



UNIVERSITAS INDONESIA

**MODEL MATEMATIKA
PENYEBARAN INFEKSI HIV PADA KOMUNITAS IDU**

TESIS

**IFFATUL MARDHIYAH
1006786133**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012**



UNIVERSITAS INDONESIA

**MODEL MATEMATIKA
PENYEBARAN INFEKSI HIV PADA KOMUNITAS IDU**

TESIS

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Magister Sains**

**IFFATUL MARDHIYAH
1006786133**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2012**

HALAMAN PENGESAHAN

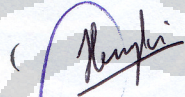
Tesis ini diajukan oleh :

Nama : Iffatul Mardhiyah
NPM : 1006786133
Program Studi : Matematika
Judul Tesis : Model Matematika Penyebaran Infeksi HIV pada Komunitas IDU.

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

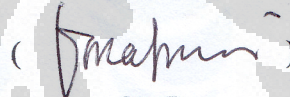
Pembimbing : Dr. Hengki Tasman, M.Si.

()

Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami

()

Penguji : Bevina D Handari, PhD.

()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 21 Juni 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

**Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.**

Nama : Iffatul Mardhiyah

NPM : 1006786133

Tanda Tangan : 

Tanggal : 21 Juni 2012

KATA PENGANTAR

Segala puji hanya bagi Allah SWT, atas semua kasih sayang dan karunia-Nya yang tak berhingga kepada penulis sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.

Shalawat serta salam penulis sampaikan pada suri tauladan manusia, Nabi Muhammad SAW. Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini tidak terlepas dari peranan, dorongan, bantuan, dan doa dari banyak pihak. Dengan penuh rasa syukur dan hormat, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Hengki Tasman selaku pembimbing penulis yang selalu sabar dan semangat dalam membimbing dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan tesis ini dengan baik.
2. Saepul Manap sebagai suami yang selalu mendukung, memahami, dan mencurahkan kasih sayang yang tak berhingga kepada penulis dalam segala hal menuju kebahagiaan dunia dan akhirat.
3. Bapak Amar Nurmansyah dan Mama Atikah Royani, orang tua penulis yang sangat mencintai dan menyayangi penulis dengan doa, perjuangan dan dorongannya selama hidup penulis tanpa batas.
4. Muhammad Fata Ilmathter dan Smily Farha Ilmathter, kedua buah hati penulis yang menjadikan hidup penulis lebih bahagia dunia untuk akhirat.
5. Ade Rahmatullah dan Nur Azizah, adik penulis yang selalu mendukung dan mendoakan penulis.
6. Ibu Sartimah dan Bapak Djupri, mertua penulis yang memberikan dukungan dan doanya kepada penulis.
7. Patrick Centurioni dan Wahyu Hidayat, adik ipar penulis yang ikut mendukung penulis.
8. Seluruh anggota keluarga yang selalu mendoakan penulis.
9. Seluruh dosen Departemen Matematika UI atas segala ilmu yang sangat bermanfaat bagi penulis.

10. Seluruh staf dan karyawan Departemen Matematika UI yang telah banyak membantu penulis dalam mengurus administrasi.
11. Seluruh pihak dalam Pusat Studi Komputasi Matematika (PSKM) Universitas Gunadarma, terutama Bapak Suryadi Harmanto S, selaku Purek II, Ibu Ernastuti, dan Bapak Edi Sukirman.
12. Erlyene Dwiseta, sahabat terbaik dari masa kanak-kanak hingga dewasa penulis, terimakasih atas semua kenangan yang indah selama hidup penulis.
13. Anggota PSKM angkatan 2 ; Dewi Putrie Lestari, Ilmiyati Sari, Desti Riminarsih, Feni Andriani, Nurma Nugraha, Achmad Fahrurozi, dan Rifki Kosasih, sahabat seperjuangan yang selalu berbagi suka dan duka, saling mendukung, dan saling mendoakan.
14. Seluruh sahabat penulis, matematika UI angkatan 2004, yang masih terus mendukung penulis dalam menyelesaikan tesis ini.
15. Anggota PSKM angkatan 1 ; Dina Indarti, Ias Sri Wahyuni, Aini Suri Talita, Nola Marina, Murni, Tri Handika, dkk.
16. Seluruh mahasiswa 2IA11 tahun ajaran 2011/2012 yang menjadikan hidup penulis penuh warna dalam mengajar di Universitas Gunadarma.
17. Pihak lain yang mungkin penulis lupa sebutkan yang telah memberikan bantuan dan dorongan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan pada tugas akhir ini. Oleh karena itu, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan. Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Depok, 21 Juni 2012

Penulis

Iffatul Mardhiyah

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Iffatul Mardhiyah
NPM : 1006786133
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Tesis

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Model Matematika Penyebaran Infeksi HIV pada Komunitas IDU

berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 21 Juni 2012

Yang menyatakan



(Iffatul Mardhiyah)

ABSTRAK

Nama : Iffatul Mardhiyah
Program Studi : Matematika
Judul : Model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU

HIV (*Human Immunodeficiency Virus*) merupakan virus infeksi berbahaya yang tidak dapat disembuhkan. Penularan infeksi HIV melalui jarum suntik rentan terjadi dalam komunitas pecandu narkoba suntik (*Injecting Drug Users / IDU*) yang saling berbagi jarum suntik dalam grup “sahabat”. Penulisan ini membahas perilaku penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU melalui model matematika berdasarkan model klasik epidemik SIR (*Susceptibles, Infectious, Recovered*). Model menggunakan asumsi bahwa pecandu yang menyadari sudah mengidap AIDS tidak ikut berbagi jarum suntik dalam komunitas IDU. Model penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU memperhatikan kekuatan infeksi dengan mekanisme pertukaran jarum suntik. Untuk menganalisa perilaku penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU, model dianalisa dengan menentukan *basic reproduction ratio* (R_0) dan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas infeksi dan titik kesetimbangan epidemik. Analisa sistem dinamik dilakukan dengan menganalisa *basic reproduction ratio* (R_0) untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan bebas infeksi dengan menggunakan teorema kestabilan global Lyapunov dan kestabilan titik kesetimbangan epidemik dengan teorema kestabilan lokal dan didukung oleh kriteria Bendixon-Dulac. Hasil penelitian menunjukkan bahwa infeksi HIV mewabah pada komunitas IDU jika $R_0 > 1$, sedangkan jika $R_0 \leq 1$ maka infeksi HIV tidak mewabah pada komunitas IDU.

Kata Kunci : infeksi HIV, komunitas IDU, model epidemik SIR, kekuatan infeksi, *basic reproduction ratio*, titik kesetimbangan bebas infeksi, titik kesetimbangan epidemik, kestabilan global Lyapunov, kestabilan lokal, kriteria Bendixon-Dulac.

xiii+67 halaman ; 13 gambar; 6 tabel; 3 lampiran

Daftar Pustaka : 11 (1989-2006)

ABSTRACT

Name : Iffatul Mardhiyah
Program Study : Mathematics
Title : A Mathematical Model for Transmission of HIV Infection in IDU Community

Human immunodeficiency Virus (HIV) is a dangerous infection virus that cannot be recovered. The spreading of HIV infection through drug injecting equipment (DIE) is susceptible for Injecting Drug Users (IDU) Community who shared drug injecting equipment for the "friendship" group. This paper explains the behavior of HIV transmission among community of IDU through by mathematical models based on classical epidemic models SIR (Susceptibles, Infectious, Recovered). Model uses assumption that the users who aware suffered AIDS will not share drug injecting equipment among IDU community. Models for HIV transmission among IDU community notice the mechanism of exchange of a drug injecting equipment. To analyze the behavior of HIV transmission among IDU community, models is going to be analyze by determine the basic reproduction ratio (R_0) and two equilibriums which are disease-free equilibrium and epidemic equilibrium. Dynamic system analysis can be done by analyze of basic reproduction ratio to determine the stability of disease-free equilibrium by Lyapunov global stable theorem and the stability of epidemic equilibrium by local stable theorem with Bendixon-Dulac criterion. As the results of this paper, Infection of HIV become an epidemic on IDU community if $R_0 > 1$, whereas HIV is not an epidemic on IDU community if $R_0 \leq 1$.

Key Words : HIV infection, IDU community, classical epidemic models SIR, force of infection, basic reproduction ratio, dynamic system, disease-free equilibrium, epidemic equilibrium, Lyapunov global stability, local stability, Bendixon-Dulac criterion.

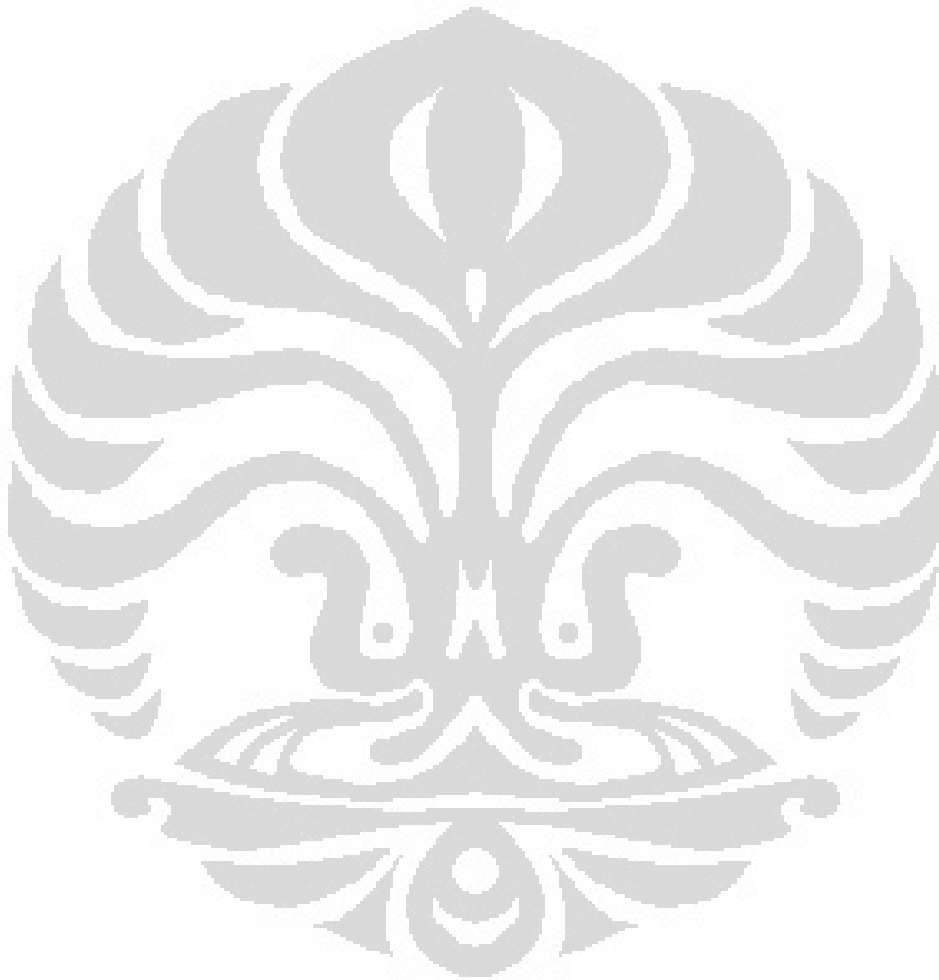
xiii+67 pages ; 13 pictures; 6 tables; 3 attachments

Bibliography : 11 (1989-2006)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penulisan	3
2. LANDASAN TEORI	4
2.1 Sistem Persamaan Diferensial	5
2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier	5
2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier	6
2.2 Keseimbangan dan Kestabilan	6
2.3 Probabilitas	13
2.3.1 Probabilitas Bersyarat	14
2.4 Distribusi Poisson	14
2.4.1 Proses Poisson	16
2.5 <i>Basic Reproduction Ratio</i>	19
3. MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN INFEKSI HIV PADA KOMUNITAS IDU	21
3.1 Pembentukan Model	21
3.2 Kekuatan Infeksi	25
3.3 Analisa Kualitatif Model	32
3.4 <i>Basic Reproduction Ratio</i>	37
3.5 Keseimbangan dan Kestabilan Model	38
3.5.1 Titik Keseimbangan Bebas Infeksi	39
3.5.2 Titik Keseimbangan Epidemik	40
3.5.3 Kestabilan Titik Keseimbangan Model	41

4. SIMULASI MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN INFEKSI HIV PADA KOMUNITAS IDU	47
4.1 Simulasi 1 : Dinamika $\beta(S, I)$	47
4.2 Simulasi 2 : Potret Fase pada saat $R_0 \leq 1$	51
4.3 Simulasi 3 : Potret Fase pada saat $R_0 > 1$	54
5. KESIMPULAN DAN SARAN	59
5.1 Kesimpulan	59
5.2 Saran	60
DAFTAR PUSTAKA	61

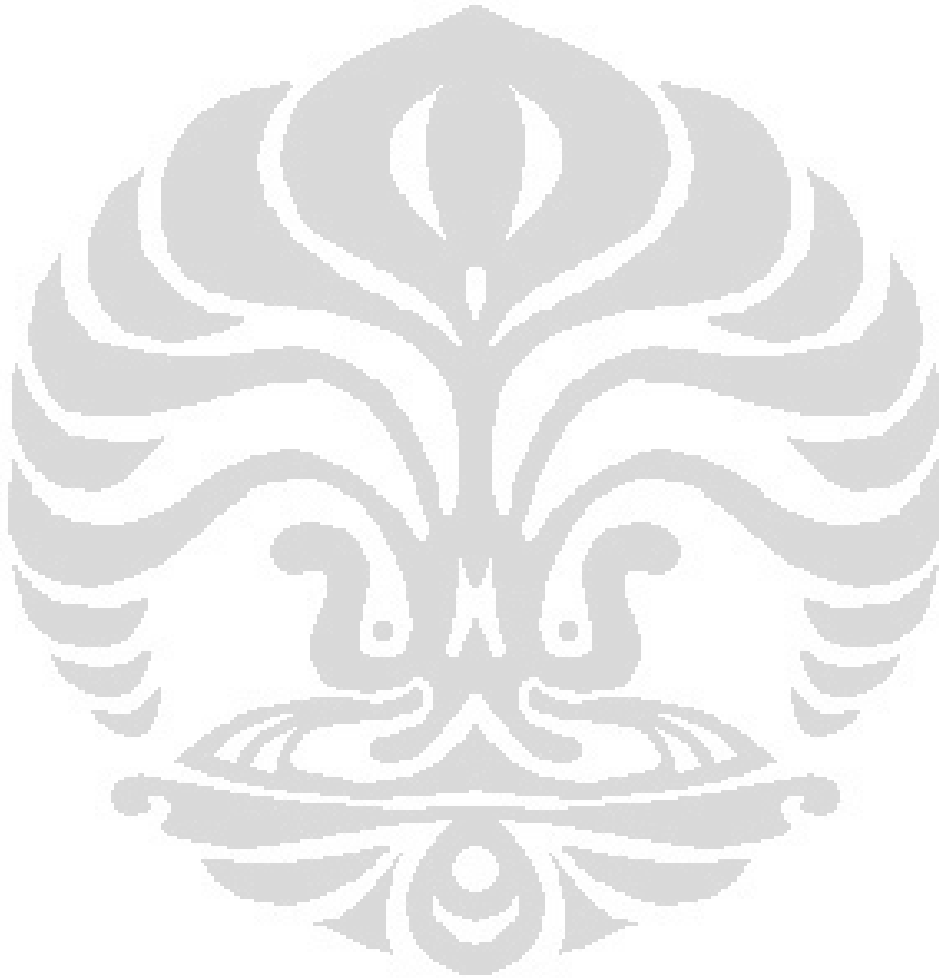


DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 (a) Titik kesetimbangan stabil	8
Gambar 2.1 (b) Titik kesetimbangan stabil asimtotik	8
Gambar 2.2 (a) Stabil Lyapunov	12
Gambar 2.2 (b) Stabil asimtotik Lyapunov	12
Gambar 3.1 Diagram penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU	23
Gambar 4.1 Dinamika $\beta(S, I)$ pada populasi pecandu <i>susceptibles</i>	48
Gambar 4.2 Dinamika $\beta(S, I)$ pada populasi pecandu <i>infectious</i>	50
Gambar 4.3 Jumlah populasi <i>susceptibles</i> terhadap waktu saat $R_0 \leq 1$	52
Gambar 4.4 Jumlah populasi <i>infectious</i> terhadap waktu saat $R_0 \leq 1$	53
Gambar 4.5 Potret fase <i>susceptibles</i> dan <i>infectious</i> dalam komunitas IDU saat $R_0 \leq 1$	54
Gambar 4.6 Jumlah populasi <i>susceptibles</i> terhadap waktu saat $R_0 > 1$	55
Gambar 4.7 Jumlah populasi <i>infectious</i> terhadap waktu saat $R_0 > 1$	56
Gambar 4.8 Potret fase <i>susceptibles</i> dan <i>infectious</i> dalam komunitas IDU saat $R_0 > 1$	57

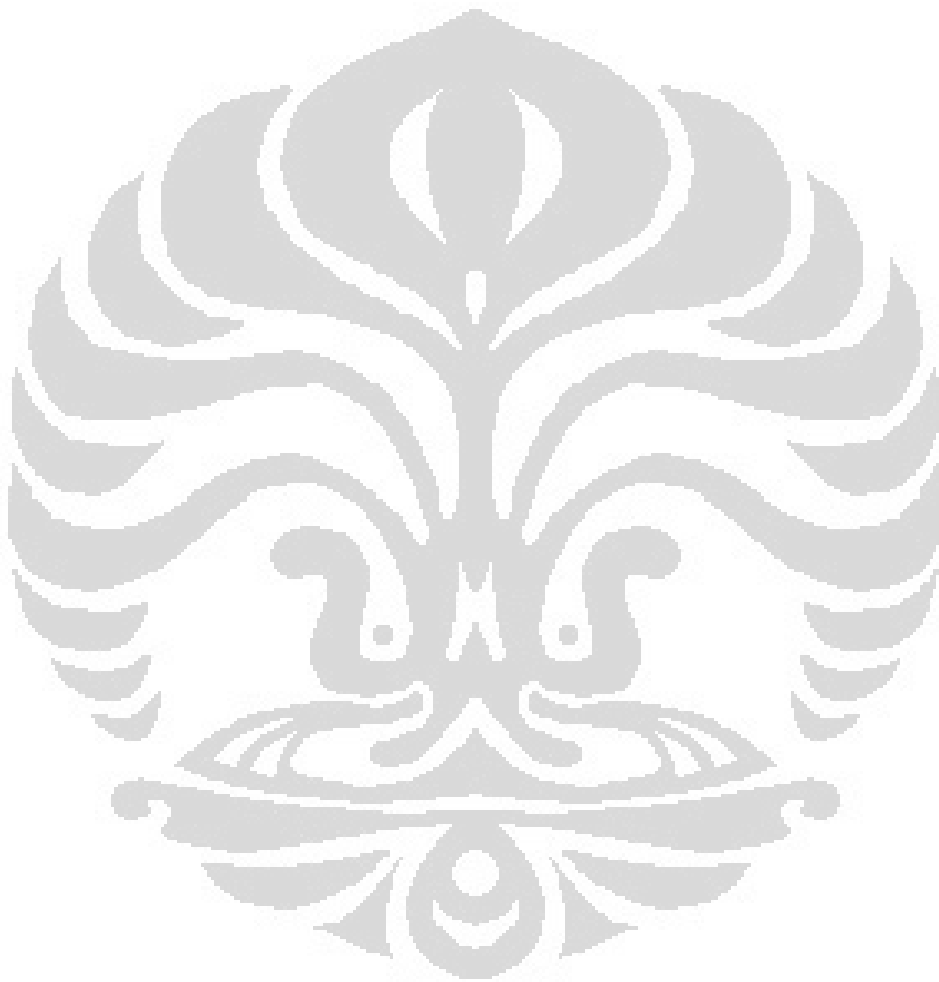
DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Variabel dan parameter model	22
Tabel 4.1 Nilai parameter pada simulasi 1	47
Tabel 4.2 Penurunan $\beta(S, I)$ terhadap S dalam presentase	49
Tabel 4.3 Kenaikan $\beta(S, I)$ terhadap I dalam presentase	50
Tabel 4.4 Nilai parameter pada simulasi 2	51
Tabel 4.5 Nilai parameter pada simulasi 3	54



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 <i>Source Code</i> simulasi 1 : Dinamika $\beta(S,I)$	62
Lampiran 2 <i>Source Code</i> simulasi 2 : Potret Fase pada saat $R_0 \leq 1$	64
Lampiran 3 <i>Source Code</i> simulasi 3 : Potret Fase pada saat $R_0 > 1$	66



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

HIV (*Human Immunodeficiency Virus*) adalah virus yang sangat berbahaya karena merupakan virus yang mematikan dan mudah menyebar. Virus yang mematikan ini menyerang sistem kekebalan tubuh manusia yang terinfeksi dan membuat tubuh kehilangan kemampuan untuk melawan penyakit, sehingga tubuh lebih rentan terhadap penyakit. Virus HIV menyerang limfosit CD4 (sel T) dan menghancurkan sel-sel darah putih, sehingga mempengaruhi sistem kekebalan tubuh. Setelah terjangkit infeksi HIV cukup lama, manusia yang terjangkit infeksi HIV akan menderita penyakit AIDS (*Acquired Immunodeficiency Syndrome*). Kasus infeksi HIV dan penyakit AIDS merupakan kasus kesehatan yang sudah lama terjadi, namun hingga saat ini belum ditemukan obat untuk menyembuhkan penyakit ini.

Pertumbuhan virus HIV dalam tubuh manusia sangatlah cepat di awal terserang infeksi HIV. Setiap tahapan pertumbuhan virus HIV dapat menimbulkan gejala yang berbeda-beda. Gejala yang ditimbulkan memiliki ciri yang sama dengan gejala infeksi virus lainnya, sehingga membuat orang tidak menyadari bahwa dirinya sudah terinfeksi. Infeksi HIV menular ke manusia lain melalui kontak langsung dengan penderita, seperti melalui hubungan seks, donor darah, dan pemakaian jarum suntik secara bergantian. Oleh karena itu, HIV dapat menyebar secara cepat di komunitas pecandu Narkoba (Narkotika dan Obat Terlarang) suntik dan pelaku seks bebas.

Pada penulisan ini dibahas model matematika untuk penyebaran infeksi HIV di komunitas pecandu narkoba suntik (IDU / *Injecting Drug Users*). Komunitas pecandu narkoba suntik (IDU) merupakan kelompok beresiko tinggi untuk terkena infeksi HIV. Pola hidup pecandu narkoba suntik (IDU) yang setia kawan mendorong mereka untuk saling berbagi, di antaranya saling berbagi jarum suntik (DIE / *Drug Injecting Equipment*). Grup dalam komunitas IDU yang saling berbagi jarum suntik dinamakan sebagai grup "*sahabat*".

Pecandu yang terinfeksi HIV yang belum menyadari bahwa sudah terinfeksi HIV ikut berbagi jarum suntik kepada kelompoknya, sehingga penyebaran HIV di komunitas pecandu narkoba suntik meningkat. Sekitar 56 persen laki-laki dan 36 persen perempuan pecandu narkoba suntik di Indonesia berbagi jarum suntik ketika menyuntik dan hanya 1,4 persen di antaranya merebus jarumnya sebelum digunakan kembali (Hugo, G., 2001).

Model penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU digunakan untuk mengetahui laju penyebaran suatu wabah penyakit dalam suatu populasi tertutup dan bersifat endemik. Oleh karena infeksi HIV sangat berbahaya hingga tidak ada yang sembuh dari infeksi HIV, maka model memperhatikan tiga kelompok individu yaitu kelompok individu yang sehat namun rentan dan dapat terinfeksi HIV (*susceptibles*) atau disimbolkan dengan S , kelompok individu yang telah terinfeksi HIV (*infectious / I*), dan kelompok individu yang sudah menderita penyakit AIDS akibat infeksi HIV yang terlalu lama dengan simbol A (AIDS).

Setiap penyakit infeksi memiliki potensi penyebaran virus yang berbeda-beda. Potensi penyebaran bisa dipengaruhi oleh kondisi udara, kondisi manusia yang mudah terinfeksi, dan lain sebagainya. Sebagai contoh, penyakit infeksi cacar berpotensi menyebar sangat besar ketika kelompok anak bermain di udara bebas. Hal tersebut dapat membuat infeksi cacar dari anak yang telah terinfeksi menyebar cepat karena terbawa angin. Potensi penyebaran penyakit infeksi di lingkungan kelompok individu terinfeksi dinamakan kekuatan infeksi (*force of infection*).

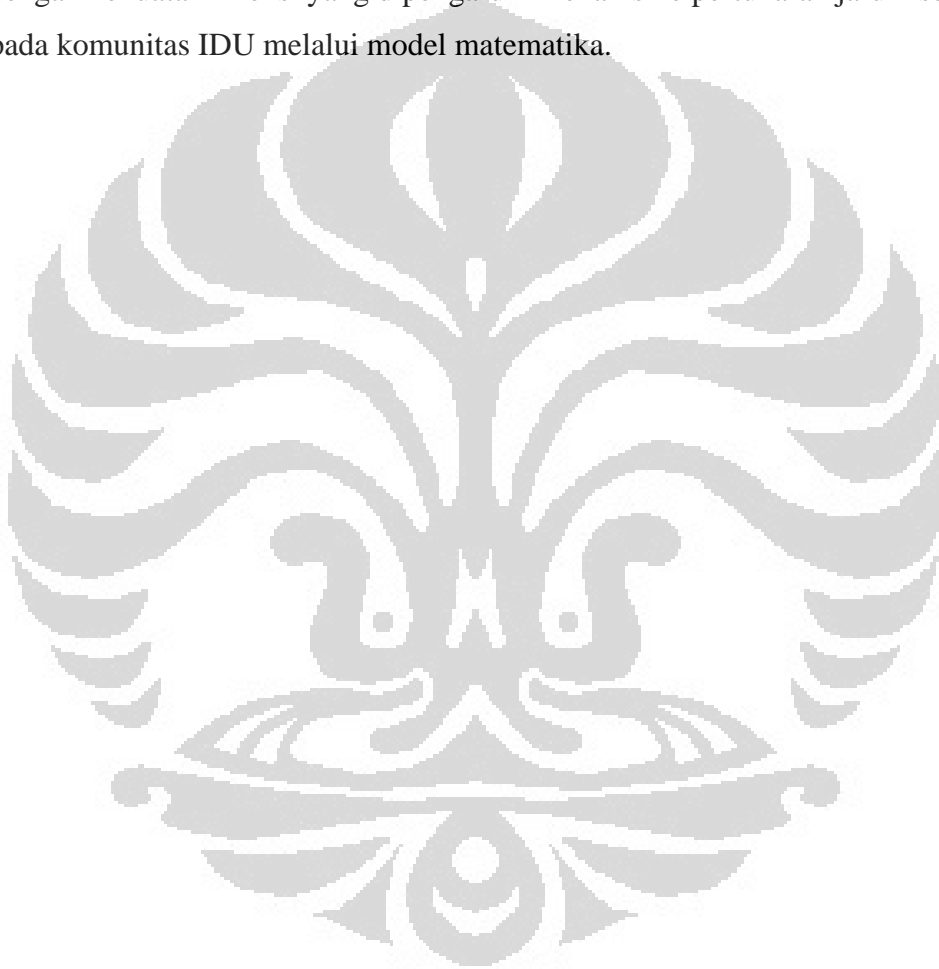
Pada penulisan ini, dilakukan analisis pada model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU. Berdasarkan model matematika penyebaran HIV pada komunitas IDU akan dicari dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas infeksi (*disease-free equilibrium*) dan titik kesetimbangan epidemik (*epidemic equilibrium*). Pada kedua titik tersebut akan dilakukan pengujian kestabilan berdasarkan *basic reproduction ratio* untuk mengamati penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada tesis ini adalah bagaimana penyebaran infeksi HIV dengan kekuatan infeksi yang dipengaruhi mekanisme pertukaran jarum suntik pada komunitas IDU.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah memahami penyebaran infeksi HIV dengan kekuatan infeksi yang dipengaruhi mekanisme pertukaran jarum suntik pada komunitas IDU melalui model matematika.



BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas mengenai landasan teori yang digunakan dalam tesis ini, khususnya yang diperlukan dalam Bab 3. Teori yang dibahas adalah teori yang mendukung pembentukan dan analisis sistem dinamik model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU (*Injecting Drug Users*). Dalam bab ini dibahas mengenai sistem persamaan diferensial, kesetimbangan dan kestabilan, *basic reproduction ratio*, teori probabilitas, dan distribusi Poisson.

Pembentukan model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU sangat berkaitan erat dengan sistem persamaan diferensial. Untuk menganalisa dinamika model pada keadaan setimbang diperlukan teori-teori dalam sistem persamaan diferensial. Selanjutnya, pada bab ini perlu dibahas mengenai kesetimbangan dan kestabilan sistem. Dengan beberapa teorema kestabilan, sistem dapat lebih mudah diamati dinamikanya secara lokal maupun global.

Dalam komunitas IDU, biasanya terbentuk karakter sosial antar pecandu narkoba suntik (IDU) sehingga memungkinkan mereka membentuk grup dalam komunitas IDU. Pembentukan grup dalam komunitas IDU berperan penting dalam kekuatan penyebaran infeksi HIV di kalangan komunitas IDU. Terdapat banyak kemungkinan dalam pembentukan grup dan mekanisme pertukaran jarum suntik dalam grup. Oleh karena itu, dalam pembahasan tesis ini diperlukan pembahasan mengenai teori probabilitas yang menyangkut pembentukan grup dan mekanisme pertukaran jarum suntik (DIE) dalam komunitas IDU. Pembentukan grup dalam komunitas IDU merupakan kejadian diskrit dengan banyak percobaan yang diasumsikan menuju tak hingga. Dengan demikian, distribusi Poisson dibahas untuk menjelaskan proses terjadinya pembentukan grup dan ukuran grup dalam komunitas IDU.

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Berikut ini diberikan sistem persamaan diferensial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{x}), \quad (2.1)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, $\mathbf{G} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi kontinu di

D . Sistem persamaan diferensial (2.1) dikatakan sistem persamaan *autonomous* jika variabel t dinyatakan secara implisit, sedangkan jika variabel t dinyatakan secara eksplisit maka sistem (2.1) dikatakan sistem persamaan diferensial *non-autonomous*. Sistem persamaan diferensial *autonomous* dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Apabila sistem (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan a_{ij} adalah bilangan riil maka sistem (2.2) merupakan sistem persamaan diferensial *autonomous* linier. Jika sistem (2.2) tidak dapat dibuat seperti bentuk linier di (2.3), maka sistem (2.2) merupakan sistem persamaan diferensial *autonomous* nonlinier.

Sistem persamaan diferensial dapat menunjukkan suatu dinamika (perubahan) dari suatu keadaan yang bergerak atau mengalami perubahan. Oleh karena itu, sistem persamaan diferensial dapat direpresentasikan sebagai sistem dinamik dari suatu keadaan yang diperhatikan.

2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier

Sistem persamaan diferensial linier dapat dilihat dari bentuk persamaannya. Misalkan

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

maka sistem persamaan diferensial *autonomous* linier dalam persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.5)$$

2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier

Misalkan sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad (2.6)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi nonlinier

yang kontinu dan terdiferensialkan di D . Dalam penulisan ini variabel t dinyatakan secara implisit, sehingga sistem persamaan (2.6) dikatakan sistem persamaan diferensial *autonomous* nonlinier dan ditulis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (2.7)$$

2.2 Kestimbangan dan Kestabilan

Sistem persamaan diferensial memiliki perilaku yang berbeda-beda di setiap titik, namun terdapat titik kesetimbangan ketika sistem dalam keadaan setimbang (konstan). Melalui titik kesetimbangan, sistem dapat lebih mudah diamati perilaku kestabilannya.

Definisi 2.1 (Titik Kesetimbangan)

Suatu titik $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari sistem persamaan

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ jika memenuhi persamaan } \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Definisi 2.2 (Titik kesetimbangan hiperbolik)

Titik $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik kesetimbangan hiperbolik dari persamaan (2.7) jika memenuhi persamaan $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ dan matriks

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}.$$

tidak mempunyai nilai eigen yang bagian riilnya bernilai nol.

Hal yang sangat terkait dengan titik kesetimbangan adalah kestabilan dari titik tersebut. Kestabilan adalah bentuk perilaku sistem yang dilihat dari titik kesetimbangan sistem. Berikut ini definisi mengenai kestabilan titik kesetimbangan.

Definisi 2.3 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Misalkan \mathbf{x}^* adalah titik kesetimbangan dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dan \mathbf{x}^0 adalah titik awal.

1. \mathbf{x}^* dikatakan **stabil**, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ dengan $\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < \delta$, solusi $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ yang melalui \mathbf{x}^0 di $t = 0$ memenuhi pertidaksamaan $\|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
2. \mathbf{x}^* dikatakan **stabil asimtotik**, jika \mathbf{x}^* stabil dan terdapat $r > 0$, sedemikian sehingga $\|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0$ saat $t \rightarrow \infty$ untuk semua \mathbf{x}^0 yang memenuhi $\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < r$.

3. \mathbf{x}^* dikatakan **tidak stabil**, jika terdapat suatu $\eta > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang $\delta > 0$ terdapat sebuah \mathbf{x}^0 dengan $\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < \delta$ dan $t_{\mathbf{x}^0} > 0$ sedemikian sehingga $\|\varphi(t_{\mathbf{x}^0}, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^*\| > \eta$.

Berdasarkan Definisi 2.3, dapat disimpulkan bahwa sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dikatakan stabil pada titik kesetimbangan \mathbf{x}^* jika kondisi awal (\mathbf{x}^0) berada di sekitar \mathbf{x}^* sejauh δ , dengan δ adalah bilangan positif terkecil maka sifat solusi sistem $(\varphi(t, \mathbf{x}^0))$ berada di sekitar titik kesetimbangan \mathbf{x}^* . Jika kondisi awal berada sangat dekat dengan \mathbf{x}^* dan solusi sistem cenderung mendekati titik kesetimbangan \mathbf{x}^* , maka sistem dikatakan stabil asimtotik. Selain itu, jika sifat solusi sistem menjauh dari titik kesetimbangan \mathbf{x}^* akibat perubahan kecil pada kondisi awal, maka sistem dikatakan tidak stabil.

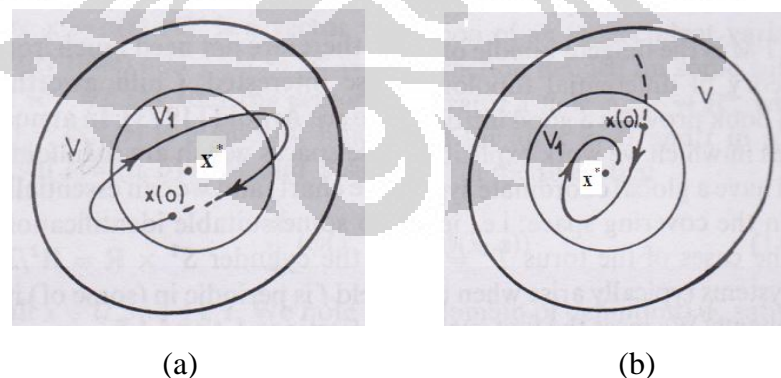
Misalkan

$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ adalah kondisi awal,

V adalah lingkungan dari \mathbf{x}^* sejauh ε , atau dapat ditulis $V = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon\}$, dan

V_1 adalah lingkungan dari semua solusi yang mungkin $V_1 = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta(\varepsilon)\}$.

Dengan demikian, sistem yang stabil dan stabil asimtotik dapat dijelaskan melalui gambar berikut ini



[sumber : Guckenheimer, J. & Holmes, P., 1983].

Gambar 2.1 (a) Titik kesetimbangan stabil, (b) Titik kesetimbangan stabil asimtotik.

Untuk menganalisa kestabilan titik kesetimbangan di sekitar titik tersebut, sistem persamaan nonlinier (2.7) harus dilinierkan terlebih dahulu. Hal ini dilakukan untuk menaksir perilaku kelinieran sistem (2.7) di sekitar titik kesetimbangan.

Linierisasi Sistem

Misalkan \mathbf{x}^* adalah titik kesetimbangan dari sistem persamaan (2.7) yaitu $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ yang memiliki ekspansi deret Taylor di titik \mathbf{x}^* yang secara matematis dapat ditulis

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2) \quad (2.8)$$

Oleh karena \mathbf{x}^* merupakan titik kesetimbangan, maka $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Dalam melinierkan sistem persamaan (2.7), suku pada (2.8) yang mempunyai orde lebih besar dari satu dapat diabaikan. Dengan demikian, persamaan (2.8) dapat ditulis

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*). \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.7) dan (2.9) diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*). \quad (2.10)$$

Misalkan

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*,$$

$$\Psi = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*),$$

dengan

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}.$$

Persamaan (2.10) dapat ditulis

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{\Psi} \mathbf{y}, \quad (2.11)$$

dengan matriks $\mathbf{\Psi}$ disebut matriks Jacobian dari sistem persamaan (2.7) di titik \mathbf{x}^* . Selanjutnya, bagian ruas kanan persamaan (2.11) disebut bagian linier dari fungsi nonlinier $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ di titik \mathbf{x}^* . Dengan demikian, kestabilan titik kesetimbangan dapat dilihat melalui bagian liniernya.

Kestabilan titik kesetimbangan dari persamaan (2.7) dapat dianalisa dengan menggunakan nilai-nilai eigen dari matriks $\mathbf{\Psi}$ yang merupakan solusi atau akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristik $\det(\sigma \mathbf{I} - \mathbf{\Psi}) = 0$. Persamaan karakteristik tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$a_n \sigma^n + a_{n-1} \sigma^{n-1} + \dots + a_1 \sigma + a_0 = 0$$

dengan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ adalah konstanta dan akar-akar karakteristiknya adalah nilai eigen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Nilai-nilai eigen tersebut dapat digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan lokal dari sistem persamaan (2.7) sesuai dengan teorema berikut ini.

Teorema 2.1

Jika matriks $\mathbf{\Psi}$ pada sistem (2.7) adalah matriks koefisien dengan nilai eigen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, maka titik kesetimbangan \mathbf{x}^* dari sistem (2.7), dikatakan :

1. **Stabil**, jika $\text{Re}(\sigma_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$
2. **Stabil asimtotik**, jika $\text{Re}(\sigma_i) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$
3. **Tidak stabil**, jika $\text{Re}(\sigma_k) > 0$, untuk suatu k ,

dengan $\text{Re}(\mathbf{x})$ adalah bagian riil dari \mathbf{x} .

Teorema 2.1 dapat digunakan untuk menentukan kestabilan lokal suatu titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan yang stabil atau stabil asimtotik hanya pada suatu daerah tertentu dalam lingkungan solusi sistem dikatakan stabil lokal atau stabil asimtotik lokal. Titik kesetimbangan dikatakan stabil global atau stabil asimtotik global jika titik kesetimbangan tersebut stabil atau stabil asimtotik pada setiap lingkungan solusi sistem. Berikut ini definisi solusi periodik pada sistem.

Definisi 2.4 (Solusi Periodik)

Misalkan $x = \phi(t)$ merupakan solusi untuk persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ dan misalkan terdapat bilangan positif terkecil T sedemikian sehingga $\phi(t + T) = \phi(t)$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, maka $\phi(t)$ disebut solusi periodik dari persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ dengan periodenya T .

Jika \mathbf{a}^* stabil asimtotik global maka solusi di sekitar \mathbf{a}^* cenderung menuju ke \mathbf{a}^* . Namun jika terdapat solusi periodik pada sistem maka solusi yang berada di luar solusi periodik tidak cenderung menuju \mathbf{a}^* karena dibatasi oleh solusi periodik dalam sistem. Hal tersebut memberikan kesimpulan bahwa \mathbf{a}^* bersifat stabil asimtotik namun tidak secara global.

Misalkan sistem persamaan (2.7) didefinisikan di \mathbb{R}^2 sehingga $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dan memiliki titik kesetimbangan \mathbf{a}^* yang stabil asimtotik lokal. Berikut ini kriteria yang menunjukkan keberadaan solusi periodik dalam sistem persamaan (2.7) pada \mathbb{R}^2 .

Kriteria 2.1 (Kriteria Bendixon-Dulac)

Misalkan terdapat suatu fungsi yang kontinu dan terdiferensial $\gamma(\mathbf{x})$, dengan

$\gamma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dan $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$, sedemikian sehingga fungsi $\frac{\partial}{\partial x_1}(\gamma F_1(\mathbf{x})) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma F_2(\mathbf{x}))$

tidak berubah tanda di Σ . Jika tidak ada perubahan tanda di Σ maka tidak terdapat solusi periodik dari sistem persamaan (2.7) di daerah Σ .

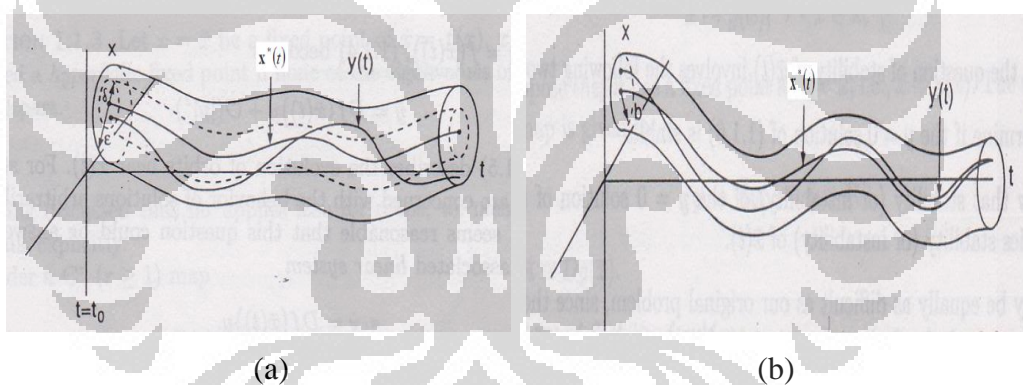
Selanjutnya, untuk menentukan kestabilan global dari suatu titik kesetimbangan, sistem dapat dianalisa melalui kestabilan Lyapunov. Dalam kestabilan Lyapunov, kestabilan titik kesetimbangan suatu sistem dapat diamati melalui fungsi definit positif $L: \Sigma \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yang disebut sebagai fungsi Lyapunov. Pada penulisan ini fungsi Lyapunov digunakan untuk mendeteksi kestabilan asimtotik secara global dalam penyelesaian sistem dinamik.

Definisi 2.5 (Kestabilan Lyapunov)

Misalkan \mathbf{x}^* adalah titik kesetimbangan dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dan \mathbf{y} adalah sebarang solusi.

1. $\mathbf{x}^*(t)$ dikatakan **stabil Lyapunov**, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi lain $\mathbf{y}(t)$ dengan $\|\mathbf{x}^*(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\| < \delta$, maka memenuhi pertidaksamaan $\|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ untuk setiap $t > t_0, t_0 \in \mathbb{R}$.
2. \mathbf{x}^* dikatakan **stabil asimtotik**, jika \mathbf{x}^* stabil Lyapunov dan terdapat konstanta $b > 0$, sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{x}^*(t_0) - \mathbf{y}(t_0)\| < b$, maka memenuhi $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{y}(t)\| = 0$ (Wiggins, S., 1990).

Berikut ini gambaran kestabilan Lyapunov dan stabil asimtotik Lyapunov.



[sumber : Wiggins, S., 1990].

Gambar 2.2 (a) Stabil Lyapunov, (b) Stabil asimtotik Lyapunov.

Teorema 2.2

Misalkan \mathbf{z}^* titik kesetimbangan untuk sistem (2.7) dan $L: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi definit positif terdiferensialkan pada lingkungan \mathbf{z}^* dalam himpunan $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, sedemikian sehingga

- a. jika $L(\mathbf{z}^*) = 0$ dan $L(\mathbf{z}) > 0$ dengan $\mathbf{z} \neq \mathbf{z}^*$,
- b. $\dot{L}(\mathbf{z}) \leq 0$ pada $\Sigma - \{\mathbf{z}^*\}$

maka \mathbf{z}^* dikatakan **stabil**. Selanjutnya,

c. jika memenuhi $\dot{L}(\mathbf{z}) < \mathbf{0}$ pada $\Sigma - \{\mathbf{z}^*\}$;

maka \mathbf{z}^* dikatakan **stabil asimtotik**, dengan

$$\dot{L} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial z_j} \dot{z}_j, \quad (\text{Hirsch dan Smale, 1974}).$$

Jika $\Sigma = \mathbb{R}^n$ maka pada kasus c, \mathbf{z}^* dikatakan **stabil asimtotik global**.

2.3 Probabilitas

Misalkan \mathcal{E} merupakan suatu himpunan yang terdiri dari semua hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan acak. \mathcal{E} disebut sebagai ruang contoh (sampel). Selanjutnya untuk setiap himpunan bagian E dari \mathcal{E} didefinisikan suatu fungsi probabilitas himpunan P dengan $P(E)$ menyatakan besar probabilitas (peluang) bahwa himpunan E merupakan hasil dari suatu percobaan acak. Jika E_1, E_2, E_3, \dots adalah himpunan-himpunan bagian dari himpunan \mathcal{E} maka dapat didefinisikan fungsi himpunan probabilitas, yaitu

Definisi 2.6

Jika $P(E)$ didefinisikan untuk suatu himpunan bagian dari himpunan \mathcal{E} dan jika memenuhi

(a) $P(E) \geq 0$,

(b) $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots$, dengan himpunan

$E_i, i = 1, 2, 3, \dots$, sedemikian sehingga tidak ada dua himpunan, E_i dan E_j yang memiliki satu anggota yang sama (yakni $E_i \cap E_j = \emptyset$, atau E_i dan E_j merupakan kejadian saling lepas $i \neq j$),

(c) $P(\mathcal{E}) = 1$,

maka P dikatakan fungsi himpunan probabilitas dari hasil percobaan acak (Hogg, R.V., Allen T.C., 1995).

Kejadian E_0 dan G dikatakan saling lepas jika $E_0 \cap G = \emptyset$, yakni jika E_0 dan G tidak dapat terjadi bersamaan. Misalkan G_1, G_2, G_3, \dots merupakan

kejadian saling lepas dengan $G_i \cap G_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$. Jika E_0 , G_i , dan G saling lepas maka berlaku aturan penjumlahan :

1. $P(E_0 \cup G) = P(E_0) + P(G)$,
2. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(G_i)$.

Misalkan G_1, G_2, G_3, \dots merupakan kejadian saling lepas dari ruang contoh \mathcal{G} maka berlaku hukum probabilitas total yaitu $P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E \cap G_i)$ untuk sebarang kejadian E .

2.3.1 Probabilitas Bersyarat

Untuk sebarang kejadian E dan G , probabilitas bersyarat E diberikan G ditulis $P(E|G)$, didefinisikan dengan

$$P(E|G) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)}; \quad P(G) > 0. \quad (2.12)$$

Berdasarkan persamaan (2.12) diperoleh bahwa

$$P(E \cap G) = P(E|G) P(G). \quad (2.13)$$

Misalkan G_1, G_2, G_3, \dots merupakan kejadian saling lepas, yaitu $G_i \cap G_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ maka menurut hukum probabilitas total dan persamaan (2.13) maka

$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E|G_i) P(G_i). \quad (2.14)$$

Selanjutnya kejadian E dan G dikatakan saling bebas jika $P(E|G) = P(E)$ atau $P(G|E) = P(G)$, sehingga berlaku $P(E \cap G) = P(E) \times P(G)$.

2.4 Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan salah satu distribusi probabilitas diskrit yang didasari oleh terjadinya percobaan Poisson. Percobaan Poisson adalah suatu percobaan yang menghasilkan nilai-nilai yang diskrit dari suatu variabel acak yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu. Berikut ini ciri-ciri percobaan Poisson

1. banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada suatu selang waktu atau daerah tertentu yang berbeda,
2. peluang terjadinya suatu percobaan dalam suatu selang waktu yang singkat atau daerah tertentu yang kecil sebanding dengan panjang selang waktu atau besarnya daerah tertentu tersebut, dan tidak bergantung pada percobaan yang terjadi di luar selang waktu atau di luar daerah tertentu tersebut,
3. peluang terambilnya lebih dari 1 hasil percobaan dalam suatu selang waktu yang singkat atau daerah tertentu yang kecil dapat diabaikan. (Walpole, R.E., 1995)

Misalkan :

N adalah banyak percobaan dari populasi kejadian diskrit,
 k adalah banyaknya percobaan sukses pada N percobaan, dan
 p adalah probabilitas terjadinya percobaan sukses dalam suatu percobaan kejadian diskrit.

Probabilitas terjadinya percobaan sukses sebanyak k kali dalam N percobaan berdasarkan pendekatan distribusi Binomial adalah

$$P_p(k | N) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Selanjutnya, nilai harapan banyaknya percobaan sukses adalah

$$v = N p,$$

sehingga diperoleh

$$P_{v/N}(k | N) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \left(\frac{v}{N}\right)^k \left(1 - \frac{v}{N}\right)^{N-k}.$$

Untuk ukuran sampel N yang sangat besar, probabilitas terjadinya percobaan sukses sebanyak k kali dalam N percobaan menjadi:

$$\begin{aligned} P_v(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} P_{v/N}(k | N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1) \dots (N-k+1)}{k!} \frac{v^k}{N^k} \left(1 - \frac{v}{N}\right)^N \left(1 - \frac{v}{N}\right)^{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1) \dots (N-k+1)}{N^k} \frac{\nu^k}{k!} \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^{-k} \\
&= 1 \cdot \frac{\nu^k}{k!} \cdot e^{-\nu} \cdot 1 \\
P_\nu(k) &= \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}.
\end{aligned}$$

Misalkan G adalah variabel acak banyaknya percobaan sukses dalam suatu kejadian diskrit. Dengan demikian, terbentuklah distribusi Poisson dengan parameter $\nu > 0$ untuk variabel acak G dengan pmf (*probability mass function*)

$$P(G = k) = \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}, \quad \text{untuk } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Oleh karena itu, rata-rata atau nilai harapan dan variansi dari variabel acak G adalah

$$E[G = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!} = \nu, \quad (2.16)$$

$$\sigma_G^2 = \text{var}[G = k] = \nu. \quad (2.17)$$

Distribusi Poisson merupakan salah satu distribusi untuk variabel acak yang diskrit. Distribusi Poisson digunakan untuk menentukan probabilitas dari percobaan sukses yang ditentukan dan percobaan tersebut terjadi dalam suatu interval waktu atau daerah tertentu. Percobaan sukses yang diperhatikan dalam distribusi Poisson adalah kejadian yang terjadi dalam percobaan yang besar dan dilakukan berulang kali sehingga $N \rightarrow \infty$. Selanjutnya dalam penulisan ini, kejadian pembuatan grup komunitas IDU merupakan percobaan diskrit yang mengikuti distribusi Poisson.

2.4.1 Proses Poisson

Proses kejadian pembuatan grup dalam komunitas IDU, nilainya berubah-ubah secara tidak pasti dan terkait dengan waktu. Oleh karena setiap variabel yang nilainya berubah-ubah secara tidak pasti terkait dengan waktu dikatakan mengikuti proses stokastik, maka pembahasan proses stokastik diperlukan pada

bab ini. Misalkan G_t adalah variabel acak dari suatu proses pada waktu $t \in T = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definisi 2.7

Proses stokastik adalah koleksi dari variabel acak G_t , dengan t adalah suatu parameter bergerak pada himpunan indeks T (Taylor, H.M., S. Karlin, 1998).

Dengan demikian, proses kejadian pembuatan grup komunitas IDU yang merupakan percobaan Poisson yang mengikuti proses stokastik dapat dikatakan sebagai proses Poisson.

Definisi 2.8 (Proses Poisson)

Suatu intensitas atau tingkat proses Poisson $\lambda > 0$ adalah sebuah nilai bilangan bulat proses stokastik $\{G(t); t \geq 0\}$ dengan

1. untuk sebarang titik waktu $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, dengan proses *increments*

$$G(t_1) - G(t_0), G(t_2) - G(t_1), \dots, G(t_n) - G(t_{n-1}) \quad (2.18)$$

merupakan variabel acak saling bebas,

2. untuk $s \geq 0$ dan $t > 0$, variabel acak $G(s+t) - G(s)$ berdistribusi Poisson sehingga

$$P(G(s+t) - G(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad \text{untuk } k = 0, 1, 2, \dots,$$

3. $G(0) = 0$, (Taylor, H.M., S. Karlin, 1998).

Berdasarkan definisi proses Poisson di atas dapat dibuktikan bahwa

$$E[G(t)] = \lambda t, \quad (2.19)$$

$$\text{var}[G(t)] = \lambda t. \quad (2.20)$$

Contoh 2.1

Para pelanggan suatu toko datang menurut proses Poisson dengan tingkat intensitas kedatangan $\lambda = 4$ orang per jam. Toko tersebut buka pada pukul 09.00

pagi. Berapakah probabilitas kedatangan seorang pelanggan tiba pukul 09.30 pagi dan terdapat total lima orang pelanggan tiba di toko pukul 11.30 pagi ?

Jawab:

Misalkan

t : waktu kedatangan pelanggan terhitung sejak pukul 09.00 pagi (dalam jam),

$G(t)$: variabel acak jumlah total pelanggan pada waktu t ,

sedemikian sehingga

pukul 09.00 berkorespondensi dengan $t_0 = 0$,

pukul 09.30 berkorespondensi dengan $t_1 = \frac{1}{2}$,

pukul 11.30 berkorespondensi dengan $t_2 = \frac{5}{2}$.

Selanjutnya,

$$G(t_0) = G(0) = 0,$$

$$G(t_1) = G\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$G(t_2) = G\left(\frac{5}{2}\right) = 5,$$

dengan proses *increments* $G\left(\frac{1}{2}\right) - G(0)$, $G\left(\frac{5}{2}\right) - G\left(\frac{1}{2}\right)$ merupakan variabel

acak saling bebas dan berdistribusi Poisson. Dengan demikian, berdasarkan definisi proses Poisson probabilitas kedatangan seorang pelanggan tiba pukul 09.30 pagi dan terdapat total lima orang pelanggan tiba di toko pukul 11.30 pagi, ditulis

$$\begin{aligned} P\left(G\left(\frac{1}{2}\right) = 1, G\left(\frac{5}{2}\right) = 5\right) &= P\left(G\left(\frac{1}{2}\right) - G(0) = 1, G\left(\frac{5}{2}\right) - G\left(\frac{1}{2}\right) = 4\right) \\ &= \frac{e^{4(1/2)} \left[4\left(\frac{1}{2}\right)\right]^1}{1!} \frac{e^{4(2)} [4(2)]^4}{4!} \\ &= 2e^{-2} \frac{512}{3} e^{-8} = 0,01549. \end{aligned}$$

2.5 Basic Reproduction Ratio (R_0)

Dalam pemodelan epidemik penyakit, terdapat ukuran penyebaran penyakit pada populasi yang diperhatikan. Ukuran (rasio) diperhatikan untuk menganalisa model penyebaran epidemik penyakit dan selanjutnya disebut *basic reproduction ratio*. Pada subbab ini, dijelaskan mengenai pengertian dasar dan metode penentuan *basic reproduction ratio* yang dinotasikan dengan R_0 .

Definisi 2.9

Basic reproduction ratio adalah rata-rata banyaknya kasus kedua (individu *infectious* baru) yang disebabkan satu individu yang terinfeksi (*infectious*) selama masa terinfeksi dalam keseluruhan populasi *susceptibles*.

Dalam penulisan ini, *basic reproduction ratio* akan ditentukan dengan menggunakan metode operator generasi selanjutnya (*the next generation operator*). Dalam metode ini, *basic reproduction ratio* (R_0) didefinisikan sebagai radius spektral dari operator generasi selanjutnya.

Definisi 2.10 (Radius Spektral)

Misalkan Φ adalah matriks $n \times n$ dan $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ adalah nilai eigen dari matriks Φ , maka radius spektral dari matriks Φ didefinisikan sebagai:

$$\rho(\Phi) = \max_{i=1, \dots, n} |\sigma_i|.$$

Metode Operator Generasi Selanjutnya

Metode operator generasi selanjutnya merupakan metode yang dilakukan dengan cara mengelompokkan populasi ke dalam 3 kelompok individu yaitu kelompok individu yang tidak terinfeksi, kelompok individu terinfeksi tetapi tidak menularkan, dan kelompok individu terinfeksi dan menularkan. Misalkan

1. komponen \mathbf{X} menyatakan kelas-kelas individu yang tidak terinfeksi penyakit yang sedang diobservasi,
2. komponen \mathbf{Y} menyatakan kelas-kelas individu yang terinfeksi penyakit yang sedang diobservasi, tetapi tidak dapat menularkan penyakit tersebut,

3. komponen \mathbf{Z} menyatakan kelas-kelas individu yang terinfeksi penyakit yang sedang diobservasi dan dapat menularkan penyakit tersebut.

Dengan demikian, model epidemik suatu penyakit dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{X}}{dt} &= f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}), \\ \frac{d\mathbf{Y}}{dt} &= g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}), \\ \frac{d\mathbf{Z}}{dt} &= h(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}),\end{aligned}\tag{2.21}$$

dengan $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^s$, dan $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^n$; $r, s, n \geq 0$; dan $h(\mathbf{X}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

Dalam metode operator generasi selanjutnya dimisalkan $\mathbf{V}_0 = (\mathbf{X}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{r+s+n}$ adalah titik kesetimbangan bebas-infeksi dari sistem persamaan (2.27), yang diperoleh dari persamaan $f(\mathbf{X}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, $g(\mathbf{X}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, dan $h(\mathbf{X}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Selanjutnya, diasumsikan persamaan $g(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = 0$ sehingga diperoleh solusi $\mathbf{Y} = \tilde{g}(\mathbf{X}^*, \mathbf{Z})$. Oleh karena itu, dapat diperoleh sebuah matriks berukuran $n \times n$,

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}} h(\mathbf{X}^*, \tilde{g}(\mathbf{X}^*, \mathbf{0}), \mathbf{0}).$$

Misalkan Φ dapat dituliskan dalam bentuk

$$\Phi = \mathbf{J} - \mathbf{Q},$$

dengan $\mathbf{J} \geq 0$, ($j_{ij} \geq 0$) dan $\mathbf{Q} \geq 0$ adalah matriks diagonal. Dengan demikian, R_0

didefinisikan sebagai radius spektral dari matriks \mathbf{JQ}^{-1} , sehingga berdasarkan

Definisi 2.10, diperoleh

$$R_0 = \rho(\mathbf{JQ}^{-1}).$$

BAB 3

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN INFEKSI HIV PADA KOMUNITAS IDU

Pada bab ini dibahas model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU (*Injecting Drug Users*). Berdasarkan penjelasan pada Bab 2 akan dilakukan analisa dinamik terhadap model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU. Sebelum melakukan analisa dinamik terhadap model penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU, dibahas mengenai pembentukan model. Pembentukan model didasari oleh asumsi yang sesuai dengan keadaan komunitas IDU dan sifat infeksi HIV.

Pada alur dinamika penyebaran infeksi HIV dalam komunitas IDU, terdapat faktor kekuatan infeksi. Faktor kekuatan infeksi memperhatikan asumsi-asumsi mekanisme pertukaran jarum suntik yang menyebabkan terjadinya penyebaran infeksi HIV di dalam komunitas IDU. Selanjutnya, perilaku sistem dinamik dibahas dengan mengamati turunan parsial fungsi kekuatan infeksi dan faktor yang mempengaruhi laju perubahan populasi pada komunitas IDU.

Untuk mengetahui pola penyebaran infeksi HIV komunitas IDU melalui sistem dinamik, maka dicari *basic reproduction ratio* dan menentukan titik kesetimbangan dari sistem dinamik. Dengan demikian, melalui titik kesetimbangan dinamika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU dapat diamati dengan menentukan kestabilannya melalui *basic reproduction ratio*.

3.1 Pembentukan Model

Dalam penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU, komunitas tersebut diasumsikan terdiri dari tiga kelompok individu pecandu narkoba, yaitu :

$S(t)$: *susceptibles* : ukuran populasi individu yang sehat namun rentan dan dapat terinfeksi HIV pada waktu t , selanjutnya disebut ukuran populasi *susceptibles* pada saat t .

$I(t)$: *infectious* : ukuran populasi individu yang telah terinfeksi HIV pada waktu t ,

$A(t)$: AIDS : ukuran populasi individu yang sudah mengidap penyakit AIDS pada waktu t .

Pada penulisan ini diasumsikan total ukuran populasi “aktif” pecandu dalam komunitas IDU adalah

$$T_o = S + I.$$

Dengan demikian, probabilitas seorang “*sharer*” (pembagi jarum suntik) merupakan seorang pecandu terinfeksi adalah

$$\pi(S, I) = \frac{I}{T_o} = \frac{I}{S + I}. \quad (3.1)$$

Asumsi Model

Dalam pemodelan penyebaran infeksi HIV dalam komunitas IDU terdapat fakta yang diperhatikan yakni infeksi HIV tidak dapat disembuhkan, sehingga dalam model tidak diperhatikan laju perubahan populasi pecandu yang sembuh (*recovered*). Model penyebaran infeksi HIV pada komunitas pecandu narkoba suntik (IDU) sesuai model klasik epidemik SIR menggunakan asumsi :

1. populasi pecandu tertutup (tidak ada proses migrasi), yaitu tidak ada pecandu yang masuk maupun keluar dari komunitas pecandu narkoba suntik (IDU),
2. infeksi HIV hanya menular melalui kontak langsung dengan penderita,
3. tidak ada masa inkubasi apabila terjadi proses penularan,
4. pecandu yang menyadari sudah mengidap AIDS tidak ikut berbagi suntikan dan tidak bergabung dalam grup “sahabat”.

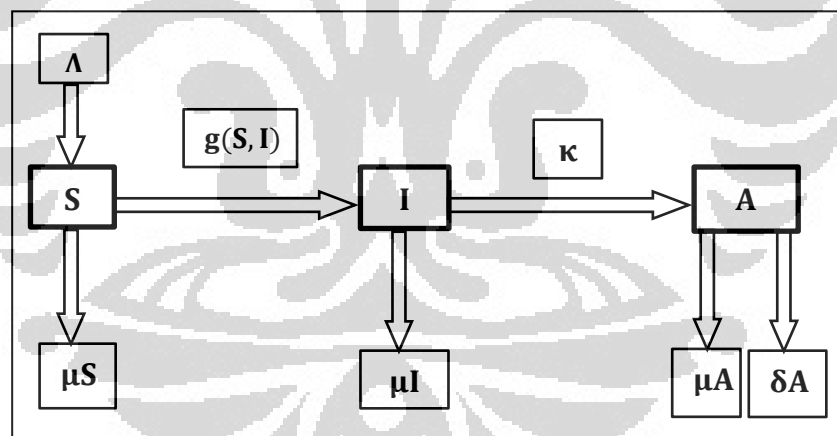
Tabel 3.1 memuat variabel dan parameter yang digunakan dalam proses pembentukan model.

Tabel 3.1 Variabel dan parameter model

Simbol	Definisi simbol	Syarat	Satuan
S	Ukuran populasi pecandu <i>susceptibles</i>	$S > 0$	individu
I	Ukuran populasi pecandu <i>infectious</i>	$I \geq 0$	individu
A	Ukuran populasi pecandu yang sudah mengidap AIDS	$A \geq 0$	individu

T_o	Ukuran total populasi pecandu “aktif” dalam komunitas IDU	$T_o > 0$	individu
Λ	Laju penambahan populasi IDU dari manusia biasa menjadi pecandu narkoba suntik (IDU)	$\Lambda > 0$	individu / waktu
μ	Laju kematian alami IDU per kapita	$\mu > 0$	1/waktu
κ	Laju perubahan dari terinfeksi HIV menjadi penyakit AIDS per kapita	$\kappa > 0$	1/waktu
$g(S, I)$	Kekuatan penyebaran infeksi (<i>force of infection</i>) dalam komunitas IDU	$g(S, I) \geq 0$	1/waktu
δ	Laju kematian alami pecandu yang mengidap AIDS per kapita	$\delta > 0$	1/waktu

Proses penyebaran infeksi HIV di dalam komunitas IDU diasumsikan mengikuti diagram transmisi berikut.



Gambar 3.1 Diagram penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU

Penurunan model penyebaran infeksi HIV dalam komunitas IDU adalah sebagai berikut.

1. Laju perubahan populasi *susceptibles* per satuan waktu dipengaruhi oleh laju penambahan populasi IDU (Λ). Populasi *susceptibles* sepanjang waktu t akan berkurang akibat laju kematian alami pada pecandu *susceptibles* (μS) dan pengaruh kekuatan penyebaran infeksi pada

pecandu *susceptibles* ($g(S, I)S$), sehingga dapat ditulis

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - g(S, I)S .$$

2. Laju perubahan populasi *infectious* per satuan waktu dipengaruhi oleh pertambahan populasi *infectious* sepanjang waktu t akibat kekuatan penyebaran infeksi pada pecandu *susceptibles* ($g(S, I)S$). Berkurangnya populasi *infectious* per satuan waktu dipengaruhi faktor laju kematian alami pada pecandu *infectious* (μI) dan laju perubahan status pecandu yang terinfeksi HIV menjadi pengidap AIDS pada populasi *infectious* (κI), sehingga dapat ditulis

$$\frac{dI}{dt} = g(S, I)S - \mu I - \kappa I .$$

3. Laju perubahan populasi AIDS per satuan waktu dipengaruhi oleh pertambahan dan pengurangan populasi AIDS per satuan waktu. Pertambahan populasi AIDS per satuan waktu merupakan akibat laju perubahan status dari terinfeksi HIV menjadi pengidap AIDS terhadap populasi *infectious* (κI). Selain itu, berkurangnya populasi AIDS per satuan waktu dipengaruhi oleh laju kematian alami pada populasi AIDS (μA) dan laju kematian alami pada pecandu AIDS sebagai individu pengidap AIDS (δA), sehingga dapat ditulis

$$\frac{dA}{dt} = \kappa I - \mu A - \delta A .$$

Dengan demikian, model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \mu S - g(S, I)S , \\ \frac{dI}{dt} &= g(S, I)S - \mu I - \kappa I , \\ \frac{dA}{dt} &= \kappa I - \mu A - \delta A , \end{aligned} \tag{3.2}$$

dengan

$\frac{dS}{dt}$ menyatakan laju perubahan populasi pecandu *susceptibles* terhadap waktu t ,

$\frac{dI}{dt}$ menyatakan laju perubahan populasi pecandu *infectious* terhadap waktu t ,

$\frac{dA}{dt}$ menyatakan laju perubahan populasi pecandu yang sudah mengidap AIDS terhadap waktu t .

Berdasarkan sistem persamaan (3.2), diperoleh persamaan untuk laju perubahan total populasi pecandu “aktif” terhadap waktu t yaitu

$$\frac{dT_o}{dt} = \Lambda - \mu T_o - \kappa I . \quad (3.3)$$

Oleh karena $T_o = S + I$, maka laju perubahan total populasi pecandu “aktif” dapat ditulis sebagai $\Lambda - (\mu + \kappa)T_o \leq \frac{dT_o}{dt} \leq \Lambda - \mu T_o$.

3.2 Kekuatan Infeksi ($g(S, I)$)

Kekuatan infeksi HIV merupakan potensi penyebaran infeksi HIV dari kelompok pecandu yang terinfeksi HIV (*infectious*) terhadap kelompok pecandu yang *susceptibles* (rentan terserang infeksi). Dalam penulisan ini, kekuatan infeksi HIV memperhatikan mekanisme pertukaran jarum suntik di kalangan pecandu narkoba suntik (IDU). Untuk mendefinisikan fungsi kekuatan infeksi diberikan beberapa asumsi mekanisme pertukaran jarum suntik dalam suatu grup “sahabat” sebagai berikut

1. semua individu (pecandu) masuk ke dalam grup “sahabat” secara acak,
2. ukuran grup “sahabat”, dinotasikan dengan G , merupakan variabel acak berdistribusi Poisson dengan parameter $\nu > 0$. Jika $G = k$, maka posisi pecandu dinotasikan dengan $i = 1, 2, 3, \dots, k$,
3. setiap grup memperoleh satu jarum suntik baru (yang tidak terinfeksi) pada penyuntikan pertama, selanjutnya jarum suntik digunakan secara terurut oleh setiap anggota grup, setelah itu jarum suntik dibuang,
4. pembuatan grup seorang pecandu terjadi mengikuti proses Poisson dengan parameter $\lambda > 0$, dengan asumsi tanpa dipengaruhi oleh pembuatan grup pecandu lain,

5. suatu jarum suntik dikatakan terinfeksi jika jarum suntik tersebut telah digunakan oleh pecandu yang terinfeksi,
6. probabilitas seorang pecandu *susceptibles* ke-*i* berpotensi “membersihkan” jarum suntik terinfeksi setelah digunakan (dimasukkan ke dalam tubuh) adalah θ , dinotasikan sebagai $P(C_i) = \theta$. Hal ini dikarenakan darah terinfeksi yang tersisa di ujung jarum suntik masuk seluruhnya ke dalam tubuh pecandu yang tidak terinfeksi tersebut,
7. sebarang pecandu *susceptibles* yang menggunakan jarum suntik terinfeksi diasumsikan terinfeksi HIV, tapi pecandu tersebut memungkinkan membuat jarum suntik menjadi "bersih" untuk pecandu urutan selanjutnya,
8. pecandu *susceptibles* menjadi terinfeksi hanya dikarenakan berbagi jarum suntik dalam grup “sahabat”,
9. probabilitas seorang pecandu menjadi terinfeksi (dan langsung dapat menularkan) jika terdapat paparan HIV adalah α ,
10. kejadian pecandu ke-*i* tidak terinfeksi saling bebas dengan kejadian pecandu ke-*i* tidak berpotensi “membersihkan” jarum suntik dari sisa darah terinfeksi,
11. kejadian pecandu ke-*i* terinfeksi saling bebas dengan kejadian pecandu setelahnya (pecandu lain) tidak terinfeksi dan tidak berpotensi “membersihkan” jarum suntik dari sisa darah terinfeksi
12. kejadian pecandu ke-*i* adalah pecandu terinfeksi dan dapat menularkan infeksi HIV kepada pecandu setelahnya saling lepas dengan kejadian pecandu yang lain.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, fungsi dari kekuatan infeksi HIV dalam grup “sahabat” pada komunitas IDU dapat didefinisikan sebagai berikut

$$g(S, I) = \lambda\alpha\beta(S, I), \quad (3.4)$$

dengan $\beta(S, I)$ merupakan probabilitas seorang pecandu terpapar HIV yakni probabilitas bahwa seorang pecandu memasukkan jarum suntik terinfeksi ke dalam tubuhnya. Dengan demikian, $g(S, I)$ dapat dikatakan sebagai potensi (penyebaran) seorang pecandu dalam grup “sahabat” dapat terkena infeksi HIV

(dan langsung dapat menularkan) setelah memasukkan jarum suntik terinfeksi ke dalam tubuh pecandu dengan intensitas pembuatan grup “sahabat” per satuan waktu.

Misalkan :

- E : kejadian seorang pecandu menggunakan jarum suntik terinfeksi,
 $R(k)$: posisi urutan pecandu dalam berbagi jarum suntik dalam grupnya yang berukuran k .

Oleh karena itu, probabilitas bahwa seorang pecandu memasukkan jarum suntik terinfeksi ke dalam tubuhnya adalah

$$\begin{aligned} \beta(S, I) = P(E) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(E | G = k) P(G = k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} P(G = k) \sum_{j=1}^k P(E | G = k, R(k) = j) P(R(k) = j). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dalam hal ini hanya ukuran grup yang lebih besar sama dengan dua ($k \geq 2$) yang relevan dalam pembentukan suatu grup yang memungkinkan dalam masalah penyebaran infeksi. Berdasarkan asumsi kekuatan infeksi (2), ukuran grup “sahabat” berdistribusi Poisson dengan fungsi probabilitas (p.m.f)

$$P(G = k) = \frac{\bar{\nu}^{k-2} e^{-\bar{\nu}}}{(k-2)!}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

dan $\bar{\nu} = \nu + 2$ adalah rata-rata ukuran grup.

Dalam grup “sahabat”, setiap pecandu berada pada posisi berbeda dalam urutan penggunaan jarum suntik. Setiap pecandu memiliki kemungkinan yang sama untuk berada pada posisi ke- j . Jika ukuran grup adalah k , maka probabilitas bahwa seorang pecandu berada pada posisi ke- j adalah

$$P(R(k) = j) = \frac{1}{k}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

Misalkan seorang pecandu berada pada posisi ke- j dalam grup “sahabat” berukuran k maka probabilitas seorang pecandu menggunakan jarum suntik terinfeksi adalah

$$P(E | G = k, R(k) = j) = P\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} (I_i \cap U_i)\right), \quad (3.8)$$

dengan

I_i adalah kejadian bahwa pecandu ke- i adalah pecandu yang terinfeksi, dan

$$U_i = \bigcap_{h=i+1}^{j-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{pecandu ke-} h \text{ tidak terinfeksi (sebelum menggunakan jarum suntik)} \\ \text{dan tidak "membersihkan" jarum suntik yang terinfeksi} \end{array} \right\}.$$

$I_i \cap U_i$ didefinisikan sebagai kejadian pecandu ke- i adalah pecandu terinfeksi dan dapat menularkan infeksi HIV kepada pecandu setelahnya.

Oleh karena asumsi kekuatan infeksi (6) dan $P(I_i) = \frac{I}{S+I} = \pi$ sesuai persamaan (3.1), probabilitas U_i dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} P(U_i) &= P\left(\bigcap_{h=i+1}^{j-1} (I_h^c \cap C_h^c)\right) \\ &= P(I_{i+1}^c \cap C_{i+1}^c) \times P(I_{i+2}^c \cap C_{i+2}^c) \times \cdots \times P(I_{j-1}^c \cap C_{j-1}^c) \\ &= P(I_{i+1}^c) \times P(C_{i+1}^c) \times P(I_{i+2}^c) \times P(C_{i+2}^c) \times \cdots \times P(I_{j-1}^c) \times P(C_{j-1}^c) \\ &= (1-\pi) \times (1-\theta) \times (1-\pi) \times (1-\theta) \times \cdots \times (1-\pi) \times (1-\theta) \\ &= (1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}, \end{aligned}$$

dengan

I_h^c : kejadian bahwa pecandu ke- h tidak terinfeksi,

C_h^c : kejadian bahwa pecandu ke- h tidak mampu "membersihkan" jarum suntik dari sisa darah yang terinfeksi HIV.

Berdasarkan teori probabilitas pada subbab 2 dan asumsi kekuatan infeksi (11) dan (12), persamaan probabilitas (3.8) dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} P(E | G = k, R(k) = j) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} (I_i \cap U_i)\right) \\ &= P(I_1 \cap U_1) + P(I_2 \cap U_2) + \cdots + P(I_{j-1} \cap U_{j-1}) \\ &= [P(I_1) \times P(U_1)] + \cdots + [P(I_{j-1}) \times P(U_{j-1})] \\ &= (\pi \times (1-\pi)^{j-1-1} \times (1-\theta)^{j-1-1}) + \\ &\quad \cdots + (\pi \times (1-\pi)^{j-1-(j-1)} \times (1-\theta)^{j-1-(j-1)}) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} (\pi \times (1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}). \end{aligned}$$

Oleh karena itu probabilitas menggunakan jarum suntik terinfeksi pada posisi pecandu ke- j dalam grup "sahabat" berukuran k adalah

$$P(E|G=k, R(k)=j) = \sum_{i=1}^{j-1} \pi \times (1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}. \quad (3.9)$$

Persamaan (3.9) dapat diselesaikan dalam beberapa kasus penjumlahan dengan menggunakan sifat deret geometri agar memenuhi persamaan (3.5). Untuk mempermudah penyelesaian persamaan (3.9), dimisalkan

1. $A = 1 - \pi$,
2. $B = 1 - \theta$.

Berikut ini kasus-kasus penjumlahan berdasarkan persamaan (3.9)

$$\begin{aligned} 1. \text{ Kasus 1, } & \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}}{k} : \\ & \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}}{k} = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(AB)^{j-1-i}}{k} \\ & = \frac{(AB)^{j-2} \left((AB)^{1-j} - 1 \right)}{k \left((AB)^{-1} - 1 \right)} \\ & = \frac{AB(AB)^{j-2} \left((AB)^{1-j} - 1 \right)}{k(1-AB)} \\ & = \frac{(AB)^{j-1} \left((AB)^{1-j} - 1 \right)}{k(1-AB)} = \frac{1-(AB)^{j-1}}{k(1-AB)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Kasus 2, } & \sum_{j=1}^k (1-\pi)^{j-1} \times (1-\theta)^{j-1} : \\ & \sum_{j=1}^k (1-\pi)^{j-1} \times (1-\theta)^{j-1} = \sum_{j=1}^k (AB)^{j-1} \\ & = \frac{(AB)^0 \left(1 - (AB)^k \right)}{1-AB} = \frac{1-(AB)^k}{1-AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Kasus 3, } & \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}}{k} : \\ & \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}}{k} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(AB)^{j-1-i}}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^k \frac{1-(AB)^{j-1}}{k(1-AB)} \\
&= \frac{1}{k(1-AB)} \sum_{j=1}^k (1-(AB)^{j-1}) \\
&= \frac{1}{k(1-AB)} \left(k - \frac{1-(AB)^k}{1-AB} \right) \\
&= \frac{1}{1-AB} - \frac{1-(AB)^k}{k(1-AB)^2}
\end{aligned}$$

4. Kasus 4, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}}{k} :$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(1-\pi)^{j-1-i} \times (1-\theta)^{j-1-i}}{k} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(AB)^{j-1-i}}{k} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!} \left[\frac{1}{1-AB} - \frac{1-(AB)^k}{k(1-AB)^2} \right] \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!(1-AB)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2} (1-(AB)^k)}{k(k-2)!(1-AB)^2} \\
&= \left(\frac{1}{1-AB} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!} \right) - \left(\frac{1}{(1-AB)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{k(k-2)!} \right) + \left(\frac{1}{(1-AB)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2} (AB)^k}{k(k-2)!} \right) \\
&= \left(\frac{e^v}{1-AB} \right) - \left(\frac{1}{(1-AB)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^k (k-1)}{k! v^2} \right) + \left(\frac{1}{(1-AB)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(vAB)^k (k-1)}{k! v^2} \right) \\
&= \frac{e^v}{1-AB} - \frac{e^v (v-1) + 1}{(1-AB)^2 v^2} + \frac{e^{vAB} (vAB-1) + 1}{(1-AB)^2 v^2}
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran beberapa kasus penjumlahan di atas, maka persamaan (3.5) dapat ditulis :

$$\beta(S, I) = \sum_{k=1}^{\infty} P(G=k) \sum_{j=1}^k P(E|G=k, R(k)=j) P(R(k)=j)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^{k-2} e^{-\nu}}{(k-2)!} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^{j-1} \pi \left[(1-\pi)^{j-1-i} (1-\theta)^{j-1-i} \right] \right) \binom{1}{k} \\
&= \pi e^{-\nu} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(1-\pi)^{j-1-i} (1-\theta)^{j-1-i}}{k} \\
&= \pi e^{-\nu} \left[\frac{e^{\nu}}{1-AB} - \frac{e^{\nu}(\nu-1)+1}{\nu^2(1-AB)^2} + \frac{e^{\nu AB}(\nu AB-1)+1}{\nu^2(1-AB)^2} \right] \\
&= \frac{\pi}{1-AB} \left[1 - \frac{e^{-\nu} + (\nu-1) - e^{-\nu(1-AB)} (\nu AB-1) - e^{-\nu}}{\nu^2(1-AB)} \right] \\
&= \frac{\pi}{1-AB} \left[1 - \frac{(\nu-1) + (1-\nu AB)e^{-\nu(1-AB)}}{\nu^2(1-AB)} \right]. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Oleh karena $\beta(S, I)$ adalah suatu probabilitas dan berdasarkan persamaan (3.1), persamaan (3.10) dibatasi bahwa $1-AB \neq 0$, dengan

$$\begin{aligned}
1-AB &= \frac{\theta S + I}{S + I}, \\
1-\nu AB &= \frac{[1-\nu(1-\theta)]S + I}{S + I}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta(S, I) &= \frac{I}{S + I} \left[1 - \frac{(\nu-1) + \frac{[1-\nu(1-\theta)]S + I}{S + I} e^{-\frac{\theta S + I}{S + I}}}{\nu^2 \frac{\theta S + I}{S + I}} \right] \\
&= \frac{I}{\theta S + I} \left[1 - \frac{(\nu-1)(S + I) + [(1-\nu(1-\theta))S + I] e^{-\frac{\theta S + I}{S + I}}}{\nu^2 (\theta S + I)} \right]. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa fungsi $\beta(S, I)$ bergantung pada variabel S dan I melalui variabel π pada persamaan (3.1) yaitu probabilitas seorang pecandu merupakan pecandu yang terinfeksi. Berdasarkan (3.10) fungsi $\beta(S, I)$ dapat ditulis sebagai

$$\beta(S, I) = \tilde{\beta}(\pi(S, I)), \tag{3.12}$$

dengan

$$\tilde{\beta}(\pi) = \frac{\pi}{1-(1-\theta)(1-\pi)} \times \left(1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)(1-\pi)] e^{-\nu[1-(1-\theta)(1-\pi)]}}{\nu^2 [1-(1-\theta)(1-\pi)]} \right).$$

3.3 Analisa Kualitatif Model

Pada penulisan tesis ini, diasumsikan bahwa pecandu narkoba suntik (IDU) yang menyadari sudah mengidap AIDS tidak ikut berbagi suntikan dan tidak bergabung dalam grup “sahabat”. Oleh karena itu, model (3.2) yang diperhatikan hanyalah laju perubahan kelompok pecandu *susceptibles* dan laju perubahan kelompok pecandu *infectious* dengan daerah kontinu $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$, yakni

$$\frac{dS}{dt} = F_1(S, I) = \Lambda - \mu S - g(S, I) S, \quad (3.13)$$

$$\frac{dI}{dt} = F_2(S, I) = g(S, I) S - \mu I - \kappa I. \quad (3.14)$$

Untuk setiap $(S, I) \in \mathcal{R}$ dengan $I \neq 0$, dapat dimisalkan

$$\beta^*(S, I) = \frac{S+I}{I} \beta(S, I) \quad (3.15)$$

$$= \frac{S+I}{I} \cdot \frac{I}{\theta S + I} \left[1 - \frac{(\nu-1)(S+I) + [(1-\nu(1-\theta))S+I] e^{-\nu \frac{\theta S+I}{S+I}}}{\nu^2(\theta S + I)} \right]$$

$$= \frac{S+I}{\theta S + I} \left[1 - \frac{(\nu-1)(S+I) + [(1-\nu(1-\theta))S+I] e^{-\nu \frac{\theta S+I}{S+I}}}{\nu^2(\theta S + I)} \right]. \quad (3.16)$$

Berdasarkan (3.4), persamaan (3.14) dapat ditulis :

$$\begin{aligned} F_2(S, I) &= g(S, I) S - \mu I - \kappa I \\ &= \lambda \alpha \beta(S, I) S - (\mu + \kappa) I \\ &= \lambda \alpha \beta^*(S, I) \frac{I}{S+I} S - (\mu + \kappa) I \\ &= I \left(\lambda \alpha \beta^*(S, I) \frac{S}{S+I} - (\mu + \kappa) \right). \end{aligned}$$

Misalkan

$$G_2(S, I) = \lambda \alpha \beta^*(S, I) \frac{S}{S+I} - (\mu + \kappa), \quad \text{untuk } I \neq 0, \quad (3.17)$$

$$G_2(S, I) = \frac{\lambda \alpha S}{\theta S + I} \left[1 - \frac{(\nu - 1)(S + I) + [(1 - \nu(1 - \theta))S + I] e^{-\nu \frac{\theta S + I}{S + I}}}{\nu^2 (\theta S + I)} \right] - (\mu + \kappa),$$

$$\text{untuk } I \geq 0. \quad (3.18)$$

Selanjutnya, persamaan (3.14) dapat ditulis

$$F_2(S, I) = I G_2(S, I). \quad (3.19)$$

Oleh karena $F_2(S, I)$ adalah laju perubahan populasi pecandu *infectious* per satuan waktu, maka berdasarkan persamaan (3.19) dapat disimpulkan bahwa $G_2(S, I)$ merupakan faktor yang berpengaruh penting dalam menekan laju pertambahan populasi pecandu *infectious* per satuan waktu.

Berdasarkan sistem (3.13) dan (3.14), fungsi $\beta(S, I)$ sangat berpengaruh dalam sistem dinamik tersebut. Oleh karena itu, turunan parsial terhadap variabel S dan I fungsi $\beta(S, I)$ dan fungsi-fungsi lain yang berhubungan dengan sistem perlu diamati untuk mempermudah analisa sistem.

Turunan parsial $\beta(S, I)$

Untuk lebih mudah mengamati turunan parsial fungsi $\beta(S, I)$, maka dapat dilihat dari persamaan $\beta(S, I) = \tilde{\beta}(\pi(S, I))$ sesuai (3.11), sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$\beta(S, I) = \pi \cdot e^{-\nu} \cdot \frac{e^{\nu} [\nu^2 (1 - AB) - (\nu - 1)] - e^{\nu AB} (1 - \nu AB)}{\nu^2 (1 - AB)^2}.$$

Misalkan

1. $D = \pi \cdot e^{-\nu}$,
2. $R = e^{\nu} [\nu^2 (1 - AB) - (\nu - 1)] - e^{\nu AB} (1 - \nu AB)$,
3. $T = \nu^2 (1 - AB)^2$,
4. $W = \frac{e^{\nu} [\nu^2 (1 - AB) - (\nu - 1)] - e^{\nu AB} (1 - \nu AB)}{\nu^2 (1 - AB)^2} = \frac{R}{T}$.

Oleh karena β dan π suatu probabilitas, $\nu > 0$ dan $e^{-\nu} > 0$, maka jelas bahwa

- a. $0 \leq \beta \leq 1$,

- b. $0 \leq A \leq 1$,
- c. $0 \leq B \leq 1$,
- d. $0 \leq AB \leq 1$.

Dengan demikian, dapat disimpulkan

1. $D = \pi \cdot e^{-v} \geq 0$,
2. $R \geq 0$,
3. $T > 0$,
4. $W \geq 0$,
5. $vAB \leq v$,
6. $0 \leq e^{vAB} \leq 1$,
7. $e^{vAB} \leq e^v$,
8. $AB \cdot e^{vAB} \leq e^v$, maka $e^v - AB \cdot e^{vAB} \geq 0$.

Untuk melihat tanda dari $\frac{\partial \beta}{\partial S}$ dan $\frac{\partial \beta}{\partial I}$, dapat dilihat dari bentuk $\frac{\partial \beta}{\partial \pi}$, dengan

1. $\frac{\partial (AB)}{\partial \pi} = -(1-\theta) \leq 0$,
2. $\frac{\partial [e^{vAB}(1-vAB)]}{\partial \pi} = v^2 AB(1-\theta)e^{vAB} \geq 0$,
3. $\frac{\partial D}{\partial \pi} = e^{-v} > 0$,
4. $\frac{\partial R}{\partial \pi} = v^2(1-\theta)(e^v - AB e^{vAB}) \geq 0$,
5. $\frac{\partial T}{\partial \pi} = -2(1-\theta)v^2(1-AB) < 0$,
6. $\frac{\partial W}{\partial \pi} = \frac{\left\{ v^4(1-\theta)(e^v - AB e^{vAB})(1-AB)^2 + 2(1-\theta)v^2(1-AB) \left[e^v(v^2(1-AB) - (v-1)) - e^{vAB}(1-vAB) \right] \right\}}{v^4(1-AB)^4} \geq 0$.

Oleh karena itu, turunan parsial $\beta(S, I)$ terhadap π diperoleh

$$\frac{\partial \beta}{\partial \pi} = \left(\frac{\partial D}{\partial \pi} \cdot W \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial \pi} \cdot D \right) \geq 0.$$

Oleh karena $\frac{\partial \pi}{\partial S} = -\frac{I}{(S+I)^2} \leq 0$ dan $\frac{\partial \pi}{\partial I} = \frac{S}{(S+I)^2} \geq 0$ maka diperoleh

kesimpulan

$$\frac{\partial \beta}{\partial S} \leq 0 \text{ dan} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial I} \geq 0 \quad \forall (S, I) \in \mathcal{R}. \quad (3.21)$$

Dengan demikian (3.20) dan (3.21) mengakibatkan turunan parsial fungsi

kekuatan infeksi $g(S, I)$ sesuai (3.4) adalah $\frac{\partial g(S, I)}{\partial S} \leq 0$ dan $\frac{\partial g(S, I)}{\partial I} \geq 0$.

Turunan parsial $\beta^*(S, I)$

Oleh karena $\beta^*(S, I) = \frac{S+I}{I} \beta(S, I) = \frac{\beta(S, I)}{\pi}$, maka untuk melihat

perilaku (bernilai positif atau negatif) dari turunan parsial $\frac{\partial \beta^*}{\partial S}$ dan $\frac{\partial \beta^*}{\partial I}$ dapat

lebih mudah dilihat melalui persamaan

$$\beta^*(\pi(S, I)) = e^{-v} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{[(1-\pi)(1-\theta)]^{j-1-i}}{k},$$

dengan $0 \leq \beta^*(\pi(S, I)) \leq 1$. Dengan demikian, turunan parsial $\beta^*(S, I)$ terhadap π adalah

$$\frac{\partial \beta^*(\pi(S, I))}{\partial \pi} = e^{-v} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(j-1-i)[-(1-\theta)](1-\pi)^{j-2-i}}{k} \leq 0.$$

Oleh karena $\frac{\partial \pi}{\partial S} \leq 0$ dan $\frac{\partial \pi}{\partial I} \geq 0$, maka diperoleh kesimpulan $\frac{\partial \beta^*}{\partial S} \geq 0$ dan

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial I} \leq 0, \quad \forall (S, I) \in \mathcal{R}.$$

Turunan parsial $F_1(S, I)$

Berdasarkan (3.15) dan kesimpulan bahwa $\frac{\partial \beta^*}{\partial S} \geq 0$, maka

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial S} = \frac{\beta}{I} + \left[\frac{\partial \beta}{\partial S} \left(\frac{S+I}{I} \right) \right] \geq 0,$$

sehingga

$$\beta + \left[\frac{\partial \beta}{\partial S} (S + I) \right] \geq 0.$$

Oleh karena $\frac{\partial \beta}{\partial S} \leq 0$, maka

$$\begin{aligned} \beta &\geq -\frac{\partial \beta}{\partial S} (S + I), \\ \beta &\geq -\frac{\partial \beta}{\partial S} (S + I) \geq -\frac{\partial \beta}{\partial S} S, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \beta &\geq -\frac{\partial \beta}{\partial S} S, \\ \beta + \frac{\partial \beta}{\partial S} S &\geq 0. \end{aligned}$$

Turunan parsial $F_1(S, I)$ pada persamaan (3.13) terhadap S dan I diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} F_1(S, I) &= -\mu - \lambda \alpha \frac{\partial \beta}{\partial S} S - \lambda \alpha \beta \\ &= -\mu - \lambda \alpha \left(\frac{\partial \beta}{\partial S} S + \beta \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Oleh karena $\frac{\partial \beta}{\partial I} \geq 0$, maka

$$\frac{\partial}{\partial I} F_1(S, I) = -\lambda \alpha \left(\frac{\partial \beta}{\partial I} \right) S \leq 0.$$

Dengan demikian, diperoleh kesimpulan bahwa

$$\frac{\partial F_1}{\partial S} \leq 0 \text{ dan} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial I} \leq 0, \forall (S, I) \in \mathcal{R}. \tag{3.23}$$

Turunan parsial $G_2(S, I)$

Berdasarkan persamaan (3.17) maka turunan parsial $G_2(S, I)$ terhadap S adalah

$$\frac{\partial}{\partial S} G_2(S, I) = \lambda \alpha \left(\frac{\partial \beta^*}{\partial S} \frac{S}{S + I} + \beta^* \frac{I}{(S + I)^2} \right).$$

Oleh karena $\frac{\partial \beta^*}{\partial S} \geq 0$ dan $\beta^* \geq 0$, maka $\frac{\partial}{\partial S} G_2(S, I) \geq 0$. Selanjutnya turunan

parsial $G_2(S, I)$ terhadap I adalah

$$\frac{\partial}{\partial I} G_2(S, I) = \lambda \alpha \left(\frac{\partial \beta^*}{\partial I} \frac{S}{S+I} - \beta^* \frac{S}{(S+I)^2} \right).$$

Berdasarkan kesimpulan sebelumnya bahwa $\frac{\partial \beta^*}{\partial I} \leq 0$ dan $\beta^* \geq 0$, maka

$\frac{\partial}{\partial I} G_2(S, I) \leq 0$. Dengan demikian disimpulkan bahwa

$$\frac{\partial}{\partial S} G_2(S, I) \geq 0 \text{ dan} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial I} G_2(S, I) \leq 0, \quad \forall (S, I) \in \mathcal{R}. \quad (3.25)$$

3.4 Basic Reproduction Ratio

Untuk memahami penyebaran infeksi HIV melalui model matematika, dapat dilakukan dengan melakukan analisa dinamika pada model matematika (3.13) dan (3.14). Analisa dinamika pada model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU dimaksudkan untuk mengetahui pada nilai batasan mana yang mampu mempengaruhi penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU. Nilai batasan yang dimaksud dalam penulisan ini adalah *basic reproduction ratio*, yaitu nilai yang menunjukkan apakah penyebaran infeksi HIV menjadi epidemik atau tidak pada komunitas IDU.

Berdasarkan landasan teori pada subbab 2.4, pada kasus ini $X=S$, $Y=0$, dan $Z=I$; maka dengan mencari solusi $F_1(S, 0)=0$ dan $F_2(S, 0)=0$ sesuai persamaan (3.13) dan (3.14) diperoleh

$$V_0 = (S^*, 0, 0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right).$$

Berdasarkan asumsi $\frac{d}{dt} Y=0$, diperoleh

$$Y = \tilde{g}(S^*, I) = 0,$$

$$h(S^*, \tilde{g}(S^*, I), I) = g(S^*, I)S^* - \mu I - \kappa I,$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial I} h(S^*, \tilde{g}(S^*, I), I) = \frac{\partial}{\partial I} g(S^*, I) S^* - \mu - \kappa.$$

Misalkan $\Phi = \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, \tilde{g}(S^*, 0), 0)$, dan $S^* = \frac{\Lambda}{\mu}$, sehingga berdasarkan metode

operator generasi selanjutnya, dalam menentukan Φ diperlukan informasi berikut ini

$$\frac{\partial g\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)}{\partial I} = \lambda \alpha \frac{\mu}{\Lambda \theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + (1-\nu(1-\theta))e^{-\nu\theta}}{\nu^2 \theta} \right].$$

Dengan demikian, Φ dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\partial g\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)}{\partial I} \frac{\Lambda}{\mu} - \mu - \kappa \\ &= \lambda \alpha \frac{\mu}{\Lambda \theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + (1-\nu(1-\theta))e^{-\nu\theta}}{\nu^2 \theta} \right] \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \kappa) \\ &= \frac{\lambda \alpha}{\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + (1-\nu(1-\theta))e^{-\nu\theta}}{\nu^2 \theta} \right] - (\mu + \kappa). \end{aligned}$$

Oleh karena Φ dapat dituliskan dalam bentuk $\Phi = J - Q$ dengan

$$J = \frac{\lambda \alpha}{\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + (1-\nu(1-\theta))e^{-\nu\theta}}{\nu^2 \theta} \right] \geq 0 \text{ dan } Q = \mu + \kappa > 0, \text{ maka sesuai}$$

definisi radius spektral diperoleh

$$R_0 = \rho(JQ^{-1}) = \frac{\lambda \alpha}{\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + (1-\nu(1-\theta))e^{-\nu\theta}}{\nu^2 \theta} \right] \frac{1}{\mu + \kappa}.$$

Dengan demikian, *basic reproduction ratio* untuk sistem persamaan (3.13) dan (3.14) adalah

$$R_0 = \frac{\lambda \alpha}{(\mu + \kappa) \theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)]e^{-\nu\theta}}{\nu^2 \theta} \right]. \quad (3.26)$$

3.5 Kestimbangan dan Kestabilan Model

Sistem dinamik (3.13) dan (3.14) memiliki perilaku sistem yang berbeda-beda di setiap titiknya. Untuk melihat perilaku sistem dinamik dapat diamati

melalui titik solusi dalam keadaan setimbang (konstan). Solusi sistem dalam keadaan setimbang disebut sebagai titik kesetimbangan. Selanjutnya pengamatan sistem akibat perubahan pada kondisi awal dapat lebih mudah diamati melalui titik kesetimbangannya.

Sistem persamaan (3.13) dan (3.14) merupakan model epidemik penyakit infeksi, sedemikian sehingga titik kesetimbangan yang diperhatikan adalah titik kesetimbangan bebas infeksi dan titik kesetimbangan epidemik. Titik kesetimbangan bebas infeksi merupakan titik kesetimbangan pada saat tidak terdapat anggota komunitas IDU yang terinfeksi atau $I = 0$. Titik kesetimbangan epidemik adalah titik yang menunjukkan jumlah pecandu *susceptibles* dan jumlah pecandu *infectious* pada keadaan setimbang terjadinya epidemik dalam komunitas IDU dengan $I > 0$.

3.5.1 Titik Kesetimbangan Bebas Infeksi

Pada kenyataannya keadaan yang diharapkan dalam suatu komunitas IDU adalah keadaan saat tidak ada pecandu yang terinfeksi dalam komunitas sehingga penyebaran infeksi HIV tidak mewabah dalam komunitas IDU. Selanjutnya, pada subbab ini dibahas pencarian titik kesetimbangan bebas infeksi untuk mengamati perilaku sistem (3.13) dan (3.14). Untuk mencari titik kesetimbangan bebas infeksi, sesuai Definisi 2.3,

$$F_1(S, I) = \Lambda - \mu S - g(S, I)S = 0, \quad (3.27)$$

$$F_2(S, I) = g(S, I)S - (\mu + \kappa)I = 0. \quad (3.28)$$

Berdasarkan persamaan (3.19) dan (3.18), persamaan (3.28) dapat ditulis $F_2(S, I) = IG_2(S, I) = 0$ dan memperoleh solusi $I^* = 0$ atau $G_2(S^*, I^*) = 0$. Oleh karena itu, untuk memperoleh titik kesetimbangan bebas infeksi, dipilih solusi $I^* = 0$. Dengan mensubstitusikan $I^* = 0$ ke dalam persamaan (3.27) maka $\Lambda - \mu S^* - g(S^*, 0)S^* = 0$. Oleh karena $g(S^*, 0) = 0$ artinya tidak ada kekuatan infeksi, maka diperoleh $S^* = \frac{\Lambda}{\mu}$ dengan $I^* = 0$. Dengan demikian, titik

kesetimbangan bebas infeksi untuk sistem (3.13) dan (3.14) adalah

$$\mathbf{z}^* = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right).$$

Pada saat tidak ada kelompok pecandu yang terinfeksi HIV lagi dalam komunitas IDU, jumlah pecandu yang tidak terinfeksi namun rentan terhadap infeksi HIV terdapat sebanyak $S^* = \frac{\Lambda}{\mu}$. Dengan demikian, keadaan bebas infeksi pada komunitas IDU tercapai saat tidak ada pecandu *infectious* dan jumlah pecandu yang *susceptibles* berbanding lurus dengan tingkat penambahan pecandu baru yang *susceptibles*, namun berbanding terbalik dengan tingkat alami kematian pecandu.

3.5.2 Titik Keseimbangan Epidemik

Selain memperhatikan letak titik keseimbangan bebas infeksi, dalam menganalisa sistem dinamik (3.13) dan (3.14) diperlukan analisa sistem di titik keseimbangan epidemik. Titik keseimbangan epidemik diperoleh dengan cara yang sama dengan mencari titik keseimbangan bebas infeksi, yaitu dengan mencari solusi persamaan (3.27) dan (3.28) dengan $I > 0$. Berdasarkan (3.27) diperoleh

$$g(S, I) = \frac{\Lambda}{S} - \mu, \quad (3.29)$$

sehingga diperoleh solusi $I^{**} = \frac{\Lambda - \mu S^{**}}{\mu + \kappa}$. Oleh karena $I^{**} > 0$, maka diperoleh

$$\text{solusi } S^{**} < \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Berdasarkan solusi I^{**} dan $S^{**} \geq 0$ maka diperoleh

$$S^{**} = \frac{\Lambda - (\mu + \kappa)I^{**}}{\mu} \geq 0 \text{ dan mengakibatkan}$$

$$I^{**} \leq \frac{\Lambda}{\mu + \kappa}. \quad (3.30)$$

Dengan demikian titik keseimbangan epidemik untuk sistem dinamik (3.13) dan (3.14) adalah

$$\mathbf{z}^{**} = (S^{**}, I^{**}),$$

dengan $I^{**} = \frac{\Lambda - \mu S^{**}}{\mu + \kappa}$ dan $S^{**} < \frac{\Lambda}{\mu}$.

3.5.3 Kestabilan Titik Keseimbangan Model

Untuk menganalisa perilaku penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU, diperlukan analisa kestabilan titik-titik keseimbangan sistem dengan memperhatikan ukuran (rasio) penyebaran yaitu *basic reproduction ratio*. Analisa kestabilan pada titik keseimbangan dilakukan untuk mengamati perilaku sistem di sekitar titik keseimbangan tersebut. Jika terjadi perubahan pada kondisi awal sistem, maka sistem akan stabil di titik kesetimbangannya yang stabil. Selanjutnya, dilihat kestabilan titik-titik keseimbangan untuk sistem persamaan (3.13) dan (3.14) melalui teorema berikut ini.

Teorema 3.1

(a) Jika $R_0 \leq 1$, maka titik keseimbangan bebas infeksi

$$\mathbf{z}^* = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$$

merupakan satu-satunya solusi titik keseimbangan untuk sistem (3.13) dan (3.14). Selanjutnya, titik \mathbf{z}^* dikatakan stabil asimtotik global (*Globally Asymptotically Stable / GAS*) pada daerah \mathcal{R} .

(b) Jika $R_0 > 1$, maka titik solusi \mathbf{z}^* dikatakan tidak stabil dan sistem (3.13) dan (3.14) memiliki titik keseimbangan lain yaitu $\mathbf{z}^{**} = (S^{**}, I^{**})$ dengan

$$S^{**} < \frac{\Lambda}{\mu},$$

$$I^{**} = \frac{\Lambda - \mu S^{**}}{\mu + \kappa}.$$

Selanjutnya, titik \mathbf{z}^{**} dikatakan stabil asimtotik global pada daerah \mathcal{R} .

Bukti 3.1

Sebelum membuktikan Teorema 3.1, akan dibuktikan

$$R_0 \leq 1 \Leftrightarrow G_2(S,0) \leq 0. \quad (3.31)$$

Pertama, persamaan $G_2(S,0)$ dijabarkan berdasarkan (3.18), yaitu :

$$G_2(S,0) = \frac{\lambda \alpha}{\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)]e^{-\nu\theta}}{\nu^2\theta} \right] - (\mu + \kappa). \quad (3.32)$$

\Rightarrow Akan dibuktikan jika $R_0 \leq 1$ maka $G_2(S,0) \leq 0$.

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\lambda \alpha}{(\mu + \kappa)\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)]e^{-\nu\theta}}{\nu^2\theta} \right] \leq 1, \\ \frac{\lambda \alpha}{\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)]e^{-\nu\theta}}{\nu^2\theta} \right] &\leq (\mu + \kappa), \\ \frac{\lambda \alpha}{\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)]e^{-\nu\theta}}{\nu^2\theta} \right] - (\mu + \kappa) &\leq 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.32), maka terbukti jika $R_0 \leq 1$ maka $G_2(S,0) \leq 0$.

\Leftarrow Akan dibuktikan jika $G_2(S,0) \leq 0$ maka $R_0 \leq 1$.

$$\begin{aligned} G_2(S,0) &= \frac{\lambda \alpha}{\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)]e^{-\nu\theta}}{\nu^2\theta} \right] - (\mu + \kappa) \leq 0, \\ \frac{\lambda \alpha}{\theta} \left[1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)]e^{-\nu\theta}}{\nu^2\theta} \right] &\leq (\mu + \kappa), \\ \frac{\lambda \alpha}{\theta(\mu + \kappa)} \left[1 - \frac{(\nu-1) + [1-\nu(1-\theta)]e^{-\nu\theta}}{\nu^2\theta} \right] &\leq 1. \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.26), maka terbukti jika $G_2(S,0) \leq 0$ maka $R_0 \leq 1$. Dengan demikian terbukti $R_0 \leq 1 \Leftrightarrow G_2(S,0) \leq 0$.

(a) Pada kenyataannya, saat $R_0 \leq 1$ daerah \mathcal{R} tidak memiliki kurva fungsi diferensial (*isocline*), $\frac{dI}{dt} = 0$. Hal tersebut berdasarkan persamaan (3.18), $\frac{dI}{dt} = 0$ terjadi jika dan hanya jika $I = 0$ dan $G_2(S,I) = 0$. Selanjutnya, akan dibuktikan titik kesetimbangan bebas infeksi $\mathbf{z}^* = (S^*, 0)$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan untuk sistem (3.13) dan (3.14) ketika $R_0 \leq 1$.

Misalkan pada sistem persamaan (3.13) dan (3.14) terdapat titik kesetimbangan lain yaitu $\mathbf{z}_1 = (S_1, I_1)$ dengan asumsi $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}^*$, $S_1 \neq \frac{\Lambda}{\mu}$, dan $I_1 \neq 0$. Oleh karena \mathbf{z}_1 adalah titik kesetimbangan untuk sistem persamaan (3.13) dan (3.14), maka berdasarkan Definisi 2.3, $\mathbf{z}_1 = (S_1, I_1)$ memenuhi persamaan $\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) = \mathbf{0}$. Dengan demikian, $\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) = \mathbf{F}(S_1, I_1) = \mathbf{0}$, yang artinya

$$F_1(S_1, I_1) = \Lambda - \mu S_1 - g(S_1, I_1)S_1 = 0 \text{ dan}$$

$$F_2(S_1, I_1) = I_1 G_2(S_1, I_1) = 0.$$

Berdasarkan persamaan (3.25), $G_2(S, I)$ merupakan fungsi turun untuk I dan akibat (3.31) berlaku

$$G_2(S, I) \leq 0. \tag{3.33}$$

Dengan asumsi $I_1 \neq 0$ maka $G_2(S_1, I_1) < 0$, akibatnya solusi

$F_2(S_1, I_1) = I_1 G_2(S_1, I_1) = 0$ hanya dipenuhi oleh solusi $I_1 = 0$ dan menyebabkan

$S_1 = \frac{\Lambda}{\mu}$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi $S_1 \neq \frac{\Lambda}{\mu}$ dan $I_1 \neq 0$ sehingga diperoleh

kesimpulan bahwa $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}^*$. Dengan demikian, terbukti bahwa \mathbf{z}^* merupakan satu-satunya titik kesetimbangan untuk sistem persamaan (3.13) dan (3.14) saat $R_0 \leq 1$.

Selanjutnya, akan dilihat sifat kestabilan titik kesetimbangan bebas infeksi, \mathbf{z}^* pada daerah \mathcal{R} . Untuk membuktikan bahwa \mathbf{z}^* bersifat stabil asimtotik global maka akan digunakan teorema kestabilan Lyapunov. Didefinisikan suatu fungsi yang definit positif,

$$L(S, I) = I \text{ dengan } L: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Fungsi $L(S, I)$ dikatakan sebagai fungsi Lyapunov, sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \dot{L}(S, I) &= \frac{\partial L(S, I)}{\partial S} F_1(S, I) + \frac{\partial L(S, I)}{\partial I} F_2(S, I) \\ &= (0) F_1(S, I) + (1)(I G_2(S, I)) \\ &= I G_2(S, I). \end{aligned}$$

Dalam menentukan kestabilan global \mathbf{z}^* sesuai Teorema 2.2, fungsi

$\dot{L}(S, I) = I G_2(S, I)$ akan dilihat perilaku (tanda positif atau negatif) pada saat

$\mathcal{R} - \{\mathbf{z}^*\}$. Oleh karena saat $R_0 \leq 1$ berlaku (3.33) maka berlaku $I > 0$ dan $G_2(S, I) < 0$ pada $\mathcal{R} - \{\mathbf{z}^*\}$. Dengan demikian

- $L(\mathbf{z}^*) = 0$ dan $L(\mathbf{z}) > 0$ untuk $\mathbf{z} \neq \mathbf{z}^*$ dan
- $\dot{L}(\mathbf{z}) < 0$ pada $\mathcal{R} - \{\mathbf{z}^*\}$, yaitu saat $S \neq S^*$ dan $I \neq 0$.

Berdasarkan Teorema 2.2, \mathbf{z}^* dikatakan stabil asimtotik global untuk sistem persamaan (3.13) dan (3.14).

b) Berdasarkan (3.31), saat $R_0 > 1$ berlaku kontraposisi yaitu

$$R_0 > 1 \Leftrightarrow G_2(S, 0) > 0, \quad (3.34)$$

sehingga pada kasus ini kedua *isocline* terdefinisi di daerah \mathcal{R} . Hal tersebut berkaitan erat dengan penentuan kestabilan titik-titik kesetimbangan. Dalam menentukan kestabilan lokal \mathbf{z}^* dan \mathbf{z}^{**} dapat dilakukan dengan mencari nilai eigen dari matriks koefisien sistem persamaan (3.13) dan (3.14) sesuai Teorema 2.1. Dalam hal ini matriks koefisien sistem merupakan matriks Jacobian sistem persamaan (3.13) dan (3.14) yaitu $\Psi(\mathbf{z})$,

$$\Psi(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial S} F_1(\mathbf{z}) & \frac{\partial}{\partial I} F_1(\mathbf{z}) \\ \frac{\partial}{\partial S} F_2(\mathbf{z}) & \frac{\partial}{\partial I} F_2(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, nilai eigen diperoleh dengan mencari solusi karakteristik

$$\begin{aligned} \det(\sigma \mathbf{I} - \Psi(\mathbf{z})) &= \left[\left(\sigma - \frac{\partial}{\partial S} F_1(\mathbf{z}) \right) \left(\sigma - \frac{\partial}{\partial I} F_2(\mathbf{z}) \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial S} F_2(\mathbf{z}) \cdot \frac{\partial}{\partial I} F_1(\mathbf{z}) \right] = 0, \\ &\sigma^2 - \sigma \left(\frac{\partial}{\partial S} F_1(\mathbf{z}) + \frac{\partial}{\partial I} F_2(\mathbf{z}) \right) \\ &+ \left[\left(\frac{\partial}{\partial S} F_1(\mathbf{z}) \cdot \frac{\partial}{\partial I} F_2(\mathbf{z}) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial S} F_2(\mathbf{z}) \cdot \frac{\partial}{\partial I} F_1(\mathbf{z}) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Sistem persamaan (3.13) dan (3.14) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier. Oleh karena penjelasan pada subbab 2.1, kelinieran sistem (3.13) dan (3.14) di sekitar titik kesetimbangan \mathbf{z}^* dan \mathbf{z}^{**} dapat ditaksir dengan mengamati matriks Jacobian $\Psi(\mathbf{z}^*)$ dan $\Psi(\mathbf{z}^{**})$. Selanjutnya untuk menentukan kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas infeksi \mathbf{z}^* , akan dicari solusi

karakteristik (3.35). Oleh karena $\frac{\partial}{\partial I} F_1(\mathbf{z}^*) = 0$, $\frac{\partial}{\partial S} F_2(\mathbf{z}^*) = 0$,

$\frac{\partial}{\partial S} F_1(\mathbf{z}^*) = -\mu < 0$, dan $\frac{\partial}{\partial I} F_2(\mathbf{z}^*) = G_2(S, 0) > 0$ maka diperoleh akar-akar

karakteristik persamaan (3.35) adalah $\sigma_1 = -\mu < 0$ dan $\sigma_2 = G_2(S, 0) > 0$. Oleh karena terdapat nilai eigen yang positif, maka berdasarkan Teorema 2.1 titik kesetimbangan bebas infeksi \mathbf{z}^* dikatakan tidak stabil pada saat $R_0 > 1$.

Selanjutnya, keberadaan \mathbf{z}^{**} dapat dilihat pada subbab 3.5.2 dan kestabilan titik epidemik \mathbf{z}^{**} pada saat $R_0 > 1$ dengan $I^{**} \neq 0$ akan ditentukan dengan cara yang sama dengan menentukan ketidakstabilan \mathbf{z}^* . Oleh karena kurva diferensial (*isocline*) $\frac{dI}{dt} = 0$ terdefinisi di daerah \mathcal{R} dan $I^{**} \neq 0$, maka solusi $\frac{dI}{dt} = 0$ hanya dipenuhi oleh $G_2(S, I) = 0$. Berdasarkan persamaan (3.22),

(3.23), (3.24), (3.25) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial S} F_2(\mathbf{z}^{**}) = I \cdot \frac{\partial}{\partial S} G_2(\mathbf{z}^{**}) \geq 0 \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial}{\partial I} F_2(\mathbf{z}^{**}) = I \cdot \frac{\partial}{\partial I} G_2(\mathbf{z}^{**}) \leq 0.$$

Hal tersebut mengakibatkan

$$\det(\Psi(\mathbf{z}^{**})) = \left[\frac{\partial}{\partial S} F_1(\mathbf{z}^{**}) \cdot \frac{\partial}{\partial I} F_2(\mathbf{z}^{**}) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial S} F_2(\mathbf{z}^{**}) \cdot \frac{\partial}{\partial I} F_1(\mathbf{z}^{**}) \right] > 0 \quad \text{dan}$$

$$\text{trace}(\Psi(\mathbf{z}^{**})) = \frac{\partial}{\partial S} F_1(\mathbf{z}^{**}) + \frac{\partial}{\partial I} F_2(\mathbf{z}^{**}) < 0.$$

Oleh karena itu persamaan karakteristik (3.35) pada titik \mathbf{z}^{**} memperoleh akar-akar karakteristik

$$\sigma_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

dengan $a = 1 > 0$,

$$b = -\text{trace}(\Psi(\mathbf{z}^{**})) > 0,$$

$$c = \det(\Psi(\mathbf{z}^{**})) > 0, \quad \text{dan}$$

$$b > \sqrt{b^2 - 4ac} > 0.$$

Dengan demikian $\sigma_1 < 0$ dan $\sigma_2 < 0$. Berdasarkan Teorema 2.1, \mathbf{z}^{**} dikatakan stabil asimtotik lokal.

Selanjutnya, akan diperiksa apakah terdapat solusi periodik yang mungkin membatasi kestabilan asimtotik \mathbf{z}^{**} pada sistem di daerah \mathcal{R} . Untuk mengetahui keberadaan solusi periodik pada sistem akan digunakan kriteria Bendixon-Dulac pada Kriteria (2.1). Misalkan didefinisikan sebuah fungsi yang kontinu dan

diferensiabel, $\gamma(S, I) = \frac{1}{I}$ dengan $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga berdasarkan

(3.22) dan (3.25) diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{I} F_1(S, I) \right) + \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{1}{I} F_2(S, I) \right) \\ &= \left[\frac{1}{I} \frac{\partial F_1(S, I)}{\partial S} \right] + \left[\frac{\partial G_2(S, I)}{\partial I} \right] < 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan Kriteria (2.1) diperoleh kesimpulan bahwa sistem dinamik (3.13) dan (3.14) tidak memiliki solusi periodik di daerah \mathcal{R} . Oleh karena tidak ada solusi periodik di daerah \mathcal{R} maka tidak ada yang membatasi daerah kestabilan asimtotik \mathbf{z}^{**} . Oleh karena itu, sesuai definisi kestabilan asimtotik maka disimpulkan \mathbf{z}^{**} tidak hanya stabil asimtotik lokal tetapi \mathbf{z}^{**} bersifat stabil asimtotik global di daerah \mathcal{R} .

BAB 4
SIMULASI MODEL MATEMATIKA
PENYEBARAN INFEKSI HIV PADA KOMUNITAS IDU

Pada bab ini dibahas tiga simulasi. Simulasi pertama membahas dinamika $\beta(S, I)$ terhadap populasi pecandu *susceptibles* dan *infectious*. Pada simulasi kedua dan ketiga dibahas dinamik penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU dengan memperhatikan kestabilan titik kesetimbangannya. Simulasi ini bertujuan memberikan gambaran mengenai dinamika penyebaran infeksi HIV dalam komunitas IDU melalui gambar dinamika $\beta(S, I)$ dan potret fase dengan memperhatikan *basic reproduction ratio*. Simulasi $\beta(S, I)$ dan model dibahas dengan menggunakan *software* MATLAB dengan *source code* simulasi dapat dilihat pada Lampiran 1 tesis ini.

4.1 Simulasi 1 : Dinamika $\beta(S, I)$

Dinamika $\beta(S, I)$ sangat penting untuk diketahui karena fungsi $\beta(S, I)$ merupakan bagian terpenting dalam sistem dinamik penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU. Mengamati dinamika $\beta(S, I)$ bertujuan untuk mempermudah memahami perilaku sistem dinamik (3.13) dan (3.14). Berikut ini nilai parameter yang digunakan untuk mengamati dinamika probabilitas seorang pecandu terinfeksi HIV, $\beta(S, I)$.

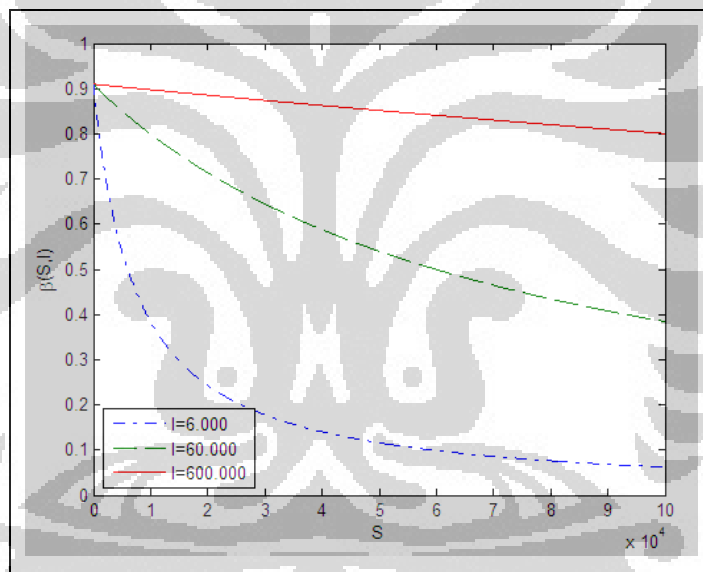
Tabel 4.1 Nilai parameter pada simulasi 1

Parameter	Nilai Parameter
ν	10
θ	0,8

Berdasarkan Tabel 4.1 fungsi probabilitas (3.11) dapat dinyatakan sebagai

$$\beta(S, I) = \frac{I}{0,8S + I} \left[1 - \frac{9(S + I) + [-S + I] e^{-10 \frac{0,8S + I}{S + I}}}{100(0,8S + I)} \right]. \quad (4.1)$$

Pertama, digambarkan mengenai dinamika probabilitas terpapar HIV dalam komunitas IDU berdasarkan populasi pecandu *susceptibles* dan populasi pecandu *infectious*. Berikut ini gambar yang menunjukkan dinamika $\beta(S, I)$ pada populasi *susceptibles* dengan tiga kasus jumlah *infectious* yang tetap, yakni 6.000, 60.000, dan 600.000.



Gambar 4.1 Dinamika $\beta(S, I)$ pada populasi *susceptibles*.

Tabel 4.2 menunjukkan pengamatan nilai $\beta(S, I)$ pada tiga kasus jumlah *susceptibles* yakni saat *susceptibles* berjumlah 20.000, 60.000, dan 100.000.

Tabel 4.2 Penurunan $\beta(S, I)$ terhadap S dalam persentase

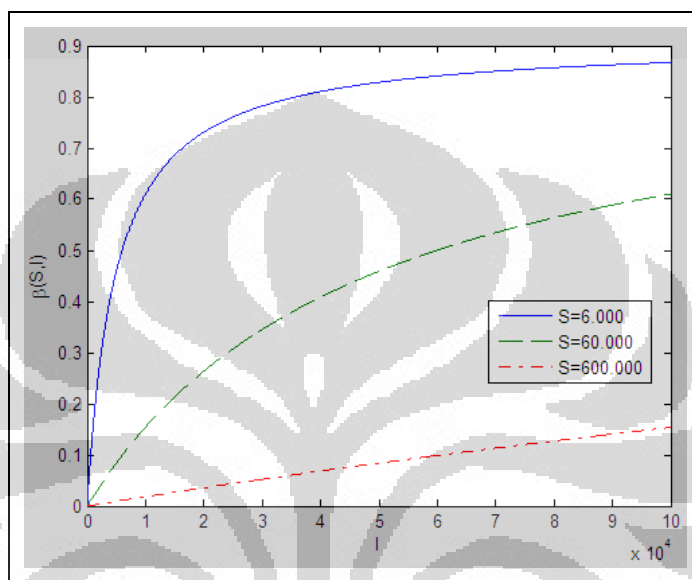
		Jumlah <i>infectious</i>		
		$I_1 = 6.000$	$I_2 = 60.000$	$I_3 = 600.000$
Jumlah <i>susceptibles</i>	$S_1 = 20.000$	$\beta_{11} = 0,2437$	$\beta_{12} = 0,7147$	$\beta_{13} = 0,8858$
	Penurunan (%)	↓ 59,42 %	↓ 30,04 %	↓ 5,06 %
	$S_2 = 60.000$	$\beta_{21} = 0,0989$	$\beta_{22} = 0,5000$	$\beta_{23} = 0,8410$
	Penurunan (%)	↓ 37,31 %	↓ 23,1 %	↓ 4,80 %
	$S_3 = 100.000$	$\beta_{31} = 0,0620$	$\beta_{32} = 0,3845$	$\beta_{33} = 0,8006$
	Selisih penurunan $\beta(S, I)$ (%)	22,11 %	6,94 %	0,26 %

Keterangan : $\beta_{ij} = \beta(S_i, I_j)$.

Berdasarkan Tabel 4.2 diperoleh kesimpulan bahwa dengan jumlah pecandu *infectious* tetap, semakin banyak jumlah pecandu *susceptibles* maka semakin kecil probabilitas pecandu memasukkan jarum suntik terinfeksi ke dalam tubuhnya. Hal ini sesuai dengan kurva $\beta(S, I)$ yang ditunjukkan pada Gambar 4.1. Nilai fungsi $\beta(S, I)$ berkurang seiring bertambahnya jumlah *susceptibles*, dengan selisih penurunan nilai berbeda-beda sesuai dengan pertambahan jumlah *infectious*. Semakin kecil jumlah pecandu *infectious*, maka semakin tajam penurunan kurva $\beta(S, I)$ yakni mencapai selisih penurunan 22,11% .

Dengan demikian, Gambar 4.1 menunjukkan bahwa fungsi $\beta(S, I)$ merupakan fungsi turun terhadap populasi pecandu *susceptibles*, sesuai dengan (3.20). Hal tersebut mengakibatkan fungsi laju perubahan *susceptibles* terhadap waktu ($F_1(S, I)$) juga merupakan fungsi turun terhadap populasi *susceptibles* dan fungsi $G_2(S, I)$ dan $F_2(S, I)$ merupakan fungsi naik terhadap populasi *susceptibles*, sesuai dengan persamaan (3.22) dan (3.24).

Jika jumlah pecandu *infectious* besar, maka probabilitas pecandu terpapar HIV semakin meningkat dengan jumlah pecandu *susceptibles* yang tetap. Hal ini dapat ditunjukkan oleh gambar dinamika probabilitas terpapar HIV pada populasi pecandu *infectious* dengan jumlah *susceptibles* tetap, yakni 6.000, 60.000, dan 600.000 sebagai berikut.



Gambar 4.2 Dinamika $\beta(S, I)$ pada populasi *infectious*.

Tabel 4.3 Kenaikan $\beta(S, I)$ terhadap I dalam persentase

		Jumlah susceptibles		
		$S_1 = 6.000$	$S_2 = 60.000$	$S_3 = 600.000$
Jumlah <i>infectious</i>	$I_3 = 100.000$	$\beta_{31} = 0,8673$	$\beta_{32} = 0,6099$	$\beta_{33} = 0,1537$
	Kenaikan (%)	↑ 3,13 %	↑ 21,98 %	↑ 55,41 %
	$I_2 = 60.000$	$\beta_{21} = 0,8410$	$\beta_{22} = 0,500$	$\beta_{23} = 0,0989$
	Kenaikan (%)	↑ 15,14 %	↑ 90,11 %	↑ 178,59 %
	$I_1 = 20.000$	$\beta_{11} = 0,7304$	$\beta_{12} = 0,2630$	$\beta_{13} = 0,0355$
	Selisih kenaikan $\beta(S, I)$ (%)	12,02 %	68,13 %	123,18 %

Keterangan : $\beta_{ij} = \beta(S_i, I_j)$

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa fungsi $\beta(S, I)$ merupakan fungsi naik terhadap populasi pecandu *infectious*, sesuai dengan Gambar 4.2 dan persamaan (3.21). Nilai fungsi $\beta(S, I)$ bertambah seiring bertambahnya jumlah *infectious*, dengan selisih kenaikan nilai yang berbeda-beda sesuai dengan pertambahan jumlah *susceptibles*. Semakin kecil jumlah pecandu *susceptibles*, maka semakin tajam kenaikan kurva $\beta(S, I)$ yakni mencapai selisih kenaikan sebesar 123,18% .

Fungsi naik $\beta(S, I)$ terhadap populasi *infectious* mengakibatkan fungsi $F_1(S, I)$ dan $G_2(S, I)$ merupakan fungsi turun terhadap populasi *infectious*, sesuai persamaan (3.23) dan (3.25). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa dinamika $\beta(S, I)$ mempengaruhi perilaku sistem dinamik penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU.

4.2 Simulasi 2 : Potret Fase pada saat $R_0 \leq 1$

Potret fase merupakan gambar yang menunjukkan hubungan antara populasi *susceptibles* dan populasi *infectious* dalam penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU. Perilaku sistem dinamik penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU ditunjukkan melalui potret fase dengan menentukan nilai parameter terlebih dahulu .

Tabel 4.4 Nilai parameter pada simulasi 2

Parameter	Nilai Parameter
Λ	20 pecandu/tahun
μ	0,029 /tahun
κ	0,5 /tahun
λ	1 /tahun
α	0,2
ν	2,6
θ	0,8

Berdasarkan Tabel 4.4 sistem dinamik (3.13) dan (3.14) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = F_1(S, I) = 20 - 0,029 S - g(S, I) S, \quad (4.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = F_2(S, I) = g(S, I) S - 0,029 I - 0,5 I, \quad (4.3)$$

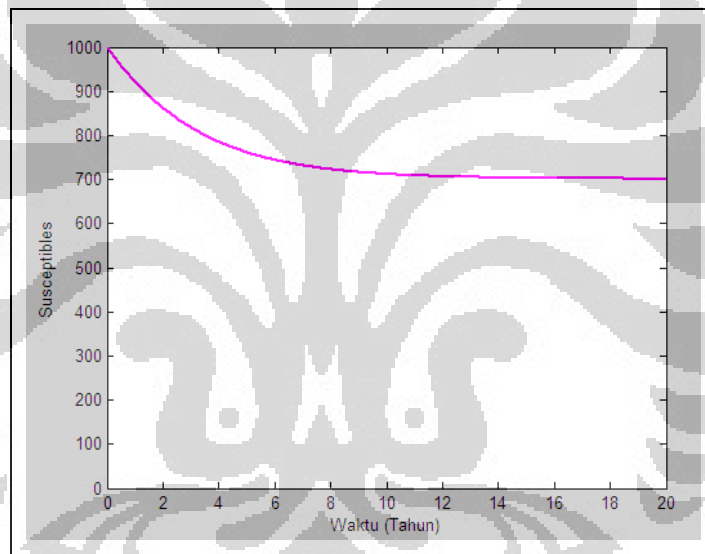
dengan

$$g(S, I) = \frac{0,2I}{0,8S + I} \left[1 - \frac{1,6(S + I) + [0,48S + I] e^{-2,6 \frac{0,8S + I}{S + I}}}{6,76(0,8S + I)} \right],$$

$$\frac{\Lambda}{\mu} = 700, \text{ dan}$$

$$R_0 = 0,3278 < 1.$$

Berikut ini potret fase populasi pecandu *susceptibles* terhadap waktu dengan $S(0) = 1.000$ dan $I(0) = 1.000$, dalam hal ini satuan waktu yang digunakan adalah tahun.

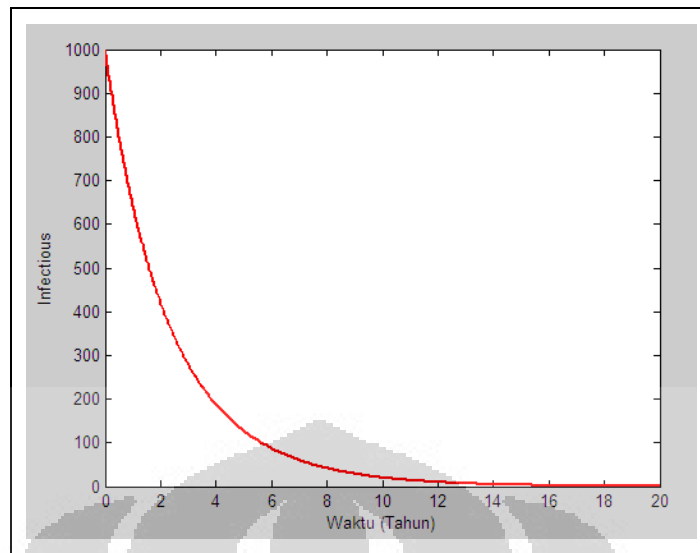


Gambar 4.3 Jumlah populasi *susceptibles* terhadap waktu saat $R_0 \leq 1$.

Gambar 4.3 menunjukkan pada saat nilai *basic reproduction ratio* lebih kecil dari 1 jumlah populasi *susceptibles* semakin menuju titik kesetimbangannya

yaitu menuju nilai $S^* = \frac{\Lambda}{\mu} = 700$ seiring dengan berjalannya waktu. Setelah 20

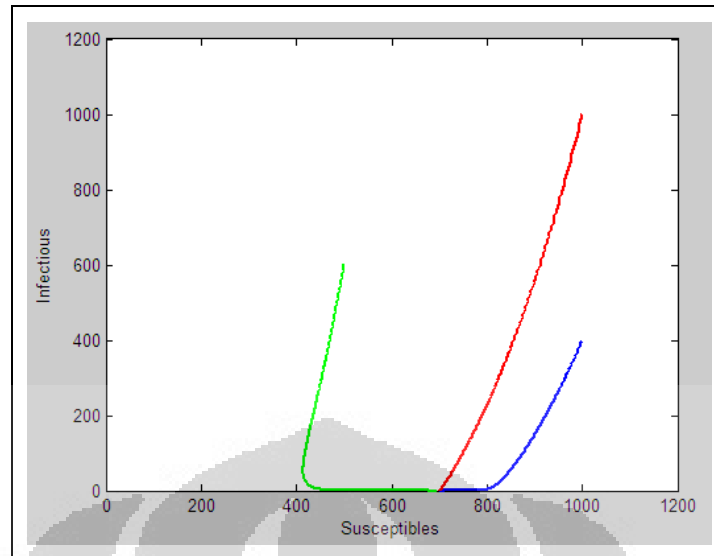
tahun jumlah populasi pecandu *susceptibles* mulai stabil dan tidak mengalami perubahan. Berikut ini potret fase populasi pecandu *infectious* terhadap waktu dengan $S(0) = 1.000$ dan $I(0) = 1.000$.



Gambar 4.4 Jumlah populasi *infectious* terhadap waktu saat $R_0 \leq 1$.

Berdasarkan Gambar 4.4, pada waktu ke-16 jumlah populasi *infectious* menurun menuju nilai setimbang bebas infeksi yaitu tidak ada pecandu *infectious* dalam komunitas IDU. Hal tersebut terjadi dikarenakan *basic reproduction ratio* lebih kecil dari 1.

Selanjutnya diberikan potret fase yang menunjukkan hubungan jumlah populasi pecandu *susceptibles* dan jumlah populasi pecandu *infectious*. Berdasarkan Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 teramati bahwa pada saat $R_0 \leq 1$ populasi *susceptibles* stabil saat jumlah *susceptibles* cenderung mencapai 700 dan populasi *infectious* stabil saat jumlah *infectious* mencapai 0. Hal ini sesuai dengan Teorema 3.1. Dengan demikian dapat digambarkan dinamika kedua populasi tersebut melalui potret fase berikut ini.



Keterangan :

— : $S(0) = 1.000$ dan $I(0) = 400$,

— : $S(0) = 1.000$ dan $I(0) = 1.000$,

— : $S(0) = 500$ dan $I(0) = 600$,

Gambar 4.5 Potret fase *susceptibles* dan *infectious* dalam komunitas IDU saat $R_0 \leq 1$.

Potret fase di Gambar 4.5 menunjukkan bahwa perubahan kondisi awal tidak mempengaruhi perilaku sistem persamaan (4.2) dan (4.3) yaitu tetap menuju ke titik kesetimbangan bebas infeksiya yaitu titik $(S^*, I^*) = (700, 0)$. Hal ini dikarenakan untuk nilai $R_0 \leq 1$ titik kesetimbangan tersebut stabil asimtotik global. Selanjutnya dibandingkan dengan potret fase sistem dinamik (3.13) dan (3.14) pada saat $R_0 > 1$.

4.3 Simulasi 3 : Potret fase pada saat $R_0 > 1$

Berikut ini nilai-nilai parameter untuk simulasi ke-3 model

Tabel 4.5 Nilai parameter pada simulasi 3

Parameter	Nilai Parameter
Λ	20 pecandu/tahun
μ	0,029 /tahun

κ	0,5 /tahun
λ	6 /tahun
α	0,2
ν	10
θ	0,8

Berdasarkan Tabel 4.5 sistem dinamik (3.13) dan (3.14) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = F_1(S, I) = 20 - 0,029S - g(S, I)S, \quad (4.4)$$

$$\frac{dI}{dt} = F_2(S, I) = g(S, I)S - 0,029I - 0,5I, \quad (4.5)$$

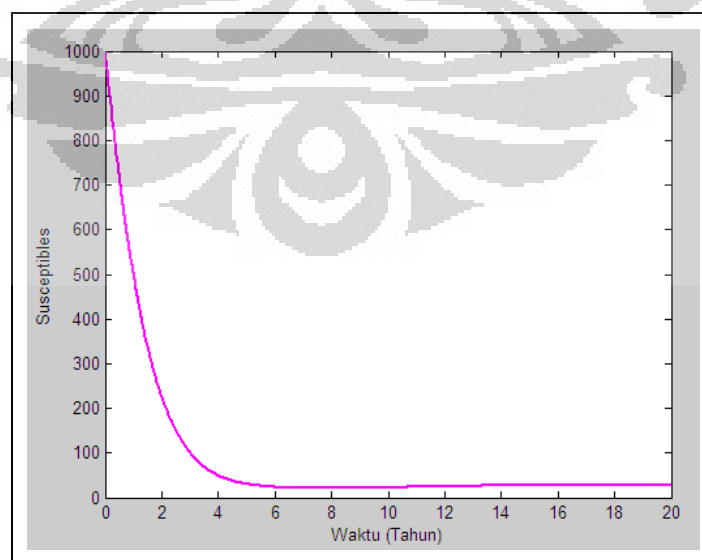
dengan

$$g(S, I) = \frac{1,2I}{0,8S + I} \left[1 - \frac{9(S + I) + [-S + I]e^{-10\frac{0,8S + I}{S + I}}}{100(0,8S + I)} \right],$$

$$\frac{\Lambda}{\mu} = 700, \quad \frac{\Lambda}{\mu + \kappa} = 37,83, \quad \text{dan}$$

$$R_0 = 2,5186 > 1.$$

Berikut ini potret fase populasi pecandu *susceptibles* terhadap waktu dengan $S(0) = 1.000$ dan $I(0) = 1.000$.

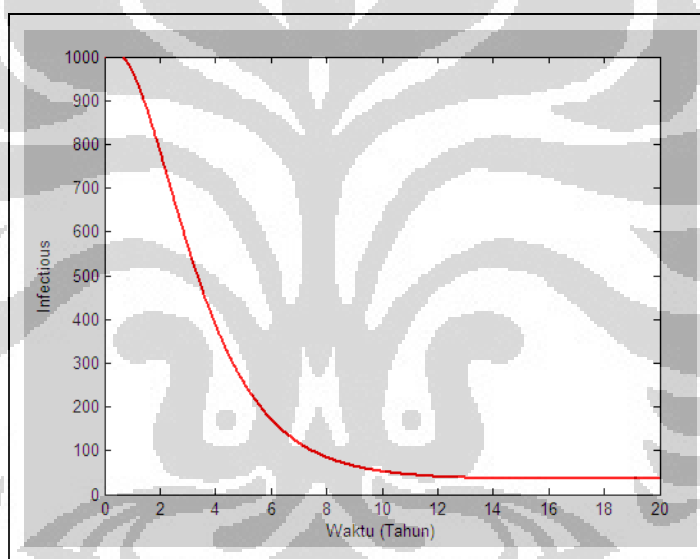


Gambar 4.6 Jumlah populasi *susceptibles* terhadap waktu saat $R_0 > 1$.

Gambar 4.6 menunjukkan pada saat *basic reproduction ratio* lebih besar dari 1 jumlah populasi *susceptibles* menuju titik kesetimbangan epidemiknya menuju nilai $S^{**} \approx 29 < \frac{\Lambda}{\mu}$ seiring dengan berjalannya waktu. Pada tahun ke-14 jumlah populasi pecandu *susceptibles* mulai stabil dan tidak mengalami perubahan. Oleh karena $S^{**} \approx 29$ maka dapat ditentukan

$$I^{**} = \frac{\Lambda - \mu S^{**}}{\mu + \kappa} \approx 36 < \frac{\Lambda}{\mu + \kappa}. \text{ Hal ini sesuai dengan (3.30) pada Bab 3.}$$

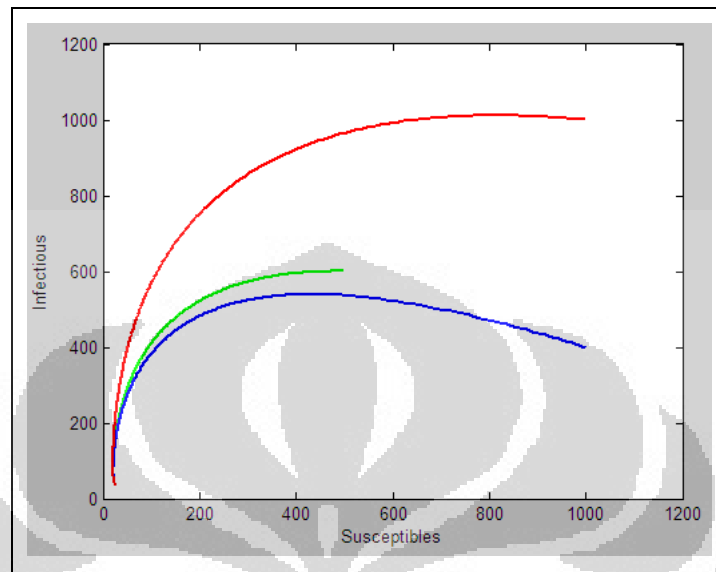
Selanjutnya digambarkan potret fase populasi pecandu *infectious* terhadap waktu dengan $S(0) = 1.000$ dan $I(0) = 1.000$.



Gambar 4.7 Jumlah populasi *infectious* terhadap waktu saat $R_0 > 1$.

Berdasarkan Gambar 4.7, dalam waktu yang relatif sama jumlah populasi *infectious* menuju nilai setimbang epidemik yaitu $I^{**} \approx 36$. Jumlah populasi pecandu *infectious* mulai stabil dan tidak mengalami perubahan setelah 14 tahun. Selanjutnya perilaku sistem saat $R_0 > 1$ dapat diamati dari Gambar 4.6 dan Gambar 4.7. Berdasarkan kedua gambar tersebut teramati bahwa jika $R_0 > 1$ jumlah *susceptibles* stabil saat $S^{**} \approx 29$ dan jumlah *infectious* stabil saat $I^{**} \approx 36$. Oleh karena itu perilaku sistem dinamik pada kedua populasi tersebut dapat digambarkan melalui potret fase saat $R_0 > 1$. Berikut ini potret fase yang

menunjukkan hubungan jumlah populasi pecandu *susceptibles* dan jumlah populasi pecandu *infectious* saat $R_0 > 1$.



Keterangan :

— : $S(0) = 1.000$ dan $I(0) = 400$,

— : $S(0) = 1.000$ dan $I(0) = 1.000$,

— : $S(0) = 500$ dan $I(0) = 600$,

Gambar 4.8 Potret fase *susceptibles* dan *infectious* dalam komunitas IDU saat $R_0 > 1$.

Potret fase pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa bagaimanapun kondisi awal pada komunitas IDU dan oleh karena $R_0 > 1$ maka sistem persamaan (4.4) dan (4.5) selalu menuju ke titik kesetimbangan epidemiknya yaitu titik $(S^{**}, I^{**}) \approx (29, 36)$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa jika $R_0 > 1$ maka infeksi HIV mewabah pada komunitas IDU.

Berdasarkan simulasi potret fase pada Bab 4 ini diperoleh kesimpulan bahwa penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU sangat dipengaruhi oleh kondisi sosial yang dinotasikan oleh parameter $\lambda, \alpha, \theta, \nu, \mu$, dan κ . Seluruh parameter tersebut menentukan nilai R_0 . Parameter yang mungkin diamati adalah parameter κ yaitu laju perubahan dari terinfeksi HIV menjadi penyakit AIDS.

Jika pada suatu waktu dalam komunitas IDU teramati bahwa pecandu *infectious* melakukan terapi HIV, maka cenderung nilai parameter κ cukup kecil. Hal tersebut mempengaruhi nilai R_0 sehingga $R_0 > 1$ jika diasumsikan parameter lainnya tetap. Jika $R_0 > 1$ maka infeksi HIV mewabah dalam komunitas IDU. Jika terjadi sebaliknya dengan asumsi parameter lainnya tetap dan nilai parameter κ cukup besar, maka $R_0 \leq 1$ dan infeksi HIV tidak mewabah dalam komunitas IDU. Dengan demikian, melalui model matematika penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU (3.13) dan (3.14) kita dapat memahami bagaimana penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU.

Catatan :

Berdasarkan simulasi 3 dengan tetap memperhatikan syarat nilai parameter sesuai Tabel 3.1, jelas bahwa untuk $R_0 > 1$ dengan kondisi awal yang berbeda-beda dan nilai parameter pada Tabel 4.3, sistem dinamik (3.13) dan (3.14) menuju ke titik kesetimbangan $S^{**} < \frac{\Lambda}{\mu}$ dan $S^{**} < \frac{\Lambda}{\mu + \kappa}$. Hal tersebut berbeda dengan Teorema 2 (Capasso, Morale, 2005), rujukan penulisan ini, yang menyatakan bahwa

$\frac{\Lambda}{\mu + \kappa} < S^{**} < \frac{\Lambda}{\mu}$. Oleh karena secara pembuktian matematis pernyataan

$\frac{\Lambda}{\mu + \kappa} < S^{**}$ tidak dapat dibuktikan, maka penulis tidak menggunakan Teorema 2

(Capasso, Morale, 2005) tersebut secara penuh.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, selain itu penulis memberikan saran-saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Komunitas IDU merupakan komunitas yang rentan terserang infeksi HIV yang sangat berbahaya. Oleh karena kebiasaan komunitas IDU dalam berbagi jarum suntik, maka perlu diperhatikan bagaimana pola penyebaran infeksi HIV dalam komunitas tersebut. Pola penyebaran infeksi HIV direpresentasikan ke dalam sistem dinamik sedemikian sehingga melalui sistem dinamiknya dapat dilihat perilaku penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU. Berikut ini kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan tesis ini.

1. Dengan asumsi bahwa pecandu yang sudah mengidap AIDS tidak ikut berbagi jarum suntik dalam grup “sahabat” maka model penyebaran infeksi HIV dalam komunitas IDU adalah

$$\frac{dS}{dt} = F_1(S, I) = \Lambda - \mu S - g(S, I) S,$$

$$\frac{dI}{dt} = F_2(S, I) = g(S, I) S - \mu I - \kappa I.$$

2. Berdasarkan model penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU diperoleh *basic reproduction ratio* yaitu :

$$R_0 = \frac{\lambda \alpha}{(\mu + \kappa) \theta} \left[1 - \frac{(\nu - 1) + [1 - \nu(1 - \theta)] e^{-\nu \theta}}{\nu^2 \theta} \right]$$

3. Keadaan setimbang bebas infeksi tercapai saat jumlah *susceptibles* sebanding dengan laju pertambahan populasi IDU dari manusia biasa menjadi seorang pecandu dan berbanding terbalik dengan laju kematian alami pecandu. Hal ini diketahui dari titik kesetimbangan bebas infeksi model penyebaran infeksi HIV komunitas IDU yaitu $\mathbf{z}^* = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$.

4. Keadaan bebas infeksi akan stabil asimtotik global jika *basic reproduction ratio* lebih kecil atau sama dengan 1. Dengan demikian penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU tidak akan mewabah jika nilai parameter $\lambda, \alpha, \theta, \nu, \mu$, dan κ menentukan $R_0 \leq 1$.
5. Titik kesetimbangan epidemik model penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU terjadi saat $\mathbf{z}^{**} = (S^{**}, I^{**})$, dengan

$$I^{**} = \frac{\Lambda - \mu S^{**}}{\mu + \kappa} \quad \text{dan} \quad S^{**} < \frac{\Lambda}{\mu} .$$

6. Keadaan epidemik infeksi HIV pada komunitas IDU akan stabil asimtotik global jika *basic reproduction ratio* lebih besar dari 1 artinya infeksi HIV mewabah dalam komunitas IDU.
7. Hasil-hasil simulasi sesuai dengan apa yang terdapat dalam teorema.

5.2 Saran

Dalam penulisan tesis ini penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU dengan asumsi pecandu yang menyadari sudah mengidap AIDS tidak ikut berbagi suntikan dan tidak bergabung dalam grup “sahabat”. Saran yang dapat diberikan oleh penulis adalah menganalisa model penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU dengan asumsi bahwa pecandu yang sudah mengidap AIDS tetap ikut berbagi di dalam grup “sahabat”.

DAFTAR PUSTAKA

- Capasso, V. (1993). *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Lecture Notes in Biomathematics, Vol.97, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Capasso, V., David M. (2005). Mathematical Models for HIV Transmission among Injecting Drug Users. In: *Deterministic and Stochastic Models of AIDS Epidemics and HIV Infections with Intervention*, Tan, W.Y., Wu, H., World Scientific, Singapore.
- Hogg, R. V., Allen T. C. (1995). *Introduction Mathematical Statistics*, 5th edition. New Jersey : Prentice Hall, Inc.
- Hugo, G. (2001). *Mobilitas Penduduk dan HIV/AIDS di Indonesia*. Adelaide University.
- Kaplan, E.H. (1989). Needles that Kill: Modelling Human Immunodeficiency Virus Transmission via Shared Drug Injection Equipment in Shooting Galleries. *Rev Inf Diseases 11* : 289-298.
- Perko, L. (1996). *Differential Equation and Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Sharomi, O.Y. (2006). *Mathematical Analysis of Models of HIV Epidemiology*. Thesis of University of Manitoba.
- Taylor, H.M., S. Karlin. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*, 3rd edition. Academic Press.
- Verhulst, F. (1996). *Nonlinier Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Walpole, R. E. (1995). *Pengantar Statistika*. Edisi ke-3. PT. Gramedia Pustaka Utama.
- Wiggin, S. (1990). *Introduction to Applied Non Linear Dynamical Systems and Chaos*. Springer –Verlag.

LAMPIRAN 1

Source Code Simulasi 1 : Dinamika $\beta(S, I)$

Simulasi dinamika $\beta(S, I)$ diamati pada dua populasi, yaitu dinamika $\beta(S, I)$ terhadap populasi *susceptibles* dan dinamika $\beta(S, I)$ terhadap populasi *infectious*. Berikut ini *source code* kedua simulasi tersebut pada MATLAB.

1. Source code simulasi dinamika $\beta(S, I)$ terhadap populasi *susceptibles*

```
clear;
% menentukan nilai parameter simulasi
t=0.8;
v=10;

% menentukan jumlah populasi infectious
I1=6000;
I2=60000;
I3=600000;

% menentukan besar  $\beta(S, I)$  dengan jumlah infectious yang berbeda
for S=1:100000
    I=I1;
    b1(S)=(I/(t*S+I))*(1-((v-1)*(S+I)+((1-v*(1-t))*S)+I)*exp(-
v*((t*S+I)/(S+I)))/(v^2*(t*S+I)));
    I=I2;
    b2(S)=(I/(t*S+I))*(1-((v-1)*(S+I)+((1-v*(1-t))*S)+I)*exp(-
v*((t*S+I)/(S+I)))/(v^2*(t*S+I)));
    I=I3;
    b3(S)=(I/(t*S+I))*(1-((v-1)*(S+I)+((1-v*(1-t))*S)+I)*exp(-
v*((t*S+I)/(S+I)))/(v^2*(t*S+I)));
    a(S)=S;
end

% membuat gambar dinamika  $\beta(S, I)$  terhadap populasi Susceptibles
plot(a, b1, '-.', a, b2, '--', a, b3, '-')
legend('I=6.000', 'I=60.000', 'I=600.000', 3);
xlabel('S')
ylabel('\beta(S, I)')
```

2. Source code simulasi dinamika $\beta(S, I)$ terhadap populasi *infectious*

```
clear;
% menentukan nilai parameter simulasi
t=0.8;
v=10;

% menentukan jumlah populasi Susceptibles
S1=6000;
S2=60000;
S3=600000;
```

```

% menentukan besar  $\beta(S,I)$  dengan jumlah Susceptibles yang berbeda
for I=1:100000
    S=S1;
    b1(I)=(I/(t*S+I))*(1-((v-1)*(S+I)+((1-v*(1-t))*S)+I)*exp(-
v*((t*S+I)/(S+I)))/(v^2*(t*S+I)));
    S=S2;
    b2(I)=(I/(t*S+I))*(1-((v-1)*(S+I)+((1-v*(1-t))*S)+I)*exp(-
v*((t*S+I)/(S+I)))/(v^2*(t*S+I)));
    S=S3;
    b3(I)=(I/(t*S+I))*(1-((v-1)*(S+I)+((1-v*(1-t))*S)+I)*exp(-
v*((t*S+I)/(S+I)))/(v^2*(t*S+I)));
    a(I)=I;
end

% membuat gambar dinamika  $\beta(S,I)$  terhadap populasi Infectious
plot(a,b1,'-',a,b2,'--',a,b3,'-.')
h=legend('S=6.000','S=60.000','S=600.000',4);
xlabel('I')
ylabel('\beta(S,I)')
set(h,'Interpreter','none')

```



LAMPIRAN 2

Source Code Simulasi 2 : Potret Fase pada saat $R_0 \leq 1$

Simulasi potret fase sistem pada populasi *susceptibles* dan *infectious* saat dapat diamati dari potret fase kedua populasi terhadap waktu. Untuk mempermudah pengamatan perilaku sistem, sebelum simulasi potret fase pada populasi *susceptibles* dan *infectious*, akan diberikan simulasi potret fase populasi *susceptibles* terhadap waktu dan simulasi potret fase populasi *infectious* terhadap waktu terlebih dahulu. Sebelum melakukan simulasi potret fase, pada lampiran ini diberikan *source code* untuk sistem dinamik yang merupakan sistem persamaan diferensial dan *source code* untuk *basic reproduction ratio* (R_0).

```
% Sistem persamaan diferensial untuk sistem dinamik (3.13) dan (3.14)
function dTO=Diff(t,TO, Par)

k=Par(1); mu=Par(2); lambda=Par(3); alpha=Par(4);
L=Par(5); v=Par(6); t=Par(7);
S=TO(1); I=TO(2);

dTO=zeros(2,1);

dTO(1)= L - mu*S - lambda*alpha*beta(S,I,v,t)*S;
dTO(2)= lambda*alpha*beta(S,I,v,t)*S - mu*I - k*I;

% Membangun fungsi basic reproduction ratio
function R=R0(t,v,k,mu,lamda,alpha)
R=(((lamda)*alpha)/((mu+k)*t))*(1-((v-1+(1-v*(1-t))*exp(-v*t))/(v^2)*t)))
```

Berikut ini *source code* untuk simulasi potret fase kedua populasi terhadap waktu.

1. *Source code* simulasi potret fase populasi *susceptibles* dan *infectious* terhadap waktu

```
%Nilai parameter simulasi potret fase saat R0 lebih kecil sama dengan 1
clear all
clc
k=1/2;
mu=1/35;
v=2.6;
lamda=1;
```

```

alpha=0.2;
t=0.8;
L=20;

%Menentukan Basic Reproduction Ratio (R0)
R=R0(t,v,k,mu,lamda,alpha);

infS = L/(mu+k)

%Menentukan kondisi awal jumlah populasi pada komunitas IDU
S0=1000;
I0=1000;
S=S0; I=I0;

%Model penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU
options = odeset('RelTol', 1e-10);
[T, pop]=ode45(@Diff,[0 20],[S I],options,[k mu lamda alpha L v
t]);
S=pop(:,1); I=pop(:,2);

ekuiS = S(size(S))

%Gambar jumlah populasi Susceptibles terhadap waktu
h=plot(T,S,'-m','LineWidth',1.5);
ylim([0 1000])
xlabel 'Waktu (Tahun)';
ylabel 'Susceptibles'

%Gambar jumlah populasi Infectious terhadap waktu
h=plot(T,I,'-r','LineWidth',1.5);
ylim([0 1000])
xlabel 'Waktu (Tahun)';
ylabel 'Infectious'

```

2. *Source code* simulasi potret fase sistem pada populasi *susceptibles* dan *infectious*

Dengan nilai parameter yang sama dengan simulasi potret fase populasi *susceptibles* dan *infectious* terhadap waktu di atas, maka *source code* untuk simulasi potret fase sistem pada populasi *susceptibles* dan *infectious*

```

%Potret fase sistem pada populasi susceptibles dan infectious
h=plot(S,I,'-g','LineWidth',1.5);
xlim([0 1200])
ylim([0 1200])
xlabel 'Susceptibles';
ylabel 'Infectious'
hold on

```

LAMPIRAN 3

Source Code Simulasi 3 : Potret Fase saat $R_0 > 1$

Dengan cara yang sama dengan simulasi 2, simulasi 3 juga akan memberikan potret fase populasi *susceptibles* dan *infectious* terhadap waktu sebelum memberikan potret fase sistem terhadap populasi *susceptibles* dan *infectious* saat $R_0 > 1$. Pada simulasi 3 ini *source code* untuk sistem dinamik dan *basic reproduction ratio* (R_0) sama dengan *source code* pada Lampiran 2. Berikut ini *source code* untuk simulasi potret fase kedua populasi terhadap waktu saat $R_0 > 1$.

1. *Source code* simulasi potret fase populasi *susceptibles* dan *infectious* terhadap waktu

```
%Nilai parameter simulasi potret fase saat R0 lebih besar dari 1
clear all
clc
k=1/2;
mu=1/35;
v=10;
lamda=6;
alpha=0.2;
t=0.8;
L=20;

%Menentukan Basic Reproduction Ratio (R0)
R=R0(t,v,k,mu,lamda,alpha);

infS = L/(mu+k)

%Menentukan kondisi awal jumlah populasi pada komunitas IDU
S0=1000;
I0=1000;
S=S0; I=I0;

%Model penyebaran infeksi HIV pada komunitas IDU
options = odeset('RelTol', 1e-10);
[T, pop]=ode45(@Diff,[0 20],[S I],options,[k mu lamda alpha L v
t]);
S=pop(:,1); I=pop(:,2);

ekuiS = S(size(S))
```

```

%Gambar jumlah populasi Susceptibles terhadap waktu
h=plot(T,S,'-r','LineWidth',1.5);
ylim([0 1000])
xlabel 'Waktu (Tahun)';
ylabel 'Susceptibles'

%Gambar jumlah populasi Susceptibles terhadap waktu
h=plot(T,I,'-r','LineWidth',1.5);
ylim([0 1000])
xlabel 'Waktu (Tahun)';
ylabel 'Infectious'

```

2. *Source code* simulasi potret fase sistem pada populasi *susceptibles* dan *infectious*

Dengan nilai parameter yang sama dengan simulasi potret fase populasi *susceptibles* dan *infectious* terhadap waktu di atas, maka *source code* untuk simulasi potret fase sistem pada populasi *susceptibles* dan *infectious*

```

%Potret fase sistem pada populasi susceptibles dan infectious
h=plot(S,I,'-g','LineWidth',1.5);
xlim([0 1200])
ylim([0 1200])
xlabel 'Susceptibles';
ylabel 'Infectious'
hold on

```