ITEM RESPONSE MODEL

PINTANUGRA PERSADANTA

030301029X

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2008

ITEM RESPONSE MODEL

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:

PINTANUGRA PERSADANTA

030301029X

DEPOK

2008

SKRIPSI : *ITEM RESPONSE MODEL*

NAMA : PINTANUGRA PERSADANTA

NPM : 030301029X

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 14 JULI 2008

Dra. RIANTI SETIADI, M.Si.	Dra. IDA FITHRIANI, M.Si.
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal lulus Ujian Sidang Sarjana: 14 Juli 2008

Penguji I : Drs. Suryadi M.T., M.T.

Penguji II : Dra. Rianti Setiadi, M.Si.

Penguji III : Dra. Nora Hariadi, M.Si.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala berkat dan anugrah-Nya yang memampukan dan memberikan hikmat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Rianti Setiadi selaku pembimbing I dan Ibu Ida Fithriani selaku pembimbing II, yang telah meluangkan waktu dan tenaga untuk membimbing penulis selama ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Pak Gatot selaku Pembimbing Akademik, dan seluruh staf pengajar departemen Matematika FMIPA UI yang selalu tulus memberikan bekal ilmu.

Secara khusus, penulis mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tuaku: Johanita Puspachinta Simorangkir & Perlindungen Tarigan. Makasih ya mam, pap untuk segala dukungannya, doa, dan kasih sayang selama ini. Untuk Putri & Agi, adik-adikku, terima kasih untuk kasih sayang dan keceriaan yang diberikan. Mama, Papa, Uti,dan Agi menjadi motivasi penulis menyelesaikan skripsi ini.

Ucapan terima kasih secara spesial penulis berikan kepada Reinne Natali Christine. Makasih ya Rein buat omelan dan suntikan semangat disaat malas dan atas kasih sayang dan kesetiaan yang diberikan selama ini. Satu bab lagi kita lewati. Semangat..!!

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Kepala SMP Kristen Kalam Kudus Solo yang mengijinkan penulis menggunakan datanya untuk dipakai dalam penerapan skripsi ini.

Untuk Bembi dan Yanu terima kasih ya buat programnya. Tanpa kalian program tersebut tidak bisa jalan. Untuk Adjat dan Rieska terima kasih atas ide, kritik dan sarannya. Untuk teman-teman kumpul: Anton, Gunung, Diki, Gele, Tebe. Kapan kita main dan jalan lagi? Untuk teman2 angkatan ‘02, ’03, dan ‘04 yang berjuang untuk skripsi semester ini, trima kasih ya untuk dukungannya & semangat untuk lulus dari matematika. Untuk anak ‘03 yang belum ambil skripsi, terus berjuang teman-teman.

Terima kasih untuk staf pengajar dan karyawan departemen Matematika yang telah membantu dalam proses belajar penulis, untuk anak Math ’01, ’02, ’04, ’05, dan ’06 terima kasih untuk persahabatannya.

Akhir kata penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi banyak orang dan dapat diambil hikmahnya. Tuhan memberkati !

Depok, Juli 2008

Penulis

ABSTRAK

Item response model digunakan untuk menganalisa baik tidaknya soal dan menyeleksi soal-soal yang baik berdasarkan *latent ability* peserta tes dan karakteristik soal yang terdiri dari tingkat diskriminasi soal dan kesulitan soal. Dalam skripsi ini, penaksiran parameter *latent ability*, diskriminasi soal dan kesulitan soal dilakukan dengan metode penaksiran *joint maximum likelihood,* sedangkan seleksi soal dilakukan dengan menggunakan *item information function.*

Metode diatas diterapkan untuk menyeleksi soal tes Matematika semester genap tahun ajaran 2007-2008 berdasarkan jawaban siswa kelas VII SMP XYZ di kota A, pada tes tersebut. Tes terdiri dari 30 soal dan diikuti oleh 143 siswa.

Kata kunci **:** *item information function, item response model, joint maximum likelihood estimation, latent ability, test information function.*

vii + 73 hlm.; lamp.

Bibliografi: 7 (1983-2006)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Item Response Model adalah model yang digunakan untuk menganalisa apakah suatu soal dalam suatu alat tes baik atau tidak. Baik tidaknya suatu soal ditentukan oleh karakteristik soal yaitu tingkat kesulitan soal dan tingkat diskriminasi soal. Item Response Model diaplikasikan terutama untuk tes dengan format jawaban dikotomus atau benar-salah yang dapat dikodekan 1 dan 0.

Tingkat kesulitan soal menyatakan seberapa sulit soal tersebut. Tingkat diskriminasi soal merupakan kemampuan soal dalam membedakan peserta dengan berbagai tingkat kemampuan. Tingkat kesulitan soal dan tingkat diskriminasi soal menentukan probabilitas peserta tes menjawab benar suatu soal.

Untuk tingkat kesulitan soal, jika soal terlalu sulit maka probabilitas menjawab soal dengan benar akan kecil. Sebaliknya, jika soal terlalu mudah maka probabilitas menjawab soal dengan benar akan besar. Soal yang baik adalah soal yang menghasilkan probabilitas menjawab soal dengan benar mendekati 0,5.

Untuk tingkat diskriminasi soal, jika tingkat diskriminasi soal tinggi maka probabilitas jawaban benar untuk peserta dengan kemampuan rendah akan jauh lebih rendah dibandingkan dengan peserta dengan kemampuan tinggi. Sebaliknya, jika tingkat diskriminasi soal rendah maka probabilitas jawaban benar untuk peserta dengan kemampuan rendah dan peserta dengan kemampuan tinggi tidak terlalu berbeda. Soal yang baik adalah soal yang mempunyai tingkat diskriminasi tinggi.

Selain karakteristik soal, yaitu tingkat kesulitan soal dan tingkat diskriminasi soal, probabilitas menjawab benar suatu soal juga dipengaruhi oleh tingkat kemampuan peserta tes. *Item Response Model* memodelkan probabilitas peserta menjawab benar suatu soal sebagai fungsi dari kemampuan peserta tes dan karakteristik soal pada tes.

Misalkan, y = jawaban peserta tes

$$y = \begin{cases} 1, & \text{jika jawaban benar} \\ 0, & \text{jika jawaban salah} \end{cases}$$

θ = tingkat kemampuan peserta tes

a = tingkat diskriminasi soal

b = tingkat kesulitan soal

Item Response Model dapat ditulis dalam bentuk :

$$P(y=1) = F(\theta, a, b)$$

Dapat dimengerti bahwa semakin tinggi kemampuan yang dimiliki peserta tes maka probabilitas peserta tersebut menjawab soal dengan benar akan semakin besar. Maka $F(\theta,a,b)$ dapat diasumsikan sebagai fungsi monoton tidak turun. Dalam *item response model*, $F(\theta,a,b)$ diasumsikan sebagai fungsi distribusi dari suatu distribusi.

Untuk tes yang terdiri dari sejumlah k soal dan diikuti sebanyak n peserta tes, *Item Response Model* dapat ditulis dalam bentuk :

$$P(y_{ij}=1)=F(\theta_i,a_j,b_j) \text{ , i=1,...,n j=1,...,k}$$

dengan

y_{ij} = jawaban peserta tes ke-i untuk soal ke-j

θ_i = tingkat kemampuan peserta tes ke-i

a_j = tingkat diskriminasi soal ke-j

b_j = tingkat kesulitan soal ke-j

Jika nilai θ_i, a_j, dan b_j ; i=1,...,n j=1,...,k dapat ditaksir sehingga dapat dianalisis apakah soal ke-j baik atau tidak.

Dalam skripsi ini akan dijelaskan cara mencari taksiran dari parameter tingkat kemampuan peserta, tingkat diskriminasi soal, dan tingkat kesulitan soal pada suatu alat tes yang terdiri dari k soal dan diikuti n peserta tes. Kemudian dari taksiran yang didapat akan dilakukan seleksi soal dengan cara membandingkan tingkat kebaikan soal-soal dalam alat tes tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

1. Bagaimana mencari taksiran dari parameter tingkat kemampuan peserta tes, tingkat diskriminasi soal dan tingkat kesulitan soal.
2. Bagaimana mencari dan membandingkan tingkat kebaikan suatu soal terhadap tingkat kebaikan soal yang lain dalam suatu alat tes berdasarkan taksiran parameter yang didapat.

1.3 Tujuan

1. Mencari taksiran dari parameter tingkat kemampuan peserta tes, tingkat diskriminasi soal dan tingkat kesulitan soal.
2. Mencari tingkat kebaikan setiap soal dan membandingkannya dengan tingkat kebaikan soal yang lain berdasarkan taksiran parameter diatas.

1.4 Pembatasan Masalah

1. $F\left(\theta_i, a_j, b_j\right)$ suatu *cumulative distribution function* (cdf) dari distribusi logistik standard.
2. Taksiran parameter θ_i, a_j, dan b_j dicari dengan *joint maximum likelihood estimation* (JMLE).

1.5 Aplikasi

Item Response Model akan diterapkan untuk mengevaluasi soal-soal ulangan Matematika semester genap tahun 2007-2008 yang diberikan untuk siswa kelas VII SMP XYZ di kota A.

1.6 SISTEMATIKA PENULISAN

Penulisan skripsi ini dibagi menjadi lima bab, yaitu :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan secara singkat mengenai latar belakang, permasalahan, tujuan, pembatasan masalah, aplikasi dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini membahas landasan teori dari skripsi ini yaitu metode penaksiran *Maximum Likelihood,* metode penaksiran *Joint Maximum Likelihood*, dan *Fisher Information.*

BAB III ITEM RESPONSE MODEL

Bab ini menjelaskan mengenai mencari taksiran dari parameter tingkat kemampuan peserta, tingkat diskriminasi soal dan tingkat kesulitan soal dari suatu alat tes yang terdiri dari k soal dan diberikan kepada n peserta tes dengan metode penaksiran *Joint Maximum Likelihood*. Kemudian mencari tingkat kebaikan setiap soal dan membandingkannya dengan tingkat kebaikan soal yang lain dengan berdasarkan hasil taksiran yang didapat.

BAB IV APLIKASI

Bab ini menjelaskan aplikasi dari skripsi ini.

BAB V PENUTUP

Bab ini menampilkan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas dasar-dasar teori yang akan digunakan dalam penulisan skripsi ini, yaitu mengenai metode penaksiran *maximum likelihood*, metode penaksiran *joint maximum likelihood* dan *fisher information*.

2.1 Penaksiran *Maximum Likelihood*

Misal $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah peubah acak yang iid dengan pdf $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$ dimana θ merupakan suatu parameter yang tidak diketahui dan Ω adalah ruang parameter. Dalam melakukan penaksiran *maximum likelihood* ada beberapa tahapan yang harus dilakukan.

Pertama, cari pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ yaitu $f(x_1, x_2, ..., x_n;\theta)$. Karena $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah peubah acak yang iid maka

$f(x_1, x_2, ..., x_n;\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) ... f(x_n;\theta)$

Kedua, cari fungsi *likelihood*nya. Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ yang dapat dianggap sebagai fungsi dari θ. Misalkan fungsi *likelihood* $L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = L(\theta)$

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) ... f(x_n;\theta) \quad , \ \theta \in \Omega$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

Ketiga, cari taksiran dari θ. Dalam metode penaksiran *maximum likelihood* taksiran dari θ diperoleh dengan menemukan nilai θ, sebut $\hat{\theta}$, yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Maka $\hat{\theta}$ disebut taksiran *maximum likelihood* (*maximum likelihood estimator / MLE)* dari θ.

Mencari nilai θ yang memaksimumkan fungsi $\ln L(\theta)$, sebut $l(\theta)$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai θ yang memaksimumkan $L(\theta)$. Maka baik $L(\theta)$ atau $l(\theta)$ dapat digunakan untuk mencari nilai $\hat{\theta}$. Bukti diberikan di lampiran1.

Nilai θ yang memaksimumkan $l(\theta)$ dapat diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan

$$S(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 .$$

2.2 Penaksiran *Joint Maximum Likelihood*

Misal $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah peubah acak yang iid dengan pdf $f(x;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \in \mathbb{R}^p$ dimana $\boldsymbol{\theta}$ merupakan suatu vektor dari p-parameter yang tidak diketahui. Dalam melakukan penaksiran *joint maximum likelihood* ada beberapa tahapan yang harus dilakukan.

Pertama, cari pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ yaitu $f\left(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta}\right)$.

Karena $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah peubah acak yang iid maka

$f\left(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta}\right) = f\left(x_1; \boldsymbol{\theta}\right) f\left(x_2; \boldsymbol{\theta}\right) ... f\left(x_n; \boldsymbol{\theta}\right)$.

Kedua, cari fungsi *likelihood*nya. Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ yang dapat dianggap sebagai fungsi dari $\boldsymbol{\theta}$. Misalkan fungsi *likelihood* $L\left(\boldsymbol{\theta}; x_1, x_2, ..., x_n\right) = L\left(\boldsymbol{\theta}\right)$.

$$L\left(\boldsymbol{\theta}\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta}\right) = f\left(x_1; \boldsymbol{\theta}\right) f\left(x_2; \boldsymbol{\theta}\right) ... f\left(x_n; \boldsymbol{\theta}\right) \quad , \ \boldsymbol{\theta} \in \Omega$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i; \boldsymbol{\theta}\right)$$

Ketiga, cari taksiran dari $\boldsymbol{\theta}$. Dalam metode penaksiran *joint maximum likelihood* taksiran dari $\boldsymbol{\theta}$ diperoleh dengan menemukan nilai $\boldsymbol{\theta}$, sebut $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Maka $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ disebut taksiran *joint maximum likelihood* dari $\boldsymbol{\theta}$.

Mencari nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi $\ln L\left(\boldsymbol{\theta}\right)$, sebut $l\left(\boldsymbol{\theta}\right)$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan $L\left(\boldsymbol{\theta}\right)$. Maka baik $L\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ atau $l\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ dapat digunakan untuk mencari nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Bukti untuk $\boldsymbol{\theta}$ vektor dari n parameter, $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\right)$, diberikan di lampiran2.

Nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan $l(\boldsymbol{\theta})$ dapat diperoleh dengan mencari solusi simultan dari persamaan

$$S_j(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\boldsymbol{\theta}), \text{ untuk } j = 1,...,p$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\boldsymbol{\theta})$$

$$= \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} L(\boldsymbol{\theta}) = 0 .$$

Adakalanya sistem persamaan ini dapat diselesaikan secara analitik. Jika tidak, suatu prosedur numerik (misal teknik Newton-Raphson) dapat digunakan.

2.3 *Fisher Information*

Misalkan X adalah variabel random dengan pdf $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$, dimana ruang parameter Ω adalah suatu interval, diasumsikan bahwa:

- $f(x;\theta)$ adalah positif pada himpunan S independen dari $\theta \in \Omega$.
- $\frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta)$ ada $\forall\ \theta \in \Omega$, kecuali pada titik-titik dimana probabilitas = 0.
- $\int_s \ldots \int_s f(x_1;\theta)\ldots f(x_n;\theta)\, dx_1 \ldots dx_n$ atau $\sum_s \ldots \sum_s f(x_1;\theta)\ldots f(x_n;\theta)$ dapat dideferensiasi dibawah simbol integral atau sumasi.

Dengan asumsi diatas maka didapat (diberikan untuk kasus X variable random kontinu, untuk kasus diskrit dapat dijalankan similar) bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx = 1$$

dengan mengambil turunan pertama terhadap θ didapat,

misalkan $g(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx$ maka $\frac{d}{d\theta} g(\theta) = 0$ atau dapat ditulis

$$\frac{d}{d\theta} g(\theta) = \lim_{h\to 0} \frac{g(\theta+h) - g(\theta)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta+h)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x;\theta+h) - f(x;\theta) \right] dx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x;\theta+h) - f(x;\theta)}{h}\,dx$$

$$\frac{d}{d\theta} g(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta}\,dx$$

Maka dapat ditulis,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta}\,dx = 0 . \tag{1}$$

Persamaan (1) dapat ditulis sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta}}{f(x;\theta)} \cdot f(x;\theta)\,dx = 0$$

atau sama dengan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} \cdot f(x;\theta)\,dx = 0 . \tag{2}$$

Jika diturunkan kembali terhadap θ didapat,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot f(x;\theta)+\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]dx=0. \qquad (3)$$

Bentuk kedua dari persamaan (3) disebelah kiri dapat ditulis sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}}{f(x;\theta)}\cdot f(x;\theta)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\cdot f(x;\theta)dx$$

atau

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}}{f(x;\theta)}\cdot f(x;\theta)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\cdot f(x;\theta)dx$$

Bentuk diatas disebut *Fisher Information*, dinotasikan dengan $\mathrm{I}(\theta)$. Yaitu,

$$\mathrm{I}(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\cdot f(x;\theta)dx$$

Dari persamaan (3), $\mathrm{I}(\theta)$ juga dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathrm{I}(\theta)=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\cdot f(x;\theta)dx$$

Catatan : informasi yang dimaksud adalah mean terboboti dari $\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2$

atau $\left[-\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]$, dimana bobot diberikan oleh pdf $f(x;\theta)$. *Fisher*

Information juga dapat diberikan dalam bentuk $E\left(\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right)$. Hal ini diperoleh dari bentuk

$\mathrm{I}(\theta) = E\left(\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \cdot f(x;\theta)\,dx$. Karena p.d.f merupakan fungsi nonnegatif atau dengan kata lain $f(x;\theta) \geq 0$ dan tentu saja $\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \geq 0$ maka semakin besar nilai turunan $\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}$, semakin besar nilai ekspektasinya. Jadi semakin banyak informasi yang diperoleh. Jelas bahwa, jika $\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2 = 0$ maka $\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} = 0$ dengan kata lain $\ln f(x;\theta)$ merupakan suatu fungsi yang tidak mengandung *θ*. Maka tidak terdapat informasi tentang *θ* atau dengan kata lain terdapat nol informasi tentang *θ*.

BAB III

ITEM RESPONSE MODEL

3.1 Pengantar

Dalam penelitian di beberapa bidang studi seperti bidang psikologi dan bidang pendidikan, peneliti biasanya tertarik untuk mengukur kemampuan seorang individu seperti intelegensia, kemampuan matematika, atau kemampuan skolastik. Namun, kuantitas kemampuan seorang individu tidak dapat diukur secara langsung layaknya mengukur atribut fisik seperti berat atau tinggi badan.

Pengukuran dilakukan dengan menggunakan kuisioner atau tes. Untuk itu soal didalam tes harus dapat secara efektif dan akurat mengukur kemampuan peserta tes. Untuk menganalisa baik atau tidaknya suatu soal dalam suatu alat tes dalam mengukur kemampuan para peserta tes digunakan suatu metode yang dikenal dengan *Item Response Model* (IRM).

3.2 Konsep Dasar IRM

3.2.1 *Latent Ability*

Performa seorang peserta tes dalam menjawab suatu soal dipengaruhi oleh *latent ability* yang dimiliki peserta tes. *Latent ability* peserta tes merupakan kemampuan peserta tes yang tidak dapat diukur secara langsung. Dalam literatur mengenai *IRM*, *latent ability* dinotasikan dengan θ. Dalam aplikasinya, *latent ability* merupakan pengetahuan yang dimiliki peserta tes terhadap soal yang ditanyakan. *Latent ability* diasumsikan kontinu dan berdimensi satu. Namun untuk tujuan praktis, nilai θ distandarisasi dengan jangkauan dibatasi antara -3 sampai 3. Karena distandarisasi maka θ mempunyai mean 0 dan standar deviasi 1. Nilai mean nol menyatakan rata-rata kemampuan yang dimiliki peserta dalam tes tersebut. Semakin besar θ , yaitu nilai $\theta>0$, semakin tinggi kemampuan peserta tes. Semakin kecil θ, yaitu nilai $\theta<0$, semakin rendah kemampuan peserta tes.

3.2.2 Karakteristik Soal

Soal-soal dalam tes memiliki dua karakteristik yaitu tingkat diskriminasi soal dan tingkat kesulitan soal. Tingkat diskriminasi soal, dinotasikan dengan a, merupakan kemampuan soal dalam membedakan peserta dengan berbagai tingkat kemampuan. Sedangkan tingkat kesulitan soal, dinotasikan dengan b, menyatakan seberapa sulit soal tersebut.

3.2.3 Item Response Curve

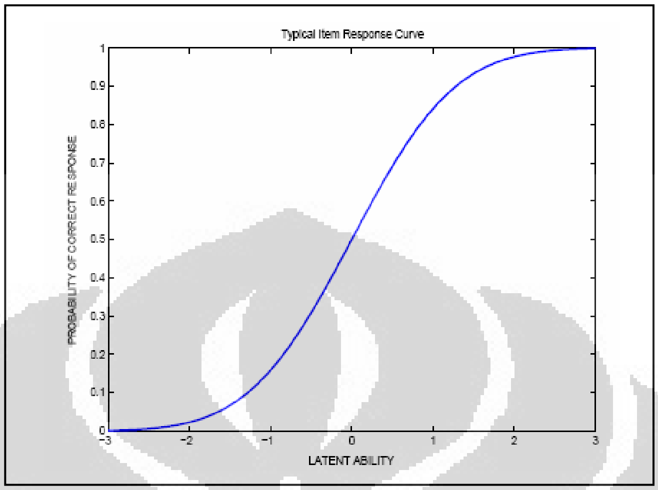
Misalkan y adalah jawaban peserta tes atas suatu soal, $y = 1$ jika jawaban benar dan $y = 0$ jika jawaban salah. Diasumsikan probabilitas peserta menjawab benar suatu soal hanya dipengaruhi oleh kemampuan peserta (θ) dan karakteristik soal (a,b). Jika p adalah probabilitas jawaban benar, maka dapat dimodelkan

$$p = \Pr(Y = 1) = F(\theta, a, b)$$

dengan F adalah suatu fungsi dari kemampuan peserta tes dan karakteristik soal.

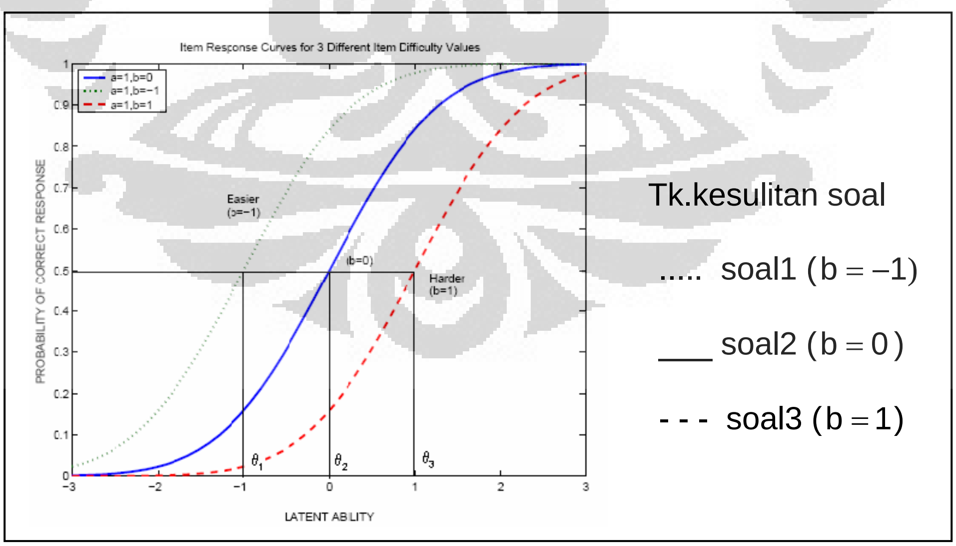
Dapat dimengerti bahwa probabilitas peserta menjawab soal dengan benar akan semakin besar jika kemampuan peserta semakin tinggi. Maka $F(\theta, a, b)$ dapat diasumsikan sebagai fungsi monoton tidak turun. $F(\theta, a, b)$ biasanya diasumsikan sebagai fungsi distribusi.

Memplot probabilitas peserta menjawab benar suatu soal atas kemampuan peserta tes akan menghasilkan plot seperti Gambar 1. Kurva ini disebut kurva item response (Item Response Curve / IRC). Bentuk Item Response Curve (IRC) menggambarkan bagaimana perubahan tingkat kemampuan mengakibatkan perubahan dalam probabilitas menjawab benar suatu soal.



Gambar 1. Item response curve

Untuk melihat efek tingkat kesulitan soal dalam IRC akan ditunjukkan, dalam Gambar 2, plot IRC dari tiga soal berbeda dengan nilai parameter tingkat diskriminasi soal , a, yang sama dan tingkat kesulitan soal, b, yang berbeda.



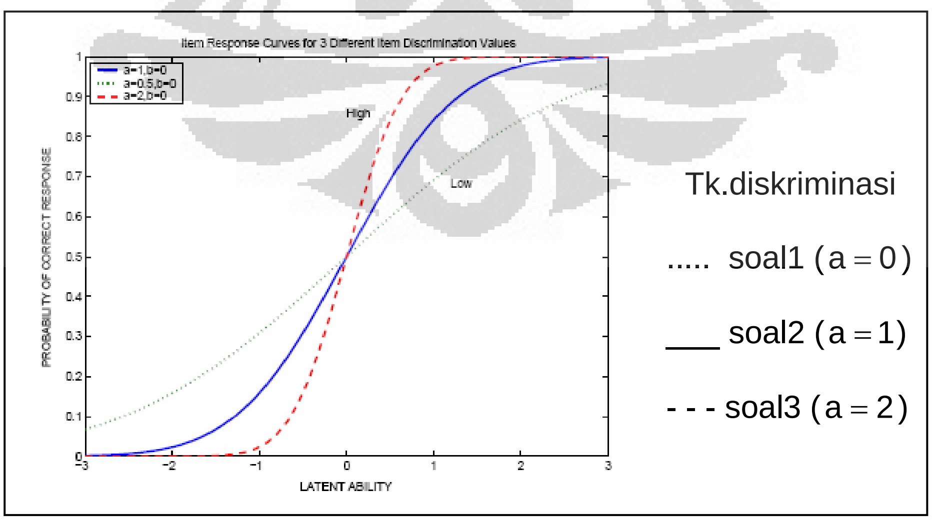
Gambar 2. Item response curve dari tiga soal

dengan tingkat kesulitan berbeda

Beberapa ciri dari IRC tersebut dapat diamati. Pertama, setiap IRC memiliki bentuk-S atau S-shaped, yang mana probabilitas jawaban benar digambar sebagai fungsi monoton tidak turun dari *latent ability*. Kedua, walaupun tiga IRC diatas memiliki bentuk yang sama, namun berbeda lokasinya. Pada Gambar 2, lokasi IRC merujuk pada parameter tingkat kesulitan soal. Nilai parameter tingkat kesulitan soal, b, didefinisikan sebagai nilai θ saat $p = 0{,}5$.

Dari Gambar 2 diatas, probabilitas menjawab benar sama dengan 0,5 untuk soal 1 dicapai oleh peserta tes dengan *latent ability* θ_1 yang lebih kecil dari θ_2 dan θ_3. Jadi dapat disimpulkan bahwa soal1 lebih mudah dibandingkan soal2 dan soal3.

Untuk melihat efek tingkat diskriminasi soal dalam IRC akan ditunjukkan, dalam Gambar 3, plot IRC dari tiga soal berbeda dengan nilai parameter tingkat diskriminasi soal, a, yang berbeda dan tingkat kesulitan soal, b, yang sama.



Gambar 3 Item response curve dari tiga soal

dengan tingkat diskriminasi berbeda

Tiga soal dalam Gambar 3 memiliki slope yang berbeda. Slope menyatakan tingkat diskriminasi soal. Slope menggambarkan seberapa cepat perubahan probabilitas menjawab benar terhadap *latent ability*nya. Soal1 memiliki perubahan probabilitas menjawab benar terhadap *latent ability* yang lebih lambat dibanding dengan soal2 dan soal3. Maka soal1 kurang mendiskriminasi dibanding soal2 dan soal3.

Parameter tingkat diskriminasi soal memiliki nilai lebih besar nol (yaitu $a > 0$), artinya dengan tingkat kesulitan, b, yang sama maka peserta dengan *latent ability*, θ, yang lebih tinggi akan memiliki probabilitas menjawab benar suatu soal lebih besar dari peserta lainnya.

3.3 Item Response Model Untuk Sejumlah Peserta Tes

3.3.1 Struktur Data

Misalkan terdapat n-peserta yang mengikuti suatu tes dengan k-soal. Tiap soal memiliki format jawaban dikotomus yang dapat dikodekan 1 atau 0. Maka data hasil tes dapat ditulis dalam bentuk matriks $n \times k$ dengan entri 1 dan 0. Baris pertama dari matriks menunjukkan jawaban-jawaban dari peserta pertama, baris kedua menunjukkan jawaban-jawaban dari peserta kedua, dan seterusnya. Serupa dengan hal tersebut, kolom pertama matriks menunjukkan jawaban-jawaban peserta tes untuk soal pertama, kolom kedua menunjukkan jawaban-jawaban peserta tes untuk soal kedua, dan seterusnya.

Misalkan y_{ij} adalah jawaban peserta tes ke-i untuk soal tes ke-j, maka data hasil tes dapat diberikan dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \text{soal 1} & \text{soal 2} & \cdots & \text{soal k} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{peserta 1} \\ \text{peserta 2} \\ \vdots \\ \text{peserta n} \end{array} & \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nk} \end{pmatrix} \end{array}$$

3.3.2 Asumsi Model

Seperti telah dijelaskan sebelumnya, performa peserta tes ke-i dalam menjawab soal dipengaruhi oleh *latent ability* yang dimilikinya, θ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Karena probabilitas seorang individu menjawab soal dengan benar diasumsikan hanya dipengaruhi oleh *latent ability* yang dimilikinya dan karakteristik soal pada tes, maka model probabilitas jawaban benar untuk peserta ke-i dan soal ke-j dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\Pr\left(Y_{ij} = 1\,;\ \theta_i, a_j, b_j\right) = F\left(a_j\theta_i - b_j\right) \tag{3.1}$$

dengan $-\infty < \theta_i < \infty$, $0 < a_j < \infty$, dan $-\infty < b_j < \infty$.

Seperti sebelumnya, $F\left(a_j\theta_i - b_j\right)$ menyatakan suatu fungsi distribusi yang diketahui dan a_j dan b_j adalah parameter diskriminasi soal dan kesulitan soal ke-j. Dalam skripsi ini, $F\left(a_j\theta_i - b_j\right)$ diasumsikan suatu fungsi distribusi dari distribusi logistik standar. Berdasarkan distribusi Bernoulli, maka probabilitas jawaban y_{ij} dapat ditulis sebagai berikut

$$\Pr\left(Y_{ij} = y_{ij}\ ;\ \theta_i, a_j, b_j\right) = F\left(a_j\theta_i - b_j\right)^{y_{ij}}\left[1 - F\left(a_j\theta_i - b_j\right)\right]^{1-y_{ij}} \tag{3.2}$$

dengan $y_{ij} = 0$ atau 1.

Probabilitas yang diberikan dalam (3.1) menyatakan probabilitas seorang peserta tes menjawab dengan benar satu soal tes. Untuk menggabungkan jawaban seorang peserta terhadap keseluruhan soal, diperlukan suatu asumsi yaitu *local independence*. Sifat *local independence* pada IRM dapat diartikan sebagai kebebasan (*independent*) jawaban antar soal. Dalam kaitannya pada IRM, hal tersebut memiliki arti bahwa jawaban yang diberikan setiap peserta tes untuk suatu soal independen terhadap jawaban yang diberikannya untuk soal lainnya.

3.4 Estimasi Parameter *Latent ability* dan Karakteristik Soal

3.4.1 Fungsi *Likelihood*

Misalkan $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ik}$ menyatakan jawaban biner dari peserta ke-i dengan *latent ability* θ_i untuk k soal, dan $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ merupakan vektor dari parameter tingkat diskriminasi soal dan tingkat kesulitan soal. Dengan asumsi *local independence*, maka probabilitas peserta tes ke-i menjawab seluruh k-soal dalam tes dapat ditulis dalam bentuk

$$\Pr\left(Y_{i1} = y_{i1}, \ldots, Y_{ik} = y_{ik} \ ; \ \theta_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \Pr\left(Y_{i1} = y_{i1} \ ; \ \theta_i, a_1, b_1\right) \times \ldots \times \Pr\left(Y_{ik} = y_{ik} \ ; \ \theta_i, a_k, b_k\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \Pr\left(Y_{ij} = y_{ij} \ ; \ \theta_i, a_j, b_j\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{k} F\left(a_j \theta_i - b_j\right)^{y_{ij}} \left[1 - F\left(a_j \theta_i - b_j\right)\right]^{1 - y_{ij}}$$

Untuk menggabungkan jawaban dari seluruh peserta tes, diasumsikan bahwa jawaban antar peserta tes terhadap soal saling independen. Fungsi *likelihood* diperoleh sebagai hasil kali probabilitas jawaban dari seluruh n-peserta tes atas seluruh k-soal dalam tes, atau dapat ditulis

$$L\left(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = L\left(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \ ; \ Y_{11} = y_{11}, \ldots, Y_{nk} = y_{nk}\right)$$

$$= \Pr\left(Y_{11} = y_{11}, \ldots, Y_{nk} = y_{nk} \ ; \ \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$$

$$= \Pr\left(Y_{11} = y_{11},\ldots,Y_{1k} = y_{1k} \ ; \ \theta_1,\mathbf{a},\mathbf{b}\right)\times\ldots\times\Pr\left(Y_{n1} = y_{n1},\ldots,Y_{nk} = y_{nk} \ ; \ \theta_n,\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\Pr\left(Y_{i1} = y_{i1},\ldots,Y_{ik} = y_{ik} \ ; \ \theta_i,\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\Pr\left(Y_{i1} = y_{i1} \ ; \ \theta_i,a_1,b_1\right)\times\ldots\times\Pr\left(Y_{ik} = y_{ik} \ ; \ \theta_i,a_k,b_k\right)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{k}\Pr\left(Y_{ij} = y_{ij} \ ; \ \theta_i,a_j,b_j\right)\right]$$

$$L(\boldsymbol{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}F\left(a_j\theta_i - b_j\right)^{y_{ij}}\left[1-F\left(a_j\theta_i - b_j\right)\right]^{1-y_{ij}} \tag{3.3}$$

Taksiran parameter dalam model didapat dengan mencari nilai parameter yang memaksimumkan fungsi *likelihood* tersebut. Untuk itu diperlukan suatu metode penaksiran. Dalam skripsi ini metode penaksiran yang digunakan adalah metode penaksiran *Joint Maximum Likelihood (Joint Maximum Likelihood Estimation / JMLE).*

3.4.2 Joint Maximum Likelihood Estimation

Prinsip dari metode ini adalah mencari taksiran parameter θ_i (i=1,...,n), a_j, dan b_j (j=1,...,k) yang secara bersama memaksimumkan fungsi *likelihood*. Mencari nilai taksiran vektor parameter $(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, sebut $(\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}})$, yang memaksimumkan bentuk logaritma dari fungsi *likelihood*, $\ln L(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, sebut

$l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}\right)$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood*, $L(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. Maka baik $L(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ atau $l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ dapat digunakan untuk mencari nilai $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}\right)$.

$$
\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= lnL(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\
&= \ln\left[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} F\left(a_j\theta_i - b_j\right)^{y_{ij}}\left[1-F\left(a_j\theta_i - b_j\right)\right]^{1-y_{ij}}\right] \\
&= \ln\left[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} p_{ij}{}^{y_{ij}}\left[1-p_{ij}\right]^{1-y_{ij}}\right],\ \text{dengan } p_{ij} = F\left(a_j\theta_i - b_j\right) \\
&= \ln\Big[p_{11}{}^{y_{11}}\left(1-p_{11}\right)^{1-y_{11}} \times \ldots \times p_{1k}{}^{y_{1k}}\left(1-p_{1k}\right)^{1-y_{1k}} \times \\
&\qquad p_{21}{}^{y_{21}}\left(1-p_{21}\right)^{1-y_{21}} \times \ldots \times p_{2k}{}^{y_{2k}}\left(1-p_{2k}\right)^{1-y_{2k}} \times \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \times \\
&\qquad p_{n1}{}^{y_{n1}}\left(1-p_{n1}\right)^{1-y_{n1}} \times \ldots \times p_{nk}{}^{y_{nk}}\left(1-p_{nk}\right)^{1-y_{nk}}\Big] \\
&= \ln\left[\left(p_{11}{}^{y_{11}} \times \ldots \times p_{nk}{}^{y_{nk}}\right)\cdot\left(\left(1-p_{11}\right)^{1-y_{11}} \times \ldots \times \left(1-p_{nk}\right)^{1-y_{nk}}\right)\right] \\
&= \ln\left[p_{11}{}^{y_{11}} \times \ldots \times p_{nk}{}^{y_{nk}}\right] + \ln\left[\left(1-p_{11}\right)^{1-y_{11}} \times \ldots \times \left(1-p_{nk}\right)^{1-y_{nk}}\right] \\
&= \left[y_{11}\ln\left(p_{11}\right) + \ldots + y_{nk}\ln\left(p_{nk}\right)\right] + \left[\left(1-y_{11}\right)\ln\left(1-p_{11}\right) + \ldots + \left(1-y_{nk}\right)\ln\left(1-p_{nk}\right)\right] \\
&= \left\{y_{11}\ln\left(p_{11}\right) + \left(1-y_{11}\right)\ln\left(1-p_{11}\right)\right\} + \ldots + \left\{y_{nk}\ln\left(p_{nk}\right) + \left(1-y_{nk}\right)\ln\left(1-p_{nk}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
l(\mathbf{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left\{y_{ij}\ln\left(p_{ij}\right) + \left(1-y_{ij}\right)\ln\left(1-p_{ij}\right)\right\} \qquad (3.4)
$$

Secara langsung memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b})$ pada persamaan 3.3 cukup sulit karena merupakan suatu bentuk perkalian. Akan lebih mudah memaksimumkan $l(\boldsymbol{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b})$ yang merupakan suatu bentuk penjumlahan. Hal ini dikarenakan lebih mudah menurunkan bentuk penjumlahan daripada menurunkan bentuk perkalian.

Telah diberikan diatas bahwa probabilitas jawaban benar untuk peserta ke-i dan soal ke-j didefinisikan sebagai

$$p_{ij} = \Pr\left(Y_{ij} = 1\,;\theta_i, a_j, b_j\right) = F\left(a_j\theta_i - b_j\right)$$

dimana , $F\left(a_j\theta_i - b_j\right)$ diasumsikan suatu fungsi distribusi dari distribusi logistik standar. Maka dapat ditulis

$$p_{ij} = \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) = \left(\frac{1}{1+e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}}\right) = \left(1+e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}\right)^{-1}$$

dan probabilitas jawaban salah untuk peserta ke-i dan soal ke-j, dinotasikan dengan q_{ij}, diberikan sebagai berikut

$$q_{ij} = 1 - p_{ij} = \left(1 - \frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) = \left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right).$$

Turunan parsial pertama p_{ij} terhadap parameter a_j, b_j, dan θ_i adalah

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial a_j} = -1\cdot\left(1+e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}\right)^{-2}\cdot\left(-\theta_i\right)\cdot\left(e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}\right)$$

$$= \theta_i\cdot\left(\frac{1}{1+e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}}\right)\cdot\left(\frac{e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}}{1+e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}}\right)$$

$$= \theta_i \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{a_j\theta_i - b_j}} \right)$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial a_j} = \theta_i \cdot p_{ij} \cdot q_{ij} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial b_j} = -1 \cdot \left(1 + e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)} \right)^{-2} \cdot \left(e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)} \right)$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}} \right) \cdot \left(\frac{e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}}{1 + e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}} \right)$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial b_j} = -p_{ij} \cdot q_{ij} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial \theta_i} = -1 \cdot \left(1 + e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)} \right)^{-2} \cdot \left(-a_j \right) \cdot \left(e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)} \right)$$

$$= a_j \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}} \right) \cdot \left(\frac{e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}}{1 + e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}} \right)$$

$$= a_j \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{-\left(a_j\theta_i - b_j\right)}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{a_j\theta_i - b_j}} \right)$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial \theta_i} = a_j \cdot p_{ij} \cdot q_{ij} \tag{3.7}$$

Taksiran *Joint Maximum Likelihood* (JML) dari parameter θ_i, a_j, dan b_j, diperoleh dengan mendeferensiasi secara parsial fungsi $l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

terhadap parameter θ_i, a_j, dan b_j kemudian disamakan dengan nol. Langkah ini akan menghasilkan $n + 2k$ persamaan.

Dengan memakai persamaan (3.5), (3.6), dan (3.7) diatas, maka turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ terhadap θ_i, a_j, dan b_j adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\sum_{j=1}^{k}\left\{y_{ij}\ln\left(p_{ij}\right)+\left(1-y_{ij}\right)\ln\left(1-p_{ij}\right)\right\} \quad ,i=1,\ldots,n$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left\{y_{ij}\ln\left(p_{ij}\right)+\left(1-y_{ij}\right)\ln\left(1-p_{ij}\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{y_{ij}}{p_{ij}}\cdot\frac{\partial p_{ij}}{\partial \theta_i}+\frac{\left(1-y_{ij}\right)}{\left(1-p_{ij}\right)}\cdot\frac{\partial\left(1-p_{ij}\right)}{\partial \theta_i}\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{y_{ij}}{p_{ij}}\cdot\left(a_j\cdot p_{ij}\cdot q_{ij}\right)+\frac{\left(1-y_{ij}\right)}{q_{ij}}\cdot-\left(a_j\cdot p_{ij}\cdot q_{ij}\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left\{y_{ij}\cdot\left(a_j\cdot q_{ij}\right)+\left(1-y_{ij}\right)\cdot-\left(a_j\cdot p_{ij}\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left\{y_{ij}\cdot a_j\cdot\left(1-p_{ij}\right)-a_j\cdot p_{ij}+y_{ij}\cdot a_j\cdot p_{ij}\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left\{y_{ij}\cdot a_j - a_j\cdot p_{ij}\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}a_j\left\{y_{ij}-p_{ij}\right\}$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{k}a_j\left\{y_{ij}-\left(\frac{e^{a_j\theta_i-b_j}}{1+e^{a_j\theta_i-b_j}}\right)\right\}=0 \qquad ,i=1,\ldots,n \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\sum_{i=1}^{n}\left\{y_{ij}\ln(p_{ij}) + (1-y_{ij})\ln(1-p_{ij})\right\} \quad ,j=1,\ldots,k$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_j}\left\{y_{ij}\ln(p_{ij}) + (1-y_{ij})\ln(1-p_{ij})\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{ij}}{p_{ij}}\cdot\frac{\partial p_{ij}}{\partial a_j} + \frac{(1-y_{ij})}{(1-p_{ij})}\cdot\frac{\partial(1-p_{ij})}{\partial a_j}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{ij}}{p_{ij}}\cdot(\theta_i\cdot p_{ij}\cdot q_{ij}) + \frac{(1-y_{ij})}{q_{ij}}\cdot-(\theta_i\cdot p_{ij}\cdot q_{ij})\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{ij}}{p_{ij}}\cdot(\theta_i\cdot p_{ij}\cdot q_{ij}) + \frac{(1-y_{ij})}{q_{ij}}\cdot-(\theta_i\cdot p_{ij}\cdot q_{ij})\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{y_{ij}\cdot\theta_i\cdot q_{ij} - \theta_i\cdot p_{ij} + y_{ij}\cdot\theta_i\cdot p_{ij}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{y_{ij}\cdot\theta_i\cdot(1-p_{ij}) - \theta_i\cdot p_{ij} + y_{ij}\cdot\theta_i\cdot p_{ij}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{y_{ij}\cdot\theta_i - \theta_i\cdot p_{ij}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\theta_i\left\{y_{ij} - p_{ij}\right\}$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\left\{y_{ij} - \left(\frac{e^{a_j\theta_i-b_j}}{1+e^{a_j\theta_i-b_j}}\right)\right\} = 0 \quad ,j=1,\ldots,k \tag{3.9}$$

dan

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta},\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial b_j} = \frac{\partial}{\partial b_j}\sum_{i=1}^{n}\left\{y_{ij}\ln(p_{ij}) + (1-y_{ij})\ln(1-p_{ij})\right\} \quad ,j=1,\ldots,k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial b_j} \left\{ y_{ij} \ln\left(p_{ij}\right) + \left(1 - y_{ij}\right) \ln\left(1 - p_{ij}\right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_{ij}}{p_{ij}} \cdot \frac{\partial p_{ij}}{\partial b_j} + \frac{\left(1 - y_{ij}\right)}{\left(1 - p_{ij}\right)} \cdot \frac{\partial \left(1 - p_{ij}\right)}{\partial b_j} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_{ij}}{p_{ij}} \cdot \left(-p_{ij} \cdot q_{ij}\right) + \frac{\left(1 - y_{ij}\right)}{q_{ij}} \cdot - \left(-p_{ij} \cdot q_{ij}\right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_{ij} \cdot \left(-q_{ij}\right) + \left(1 - y_{ij}\right) \cdot p_{ij} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_{ij} \cdot \left(p_{ij} - 1\right) + \left(1 - y_{ij}\right) \cdot p_{ij} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ p_{ij} - y_{ij} \right\}$$

$$\frac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\right)}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{e^{a_j \theta_i - b_j}}{1 + e^{a_j \theta_i - b_j}} \right) - y_{ij} \right\} = 0 \qquad , j = 1, \ldots, k \qquad (3.10)$$

Persamaan (3.8), (3.9), dan (3.10) disebut persamaan *likelihood*. Ketiga persamaan *likelihood* tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk vektor, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial \theta_i} \\ \dfrac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial a_j} \\ \dfrac{\partial l\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial b_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} a_j \left\{ y_{ij} - p_{ij} \right\} \\ \sum_{i=1}^{n} \theta_i \left\{ y_{ij} - p_{ij} \right\} \\ \sum_{i=1}^{n} \left\{ p_{ij} - y_{ij} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (3.11)$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ dan $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$, $\boldsymbol{\xi}_j = (a_j, b_j)$, $j = 1, \ldots, k$ menyatakan vektor dari parameter-parameter yang tidak diketahui.

Sedangkan turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})$ terhadap θ_i, a_j, dan b_j adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \theta_i}\right) \quad , i = 1, \ldots, n$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j \left\{y_{ij} - p_{ij}\right\}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(a_j y_{ij} - a_j p_{ij}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} -a_j \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} -a_j \left(a_j \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \theta_i^2} = -\sum_{j=1}^{k} a_j^{\,2} \cdot p_{ij} \cdot q_{ij} \quad , i = 1, \ldots, n \qquad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial a_j^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial a_j}\right) \quad , j = 1, \ldots, k$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \left\{y_{ij} - p_{ij}\right\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\theta_i y_{ij} - \theta_i p_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\theta_i \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial a_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\theta_i \left(\theta_i \cdot p_{ij} \cdot q_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\theta_i^{\,2} \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j^{\,2}} = -\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 \cdot \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}} \right) \quad , j = 1,\ldots,k \qquad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j \partial a_j} = \frac{\partial}{\partial b_j} \left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j} \right) \quad , j = 1,\ldots,k$$

$$= \frac{\partial}{\partial b_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \left\{ y_{ij} - p_{ij} \right\} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial b_j} \left(\theta_i y_{ij} - \theta_i p_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\theta_i \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial b_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\theta_i \left(-p_{ij} \cdot q_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j \partial a_j} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}} \right) \quad , j = 1,\ldots,k \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j}\right) \quad , j = 1,\dots,k$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\{p_{ij} - y_{ij}\right\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_j}\left(p_{ij} - y_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{ij}}{\partial a_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\theta_i \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j} = \sum_{i=1}^{n}\theta_i \cdot \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1 + e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1 + e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \quad , j = 1,\dots,k \tag{3.15}$$

dan

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial b_j}\left(\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j}\right) \quad , j = 1,\dots,k$$

$$= \frac{\partial}{\partial b_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\{p_{ij} - y_{ij}\right\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b_j}\left(p_{ij} - y_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{ij}}{\partial b_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -p_{ij} \cdot q_{ij}$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j^{\ 2}} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \quad , j = 1,\ldots,k \qquad (3.16)$$

Matriks turunan kedua dari $l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})$ terhadap $\mathrm{a_j}$, dan $\mathrm{b_j}$ disebut juga matriks *Hessian*, menjadi:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} H_{a_j a_j}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}) & H_{b_j a_j}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}) \\ H_{a_j b_j}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}) & H_{b_j b_j}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j \partial a_j} \\ \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j^{\ 2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{n}\theta_i^{2}\cdot\left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) & \sum_{i=1}^{n}\theta_i\cdot\left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \\ \sum_{i=1}^{n}\theta_i\cdot\left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) & -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \end{bmatrix}$$

(3.17)

Karena persamaan (3.8), (3.9), dan (3.10) tidak linear dalam θ_i, a_j, dan b_j $(\mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n}\ ;\ \mathrm{j} = 1,\ldots,\mathrm{k})$ maka untuk mencari taksiran $\hat{\theta}_i$, $\hat{a}_j$, dan $\hat{b}_j$ digunakan suatu metode numerik. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan adalah metode *Newton Raphson*.

Dalam IRM, penggunaan metode *Newton Raphson* untuk mendapatkan taksiran $\hat{\theta}_i$, $\hat{a}_j$, dan $\hat{b}_j$ dilakukan dengan metode *Newton Raphson* dua tahap:

1. Tahap pertama

   a. Pilih taksiran awal dari parameter soal $\boldsymbol{\xi}$, yaitu $\boldsymbol{\xi}^{(0)} = \left(\boldsymbol{a}^{(0)}, \boldsymbol{b}^{(0)}\right)$, dan anggap parameter soal tersebut diketahui.

   b. Pilih taksiran awal dari θ_i yaitu $\hat{\theta}_i^{(0)}$, i=1,...,n.

   c. Tentukan taksiran dari θ_i pada iterasi ke - m+1 (m=0,1,...), yaitu $\hat{\theta}_i^{(m+1)}$, secara iteratif menggunakan formula:

$$\hat{\theta}_i^{(m+1)} = \hat{\theta}_i^{(m)} - \frac{f'\left(\hat{\theta}_i^{(m)}\right)}{f''\left(\hat{\theta}_i^{(m)}\right)} \qquad (3.18)$$

dengan:

$\hat{\theta}_i^{(m)}$ adalah taksiran dari θ_i (i=1,...,n) , pada iterasi ke – m

$f'\left(\hat{\theta}_i^{(m)}\right)$ adalah fungsi turunan parsial pertama dari $l\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}\right)$ terhadap θ_i (i=1,...,n) , dengan parameter $\boldsymbol{\xi}^{(0)} = \left(\boldsymbol{a}^{(0)}, \boldsymbol{b}^{(0)}\right)$ dan dihitung pada $\theta_i = \hat{\theta}_i^{(m)}$

$f''\left(\hat{\theta}_i^{(m)}\right)$ adalah fungsi turunan parsial kedua dari $l\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}\right)$ terhadap θ_i (i=1,...,n) , dengan parameter $\boldsymbol{\xi}^{(0)} = \left(\boldsymbol{a}^{(0)}, \boldsymbol{b}^{(0)}\right)$ dan dihitung pada $\theta_i = \hat{\theta}_i^{(m)}$

d. Hentikan proses iterasi jika $\hat{\theta}_i^{(m+1)} \approx \hat{\theta}_i^{(m)}$ (misalkan $\left\| \hat{\theta}_i^{(m+1)} - \hat{\theta}_i^{(m)} \right\| < 10^{-5}$), kemudian ambil $\hat{\theta}_i^{(m+1)}$ sebagai taksiran $\hat{\theta}_i$.

e. Lakukan langkah ke - b sampai langkah ke – d untuk i=1,...,n sedemikian sehingga didapat taksiran $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n\right)$

2. Tahap kedua

a. Gunakan taksiran $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n\right)$ yang didapat pada tahap pertama dan anggap parameter *latent ability* tersebut diketahui.

b. Ambil nilai awal dari $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(0)} = \left(\hat{a}_j^{(0)},\hat{b}_j^{(0)}\right)$, $j = 1,\ldots,k$ yang digunakan pada tahap pertama sebagai taksiran awal dari $\boldsymbol{\xi}_j = \left(a_j,b_j\right)$, $j = 1,\ldots,k$

c. Tentukan taksiran dari $\boldsymbol{\xi}_j$ pada iterasi ke – m+1 (m=0,1,...), yaitu $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m+1)}$ secara iteratif menggunakan formula:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)} - \left\{\boldsymbol{H}\left[\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}\right]\right\}^{-1} \boldsymbol{f'}\left[\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}\right] \tag{3.19}$$

dengan:

$\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}$ adalah taksiran dari $\mathbf{x}_j$ pada iterasi ke – m,

$\boldsymbol{f'}\left[\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}\right]$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}\right)$ terhadap a_j dan b_j untuk $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n\right)$ dihitung pada $\boldsymbol{\xi}_j = \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}$,

$\boldsymbol{H}\left[\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}\right]$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $l\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}\right)$ terhadap a_j,

b_j dan a_j b_j untuk $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n\right)$ dihitung pada $\boldsymbol{\xi}_j = \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}$,

(lihat penurunan formula (3.18) dan (3.19) pada lampiran 3)

Atau dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \end{bmatrix}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \end{bmatrix}^{(m)} - \left[\begin{bmatrix} H_{a_j a_j}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right) & H_{b_j a_j}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right) \\ H_{a_j b_j}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right) & H_{b_j b_j}\left(\boldsymbol{\xi}_j\right) \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\xi}_j = \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}} \right]^{-1} \begin{bmatrix} f'_{a_j}\left[\boldsymbol{\xi}_j\right] \\ f'_{b_j}\left[\boldsymbol{\xi}_j\right] \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\xi}_j = \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \end{bmatrix}^{(m)} - \left[\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 \cdot \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) & \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \\ \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) & -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\xi}_j = \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \theta_i \left\{ y_{ij} - \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \right\} \\ \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) - y_{ij} \right\} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\xi}_j = \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)}}$$

dengan $m = 0, 1, 2, \ldots$ (3.20)

d. Hentikan proses iterasi jika $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m+1)} = \begin{bmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \end{bmatrix}^{(m+1)} \approx \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)} = \begin{bmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \end{bmatrix}^{(m)}$ (misalkan $\left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m)} \right\| < 10^{-5}$), kemudian ambil $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j^{(m+1)}$ sebagai taksiran $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j = \left(\hat{a}_j, \hat{b}_j\right)$.

e. Lakukan langkah ke - b sampai langkah ke – d untuk j=1,...,k sedemikian sehingga didapat taksiran $\left(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}\right) = \left(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_k\right)$

Pada tahap pertama metode *Newton Raphson*, jika diasumsikan parameter soal $\boldsymbol{\xi}$ pada persamaan (3.4) diketahui maka nilai $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_1, \ldots, \theta_n\right)$

yang diperoleh sebagai hasil penyelesaian dari persamaan (3.8) akan

memaksimumkan $l(\boldsymbol{\theta})$ jika $\left(\dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\right) < 0$.

Telah ditunjukkan pada persamaan (3.12) bahwa $\left(\dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\right) < 0$, oleh karena itu nilai $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ yang memenuhi persamaan (3.8) dikatakan memaksimumkan $l(\boldsymbol{\theta})$. Nilai $\boldsymbol{\theta}$ ini disebut taksiran maksimum *likelihood* dan dinotasikan dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)$. Nilai taksiran $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ini dicari menggunakan tahap pertama metode *Newton Raphson* diatas.

Sedangkan pada tahap kedua metode *Newton Raphson*, jika diasumsikan parameter *latent ability* pada persamaan (3.4) diketahui maka nilai $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$, $\boldsymbol{\xi}_j = (a_j, b_j)$ $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{k}$ yang diperoleh sebagai hasil penyelesaian dari persamaan (3.9), dan (3.10) akan memaksimumkan $l(\boldsymbol{\xi})$ jika

$$\Delta = \left\{ \left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j^2}\right)\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j}\right)^2 \right\} > 0 \tag{3.21}$$

dan $\left(\dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j^2}\right) < 0$ atau $\left(\dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j^2}\right) < 0$.

Telah ditunjukkan pada lampiran 4 bahwa $\Delta > 0$ dan $\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial {a_j}^2}\right) < 0$ atau $\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial {b_j}^2}\right) < 0$, oleh karena itu nilai $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$, $\boldsymbol{\xi}_j = (a_j, b_j)$ yang memenuhi persamaan (3.9), dan (3.10) dikatakan memaksimumkan $l(\boldsymbol{\xi})$. Nilai $\boldsymbol{\xi}$ ini disebut taksiran maksimum *likelihood* dan dinotasikan dengan $\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{\boldsymbol{\xi}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\xi}}_k)$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j = (\hat{a}_j, \hat{b}_j)$. Nilai taksiran $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ ini dicari menggunakan tahap kedua metode *Newton Raphson*.

Setelah mendapatkan taksiran *Newton Raphson* dari $\boldsymbol{\xi}$ pada tahap kedua, ulang kembali tahap pertama dengan menggunakan taksiran parameter soal $\boldsymbol{\xi}$ yang baru sebagai parameter yang diketahui untuk mendapatkan taksiran baru dari $\boldsymbol{\theta}$. Metode *Newton Raphson* dua tahap ini diulang terus sampai parameter *latent ability* dan parameter soal konvergen ke suatu nilai.

Dalam metode *Newton Raphson* dua tahap diatas digunakan nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang telah distandarisasi (mempunyai mean nol dan standar deviasi satu) disetiap iterasi. Maka estimasi dari parameter soal yang didapat juga merupakan nilai yang terstandarisasi.

3.5 Seleksi Soal

Telah dijelaskan diawal bab ini bahwa tujuan dari IRM adalah untuk membangun suatu alat tes yang baik. Tingkat kebaikan suatu soal ditentukan berdasarkan *Fisher Information* yang disebut *item information function*.

Item information function untuk soal ke-j peserta ke - i, dinotasikan dengan $\mathrm{I}_j(\theta_i)$, menyatakan banyaknya informasi yang dimiliki soal ke-j terhadap *ability* peserta ke-i, θ_i. Dapat diartikan bahwa semakin besar nilai $\mathrm{I}_j(\theta_i)$ maka semakin baik soal ke-j dalam mengukur θ_i.

Misalkan Y_{ij} adalah variabel random jawaban soal ke – j dari peserta ke-i dengan ability parameter θ_i dengan pdf

$$f\left(y_{ij};\theta_i\right) = F\left(a_j\theta_i - b_j\right)^{y_{ij}}\left[1 - F\left(a_j\theta_i - b_j\right)\right]^{1-y_{ij}} \tag{3.22}$$

dengan $y_{ij} = 0,1$ dan $j = 1,\ldots,k$, i=1,...,n.

Misalkan $p_{ij} = F\left(a_j\theta_i - b_j\right)$ dan $q_{ij} = 1 - p_{ij} = 1 - F\left(a_j\theta_i - b_j\right)$, maka persamaan (3.22) dapat ditulis sebagai

$$f\left(y_{ij};\theta_i\right) = p_{ij}^{\ y_{ij}} q_{ij}^{\ 1-y_{ij}} \tag{3.23}$$

Fungsi logaritma natural dari persamaan (3.22) diberikan sebagai

$$\ln f\left(y_{ij};\theta_i\right) = y_{ij}\ln p_{ij} + (1 - y_{ij})q_{ij} \tag{3.24}$$

Turunan pertama dari persamaan (3.24) terhadap θ_i diberikan sebagai

$$\frac{\partial \ln f\left(y_{ij};\theta_i\right)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left[y_{ij} \ln p_{ij} + (1-y_{ij})q_{ij} \right]$$

$$= y_{ij} \frac{\partial \ln p_{ij}}{\partial \theta_i} + (1-y_{ij}) \frac{\partial \ln q_{ij}}{\partial \theta_i}$$

$$= \frac{y_{ij}}{p_{ij}} \frac{\partial p_{ij}}{\partial \theta_i} + \frac{(1-y_{ij})}{q_{ij}} \frac{\partial q_{ij}}{\partial \theta_i} \quad \text{, substitusi persamaan (3.7)}$$

$$= \frac{y_{ij}}{p_{ij}} a_j p_{ij} q_{ij} + \frac{(1-y_{ij})}{q_{ij}} \frac{\partial\left(1-p_{ij}\right)}{\partial \theta_i} \text{, substitusi persamaan (3.7)}$$

$$= y_{ij} a_j q_{ij} + \frac{(1-y_{ij})}{q_{ij}}\left(-a_j p_{ij} q_{ij}\right)$$

$$= y_{ij} a_j \left(1-p_{ij}\right) - a_j p_{ij} + y_{ij} a_j p_{ij}$$

$$= y_{ij} a_j - y_{ij} a_j p_{ij} - a_j p_{ij} + y_{ij} a_j p_{ij}$$

$$\frac{\partial \ln f\left(y_{ij};\theta_i\right)}{\partial \theta_i} = a_j\left(y_{ij} - p_{ij}\right) \qquad (3.25)$$

Turunan kedua dari persamaan (3.24) terhadap θ_i diberikan sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln f\left(y_{ij};\theta_i\right)}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left[\frac{\partial \ln f\left(y_{ij};\theta_i\right)}{\partial \theta_i}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left[a_j y_{ij} - a_j p_{ij} \right]$$

$$= -a_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial \theta_i}$$

$$= -a_j^{\,2} p_{ij} q_{ij} \qquad (3.26)$$

Berdasarkan *Fisher Information* maka *item information function*, dinotasikan dengan $\mathrm{I}_j(\theta_i)$, dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathrm{I}_j(\theta_i) = -\sum_{y_{ij}=0}^{1} \frac{\partial^2 \ln f(y_{ij};\theta_i)}{\partial \theta_i^2} \cdot f(y_{ij};\theta_i)$$

$$= -\left[\left(-a_j^{\,2} p_{ij} q_{ij}\right)\left(p_{ij}^{\,0} q_{ij}^{\,1-0}\right) + \left(-a_j^{\,2} p_{ij} q_{ij}\right)\left(p_{ij}^{\,1} q_{ij}^{\,1-1}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(-a_j^{\,2} p_{ij} q_{ij}\right) q_{ij} + \left(-a_j^{\,2} p_{ij} q_{ij}\right) p_{ij}\right]$$

$$= -\left(-a_j^{\,2} p_{ij} q_{ij}\right)\left(q_{ij} + p_{ij}\right)$$

$$= \left(a_j^{\,2} p_{ij} q_{ij}\right)\left[\left(1 - p_{ij}\right) + p_{ij}\right]$$

$$\mathrm{I}_j(\theta_i) = a_j^{\,2} p_{ij} q_{ij} \qquad (3.27)$$

Setelah memperoleh nilai $\mathrm{I}_j(\theta_i)$ untuk setiap soal ke–j peserta ke-i, maka langkah berikutnya adalah menghitung total informasi yang dimiliki seluruh soal untuk peserta ke – i yaitu dengan menjumlahkan $\mathrm{I}_j(\theta_i)$ untuk seluruh soal.

Notasikan total informasi untuk peserta ke – i adalah

$$A(\theta_i) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{I}_j(\theta_i) \qquad (3.28)$$

$A(\theta_i)$ dikenal dengan sebutan *test information function.* Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $A(\theta_i) = \mathrm{I}(\theta_i)$ dimana $\mathrm{I}(\theta_i)$ adalah *Fisher Information*.

Bukti:

Pandang $A(\theta_i) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{I}_j(\theta_i)$.

Akan dibuktikan bahwa $A(\theta_i) = \mathrm{I}(\theta_i)$, dengan perkataan lain akan dibuktikan

bahwa $\mathrm{I}(\theta_i) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{I}_\mathrm{j}(\theta_i)$.

Misalkan $Y_{i1},\ldots,Y_{ik}$ adalah variabel random jawaban soal yang independen

dari peserta ke- i dengan *latent ability* θ_i dengan pdf $f(y_{ij};\theta_i)$, $\mathrm{j} = 1,\ldots,\mathrm{k}$.

Maka fungsi *likelihood* dapat diberikan sebagai

$$L(\theta_i) = L(\theta_i \ ; \mathrm{y}_{i1},\ldots,y_{ik})$$

$$= f(y_{i1},\ldots,y_{ik} \ ; \ \theta_i)$$

$$L(\theta_i) = f(y_{i1} \ ; \ \theta_i) \times \ldots \times f(y_{ik} \ ; \ \theta_i)$$

Bentuk logaritma dari persamaan diatas adalah

$$\ln L(\theta_i) = \ln f(y_{i1} \ ; \ \theta_i) + \ldots + \ln f(y_{ik} \ ; \ \theta_i)$$

Dan

$$\frac{\partial \ln L(\theta_i)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \ln f(y_{i1} \ ; \ \theta_i)}{\partial \theta_i} + \ldots + \frac{\partial \ln f(y_{ik} \ ; \ \theta_i)}{\partial \theta_i} \qquad (3.29)$$

Maka *Fisher Information* dapat diberikan sebagai

$$\mathrm{I}(\theta_i) = E\left\{ \left[\frac{\partial \ln L(\theta_i)}{\partial \theta_i} \right]^2 \right\} \qquad (3.30)$$

Jika persamaan (3.29) dikuadratkan maka akan didapat bentuk perkalian,

yaitu

$$2E\left\{\frac{\partial \ln f\left(y_{im}\ ;\ \theta_i\right)}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial \ln f\left(y_{in}\ ;\ \theta_i\right)}{\partial \theta_i}\right\},\quad \mathrm{m}\neq n$$

Karena Y_{im} dan Y_{in} saling independen dan berdasarkan persamaan (2) *Fisher Information* (pada landasan teori), maka dapat ditulis

$$\begin{aligned}
&2E\left\{\frac{\partial \ln f\left(y_{im}\ ;\ \theta_i\right)}{\partial \theta_i}\right\}\cdot E\left\{\frac{\partial \ln f\left(y_{in}\ ;\ \theta_i\right)}{\partial \theta_i}\right\}\\
&=2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \ln f\left(y_{im}\ ;\ \theta_i\right)}{\partial \theta_i}\cdot f\left(y_{im}\ ;\ \theta_i\right)dy_{im}\right\}\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \ln f\left(y_{in}\ ;\ \theta_i\right)}{\partial \theta_i}\cdot f\left(y_{in}\ ;\ \theta_i\right)dy_{in}\right\}\\
&=0
\end{aligned}$$

Oleh karena itu *Fisher Information* pada persamaan (3.30) dapat diberikan sebagai

$$\mathrm{I}\left(\theta_i\right)=\sum_{j=1}^{k} E\left\{\left[\frac{\partial \ln f\left(y_{ij}\ ;\ \theta_i\right)}{\partial \theta_i}\right]^2\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k} E\left\{-\frac{\partial^2 \ln f\left(y_{ij}\ ;\ \theta_i\right)}{\partial \theta_i^2}\right\}$$

$$\mathrm{I}\left(\theta_i\right)=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{I}_j\left(\theta_i\right)\ ,\ i=1,\ldots,n \qquad \text{(terbukti)}$$

Karena terdapat n-peserta tes dengan *latent* ability $\theta_1,\ldots,\theta_n$ maka *test information function* dilakukan terhadap setiap θ_i , $i=1,\ldots,n$. Pilih θ yang memiliki nilai $\mathrm{A}\left(\theta\right)$ terbesar. Tingkat kebaikan soal dapat diurutkan berdasarkan nilai $\mathrm{I}_j\left(\theta\right)$. Semakin besar nilai $\mathrm{I}_j\left(\theta\right)$ yang dimiliki suatu soal maka semakin baik soal tersebut. Sejumlah n-soal terbaik dipilih untuk dijadikan alat tes yang baru.

BAB IV

APLIKASI

Dalam skripsi ini IRM akan diaplikasikan untuk mengevalusi soal tes matematika. Dengan IRM, diharapkan soal tes tersebut mampu mengukur kemampuan matematika para peserta tes dengan tepat.

4.1 Data

Data berasal dari hasil tes matematika semester genap tahun ajaran 2007-2008 siswa SMP XYZ kelas VII di kota A. Lampiran 5 memuat data jawaban tes matematika yang terdiri dari 30 soal dan diikuti oleh 143 peserta tes.

4.2 Analisis Data

Berdasarkan data diatas akan dicari taksiran parameter *latent* ability, diskriminasi soal dan kesulitan soal dan kemudian akan dilakukan seleksi soal terbaik berdasarkan taksiran parameter yang didapat.

Dengan menggunakan *software* MATLAB versi 5.3 diperoleh taksiran parameter *latent ability* dan karakteristik soal (tingkat diskriminasi dan kesulitan soal). Tabel 1 menampilkan taksiran parameter *latent* *ability,θ*, dari 143 peserta dan tabel 2 menampilkan taksiran parameter diskriminasi soal, a, dan kesulitan soal, b, dari 30 soal yang dimasukkan kedalam tes.

Tabel 1

Taksiran Parameter *Latent Ability*

θ		**θ**		**θ**		**θ**	
θ1	2.2466	θ37	1.4438	θ73	2.2466	θ109	1.1691
θ2	-0.478	θ38	0.5554	θ74	-0.2018	θ110	-0.756
θ3	-0.756	θ39	-0.756	θ75	-0.6162	θ111	-0.478
θ4	0.3885	θ40	-0.3402	θ76	-0.2018	θ112	2.2466
θ5	0.5554	θ41	-1.1988	θ77	0.9383	θ113	1.787
θ6	-0.0613	θ42	-0.756	θ78	0.3885	θ114	-0.756
θ7	0.9383	θ43	-1.0455	θ79	-0.0613	θ115	0.0827
θ8	-0.6162	θ44	-1.1988	θ80	-0.0613	θ116	-0.478
θ9	0.2319	θ45	-1.1988	θ81	-0.478	θ117	1.4438
θ10	0.0827	θ46	1.1691	θ82	-1.0455	θ118	-0.756
θ11	-0.6162	θ47	0.0827	θ83	-0.6162	θ119	1.1691
θ12	2.2466	θ48	-0.6162	θ84	-0.3402	θ120	0.2319
θ13	0.7367	θ49	-1.3614	θ85	0.3885	θ121	1.787
θ14	0.9383	θ50	-0.756	θ86	-0.6162	θ122	-0.756
θ15	-0.6162	θ51	-0.0613	θ87	0.3885	θ123	-0.8986
θ16	0.7367	θ52	-1.3614	θ88	-0.6162	θ124	-1.0455
θ17	-0.478	θ53	0.5554	θ89	-0.478	θ125	1.4438
θ18	0.5554	θ54	0.9383	θ90	-0.6162	θ126	-0.478
θ19	-0.0613	θ55	1.4438	θ91	2.2466	θ127	0.2319
θ20	4.2863	θ56	0.5554	θ92	-1.3614	θ128	-1.3614
θ21	-0.0613	θ57	1.1691	θ93	-0.0613	θ129	-1.9687
θ22	-0.6162	θ58	0.2319	θ94	0.7367	θ130	-0.3402
θ23	0.5554	θ59	0.2319	θ95	-0.8986	θ131	-0.3402
θ24	-1.1988	θ60	-0.8986	θ96	-0.0613	θ132	0.9383
θ25	-0.3402	θ61	-0.2018	θ97	0.3885	θ133	-0.3402
θ26	0.9383	θ62	-0.6162	θ98	-0.6162	θ134	-1.538
θ27	-1.0455	θ63	-1.3614	θ99	-1.538	θ135	-0.0613
θ28	-0.756	θ64	-0.6162	θ100	-0.478	θ136	2.2466

θ29	0.7367	θ65	-0.0613	θ101	0.3885	θ137	-0.8986
θ30	0.3885	θ66	-1.1988	θ102	-0.6162	θ138	0.2319
θ31	-0.0613	θ67	-0.478	θ103	-0.3402	θ139	0.0827
θ32	2.2466	θ68	-0.0613	θ104	-0.8986	θ140	0.0827
θ33	-0.478	θ69	-0.6162	θ105	0.0827	θ141	0.2319
θ34	-0.6162	θ70	-0.756	θ106	-0.756	θ142	1.1691
θ35	-0.6162	θ71	-1.0455	θ107	0.3885	θ143	2.2466
	θ36	-0.2018	θ72	0.3885	θ108	0.0827	

Tabel 2

Taksiran Parameter Diskriminasi Soal dan Kesulitan Soal

a		**a**		**b**		**b**	
a1	1.5743	a16	0.7245	b1	-1.8564	b16	1.1925
a2	0.9021	a17	0.7967	b2	0.8334	b17	-0.6555
a3	1.0917	a18	1.1427	b3	0.628	b18	-0.5707
a4	1.0974	a19	1.4161	b4	0.0222	b19	-1.7221
a5	1.1494	a20	0.7848	b5	0.594	b20	0.4362
a6	2.0126	a21	0.2402	b6	-1.95	b21	-1.3005
a7	1.9277	a22	2.1656	b7	0.3079	b22	-2.9173
a8	1.2795	a23	0.1474	b8	-0.3204	b23	-0.0706
a9	1.5319	a24	1.3732	b9	-1.4554	b24	-0.5234
a10	1.3312	a25	0.8015	b10	0.1056	b25	-0.5902
a11	2.2758	a26	0.6419	b11	-0.6568	b26	0.0586
a12	1.0833	a27	0.7642	b12	-1.3416	b27	-0.5495
a13	0.6059	a28	1.8516	b13	0.8994	b28	-0.6185
a14	2.1149	a29	0.9038	b14	-3.0369	b29	0.0081
a15	1.3601	a30	2.1025	b15	0.4073	b30	1.1292

Setelah memperoleh nilai taksiran dari tiap parameter, maka dapat dihitung nilai *test information function* untuk setiap peserta tes. Tabel 3 menampilkan *test information function* untuk setiap *latent ability* peserta tes.

Tabel 3

Test Information Function Peserta Tes

TIθ		TIθ		TIθ		TIθ	
TIθ1	1.8067	TIθ37	3.7954	TIθ73	1.8067	TIθ109	4.8668
TIθ2	10.4204	TIθ38	7.7058	TIθ74	10.1924	TIθ110	10.2711
TIθ3	10.2711	TIθ39	10.2711	TIθ75	10.3902	TIθ111	10.4204
TIθ4	8.4334	TIθ40	10.3569	TIθ76	10.1924	TIθ112	1.8067
TIθ5	7.7058	TIθ41	9.283	TIθ77	5.9046	TIθ113	2.7546
TIθ6	9.9207	TIθ42	10.2711	TIθ78	8.4334	TIθ114	10.2711
TIθ7	5.9046	TIθ43	9.7395	TIθ79	9.9207	TIθ115	9.5382
TIθ8	10.3902	TIθ44	9.283	TIθ80	9.9207	TIθ116	10.4204
TIθ9	9.0432	TIθ45	9.283	TIθ81	10.4204	TIθ117	3.7954
TIθ10	9.5382	TIθ46	4.8668	TIθ82	9.7395	TIθ118	10.2711
TIθ11	10.3902	TIθ47	9.5382	TIθ83	10.3902	TIθ119	4.8668
TIθ12	1.8067	TIθ48	10.3902	TIθ84	10.3569	TIθ120	9.0432
TIθ13	6.8599	TIθ49	8.6526	TIθ85	8.4334	TIθ121	2.7546
TIθ14	5.9046	TIθ50	10.2711	TIθ86	10.3902	TIθ122	10.2711
TIθ15	10.3902	TIθ51	9.9207	TIθ87	8.4334	TIθ123	10.0594
TIθ16	6.8599	TIθ52	8.6526	TIθ88	10.3902	TIθ124	9.7395
TIθ17	10.4204	TIθ53	7.7058	TIθ89	10.4204	TIθ125	3.7954
TIθ18	7.7058	TIθ54	5.9046	TIθ90	10.3902	TIθ126	10.4204
TIθ19	9.9207	TIθ55	3.7954	TIθ91	1.8067	TIθ127	9.0432
TIθ20	0.3412	TIθ56	7.7058	TIθ92	8.6526	TIθ128	8.6526
TIθ21	9.9207	TIθ57	4.8668	TIθ93	9.9207	TIθ129	5.4217
TIθ22	10.3902	TIθ58	9.0432	TIθ94	6.8599	TIθ130	10.3569
TIθ23	7.7058	TIθ59	9.0432	TIθ95	10.0594	TIθ131	10.3569
TIθ24	9.283	TIθ60	10.0594	TIθ96	9.9207	TIθ132	5.9046
TIθ25	10.3569	TIθ61	10.1924	TIθ97	8.4334	TIθ133	10.3569
TIθ26	5.9046	TIθ62	10.3902	TIθ98	10.3902	TIθ134	7.8105
TIθ27	9.7395	TIθ63	8.6526	TIθ99	7.8105	TIθ135	9.9207
TIθ28	10.2711	TIθ64	10.3902	TIθ100	10.4204	TIθ136	1.8067
TIθ29	6.8599	TIθ65	9.9207	TIθ101	8.4334	TIθ137	10.0594
TIθ30	8.4334	TIθ66	9.283	TIθ102	10.3902	TIθ138	9.0432
TIθ31	9.9207	TIθ67	10.4204	TIθ103	10.3569	TIθ139	9.5382
TIθ32	1.8067	TIθ68	9.9207	TIθ104	10.0594	TIθ140	9.5382
TIθ33	10.4204	TIθ69	10.3902	TIθ105	9.5382	TIθ141	9.0432

TIθ34	10.3902	TIθ70	10.2711	TIθ106	10.2711	TIθ142	4.8668
TIθ35	10.3902	TIθ71	9.7395	TIθ107	8.4334	TIθ143	1.8067
	TIθ36	10.1924	TIθ72	8.4334	TIθ108	9.5382	

TIθ = *Test Information* dari peserta tes dengan *latent ability* θ

Dari hasil tersebut diketahui bahwa nilai *test information function* terbesar adalah 10.4204 didapat oleh peserta dengan *latent ability,* θ = -0,478. Langkah selanjutnya, dengan nilai θ = -0,478, urutkan nilai *item information function* dari yang paling informatif sampai yang kurang informatif. Tabel 4 menampilkan nilai *item information function* untuk θ = -0,478. Sedangkan Tabel 5 menampilkan nilai *item information function* untuk θ = -0,478 yang telah diurutkan dari yang paling informatif sampai yang kurang informatif.

Tabel 4

Item Information Function untuk θ = -0,478

I		I	
I1	0.4635	I16	0.0764
I2	0.1397	I17	0.1557
I3	0.2177	I18	0.3264
I4	0.2797	I19	0.3859
I5	0.2421	I20	0.1312
I6	0.8008	I21	0.0103
I7	0.6506	I22	0.5379
I8	0.4007	I23	0.0054
I9	0.5162	I24	0.4693
I10	0.3872	I25	0.1589
I11	1.2365	I26	0.0996
I12	0.2487	I27	0.1448

I13	0.0657	I28	0.8421
I14	0.4604	I29	0.1946
I15	0.3539	I30	0.4183

Tabel 5

Item Information Function Untuk θ = -0,478 Yang Diurutkan

sort_I		sort_I	
I11	11	I4	4
I28	28	I12	12
I6	6	I5	5
I7	7	I3	3
I22	22	I29	29
I9	9	I25	25
I24	24	I17	17
I1	1	I27	27
I14	14	I2	2
I30	30	I20	20
I8	8	I26	26
I10	10	I16	16
I19	19	I13	13
I15	15	I21	21
I18	18	I23	23

Pilih sejumlah n-soal yang paling informatif untuk dijadikan alat tes yang baru. Jumlah soal yang dipilih disesuaikan dengan kebutuhan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penulisan skripsi ini:

1. Taksiran parameter *latent ability*, diskriminasi soal dan kesulitan soal diperoleh dengan menggunakan metode penaksiran *joint maximum likelihood.*
2. Tingkat kebaikan setiap soal dapat dicari dan dibandingkan dengan menggunakan *item information function*.
3. *Item response model* cukup baik untuk menyeleksi soal berdasarkan parameter *latent ability*, diskriminasi soal dan kesulitan soal.

5.2 Saran

Saran untuk pengembangan skripsi ini:

1. *Item response model* dapat diaplikasikan dalam tes dengan format jawaban politomus.
2. Dalam memodelkan probabilitas jawaban peserta tes dapat ditambahkan parameter *guessing* (menebak) selain parameter *latent ability*, diskriminasi soal dan kesulitan soal.

3. Fungsi probabilitas jawaban soal dapat diasumsikan mengikuti fungsi distribusi dari distribusi normal standar.
4. Penaksiran parameter dapat dilakukan dengan metode lain seperti metode penaksiran *Marginal Maximum Likelihood* atau metode Bayes.

DAFTAR PUSTAKA

Baker, F.B. 2001. *The Basics of Item Response Theory*. ERIC Clearinghouse for Assessment and Evaluation.

Embretson, S.E., Reise, S.P. 2000. *Item Response Model for Psychologist*. Lawrence Elbraum.

Hogg, R.V., Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics, fifth edition.* Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Hulin, C.L., Drasgow, F., Parsons, C.K. 1983. *Item Response Theory : Application to Psychological Measurement.* Dow Jones – Irwin, Illinois.

Johnson, V.E., Albert, J.H. 2000. *Ordinal Data Modeling*. Springer-Verlag, New York.

Pawitan, Y. 2001. *In All Likelihood : Statistical Modelling and Inference Using Likelihood.* Oxford University Press Inc., New York.

Toribio, S.G. 2006. “Bayesian Model Checking Strategies for Dichotomous Item Response Theory Models”. Bowling Green University, Ohio.

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Menunjukkan, θ memaksimumkan L(θ) $\leftrightarrow$ θ memaksimumkan lnL(θ)

Bukti:

($\rightarrow$) karena θ memaksimumkan L(θ) maka

- $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$,

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

- $\dfrac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$,

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0 \cdot \frac{1}{L(\theta)} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot 0 + 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

Dengan perkataan lain θ juga memaksimumkan lnL(θ).

($\leftarrow$)karena θ memaksimumkan lnL(θ) maka

- $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$,

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = L(\theta) \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

- $\dfrac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L(\theta)}\right) \cdot 0 + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot L(\theta) < 0 \cdot L(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

Dengan perkataan lain θ juga memaksimumkan L(θ).

Terbukti bahwa θ memaksimumkan L(θ) $\leftrightarrow$ θ memaksimumkan lnL(θ).

LAMPIRAN 2

Menunjukkan : $\boldsymbol{\theta}$ memaksimumkan $L(\boldsymbol{\theta})$ $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{\theta}$ memaksimumkan $\ln L(\boldsymbol{\theta})$,

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n).$$

Bukti:

$(\rightarrow)$ karena $\boldsymbol{\theta}$ memaksimumkan $L(\boldsymbol{\theta})$ maka

- $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = 0$,
- $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = 0$,

  $\vdots$
- $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = 0$,
- $\dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} < 0$, $\mathrm{i} = 1, \ldots, n$,
- $D = \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} - \left(\dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right)^2 > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathrm{j} = 1, \ldots, n$, $i \neq j$

akan ditunjukkan $\boldsymbol{\theta}$ juga memaksimumkan $\ln L(\boldsymbol{\theta})$ yaitu

- $\dfrac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = 0$,

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = 0$$

- $$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot 0$$

$$\therefore \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\vdots$$

- $$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = 0$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = \frac{1}{\mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial \mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = \frac{1}{\mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})} \cdot 0$$

$$\therefore \frac{\partial \ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = 0$$

- $$\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} < 0 \ \ , \ i = 1,\ldots,n$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})}\right) \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} + \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})}\right) \cdot 0 + \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})}$$

$$= \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} < 0 \cdot \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} < 0 \ , \ \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n}$$

- $D = \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right)^2 > 0 \quad ,i = 1,\ldots,n \quad ,j = 1,\ldots,n \quad ,i \neq j$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}}{L(\boldsymbol{\theta})} \right), \ \mathrm{i} = 1,\ldots,n$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta}) - \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}}{L(\boldsymbol{\theta})^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}}{L(\boldsymbol{\theta})} \right), \ \mathrm{j} = 1,\ldots,n$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta}) - \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}}{L(\boldsymbol{\theta})^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}}{L(\boldsymbol{\theta})} \right), \ i = 1,\ldots,n \ \ , \mathrm{j} = 1,\ldots,n \ \ , \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \cdot L(\boldsymbol{\theta}) - \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}}{L(\boldsymbol{\theta})^2}$$

$$D=\left(\frac{\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot L(\boldsymbol{\theta})-\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}\cdot L(\boldsymbol{\theta})-\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\right)$$

$$-\left(\frac{\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\cdot L(\boldsymbol{\theta})-\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\right)^2 \quad , \mathrm{i}=1,\ldots,n \quad , \mathrm{j}=1,\ldots,n \quad , \mathrm{i}\neq \mathrm{j}$$

$$=\frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})^4}\left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}\cdot L(\boldsymbol{\theta})^2+\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\right)^2\cdot L(\boldsymbol{\theta})-\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right)^2\cdot L(\boldsymbol{\theta})\right]$$

$$-\frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})^4}\left[\left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right)^2\cdot L(\boldsymbol{\theta})^2+\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\cdot L(\boldsymbol{\theta})\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right)\right]$$

$$=\frac{L(\boldsymbol{\theta})^2}{L(\boldsymbol{\theta})^4}\left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right)^2\right]$$

$$+\frac{L(\boldsymbol{\theta})}{L(\boldsymbol{\theta})^4}\left[2\cdot\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}-\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}\cdot\left(\frac{\partial \mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right)^2\right]+\frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})^3}\left[2\cdot\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\cdot 0\cdot 0\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot(0)^2-\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}\cdot(0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right)^2\right] > \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\cdot 0 = 0$$

$$\therefore D = \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}-\left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right)^2 > 0 \quad ,i=1,\ldots,n \quad ,j=1,\ldots,n \quad ,i\neq j$$

Dengan perkataan lain terbukti bahwa $\boldsymbol{\theta}$ juga memaksimumkan $\ln L(\boldsymbol{\theta})$.

$(\leftarrow)$ karena $\boldsymbol{\theta}$ memaksimumkan $\ln L(\boldsymbol{\theta})$ maka

- $\dfrac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1} = 0$,
- $\dfrac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_2} = 0$,

  $\vdots$
- $\dfrac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_n} = 0$
- $\dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2} < 0 \quad , \ i=1,\ldots,n$,
- $D = \dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i^2}\cdot\dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j^2}-\left(\dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right)^2 > 0 \quad , \mathrm{i}=1,\ldots,n \quad , \mathrm{j}=1,\ldots,n \quad ,\mathrm{i}\neq \mathrm{j}$

Akan ditunjukkan ***θ*** juga memaksimumkan L(***θ***) yaitu:

- $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = 0$,

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = 0$$

- $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = 0$,

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\vdots$$

- $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = 0$,

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = L(\boldsymbol{\theta}) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n} = 0$$

- $\dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} < 0$, $\mathrm{i} = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} = \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + 0 \right]$$

$$= \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta}) < 0 \cdot L(\boldsymbol{\theta}) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} < 0, \quad \mathrm{i} = 1, \ldots, n$$

- $D = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right)^2 > 0 \ , \ \mathrm{i} = 1, \ldots, n \ \ , \mathrm{j} = 1, \ldots, n \ \ , \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} = \frac{\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^2}{L(\boldsymbol{\theta})}, \ \mathrm{i} = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} = \frac{\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right)^2}{L(\boldsymbol{\theta})}, \ \mathrm{j} = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = \frac{\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}}{L(\boldsymbol{\theta})}, \ \mathrm{i} = 1, \ldots, n \ \ , \mathrm{j} = 1, \ldots, n \ \ , \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

$$D = \left(\frac{\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^2}{L(\boldsymbol{\theta})} \right) \cdot \left(\frac{\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right)^2}{L(\boldsymbol{\theta})} \right)$$

$$- \left(\frac{\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}}{L(\boldsymbol{\theta})} \right)^2, \ \mathrm{i} = 1, \ldots, n \ \ , \mathrm{j} = 1, \ldots, n \ \ , \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

$$= \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2}\cdot L(\boldsymbol{\theta})^4 + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right)^2 \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 + \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right)^2 \cdot L(\boldsymbol{\theta})^2\right]$$

$$- \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\left[\left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i}\right)^2 \cdot L(\boldsymbol{\theta})^4 + \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right)^2\right.$$

$$\left. +2\left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i}\cdot L(\boldsymbol{\theta})^2 \cdot \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right)\right]$$

$$= \frac{L(\boldsymbol{\theta})^4}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{L(\boldsymbol{\theta})^2}{L(\boldsymbol{\theta})^2}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right)^2 + \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2}\cdot\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right)^2\right.$$

$$\left. -2\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\cdot\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right]$$

$$= L(\boldsymbol{\theta})^2\left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i}\right)^2\right] + 1\cdot\left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\cdot(0)^2 +\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2}\cdot(0)^2 - 2\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i}\cdot 0\cdot 0\right]$$

$$= L(\boldsymbol{\theta})^2\left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2}\cdot\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i}\right)^2\right] > L(\boldsymbol{\theta})^2\cdot 0 = 0$$

$$\therefore D = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \cdot \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} - \left(\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right)^2 > 0 \text{ , } \mathrm{i} = 1,\ldots,n \text{ , } \mathrm{j} = 1,\ldots,n \text{ ,} \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

Dengan perkataan lain terbukti bahwa $\boldsymbol{\theta}$ juga memaksimumkan $\mathrm{L}(\boldsymbol{\theta})$.

Terbukti bahwa $\boldsymbol{\theta}$ memaksimumkan $L(\boldsymbol{\theta}) \leftrightarrow \boldsymbol{\theta}$ memaksimumkan $\ln L(\boldsymbol{\theta})$,

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$.

LAMPIRAN 3

Metode Newton Raphson

Misalkan $\boldsymbol{\xi}$ adalah vektor dari 2k buah parameter yang tidak diketahui, yaitu

$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_j)$, $\boldsymbol{\xi}_j = (a_j, b_j)$, $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{k}$, $l(\boldsymbol{\xi})$ adalah fungsi *log – likelihood* dari

vektor $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{f}'[\boldsymbol{\xi}]$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\xi})$ yaitu

$\mathbf{f}'(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_{a_j}[\boldsymbol{\xi}] \\ \mathbf{f}'_{b_j}[\boldsymbol{\xi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j} \\ \dfrac{\partial l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j} \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi})$ adalah matriks turunan parsial kedua dari

$l(\boldsymbol{\xi})$ yaitu

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j} & \dfrac{\partial \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}'_{a_j}[\boldsymbol{\xi}]}{\partial a_j} & \dfrac{\partial \mathbf{f}'_{a_j}[\boldsymbol{\xi}]}{\partial b_j} \\ \dfrac{\partial \mathbf{f}'_{b_j}[\boldsymbol{\xi}]}{\partial a_j} & \dfrac{\partial \mathbf{f}'_{b_j}[\boldsymbol{\xi}]}{\partial b_j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j{}^2} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j \partial a_j} \\ \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j{}^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{a_j a_j}(\boldsymbol{\xi}) & H_{a_j b_j}(\boldsymbol{\xi}) \\ H_{b_j a_j}(\boldsymbol{\xi}) & H_{b_j b_j}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Newton Raphson akan dicari taksiran dari $\boldsymbol{\xi}$ yang merupakan penyelesaian dari $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}) = 0$. Jika diberikan taksiran awal dari $\boldsymbol{\xi}$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$, maka dapat diperoleh pendekatan deret Taylor orde pertama dari vektor $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})$ disekitar $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$, yaitu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}'(\boldsymbol{\xi}) &\approx \mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}'(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}} \left(a_j - \hat{a}_j{}^{(0)}\right) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}'(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}} \left(b_j - \hat{b}_j{}^{(0)}\right) \\
&\approx \mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) + \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial \mathbf{f}'(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}} & \left.\dfrac{\partial \mathbf{f}'(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j - \hat{a}_j{}^{(0)} \\ b_j - \hat{b}_j{}^{(0)} \end{bmatrix} \\
&\approx \mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) + \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j{}^2} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j \partial a_j} \\ \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j} & \dfrac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j{}^2} \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}} \left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) \\
&\approx \mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) + \left.\begin{bmatrix} H_{a_j a_j}(\boldsymbol{\xi}) & H_{b_j a_j}(\boldsymbol{\xi}) \\ H_{a_j b_j}(\boldsymbol{\xi}) & H_{b_j b_j}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}} \left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)
\end{aligned}$$

Atau:

$$\mathbf{f}'(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) + \boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) \tag{1}$$

dengan :

$\mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\xi})$ dihitung pada

$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$.

$\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\xi})$ dihitung pada $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$.

Karena ingin mencari penyelesaian dari $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})$=0, maka dapat ditulis:

$$0 = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}) \approx \boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) + \boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)$$

$$\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) = -\boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) \tag{2}$$

Jika matriks $\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)$ tidak singular maka:

$$\left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) = -\left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\right]^{-1}\mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)$$

$$\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) = -\left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\right]^{-1}\mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)} - \left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\right]^{-1}\mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) \tag{3}$$

Nilai $\boldsymbol{\xi}$ menjadi taksiran baru yang kemudian dinotasikan dengan $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)} - \left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right)\right]^{-1}\mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}\right) \tag{4}$$

Jika $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} \approx \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(0)}$ (misalkan $\left\|\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}\right\| < 10^{-5}$), maka hentikan proses iterasi dan kemudian ambil $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ sebagai taksiran dari $\hat{\boldsymbol{\xi}}$. Sebaliknya, lanjutkan iterasi. Jika diberikan taksiran $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ maka dapat diperoleh pendekatan deret Taylor orde pertama dari vektor $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})$ sekitar $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$, yaitu :

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}) \approx \boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) + \boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) \tag{5}$$

dengan:

$\boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\xi})$ dihitung pada $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$,

$\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\xi})$ dihitung pada $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$.

Dengan menyelesaikan

$$0 = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) + \mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)$$

diperoleh

$$\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) = -\boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) \tag{6}$$

Jika matriks $\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)$ tidak singular maka :

$$\left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) = -\left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)$$

$$\left(\boldsymbol{\xi} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) = -\left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} - \left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) \tag{7}$$

Nilai $\boldsymbol{\xi}$ menjadi taksiran baru yang kemudian dinotasikan dengan $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}$:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} - \left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}\right) \tag{8}$$

Dengan mengulang langkah yang sama dapat diperoleh taksiran $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(3)}, \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(4)}$, dan seterusnya. Secara umum dapat ditentukan taksiran dari $\boldsymbol{\xi}$ pada iterasi ke – m+1, yaitu $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m+1)}$, secara iteratif menggunakan formula:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)} - \left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}\right)\right]^{-1} \boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}\right), \quad m = 0,1,\ldots \tag{9}$$

dengan:

$\boldsymbol{f}'\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}\right)$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\xi})$ dihitung pada $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}$,

$\boldsymbol{H}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}\right)$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\xi})$ dihitung pada $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}$.

Hentikan proses iterasi jika $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m+1)} \approx \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}$ (misalkan $\left\|\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}\right\| < 10^{-5}$), lalu ambil $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(m+1)}$ sebagai taksiran dari $\hat{\boldsymbol{\xi}}$.

Lampiran 4

Menunjukkan $\Delta = \left\{\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j^{\,2}}\right)\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j^{\,2}}\right) - \left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j}\right)^2\right\} > 0$ dan $\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j^{\,2}}\right) < 0$ atau $\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j^{\,2}}\right) < 0$.

Diketahui turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\xi})$ terhadap a_j dan b_j adalah:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j{}^2} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\theta_i^2 \cdot \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\right\} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\theta_i^2 \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}\right\} < 0$$

untuk setiap a_j dan b_j,

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\theta_i \cdot \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\right\} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\theta_i \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j{}^2} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right)\right\} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{p_{ij} \cdot q_{ij}\right\} < 0$$

untuk setiap a_j dan b_j, dengan

$$p_{ij} = \left(\frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) \text{ dan } q_{ij} = 1 - p_{ij} = \left(1 - \frac{e^{a_j\theta_i - b_j}}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right) = \left(\frac{1}{1+e^{a_j\theta_i - b_j}}\right).$$

Oleh karena itu, untuk setiap a_j dan b_j diperoleh :

$$\Delta = \left\{\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j{}^2}\right)\left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial b_j{}^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_j \partial b_j}\right)^2\right\}$$

$$= \left\{\left(-\sum_{i=1}^{n}\left\{\theta_i^2 \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}\right\}\right)\left(-\sum_{i=1}^{n}\left\{p_{ij} \cdot q_{ij}\right\}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left\{\theta_i \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}\right\}\right)^2\right\}$$

$$= \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left\{\theta_i^2 \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}\right\}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left\{p_{ij} \cdot q_{ij}\right\}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left\{\theta_i \cdot p_{ij} \cdot q_{ij}\right\}\right)^2\right\}$$

$$= \Big\{\left(\theta_1^2 \cdot p_{1j} \cdot q_{1j} + \theta_2^2 \cdot p_{2j} \cdot q_{2j} + \ldots + \theta_n^2 \cdot p_{nj} \cdot q_{nj}\right)\left(p_{1j} \cdot q_{1j} + p_{2j} \cdot q_{2j} + \ldots + p_{nj} \cdot q_{nj}\right) -$$
$$\left(\theta_1 \cdot p_{1j} \cdot q_{1j} + \theta_2 \cdot p_{2j} \cdot q_{2j} + \ldots + \theta_n \cdot p_{nj} \cdot q_{nj}\right)^2\Big\}$$

$$= \Big\{\Big(\theta_1^2 \cdot p_{1j}{}^2 \cdot q_{1j}{}^2 + \theta_1^2 \cdot p_{1j} \cdot p_{2j} \cdot q_{1j} \cdot q_{2j} + \ldots + \theta_1^2 \cdot p_{1j} \cdot p_{nj} \cdot q_{1j} \cdot q_{nj} + \theta_2{}^2 \cdot p_{1j} \cdot p_{2j} \cdot q_{1j} \cdot q_{2j} +$$
$$\theta_2{}^2 \cdot p_{2j}{}^2 \cdot q_{2j}{}^2 + \ldots + \theta_2{}^2 \cdot p_{2j} \cdot p_{nj} \cdot q_{2j} \cdot q_{nj} + \ldots + \theta_n{}^2 \cdot p_{1j} \cdot p_{nj} \cdot q_{1j} \cdot q_{nj} +$$
$$\theta_n{}^2 \cdot p_{2j} \cdot p_{nj} \cdot q_{2j} \cdot q_{nj} + \ldots + \theta_n{}^2 \cdot p_{nj}{}^2 \cdot q_{nj}{}^2\Big) - \Big(\theta_1^2 \cdot p_{1j}{}^2 \cdot q_{1j}{}^2 + \theta_2 \cdot \theta_1 \cdot p_{1j} \cdot p_{2j} \cdot q_{1j} \cdot q_{2j} +$$

$$\ldots + \theta_n \cdot \theta_1 \cdot p_{1j} \cdot p_{nj} \cdot q_{1j} \cdot q_{nj} + \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot p_{1j} \cdot p_{2j} \cdot q_{1j} \cdot q_{2j} + \theta_2^{\,2} \cdot p_{2j}^{\;2} \cdot q_{2j}^{\;2} + \ldots +$$

$$\theta_n \cdot \theta_2 \cdot p_{2j} \cdot p_{nj} \cdot q_{2j} \cdot q_{nj} + \ldots + \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot p_{1j} \cdot p_{nj} \cdot q_{1j} \cdot q_{nj} + \theta_2 \cdot \theta_n \cdot p_{2j} \cdot p_{nj} \cdot q_{2j} \cdot q_{nj} + \ldots +$$

$$\theta_n^{\,2} \cdot p_{nj}^{\;2} \cdot q_{nj}^{\;2} \Big) \Big\}$$

$$= \Big\{ \left(\theta_1^2 - 2\theta_1 \cdot \theta_2 + \theta_2^{\,2}\right) p_{1j} \cdot p_{2j} \cdot q_{1j} \cdot q_{2j} + \ldots + \left(\theta_1^2 - 2\theta_1 \cdot \theta_n + \theta_n^{\,2}\right) p_{1j} \cdot p_{nj} \cdot q_{1j} \cdot q_{nj} +$$

$$\left(\theta_2^{\,2} - 2\theta_2 \cdot \theta_n + \theta_n^{\,2}\right) p_{2j} \cdot p_{nj} \cdot q_{2j} \cdot q_{nj} + \ldots \Big\}$$

$$= \Big\{ \left(\theta_1 - \theta_2\right)^2 p_{1j} \cdot p_{2j} \cdot q_{1j} \cdot q_{2j} + \ldots + \left(\theta_1 - \theta_n\right)^2 p_{1j} \cdot p_{nj} \cdot q_{1j} \cdot q_{nj} +$$

$$\left(\theta_2 - \theta_n\right)^2 p_{2j} \cdot p_{nj} \cdot q_{2j} \cdot q_{nj} + \ldots \Big\} \; > \; 0$$

Lampiran 5

Data jawaban tes Matematika siswa kelas VII SMP XYZ

Peserta	Jawaban
1	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
2	1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0
3	0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0
4	1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0
5	1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1
6	1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0
7	1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1
8	1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0
9	1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0
10	1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1
11	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0
12	1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1
13	1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0
14	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0
15	1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0
16	1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0

17	0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0
18	1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0
19	1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1
20	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1
21	1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0
22	0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0
23	1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0
24	1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0
25	1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1
26	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1
27	1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0
28	1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
29	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0
30	1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0
31	1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1
32	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
33	0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 0
34	1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0
35	1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0
36	1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0
37	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1
38	1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1
39	0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0
40	0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1
41	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0
42	0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
43	1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0
44	1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0
45	1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0
46	1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1
47	1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0
48	1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0
49	0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0
50	0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0
51	1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0
52	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0
53	1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0
54	1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1
55	1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1

56	1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1
57	0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1
58	1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0
59	0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1
60	1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0
61	1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0
62	1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0
63	0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0
64	1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0
65	1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0
66	0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0
67	0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0
68	1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0
69	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0
70	1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0
71	1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0
72	1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1
73	1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1
74	0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0
75	1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0
76	1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0
77	1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1
78	1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0
79	1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0
80	1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0
81	1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0
82	1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
83	0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0
84	0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
85	0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1
86	1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1
87	1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0
88	1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1
89	0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0
90	1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0
91	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1
92	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0
93	1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0
94	1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0

95	1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0
96	1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0
97	1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1
98	1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0
99	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
100	1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0
101	1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
102	0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0
103	1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0
104	1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0
105	1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1
106	1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0
107	1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1
108	1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0
109	1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1
110	0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0
111	1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1
112	1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
113	1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
114	1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0
115	1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0
116	0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1
117	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1
118	1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0
119	1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1
120	1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1
121	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1
122	1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0
123	1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0
124	1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0
125	1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1
126	1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0
127	1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0
128	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0
129	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0
130	1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0
131	1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0
132	1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
133	0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0

134	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0
135	1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1
136	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1
137	1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0
138	1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0
139	1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0
140	1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0
141	1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0
142	1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1
143	1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1