestabilan solusi periodik bebas infeksi baik untuk model SIR dengan vaksinasi konstan dan model SIR dengan vaksinasi denyut. Hal ini mengilustrasikan secara teoritis bahwa orang tua sebaiknya memberikan perhatian yang lebih terhadap kesehatan mereka sehingga menghindari keturunannya dari penyakit yang mungkin diturunkan.
5. Strategi vaksinasi denyut lebih baik dari strategi vaksinasi konstan untuk menghilangkan epidemik penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal jika periode pemberian vaksin  $T$ ,  $T < T_c$ , dimana  $T_c$  adalah konstanta unik sehingga  $h(T_c) = \frac{\mu}{\mu + \mu p}$ , dengan  $h(T) = \frac{(\mu T - p)(e^{\mu T} - 1 + \mu T p)}{\mu T (e^{\mu T} - 1 + p)}$ . Jika periode pemberian vaksin  $T$  pada vaksinasi denyut,  $T > T_c$ , maka strategi vaksinasi konstan lebih baik untuk menghilangkan epidemik penyakit dari pada vaksinasi denyut.

## 5.2 Saran

Dalam penulisan tesis ini pengaruh dari strategi vaksinasi denyut ditentukan hanya dengan mencari solusi periodik bebas infeksi. Analisa dinamik pada model epidemik SIR dengan pengaruh vaksinasi denyut bisa juga dilakukan dengan menentukan solusi periodik epidemik. pada penulisan tugas akhir ini menentukan kestabilan dari solusi periodik bebas penyakit menggunakan metode linierisasi yang akan diperoleh kestabilan lokal. Berdasarkan hal-hal tersebut, penulis memberikan saran kepada para pembaca yang tertarik untuk mengembangkan pembahasan di tesis ini dengan menentukan solusi periodik epidemik serta menentukan kestabilan global dari solusi periodik bebas infeksi maupun solusi periodik epidemik.

## DAFTAR PUSTAKA

- Agur, Z., Cojocaru, L., Major, G., Anderson, R.M., Danon, Y. (1993). Pulse mass measles vaccination across age cohorts. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* 90, 11698-11702.
- Boyce, W.E., DiPrima, R.C. (2001). *Elementary differential equations and boundary value problems*. USA: John Wiley & sons, inc.
- Castillo-Chavez, C., Feng, Z., Huang, W. (2002). On the computation of  $R_0$  and its role on global stability. *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: An Introduction*. Institute for Mathematics and Its Applications 125, 229-250.
- Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillation, dynamical systems, and bifurcations of vektor fields*. New York: Springer-Verlag.
- Grimshaw, R. (1993). *Nonlinier ordinary differential equations*. Boston Melbourne: Blackwell Scientific Publications.
- Hale, J.K., Kocak, H. (1991). *Dynamics and bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- Hethcote, H.W. (2000). The mathematics of infectious disease. *SIAM Review* 42, 4, 599-653.
- Okninski, A. (2009). Group actions as stroboscopic maps of ordinary differential equations. *Acta Physica polonica B*, 40, 1605-1616.
- Perko, L. (1996). *Differential equation and dynamical systems*. New York: Springer-Verlag.
- Picollo, C. III, Billings, L. (2005). The effect of vaccinations in an immigrant model. *Mathematical and Computer Modeling*, 42, 291-299.
- Scheinerman, E.R. (1996). *Invitation to dynamical systems*.
- Shulgin, B., Stone, L., Agur, Z. (1998). Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. *Bull. Math. Biol*, 60, 6, 1123-1148.
- Stone, L., Shulgin, B., Agur, Z. (2000). Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model. *Mathematic and Computer Modelling*, 31, 207-215.

- Vareen, K.J. (2008). *An SCIR model of meningococcal meningitis*. Virginia Commonwealth University.
- Verhulst, F. (1996). *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. New York: Springer-Verlag.
- Xinzhu, M., Chen, L. (2008). The dynamics of a new SIR epidemic model concerning pulse vaccination strategy. *Applied Mathematics and Computation*, 197, 582-597.



## LAMPIRAN 1

### Source Code Simulasi Model Epidemik SIR tanpa Vaksinasi

```
clear all,
% Ini merupakan source code MATLAB dari program model1 untuk model
epidemik SIR tanpa pengaruh vaksinasi.

% Set Parameter Values
mu = 0.3;
beta = 0.8;
rho = 0.9;
r = 0.55;
S0=0.5;
I0=0.1;
Ro = beta/(r+mu*rho)

% Set Time Interval
tspan = [0,100];

% Collect parameters in one vector
p = [mu beta rho r];

% Solves the ode
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4]);
[t,x] = ode45(@model1,tspan,[S0 I0],options,p);

% Plots individu susceptibles dan infectious
figure(1)
plot(t,x(:,1),'-k','LineWidth',1.5);
xlabel 'Waktu (bulan)';
ylabel 'Proporsi individu'
hold on;
plot(t,x(:,2),'-.k','LineWidth',1.5);
hold off
axis([0 100 0 1])
legend('proporsi individu susceptible','proporsi individu
infectious')
```

### Source Code Fungsi model1

```
function y = model1(t,x,p)
mu = p(1);
beta = p(2);
rho = p(3);
r = p(4);
S = x(1);
I = x(2);

dS = mu*(1-I)-beta*S*I-mu*S+mu*rho*I;
dI = beta*S*I-mu*I+(1-rho)*mu*I-r*I;

y = [dS;dI];
```



## LAMPIRAN 2

### *Source Code Simulasi Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi Konstan*

```

clear all;
% Ini merupakan source code MATLAB dari program constant untuk
model epidemik SIR dengan pengaruh strategi vaksinasi konstan.
% dengan proporsi bayi yang sukses divaksin adalah v.

% Set Parameter Values
mu = 0.3;
beta = 0.8;
rho = 0.9;
r = 0.55;
v = 0.6;
S0=0.5;
I0=0.1;
Ro = beta/(r+mu*rho)
R1 = (beta*mu)/((r+mu*rho)*(mu+mu*v))

% Set Time Interval
tspan = [0,100];

% Collect parameters in one vector
p = [mu beta rho r v];

% Solves the ode
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4]);
[t,x] = ode45(@constant,tspan,[S0 I0],options,p);

% Plots individu susceptibles dan infectious
figure(1)
plot(t,x(:,1),'-k','lineWidth',1.5);
xlabel 'Waktu (bulan)';
ylabel 'Proporsi individu'
hold on;
plot(t,x(:,2),'-.k','lineWidth',1.5);
hold off
axis([0 100 0 1])
legend('proporsi individu susceptible','proporsi individu
infectious')

```

### *Source Code Fungsi constant*

```

function y = constant(t,x,p)
mu = p(1);
beta = p(2);
rho = p(3);
r = p(4);
v = p(5);
S = x(1);
I = x(2);
dS = mu*(1-I)-beta*S*I-mu*S+mu*rho*I-v*mu*S;
dI = beta*S*I-mu*I+(1-rho)*mu*I-r*I;
y = [dS;dI];

```

### LAMPIRAN 3

#### Source Code Simulasi Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi Denyut

```

clear all;
clc;
% Ini merupakan source code MATLAB dari Diff_8_3 untuk model
epidemik SIR dengan pengaruh strategi pulse vaccination.
% Vaksinasi dimulai pada saat tV dan proporsi yang divaksin adalah
p dari semua individu susceptible setiap T tahun.

% Sets up default parameters if necessary.
beta=0.8;
r=0.55;
mu=0.3;
rho=0.9;
S0=0.5;
I0=0.1;
p=0.6;
T=2.5;
Sc=(r+mu*rho)/beta
Sstar=((1-p)*(1-exp(-mu*T)))/(1-((1-p)*exp(-mu*T)))
R2=((((mu*T-p)*(exp(mu*T)-1))+mu*T*p)*beta)/(mu*T*(exp(mu*T)-
1+p)*(mu*rho+p))
tV=2.5;
MaxTime=80;

S=S0; I=I0;

% The main iteration
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4]);
[t, pop]=ode45(@Diff_8_3,[0 tV],[S I],options,[beta r mu rho]);
TT=t; S=pop(:,1); I=pop(:,2);

while TT(end)<MaxTime
    % Vaccinate a fraction p of susceptibles
    pop(end,1)=pop(end,1)*(1-p);
    [t, pop]=ode45(@Diff_8_3,[TT(end)
min(TT(end)+T,MaxTime)],pop(end,:),options,[beta r mu rho]);
    TT=[TT; t]; S=[S; pop(:,1)]; I=[I; pop(:,2)];
end

% Plots individu susceptibles and infectious
figure(1)
plot(TT,S,'-g','lineWidth',2.5);
hold on;
grid on
Y=get(gca,'YLim');
plot(TT,Sstar,'-b','lineWidth',0.5);
plot(TT,I,'-.k','lineWidth',2);
hold off
xlabel 'Waktu (bulan)';
ylabel 'Proporsi individu '
axis([0 80 0 1])

```

### Source Code Fungsi Diff\_8\_3

```
function dPop=Diff_8_3(t,pop, parameter)

beta=parameter(1); r=parameter(2); mu=parameter(3);
rho=parameter(4);
S=pop(1); I=pop(2);

dPop=zeros(2,1);

dPop(1)= mu*(1-I) -beta*S*I - mu*S+mu*rho*I;
dPop(2)= beta*S*I -mu*I+(1-rho)*mu*I- r*I ;
```

