



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**PENDETEKSIAN OUTLIER PADA MODEL AUTOREGRESSIVE**

**SKRIPSI**

**MELATI AYUWANGI  
030501036X**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN  
ALAM  
PROGRAM MATEMATIKA  
DEPOK  
JUNI 2010**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**PENDETEKSIAN OUTLIER PADA MODEL  
AUTOREGRESSIVE**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana sains**

**MELATI AYUWANGI  
030501036X**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN  
ALAM  
PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
DEPOK  
JUNI 2010**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan benar.



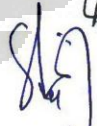

Nama : Melati Ayuwangi  
NPM : 030501036X  
Tanda Tangan :   
Tanggal : 5 Juli 2010

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :  
Nama : Melati Ayuwangi  
NPM : 030501036X  
Program Studi : Matematika  
Judul Skripsi : Pendeteksian *Outlier* pada Model  
*Autoregressive*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Fevi Novkaniza S.Si., M.Si (  )  
Pembimbing : Mila Novita S.Si., M.Si (  )  
Penguji : Sarini Abdullah, M.Stats (  )  
Penguji : Prof. Dr. Belawati H Widjaja (  )

Ditetapkan di : Depok  
Tanggal : 5 Juli 2010

## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah *Subhanahu wa Ta'ala*, karena atas berkat dan rahmat-Nya saya dapat menyelesaikan skripsi ini.

Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. terselesaikannya tugas akhir ini tidak lepas tanpa bantuan, bimbingan, dorongan, semangat dan doa yang tulus dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih sedalam-dalamnya kepada:

1. Mba' Fevi Novkaniza, selaku pembimbing 1 penulis. Terima kasih yang teramat dalam untuk pengorbanannya membantu penulis menyelesaikan tugas akhir ini..
2. Mba' Mila Novita, selaku pembimbing 2 penulis. Terima kasih karena dengan amat sangat sabar membimbing dan membantu penulis dalam menyelesaikan tugas akhirnya.
3. Ibu Nur, selaku pembimbing akademis yang telah memberikan nasihat dan bimbingannya selama ini.
4. Seluruh dosen Departemen Matematika atas segala ilmu yang penulis dapatkan selama menjadi mahasiswa Matematika UI.
5. Seluruh karyawan, baik TU maupun Perpustakaan Matematika yang telah banyak memberikan bantuannya demi kelancaran penyusunan skripsi ini.
6. Orang tua penulis. Terima kasih Mama yang selalu berdoa untuk penulis dalam tiap sujudnya, tak lupa kepada Papa yang selalu memberikan dukungan materi dan moral serta motivasi yang luar biasa tanpa batas.
7. Kakak penulis. Mas Daru, atas asupan makanan dan lain-lainnya yang sangat berarti untuk penulis. You are best brother ever.
8. Seluruh keluarga besar penulis. Khususnya keluarga penulis yang ada di Palembang, Semarang, Bandung.
9. Untuk sahabat-sahabatku tercinta. Nisma, Othe, Khuri beruntung karena telah dipertemukan dengan kalian. Go Pichaaannnn!!!!

10. Untuk saudara Esa atau si Jeleekkkk, untuk bantuannya, dukungannya, beserta gangguannya. I beat you.
11. Teman-teman seperjuangan penulis. Jessie, Dian, Fia, Kiki, Ka' Spina, Ka' Leli, Fika, Dia, Gio dan temen-teman yang lain. Terima kasih atas persahabatan yang kalian berikan kepada penulis.
12. Seluruh teman-teman 05 di matematika. Terima kasih atas kebersamaan yang indah selama ini.
13. Yanu. Terima kasih atas bantuan programnya yang sangat berarti dalam penyusunan tugas akhir ini.
14. Teman-teman SMP dan SMA penulis. Winda, Reny, Rika, Fitri, Endang, Icha, Ade, Risma yang selalu menyemangati penulis.
15. Teman-teman angkatan 2003-2009. Terima kasih atas bantuannya selama ini kepada penulis.
16. Pihak lainnya (yang mungkin lupa disebutkan oleh penulis) yang telah membantu penulis dengan dukungan dan doanya.

Akhir kata, mohon maaf jika pada skripsi ini terdapat kesalahan atau kekurangan. Semoga skripsi ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya, serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat untuk kepentingan orang banyak.

**Penulis 2010**

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS  
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Melati Ayuwangi  
NPM : 030501036X  
Program Studi : Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:  
*Pendeteksian Outlier pada Model Autoregressive*  
berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada tanggal : 5 Juli 2010

Yang menyatakan



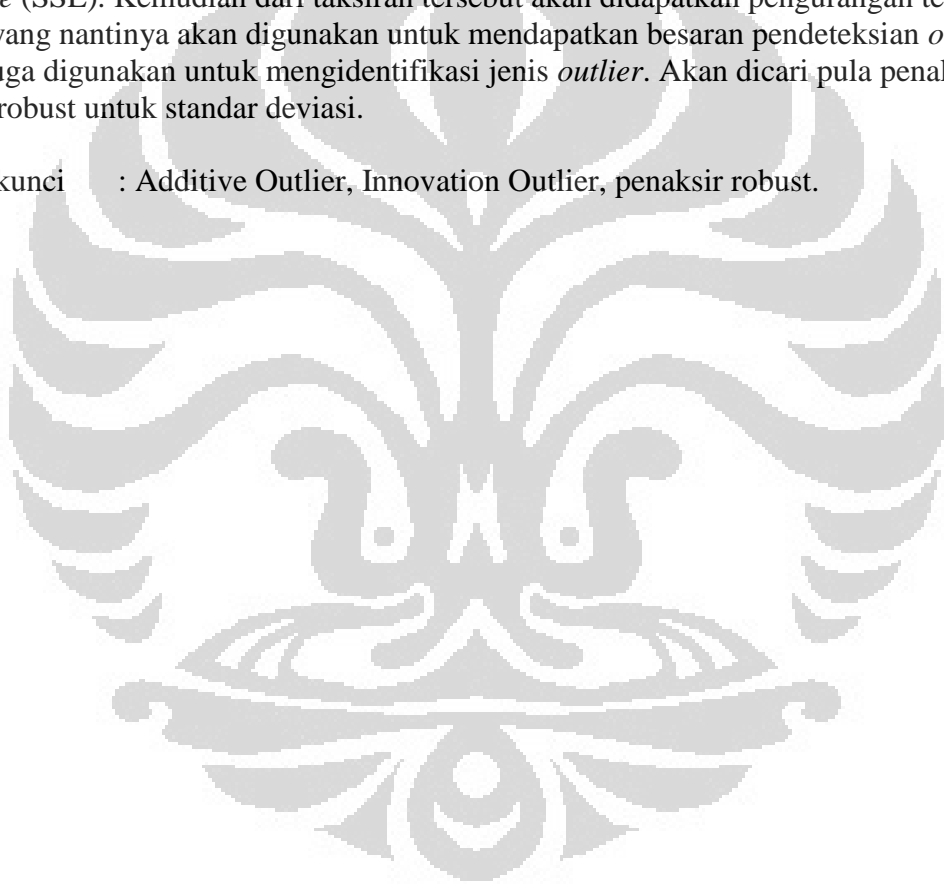
( Melati Ayuwangi )

## ABSTRAK

Nama : Melati Ayuwangi  
Program Studi : Matematika  
Judul : Pendeteksian *Outlier* pada Model *Autoregressive*

Runtun waktu merupakan barisan data yang diukur pada interval waktu yang periodik. Pada pengambilan data runtun waktu seringkali ditemukan adanya *outlier*, yang dapat mempengaruhi taksiran parameter *autoregressive* dan peramalan data. Pada skripsi ini diperkenalkan teknik baru untuk mendeteksi *outlier* pada model *autoregressive* dan mengidentifikasi jenis *outlier* sebagai *additive* atau *innovation*. Teknik ini diperkenalkan oleh Allan McQuarrie dan Chih L. Tsay, dan dapat digunakan tanpa diketahuinya model order sebenarnya, waktu terjadinya *outlier*, dan jenis *outlier*. Pertama, akan dicari taksiran besaran *outlier* yang meminimumkan *residual sum of square* (SSE). Kemudian dari taksiran tersebut akan didapatkan pengurangan terhadap SSE yang nantinya akan digunakan untuk mendapatkan besaran pendeteksian *outlier* dan juga digunakan untuk mengidentifikasi jenis *outlier*. Akan dicari pula penaksir yang robust untuk standar deviasi.

Kata kunci : Additive Outlier, Innovation Outlier, penaksir robust.



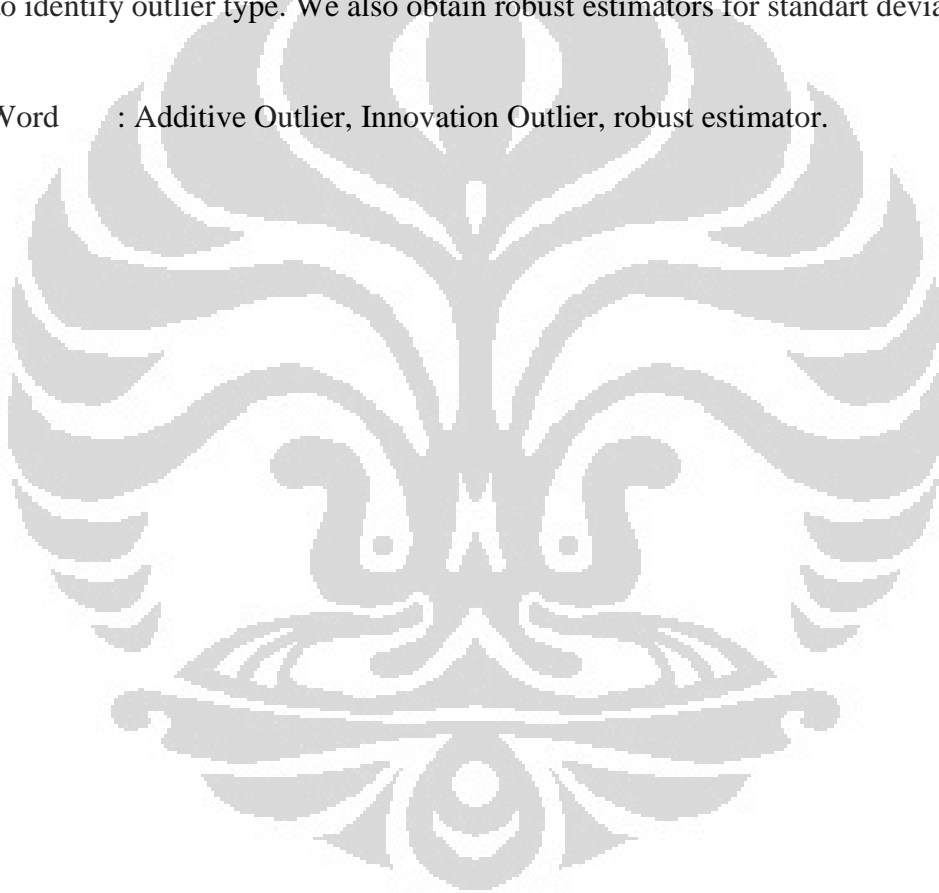


## ABSTRACT

Name : Melati Ayuwangi  
Program Study : Mathematics  
Title : Outlier Detection in Autoregressive Models

Time series is a series that is observed in periodically. Time series may contain outliers, that can significantly affect parameter estimators and forecasting. This thesis proposes a new technique for detecting outliers in autoregressive models and identifying the type as either innovation or additive. This technique is introduced by Allan McQuarrie and Chih L. Tsay, and can be used without knowledge of the true order model, outlier location, or outlier type. First, we obtain the outlier size that minimizes the resulting residual sum of square (SSE). Then, from the outlier size we obtain the reduction in the SSE that will be used to yield outlier detection measures and also is used to identify outlier type. We also obtain robust estimators for standard deviation.

Key Word : Additive Outlier, Innovation Outlier, robust estimator.



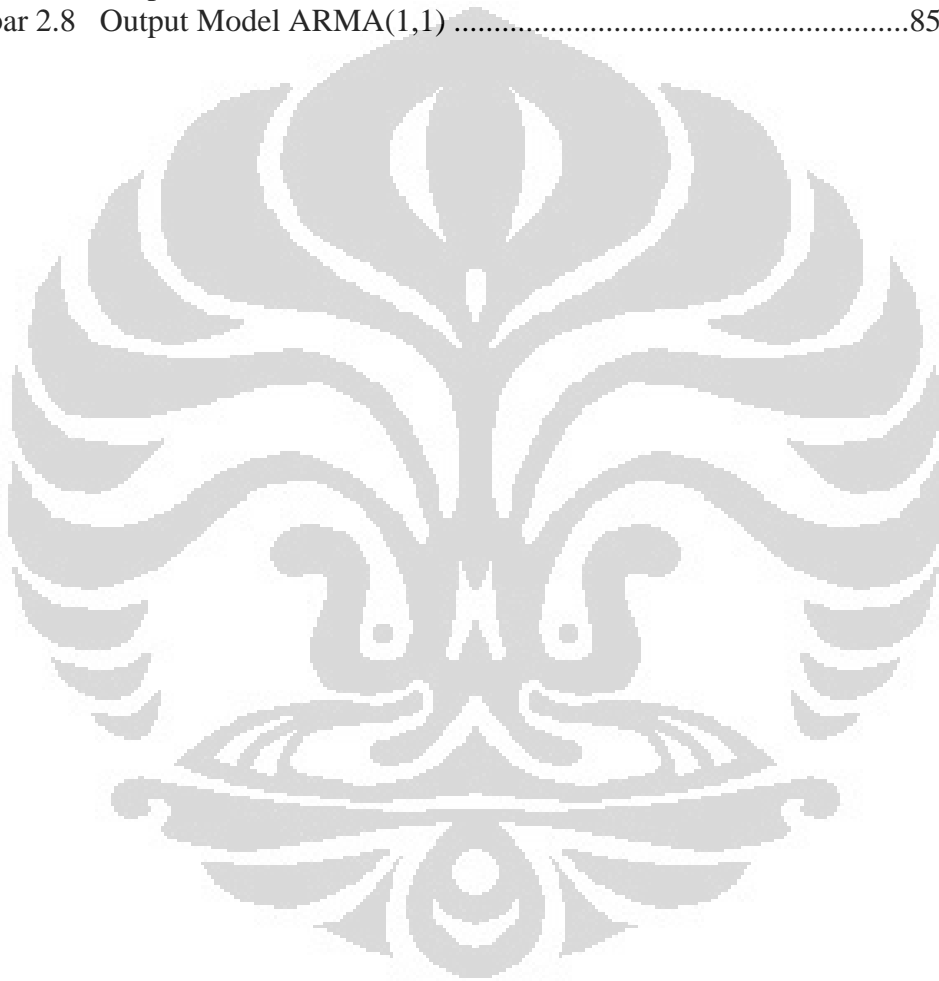
## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
LEMBAR PERNYATAAN ORISINALITAS .....	ii
LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
KATA PENGANTAR .....	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI .....	vi
ABSTRAK.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xii
<b>1. PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Perumusan Masalah.....	2
1.3. Tujuan Penelitian .....	2
1.4. Pembatasan Masalah.....	3
1.5. Sistematika Penelitian.....	3
<b>2. LANDASAN TEORI .....</b>	<b>4</b>
2.1. Konsep Dasar Runtun Waktu .....	4
2.1.1. Definisi Runtun Waktu .....	4
2.1.2. Fungsi <i>Mean</i> , Fungsi Autokovariansi, Fungsi Autokorelasi ....	4
2.1.3. <i>White Noise</i> .....	5
2.1.4. Kestasioneran.....	6
2.1.4.1. Stasioner Kuat.....	6
2.1.4.2. Stasioner Lemah.....	7
2.1.5. Fungsi Autokorelasi Sampel dan Fungsi Autokorelasi Parsial.....	8
2.1.6. Operator Backward Shift .....	12
2.2. Model Autoregressive.....	12
2.2.1. Model Autoregressive Order Pertama atau AR(1) .....	13
2.2.2. Model Autoregressive Order Kedua atau AR(2) .....	15
2.2.3. Model Autoregressive Order Ke- $p$ atau AR( $p$ ) .....	17
2.3. Uji Stasioneritas.....	18
2.3.1. Analisis Grafik.....	18
2.3.2. Unit Root Test atau Augmented Dickey Fuller (ADF).....	19
2.4. Pembentukan Model .....	23
2.4.1. Identifikasi .....	24
2.4.2. Penaksiran Parameter.....	26
2.4.2.1. Fungsi Likelihood AR(1) dan AR( $p$ ).....	26
2.4.2.2. Conditional Maximum Likelihood AR(1) dan AR( $p$ ).....	33
2.4.3. Diagnosa Model .....	36
2.4.3.1. Uji parameter .....	36
2.4.3.2. Analisis Residual .....	37
2.4.3.2.1. Residual.....	37
2.4.3.2.2. Fungsi Autokorelasi Sampel Residual .....	38
2.4.3.2.3. Uji Partmenteau .....	39

2.5. MADN ( <i>Median Absolute Deviation Normalized</i> ) .....	40
<b>3. PENDETEKSIAN DAN PENGIDENTIFIKASIAN OUTLIER PADA MODEL AUTOREGRESSIVE .....</b>	<b>42</b>
3.1. Jenis Outlier Pada Model Autoregressive.....	42
3.2. Pengaruh Outlier Terhadap Residual Sum Of Square (SSE).....	44
3.3. Taksiran Untuk Besaran AO dan IO.....	52
3.3.1. Kasus Innovation Outlier (IO) .....	52
3.3.2. Kasus Additive Outlier (AO).....	58
3.4. Pendeteksian dan Pengidentifikasian Outlier .....	60
3.4.1. Penaksiran Standar Deviasi Dengan Menggunakan Median ....	60
3.4.2. Besaran Pendeteksian Outlier .....	61
3.4.3. Pengidentifikasian Jenis Outlier .....	63
<b>4. CONTOH APLIKASI .....</b>	<b>65</b>
4.1. Sumber Data .....	65
4.2. Analisis Data.....	65
4.2.1. Tahap Penentuan Model .....	66
4.2.2. Tahap Pendeteksian dan Pengidentifikasian Outlier.....	71
<b>5. PENUTUP.....</b>	<b>74</b>
5.1. Kesimpulan .....	74
5.2. Saran .....	75
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>76</b>

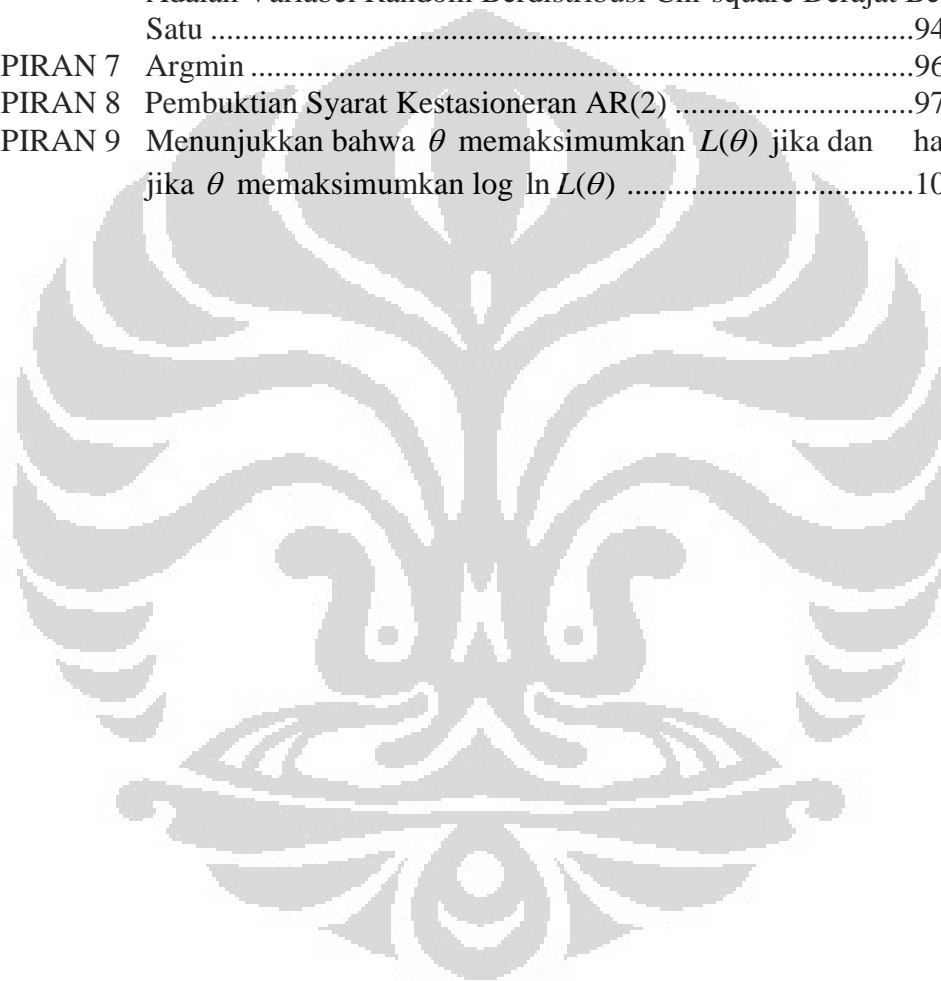
## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Data Jumlah Rata-rata Harian Ditemukannya Bagian Truk yang Cacat .....	77
Gambar 2.2	Plot Observasi Terhadap Waktu .....	79
Gambar 2.3	Output Eviews Pengujian Unit Root Test .....	80
Gambar 2.4	Fungsi Autokorelasi Sampel .....	81
Gambar 2.5	Fungsi Parsial Autokorelasi Sampel .....	82
Gambar 2.6	Output Model MA(1) .....	83
Gambar 2.7	Output Model AR(1) .....	84
Gambar 2.8	Output Model ARMA(1,1) .....	85



## DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN 1	Penaksiran Parameter $\phi$ Pada Model AR( $p$ ) dengan Metode Least Square .....	86
LAMPIRAN 2	Pembuktian Sifat Matriks Topi.....	88
LAMPIRAN 3	Pembuktian Model Tidak Saturated.....	89
LAMPIRAN 4	Pembuktian Beberapa Persamaan .....	90
LAMPIRAN 5	Terbatas Dalam Probabilitas ( <i>Bounded In Probability</i> ).....	93
LAMPITAN 6	Pembuktian Kuadrat Dari Variabel Random Berdistribusi Normal Adalah Variabel Random Berdistribusi Chi-square Derajat Bebas Satu .....	94
LAMPIRAN 7	Argmin .....	96
LAMPIRAN 8	Pembuktian Syarat Kestasioneran AR(2) .....	97
LAMPIRAN 9	Menunjukkan bahwa $\theta$ memaksimumkan $L(\theta)$ jika dan hanya jika $\theta$ memaksimumkan $\log \ln L(\theta)$ .....	102



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Runtun waktu merupakan himpunan data atau barisan data yang diukur pada interval waktu yang periodik. Pada pengumpulan data runtun waktu terkadang terjadi kesalahan dan gangguan yang tidak biasa atau disebut *unusual disturbance*. Kesalahannya dapat berupa kesalahan pencatatan, kesalahan pengukuran, kesalahan perhitungan, dan lain sebagainya, sedangkan contoh gangguan yang tidak biasa adalah terjadinya krisis moneter, pemogokan, bencana alam, perang dan gangguan lainnya. Kesalahan dan gangguan tersebut dapat menyebabkan satu atau beberapa observasi menyimpang dari observasi-observasi lainnya. Observasi yang menyimpang tersebut mungkin merupakan *outlier*. Menurut Ferguson (1961) dan Barnett (1981), *outlier* merupakan observasi yang menyimpang dari sekumpulan data yang lain. Adanya *outlier* ini akan berpengaruh pada model, yaitu pada penaksiran parameter dan nantinya akan mengarah pada ketidakakuratan peramalan data yang akan datang. Sehingga penting untuk mengetahui pengaruh *outlier* dan cara mendeteksinya.

Menurut Fox (1972), ada 2 jenis outlier yang mungkin muncul pada data time series, yaitu *Additive Outlier* dan *Innovation Outlier*. *Additive Outlier* adalah *outlier* yang hanya mempengaruhi satu observasi saja, yaitu observasi pada waktu terjadinya *outlier*. *Outlier* jenis ini biasanya terjadi karena adanya kesalahan pengukuran, kesalahan input data ke komputer, kesalahan pencatatan, dan lainnya. Sedangkan *Innovation Outlier* merupakan *outlier* yang tidak hanya mempengaruhi satu observasi tertentu, tapi adanya *outlier* ini juga akan mempengaruhi observasi-observasi untuk periode selanjutnya. Biasanya *Innovation Outlier* terjadi karena adanya gangguan yang tidak biasa atau disebut *unusual disturbance*, seperti ketidakstabilan politik, pemogokan, krisis moneter, bencana alam, perang, dan lainnya.

Seringkali untuk mengetahui adanya *outlier* dapat diketahui dari plot antara observasi terhadap waktu. Akan tetapi, informasi yang didapat dari plot tersebut belum tentu menggambarkan keadaan sebenarnya. Ada kemungkinan bahwa observasi yang dianggap *outlier*, sebenarnya bukanlah *outlier*. Atau sebaliknya, observasi yang terlihat bukan *outlier*, sebenarnya merupakan *outlier*. Untuk itu dibutuhkan adanya uji formal untuk mendeteksi adanya *outlier*.

Beberapa teknik pendeteksian *outlier*, diantaranya Abraham dan Box (1979) menggunakan pendekatan *bayesian* untuk menguji *outlier*. Murhead (1986) menganjurkan menggunakan ketentuan *likelihood ratio* untuk membedakan kedua jenis *outlier* tersebut. Kemudian Tsay(1986,1988), Chang, Tiao, dan Chen (1988), Bruce dan Martin (1989), dan Ljung (1993) memperluas pendeteksian dan pengidentifikasian *outlier* pada model *Autoregressive Moving Average* (ARMA) dan *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA). Namun, teknik-teknik tersebut membutuhkan asumsi model order sebenarnya, atau lokasi terjadinya *outlier*, atau jenis *outlier* diketahui. Karena asumsi-asumsi tersebut belum tentu valid, dibutuhkan teknik yang tidak menggunakan asumsi-asumsi tersebut.

Teknik untuk mendeteksi *outlier* pada model *Autoregressive* atau AR yang tidak menggunakan asumsi-asumsi diatas dikemukakan oleh Allan.D.McQuarrie dan Chih L.Tsai (2003), yaitu dengan mendapatkan estimasi besaran *outlier* yang meminimumkan *residual sum of square* (SSE).

## 1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana cara mendeteksi *outlier* pada model *Autoregressive* (AR)

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah:

- Menjelaskan jenis/tipe *outlier* pada model *Autoregressive* (AR)
- Menjelaskan pengaruh *outlier* terhadap SSE

- Menjelaskan cara pendeteksian *outlier* pada model Autoregressive (AR) dengan menggunakan metode yang dikemukakan oleh Allan D.McQuarrie dan C.L.Tsai

#### 1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah pada penulisan tugas akhir ini yaitu data yang digunakan telah stasioner.

#### 1.5 Sistematika Penulisan

##### Bab 1. Pendahuluan

Berisi latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

##### Bab 2. Landasan Teori

Berisi pembahasan mengenai konsep dasar runtun waktu, uji stasioneritas, model autoregressive, pembentukan model dan *Median Absolute Deviation Normalized* (MADN).

##### Bab 3. Pendeteksian *Outlier* pada Model Autoregressive

Berisi pembahasan mengenai jenis *outlier*, pengaruh *outlier* terhadap SSE, taksiran untuk besaran AO dan IO, pendeteksian dan pengidentifikasian *outlier*.

##### Bab 4. Contoh Aplikasi

##### Bab 5. Penutup

Berisi kesimpulan dan saran



## BAB 2

### LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai beberapa pengertian dasar yang diperlukan pada pembahasan bab-bab selanjutnya. Pembahasan pertama adalah tentang konsep dasar pada runtun waktu. Selain itu juga dibahas mengenai , model autoregressive, uji stasioneritas dan pembentukan model. Pembahasan terakhir adalah mengenai *Median Absolute Deviation Normalized* (MADN).

#### 2.1 Konsep Dasar Runtun Waktu

##### 2.1.1 Definisi Runtun Waktu

Runtun waktu merupakan himpunan data atau barisan data yang diukur pada interval waktu yang periodik. Barisan data atau observasi tersebut dinyatakan oleh  $Z_1, Z_2, \dots, Z_T$ . Jadi variabel random  $Z_t$  menyatakan observasi pada periode ke- $t$ , dimana  $t = 1, 2, \dots, T$ . Satuan periode waktu yang digunakan dapat dinyatakan dalam tahunan, bulanan, mingguan, harian, jam maupun detik tergantung pada situasi yang akan dimodelkan.

Sedangkan barisan dari variabel random yang diberi indeks, misal  $\{Z_1, Z_2, \dots\}$  atau  $\{\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \dots\}$  disebut sebagai proses stokastik. Runtun waktu dapat dianggap sebagai salah satu penerapan proses stokastik.

##### 2.1.2 Fungsi *Mean*, Fungsi Autokovariansi dan Fungsi Autokorelasi

Untuk proses stokastik  $\{Z_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , **fungsi *mean*** yang dinotasikan oleh  $\mu_t$ , didefinisikan sebagai berikut

$$\mu_t = E(Z_t) \quad \text{untuk } t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

fungsi *mean*,  $\mu_t$ , adalah nilai harapan dari proses pada periode ke- $t$ . Secara umum, nilai  $\mu_t$  dapat berbeda untuk setiap  $t$ .

Sedangkan **fungsi autokovariansi** antara  $Z_t$  dan  $Z_s$  yang dinotasikan oleh  $\gamma_{t,s}$ , didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\gamma_{t,s} &= \text{Cov}(Z_t, Z_s) \\ &= E[(Z_t - \mu_t)(Z_s - \mu_s)] \\ &= E(Z_t Z_s) - \mu_t \mu_s \quad \text{untuk } t, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Jika  $t = s$  maka  $\gamma_{t,s}$  akan menjadi variansi  $Z_t$ , yaitu

$$\gamma_{t,t} = \text{Cov}(Z_t, Z_t) = \text{Var}(Z_t) \quad \text{untuk } t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dan **fungsi autokorelasi** antara  $Z_t$  dan  $Z_s$  yang dinotasikan oleh  $\rho_{t,s}$ , didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\rho_{t,s} &= \text{Corr}(Z_t, Z_s) \\ &= \frac{\text{Cov}(Z_t, Z_s)}{[\text{Var}(Z_t) \text{Var}(Z_s)]^{1/2}} \\ &= \frac{\gamma_{s,t}}{(\gamma_{s,s} \gamma_{t,t})^{1/2}} \quad \text{untuk } t, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

### 2.1.3 White Noise

*White noise* didefinisikan sebagai barisan variabel random  $\{a_t\}$  yang saling bebas dan berdistribusi identik. Distribusi yang biasa digunakan adalah distribusi normal. Proses *white noise* merupakan salah satu contoh stasioner kuat. Berikut adalah bukti bahwa proses white noise bersifat stasioner kuat:

$$\begin{aligned}
& \Pr[a_{t_1} \leq x_1, a_{t_2} \leq x_2, \dots, a_{t_n} \leq x_n] \\
&= \Pr[a_{t_1} \leq x_1] \Pr[a_{t_2} \leq x_2] \cdots \Pr[a_{t_n} \leq x_n] \quad (\text{karena saling bebas}) \\
&= \Pr[a_{t_1-k} \leq x_1] \Pr[a_{t_2-k} \leq x_2] \cdots \Pr[a_{t_n-k} \leq x_n] \quad (\text{berdistribusi identik}) \\
&= \Pr[a_{t_1-k} \leq x_1, a_{t_2-k} \leq x_2, \dots, a_{t_n-k} \leq x_n]
\end{aligned}$$

Karena berdistribusi identik, maka proses *white noise* mempunyai fungsi *mean* konstan, yaitu  $E(a_t) = \mu$ .

Sedangkan karena  $a_t$  adalah variabel random yang saling bebas, maka fungsi autokovariansinya adalah

$$\gamma_k = \begin{cases} \text{Var}(a_t) = \sigma_a^2 & \text{jika } k = 0 \\ \text{Cov}(a_t, a_{t-k}) = 0 & \text{jika } k \neq 0 \end{cases}$$

dan fungsi autokorelasinya adalah

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{jika } k = 0 \\ 0 & \text{jika } k \neq 0 \end{cases}$$

Untuk selanjutnya, diasumsikan bahwa proses *white noise* mempunyai *mean* nol dan variansi konstan atau dapat ditulis dengan  $NIID(0, \sigma_a^2)$ .

## 2.1.4 Kestasioneran

### 2.1.4.1 Stasioner Kuat

Menurut Cryer (1986) suatu proses stokastik  $\{Z_t\}$  bersifat stasioner kuat jika distribusi bersama dari  $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}$  sama dengan distribusi bersama dari  $Z_{t_1-k}, Z_{t_2-k}, \dots, Z_{t_n-k}$ , atau dapat ditulis:

$$\Pr(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}) = \Pr(Z_{t_1-k}, Z_{t_2-k}, \dots, Z_{t_n-k})$$

untuk sembarang waktu  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  dan lag  $k$ . Yang artinya untuk suatu proses stasioner kuat (Cryer, 1986, p.14):

$$\gamma_k = \text{Cov}(Z_t, Z_{t-k})$$

$$\rho_k = \text{Corr}(Z_t, Z_{t-k})$$

#### 2.1.4.2 Stasioner Lemah

Menurut Cryer (1986) suatu proses stokastik  $\{Z_t\}$  bersifat stasioner lemah jika:

1. Fungsi *mean* adalah konstan untuk setiap waktu, yaitu

$$E(Z_t) = E(Z_{t-k}) = \mu, \quad |\mu| < \infty$$

untuk sembarang  $t$  dan  $k$

2. Fungsi autokovariansi antara  $Z_t$  dan  $Z_{t-k}$  hanya bergantung pada lag  $k$ , dan tidak bergantung pada waktu  $t$ , yaitu

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t-k}) = \text{Cov}(Z_{t-j}, Z_{t-k-j}) = \gamma_k, \quad |\gamma_k| < \infty$$

untuk sembarang  $t, k, j$ .

Jika  $k=0$  maka  $\gamma_k$  menjadi variansi  $Z_t$ , yaitu

$$\text{Var}(Z_t) = \text{Cov}(Z_t, Z_t) = \gamma_0 < \infty$$

Sehingga jika  $\{Z_t\}$  bersifat stasioner lemah maka fungsi autokorelasi antara  $Z_t$  dan  $Z_{t-k}$  menjadi

$$\begin{aligned}\rho_k = \text{Corr}(Z_t, Z_{t-k}) &= \frac{\text{Cov}(Z_t, Z_{t-k})}{[\text{Var}(Z_t) \text{Var}(Z_{t-k})]^{1/2}} \\ &= \frac{\gamma_k}{(\gamma_0 \gamma_0)^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}\end{aligned}$$

Pada pembahasan selanjutnya, kata ‘stasioner’ saja mengacu pada stasioner lemah.

### 2.1.5 Fungsi Autokorelasi Sampel dan Fungsi Autokorelasi Parsial

Dengan asumsi stasioner, akan ditaksir fungsi autokorelasi  $\rho_k$  untuk  $k = 1, 2, \dots$  yaitu dengan menghitung korelasi sampel pasangan  $(Z_1, Z_{1+k}), (Z_2, Z_{2+k}), \dots, (Z_{T-k}, Z_T)$ . **Fungsi autokorelasi sampel**  $r_k$  didefinisikan dengan:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^T (Z_t - \bar{Z})^2} \quad k = 1, 2, \dots$$

dengan :

$Z_t$  = data observasi dari runtun waktu yang stasioner

$Z_{t+k}$  = data observasi untuk  $k$  periode ke depan

$\bar{Z}$  = *mean* dari runtun waktu yang stasioner

**Fungsi autokorelasi parsial** digunakan untuk mengukur korelasi antara  $Z_t$  dan  $Z_{t-k}$  setelah pengaruh variabel  $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-(k-1)}$  dihilangkan.

Jika  $Z_t$  adalah suatu runtun waktu stasioner berdistribusi normal dengan fungsi mean nol. Maka autokorelasi parsial pada lag  $k$  yang ditulis dengan  $\phi_{kk}$  didefinisikan dengan:

$$\phi_{kk} = \text{Corr}[Z_t, Z_{t-k} \mid Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}]$$

Sehingga  $\phi_{kk}$  merupakan koefisien korelasi pada distribusi bivariat dari  $Z_t, Z_{t-k}$  bersyarat pada  $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}$ . Mempertimbangkan memprediksi  $Z_t$

berdasarkan fungsi linear dari  $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}$ , sebut

$\beta_1 Z_{t-1} + \beta_2 Z_{t-2} + \dots + \beta_{k-1} Z_{t-k+1}$  dimana nilai-nilai  $\beta$  dipilih yang meminimumkan *mean square error* (MSE). Jika kita mengasumsikan nilai-nilai  $\beta$  telah terpilih dan dari *backward*, prediksi terbaik  $Z_{t-k}$  berdasarkan  $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}$  akan menjadi

$$\beta_1 Z_{t-k+1} + \beta_2 Z_{t-k+2} + \dots + \beta_{k-1} Z_{t-1}$$

Sehingga fungsi autokorelasi parsial pada lag  $k$  merupakan korelasi antara kedua prediksi *error* tersebut, yaitu

$$\phi_{kk} = \text{Corr}[Z_t - \hat{Z}_t, Z_{t-k} - \hat{Z}_{t-k}]$$

dimana

$$\hat{Z}_t = \phi_{k-1,1} Z_{t-1} + \phi_{k-1,2} Z_{t-2} + \dots + \phi_{k-1,k-1} Z_{t-k+1}$$

$$\hat{Z}_{t-k} = \phi_{k-1,1} Z_{t-k+1} + \phi_{k-1,2} Z_{t-k+2} + \dots + \phi_{k-1,k-1} Z_{t-1}$$

Sebagai contoh untuk  $k = 1$ , maka  $\phi_{11} = \text{Corr}[Z_t, Z_{t-1}] = \rho_1$ . Sedangkan untuk  $k = 2$  diperoleh

$$\begin{aligned} \phi_{22} &= \text{Corr}[Z_t - \rho_1 Z_{t-1}, Z_{t-2} - \rho_1 Z_{t-1}] \\ &= \frac{\gamma_2 - 2\rho_1 \gamma_1 + \rho_1^2 \gamma_0}{[(\gamma_0 + \rho_1^2 \gamma_0 - 2\rho_1 \gamma_1)^2]^{1/2}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \end{aligned}$$

Secara umum

$$\begin{aligned}\phi_{kk} &= \frac{\text{Cov}[Z_t - \hat{Z}_t, Z_{t-k} - \hat{Z}_{t-k}]}{\text{Var}[Z_{t-k} - \hat{Z}_{t-k}]} = \text{Corr}[Z_t - \hat{Z}_t, Z_{t-k} - \hat{Z}_{t-k}] \\ &= \frac{\left(\rho_k - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{k-1,i} \rho_{k-i}\right)}{\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{k-1,i} \rho_i\right)}\end{aligned}$$

dengan

$$\sigma_{k-1}^2 = \text{Var}[Z_t - \hat{Z}_t] = \text{Var}[Z_{t-k} - \hat{Z}_{t-k}] = \gamma_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{k-1,i} \rho_i\right)$$

Secara umum regresi dari variabel  $Z_{t-k}$  terhadap  $Z_{t-(k-1)}, Z_{t-(k-2)}, \dots, Z_{t-1}, Z_t$  dapat ditulis dengan

$$Z_{t-k} = \phi_{k1} Z_{t-(k-1)} + \phi_{k2} Z_{t-(k-2)} + \dots + \phi_{kk} Z_t + a_{t-k} \quad (2.1)$$

dengan

$Z_{t-k}$  : observasi yang diasumsikan merupakan runtun waktu yang stasioner dengan mean nol

$\phi_{ki}$  : Parameter regresi ke- $i$   $i = 1, 2, \dots, k$

$a_{t-k}$  : *white noise* yang berdistribusi normal, independen serta  $a_{t-k}$  dan  $Z_{t-(k-j)}$  untuk  $j \geq 1$  saling independen.

Fungsi autokorelasi parsial diperoleh dengan cara mengalikan persamaan (2.3) dengan  $Z_{t-(k-j)}$  kemudian diekspektasikan dan dibagi dengan  $\gamma_0$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned}E(Z_{t-k} Z_{t-(k-j)}) &= \phi_{k1} E(Z_{t-(k-1)} Z_{t-(k-j)}) + \dots + \phi_{kk} E(Z_t Z_{t-(k-j)}) + E(a_{t-k} Z_{t-(k-j)}) \\ \frac{\gamma_j}{\gamma_0} &= \phi_{k1} \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} + \phi_{k2} \frac{\gamma_{j-2}}{\gamma_0} + \dots + \phi_{kk} \frac{\gamma_{j-k}}{\gamma_0}\end{aligned}$$

atau

$$\rho_j = \phi_{k1} \rho_{j-1} + \phi_{k2} \rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk} \rho_{j-k}$$

Berdasarkan perumusan diatas, untuk  $j=1,2,\dots,k$  diperoleh:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_{k1} + \phi_{k2}\rho_1 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2} + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ &\vdots \\ \rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \dots + \phi_{kk}\end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari  $\phi_{kk}$ , yaitu autokorelasi parsial pada lag  $k$ , dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Anggap

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Berdasarkan aturan Cramer, maka untuk  $k=1,2,\dots$  diperoleh:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|}, \quad k=1,2,\dots$$



Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_3 + \rho_1\rho_2^2 + \rho_1^3 - 2\rho_1\rho_2 - \rho_1^2\rho_3}{1 + 2\rho_1^2\rho_2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Fungsi autokorelasi parsial sampel yaitu  $\hat{\phi}_{kk}$  diperoleh dengan mengganti  $\rho_i$  dengan  $r_i$   $i=1,2,\dots,k$

### 2.1.6 Operator *Backward Shift*

Operator *Backward Shift*, biasa disebut *Backshift*, dinotasikan dengan  $B$ , mengoperasikan indeks waktu dari suatu runtun waktu, dengan menggesernya satu satuan waktu kebelakang, yaitu:

$$BZ_t = Z_{t-1}, \quad B^2Z_t = Z_{t-2}, \quad \dots \quad B^kZ_t = Z_{t-k}$$

## 2.2 Model *Autoregressive*

Salah satu model runtun waktu yang stasioner adalah model *autoregressive*. Suatu proses *autoregressive*, sesuai dengan namanya, merupakan suatu regresi terhadap dirinya sendiri. Selanjutnya akan dibahas lebih lanjut mengenai model *autoregressive*, yaitu AR(1), AR(2) dan AR( $p$ ). Berikut pembahasan masing-masing model.

### 2.2.1 Model *Autoregressive* Order Pertama atau AR(1)

Runtun waktu  $\{Z_t\}$  mengikuti proses *autoregressive* orde pertama, atau AR(1), jika asumsi barisan  $\{Z_t\}$  stasioner dan memenuhi persamaan

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t \quad (2.2)$$

Akan dicari syarat kestasionaran untuk model AR(1), yaitu dengan melihat variansinya:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t) &= \phi^2 \text{Var}(Z_{t-1}) + \text{Var}(a_t) \\ \gamma_0 &= \phi^2 \gamma_0 + \sigma_a^2 \\ \gamma_0 &= \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Karena variansi harus positif, maka harus dipenuhi  $1 - \phi^2 > 0$  atau

$$-1 < \phi < 1$$

Jadi syarat agar AR(1) stasioner adalah

$$|\phi| < 1$$

Fungsi autokovariansi AR(1) diperoleh dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (2.2) dengan  $Z_{t-k}$  kemudian diekspektasikan, diperoleh:

$$E(Z_t Z_{t-k}) = \phi E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k}) \quad (2.4)$$

Karena  $a_t$  dan  $Z_{t-k}$  saling bebas, maka  $E(a_t Z_{t-k}) = 0$ . Untuk barisan  $\{Z_t\}$  stasioner, maka  $E(Z_t Z_{t-k}) = \gamma_k$  dan  $E(Z_{t-1} Z_{t-k}) = \gamma_{k-1}$ , sehingga persamaan (2.4) menjadi

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} \quad \text{untuk } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

Untuk  $k = 1$ , didapat

$$\gamma_1 = \phi \gamma_0 = \phi \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}.$$

Untuk  $k = 2$ , diperoleh

$$\gamma_2 = \phi \gamma_1 = \phi^2 \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}.$$

Sehingga secara umum fungsi autokovariansi dengan lag- $k$  adalah

$$\gamma_k = \frac{\phi^k \sigma_a^2}{(1-\phi^2)} \quad (2.6)$$

Dengan membagi kedua sisi dari persamaan (2.5) dengan  $\gamma_0$  akan didapatkan fungsi autokorelasi untuk proses AR(1), yaitu

$$\rho_k = \phi \rho_{k-1} \quad \text{untuk } k = 1, 2, 3, \dots$$

sehingga dari persamaan (2.3) dan (2.6) diperoleh

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi^k \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}}{\frac{\sigma_a^2}{(1-\phi^2)}} = \phi^k, k \geq 1$$

Karena  $|\phi| < 1$ , fungsi autokorelasi merupakan kurva yang menurun secara eksponensial seiring lag- $k$  meningkat.

- Jika  $0 < \phi < 1$  maka autokorelasinya positif
- Jika  $-1 < \phi < 0$  autokorelasi untuk lag 1 negatif ( $\rho_1 = \phi$ ) dan autokorelasi lainnya dari positif ke negatif (bergantung pada  $k$ ) dan semakin menurun secara eksponensial.

Fungsi autokorelasi parsial untuk model AR(1) adalah

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \phi & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

Berdasarkan perumusan diatas, fungsi autokorelasi parsial untuk AR(1) akan terputus setelah lag-1

### 2.2.3 Model *Autoregressive* Order Dua atau AR(2)

Runtun waktu  $\{Z_t\}$  mengikuti proses *Autoregressive* order kedua, atau AR(2), jika asumsi barisan  $\{Z_t\}$  stasioner dan memenuhi persamaan

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \quad (2.7)$$

Asumsi  $a_t$  saling bebas dengan  $Z_{t-1}$  dan  $Z_{t-2}$ .

Syarat kestasioneran untuk model AR (2) adalah

$$|\phi_2| < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad \phi_2 + \phi_1 < 1 \quad (2.8)$$

Bukti dapat dilihat pada lampiran 8.

Fungsi autokovariansi dapat diperoleh dengan mengalikan kedua ruas persamaan (2.7) dengan  $Z_{t-k}$  kemudian diekspektasikan, yaitu

$$\begin{aligned} E[Z_t Z_{t-k}] &= \phi_1 E[Z_{t-1} Z_{t-k}] + \phi_2 E[Z_{t-2} Z_{t-k}] + E[a_t Z_{t-k}] \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dengan membagi kedua sisi pada persamaan (2.9) dengan  $\gamma_0$ , diperoleh fungsi autokorelasi untuk proses AR(2), yaitu

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad k = 1, 2, \dots$$

dengan mensubstitusikan  $k = 1, 2, \dots$  pada persamaan diatas, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jadi autokorelasi untuk model AR(2) adalah

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\phi_1}{(1-\phi_2)} \\ \rho_2 &= \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)}{(1-\phi_2)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Fungsi autokorelasi pada model AR(2) menurun secara eksponensial menuju nol.

Fungsi autokorelasi parsial untuk model AR(2) adalah

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2} & k=1 \\ \phi_2 & k=2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

Berdasarkan perumusan diatas, fungsi autokorelasi parsial untuk AR(2) akan terputus setelah lag 2.

### 2.2.3 Model *Autoregressive* Order ke- $p$ atau AR( $p$ )

Runtun waktu  $\{Z_t\}$  mengikuti proses *Autoregressive* order ke- $p$ , atau AR( $p$ ), jika asumsi barisan  $\{Z_t\}$  stasioner dan memenuhi persamaan

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \quad (2.10)$$

Dengan menggunakan operator backshift, diperoleh,

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \\ a_t &= Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p} \\ &= Z_t - \phi_1 B Z_t - \phi_2 B^2 Z_t - \dots - \phi_p B^p Z_t \\ &= (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z_t \end{aligned}$$

Sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0$$

Sama seperti pada model AR(1) dan AR(2), model AR( $p$ ) akan stasioner jika dan hanya jika nilai mutlak semua akar-akar persamaan karakteristik  $\phi(x) = 0$  lebih besar dari satu.

Fungsi autokovariansi untuk proses  $AR(p)$  dapat diperoleh dengan mengalikan kedua sisi persamaan (2.10) dengan  $Z_{t-k}$  lalu diekspektasikan, yaitu

$$E[Z_t Z_{t-k}] = \phi_1 E[Z_{t-1} Z_{t-k}] + \phi_2 E[Z_{t-2} Z_{t-k}] + \dots + \phi_p E[Z_{t-p} Z_{t-k}] + E[a_t Z_{t-k}]$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Dengan membagi persamaan (2.11) dengan  $\gamma_0$  akan didapat fungsi autokorelasi untuk proses  $AR(p)$ , yaitu

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Fungsi autokorelasi untuk  $AR(p)$  akan menurun secara eksponensial. Sedangkan fungsi autokorelasi parsialnya akan terputus setelah lag- $p$ , yaitu

$$\phi_{kk} = 0 \quad k > p$$

Hal ini menjadi ciri untuk model  $AR(p)$ .

### 2.3 Uji Stasioneritas

Beberapa cara mengetahui kestasioneran:

#### 2.3.1 Analisis grafik

Cara yang sangat sederhana untuk melihat stasioneritas adalah dengan analisis grafik, yang dilakukan dengan membuat plot antara nilai observasi ( $z_t$ ) terhadap waktu ( $t$ ). Berdasarkan plot tersebut kita dapat melihat pola data. Jika diperkirakan mempunyai *mean* dan variansi konstan, maka data tersebut dikatakan stasioner. Data dikatakan tidak stasioner jika terdapat trend, yang membuat mean menjadi tidak konstan (Gaynor & Kirkpatrick, 1994, p.407).

Akan tetapi, dalam menentukan stasioner atau tidaknya sebaran data dengan menggunakan grafik tidaklah mudah. Ada kemungkinan beberapa orang mengambil kesimpulan yang berbeda terhadap suatu grafik, karena keputusan yang diambil subjektif. Disamping itu, bila grafik dibuat pada skala ukuran yang berbeda, maka dimungkinkan pula terjadi perbedaan pengambilan keputusan. Untuk itu dibutuhkan uji formal dalam menentukan stasioneritas data, yaitu *Unit Root Test*.

### 2.3.2 Unit Root Test atau Augmented Dickey Fuller (ADF)

Uji ini merupakan pengujian yang sangat populer, dan diperkenalkan oleh David Dickey dan Wayne Fuller. Untuk memudahkan pengertian mengenai *unit root*, misalkan  $Z_t$  mengikuti model AR(1) berikut:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t \quad -1 \leq \phi \leq 1$$

Dalam bentuk backward shift persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi B Z_t + a_t \\ Z_t - \phi B Z_t &= a_t \\ (1 - \phi B) Z_t &= a_t \end{aligned}$$

jika  $\phi = 1$ , maka masalah yang dihadapi adalah variansi  $Z_t$  yang tidak konstan. Dengan demikian  $Z_t$  dikatakan mempunyai *unit root* atau data tidak stasioner. Berikut adalah bukti jika  $\phi = 1$  maka variansi  $Z_t$  tidak konstan. Perhatikan persamaan berikut

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_1 \\ Z_2 &= a_1 + a_2 = Z_1 + a_2 \\ Z_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = Z_2 + a_3 \\ &\vdots \\ Z_t &= a_1 + a_2 + \dots + a_t = Z_{t-1} + a_t \end{aligned}$$



Sehingga

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t) &= \text{Var}(a_1 + a_2 + \dots + a_t) \\ &= \text{Var}(a_1) + \text{Var}(a_2) + \dots + \text{Var}(a_t) \\ &= \sigma_a^2 + \sigma_a^2 + \dots + \sigma_a^2 \\ &= \sigma_a^2 t \end{aligned}$$

Bila persamaan  $Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$  dikurangi dengan  $Z_{t-1}$  di kedua sisi, maka persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= \phi Z_{t-1} - Z_{t-1} + a_t \\ \Delta Z_t &= (\phi - 1)Z_{t-1} + a_t \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis dengan:

$$\Delta Z_t = \delta Z_{t-1} + a_t$$

Dari persamaan tersebut dapat dibuat hipotesis (Gujarati, 2003, p.814):

$$H_0 : \delta = 0$$

$$H_1 : \delta < 0$$

Jika hipotesis  $\delta = 0$  tidak ditolak, maka  $\phi = 1$ . Artinya  $Z_t$  mempunyai *unit root*, sehingga data runtun waktu  $Z_t$  tidak stasioner.

Teknik pengujiannya sesungguhnya sangat mudah dimengerti, yaitu dengan membuat regresi antara  $\Delta Z_t$  dengan  $Z_{t-1}$ . Dengan demikian didapatkan koefisien regresinya adalah  $\hat{\delta}$ , yang kemudian dilakukan uji signifikansi berdasarkan hipotesis diatas.

Sebagaimana telah diketahui, dalam regresi biasa uji signifikansi terhadap koefisien regresi dapat dilakukan dengan uji- $t$ . Namun dengan hipotesis tersebut, nilai uji- $t$  tidak mengikuti distribusi  $t$  sekalipun dalam sampel besar. Tetapi

Dickey-Fuller telah membuktikan bahwa Uji- $t$  terhadap hipotesis di atas mengikuti statistik  $\tau$  ( $tau$ ). Statistik ini selanjutnya dikembangkan oleh Mc. Kinnon. Statistik uji  $\tau$  diperoleh dengan

$$\tau = \frac{\hat{\phi} - 1}{std.error(\hat{\phi})} \sim Dickey - Fuller$$

Jika nilai statistik uji  $\tau$  lebih kecil dari nilai kritis DF atau MacKinnon maka hipotesis nol ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat stasioner. Sedangkan jika nilai statistik uji  $\tau$  lebih besar dari nilai kritis DF atau MacKinnon maka hipotesis nol tidak ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat tidak stasioner.

Selain model di atas, pengujian ini juga dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa model berikut:

1. Model dengan *intercept*:

$$\Delta Z_t = \beta_1 + \delta Z_{t-1} + a_t$$

2. Model dengan *intercept* dan memasukkan variabel bebas waktu ( $t$ ):

$$\Delta Z_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Z_{t-1} + a_t$$

Kekurangan dari Dickey-Fuller test adalah dengan mengasumsikan bahwa komponen error,  $a_t$ , pada persamaan-persamaan di atas tidak berkorelasi. Untuk mengantisipasi adanya korelasi tersebut, Dickey-Fuller (1981) mengembangkan pengujian Dickey-Fuller Test menjadi *Augmented* Dickey-Fuller (ADF) Test.

Kemudian Dickey-Fuller mengembangkan pengujian untuk model autoregressive dengan order lebih tinggi, inilah yang disebut dengan **Augmented Dickey-Fuller (ADF) Test**. Perhatikan model AR( $p$ ) berikut:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

Lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan persamaan diatas dengan  $\phi_p Z_{t-p+1}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + (\phi_p Z_{t-p+1} - \phi_p Z_{t-p+1}) + a_t \\ &= \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + (\phi_{p-1} + \phi_p) Z_{t-p+1} - \phi_p (Z_{t-p+1} - Z_{t-p}) + a_t \\ &= \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + (\phi_{p-1} + \phi_p) Z_{t-p+1} - \phi_p \Delta Z_{t-p+1} + a_t \end{aligned}$$

Selanjutnya, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan kembali pada ruas kanan dengan  $(\phi_{p-1} + \phi_p) Z_{t-p+2}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + \dots + (\phi_{p-1} + \phi_p) Z_{t-p+1} - \phi_p \Delta Z_{t-p+1} \{ (\phi_{p-1} + \phi_p) Z_{t-p+2} - (\phi_{p-1} + \phi_p) Z_{t-p+2} \} + a_t \\ Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + \dots + (\phi_{p-2} + \phi_{p-1} + \phi_p) Z_{t-p+2} - (\phi_{p-1} + \phi_p) (Z_{t-p+2} - Z_{t-p+1}) - \phi_p \Delta Z_{t-p+1} + a_t \\ Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + \dots + (\phi_{p-2} + \phi_{p-1} + \phi_p) Z_{t-p+2} + (\phi_{p-1} + \phi_p) \Delta Z_{t-p+2} - \phi_p \Delta Z_{t-p+1} + a_t \end{aligned}$$

Dengan melakukan hal yang serupa, maka akan diperoleh

$$Z_t = (\phi_1 + \dots + \phi_p) Z_{t-1} - (\phi_2 + \dots + \phi_p) \Delta Z_{t-1} - \dots - (\phi_{p-1} + \phi_p) \Delta Z_{t-p+2} - \phi_p \Delta Z_{t-p+1} + a_t$$

Langkah terakhir adalah dengan melakukan operasi pengurangan kedua ruas dengan  $Z_{t-1}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= (\phi_1 + \dots + \phi_p) Z_{t-1} - Z_{t-1} - (\phi_2 + \dots + \phi_p) \Delta Z_{t-1} - \dots - (\phi_{p-1} + \phi_p) \Delta Z_{t-p+2} - \phi_p \Delta Z_{t-p+1} + a_t \\ \Delta Z_t &= (\phi_1 + \dots + \phi_p - 1) Z_{t-1} - (\phi_2 + \dots + \phi_p) \Delta Z_{t-1} - \dots - (\phi_{p-1} + \phi_p) \Delta Z_{t-p+2} - \phi_p \Delta Z_{t-p+1} + a_t \\ \Delta Z_t &= \delta Z_{t-1} + \sum_{i=2}^p \alpha_i \Delta Z_{t-i+1} + a_t \end{aligned}$$

dengan  $\delta = \sum_{i=1}^p \phi_i - 1$  dan  $\alpha_i = -\sum_{j=i}^p \phi_j$

Jika model regresi diatas ditambahkan dengan komponen konstanta dan time trend maka akan terbentuk model regresi berikut

$$\Delta Z_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Z_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i^* \Delta Z_{t-i} + a_t$$

dengan  $\delta = \sum_{i=1}^p \phi_i - 1$ ,  $\alpha_i^* = -\sum_{j=i+1}^p \phi_j$ ,  $a_i$  adalah komponen error, dan  $m = p-1$

adalah panjang lag. Model regresi inilah yang akan diuji dengan *Augmented Dickey-Fuller (ADF) Test*. Dengan hipotesis (Gujarati, 2003, p.814):

$$\begin{array}{l} H_0 : \delta = 0 \\ H_1 : \delta < 0 \end{array} \quad \text{atau} \quad \begin{array}{l} H_0 : \sum_{i=1}^p \phi_i = 1 \\ H_1 : \sum_{i=1}^p \phi_i < 1 \end{array}$$

Selanjutnya, lakukan uji signifikansi berdasarkan hipotesis diatas. Uji *Augmented Dickey-Fuller (ADF)* mengikuti distribusi yang sama dengan uji *Dickey-Fuller (DF)*, sehingga nilai kritis uji  $\tau$  juga diterapkan pada ADF test. Statistik uji  $\tau$  diperoleh dengan

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i - 1}{\text{std.error} \left( \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i \right)} \sim \text{Dickey-Fuller}$$

Jika nilai statistik uji  $\tau$  lebih kecil dari nilai kritis DF atau MacKinnon maka hipotesis nol ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat stasioner. Sedangkan jika nilai statistik uji  $\tau$  lebih besar dari nilai kritis DF atau MacKinnon maka hipotesis nol tidak ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat tidak stasioner. Untuk lebih memudahkan, statistik yang menjadi pembanding tersebut telah disediakan dalam paket program siap pakai, salah satunya adalah e-views.

## 2.4 Pembentukan Model

Pada pembentukan model ada tiga tahap yang akan dilakukan, yaitu tahap identifikasi, penaksiran parameter dan diagnosa model.

### 2.4.1 Identifikasi

Pada tahap ini akan dilakukan penentuan model sementara berdasarkan plot fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial sampel. Berdasarkan plot tersebut dapat ditentukan order dari model.

Langkah awal yang dilakukan untuk mengidentifikasi model sementara adalah membuat plot data terhadap waktu untuk melihat kestasioneran data. Suatu data dikatakan stasioner lemah jika mempunyai nilai tengah (mean) dan variansi konstan. Apabila plot data menunjukkan adanya *trend*, maka data tersebut tidak stasioner.

Apabila kestasioneran telah tercapai, maka dapat ditentukan model berdasarkan plot fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial sampel. Berikut ini petunjuk untuk menentukan order model secara umum:

- Jika fungsi autokorelasi sampel terdapat tiang pancang yang jelas sampai lag- $q$  atau memiliki nilai yang tidak nol hanya pada lag  $1, \dots, q$  (terputus setelah lag  $q$ ) dan fungsi autokorelasi parsial sampel menurun menuju nol secara eksponensial atau pola sinusoidal yang tidak begitu jelas, maka model yang akan diidentifikasi adalah model MA( $q$ ).
- Jika fungsi autokorelasi parsial sampel terdapat tiang pancang yang jelas sampai lag- $p$  atau memiliki nilai yang tidak nol hanya pada lag  $1, \dots, p$  (terputus setelah lag  $p$ ) dan fungsi autokorelasi sampel menurun secara eksponensial atau pola sinusoidal yang tidak begitu jelas, maka model yang akan diidentifikasi adalah model AR( $p$ ).
- Jika fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial sampel secara bersamaan menurun menuju nol secara eksponensial atau pola sinusoidal yang tidak begitu jelas, maka model yang akan diidentifikasi adalah model ARMA( $p, q$ ).

Untuk melihat apakah fungsi autokorelasi sampel memiliki puncak atau nilainya berbeda dari nol secara signifikan, maka perlu dilakukan pengujian. Prosedur pengujiannya adalah sebagai berikut (Cryer, 1986, p.106):

**Hipotesis:**

$H_0 : \rho_k = 0 \quad k \geq q+1 \quad q = 1, 2, \dots$  maka modelnya MA( $q$ )

$H_1$  : tidak demikian

**Statistik Uji:**

$$\frac{r_k}{\sqrt{\frac{1 + 2 \sum_{j=1}^q r_j^2}{T}}} \sim N(0,1) \quad , \text{dengan } T \text{ merupakan banyaknya observasi } y_t$$

**Aturan Keputusan:**

Apabila  $|r_k| < Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1 + 2 \sum_{j=1}^q r_j^2}{T}}$ , maka  $H_0$  tidak ditolak pada  $\alpha$  tertentu, dengan kata lain dapat disimpulkan bahwa modelnya adalah MA( $q$ ).

Untuk melihat apakah fungsi autokorelasi parsial sampel memiliki puncak atau nilainya berbeda dari nol secara signifikan, maka perlu dilakukan pengujian. Prosedur pengujiannya (Quinnouille 1949) adalah sebagai berikut (Cryer, 1986, p.109):

**Hipotesis:**

$H_0 : \phi_{kk} = 0, \quad k \geq p+1 \quad k = 1, 2, \dots$  maka model AR ( $p$ )

$H_1$  : tidak demikian

**Statistik Uji:**

$$\frac{|\hat{\phi}_{kk}|}{\frac{1}{\sqrt{T}}} \sim N(0,1)$$

**Aturan Keputusan:**

Apabila  $|\hat{\phi}_{kk}| < Z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{T}}$ , maka  $H_0$  tidak ditolak pada  $\alpha$  tertentu, dengan kata lain dapat disimpulkan bahwa modelnya adalah  $AR(p)$ .

## 2.4.2 Penaksiran Parameter

Setelah dilakukan identifikasi satu atau lebih model sementara berdasarkan fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial sampel, langkah selanjutnya adalah menaksir parameter model *autoregressive*. Parameter yang akan ditaksir adalah  $\phi$  dan variansi dari *white noise* yaitu  $\sigma_a^2$ . Saat melakukan penaksiran parameter, runtun waktu yang diperhatikan adalah runtun waktu yang stasioner. Metode yang akan digunakan untuk manaksir parameter adalah *metode Least Square* dan *Conditional Maximum Likelihood*.

Berdasarkan Hermiton untuk menaksir  $\sigma_a^2$ , akan digunakan metode *conditional maximum likelihood* untuk model  $AR(1)$  kemudian secara umum untuk model  $AR(p)$ . Dua tahap dalam pencarian taksiran dengan metode *conditional maximum likelihood* adalah yang pertama pencarian fungsi likelihood, kemudian parameter yang akan ditaksir dapat ditemukan dengan memaksimumkan fungsi likelihood tersebut. Untuk itu, akan dicari terlebih dahulu fungsi likelihood untuk masing-masing model.

2.4.2.1 Fungsi Likelihood Untuk Model  $AR(1)$  dan  $AR(p)$ 

Bentuk persamaan  $AR(1)$  berdasarkan persamaan (2.2) adalah

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$$

dimana  $a_t \sim NIID(0, \sigma_a^2)$ , pada kasus ini parameter yang akan ditaksir adalah  $\theta = (\phi, \sigma_a^2)'$ . Untuk  $t=1$ , maka distribusi dari observasi periode ke-1,  $Z_1$ , akan mempunyai  $E(Z_1) = 0$  dan variansi sebesar  $\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}$ . Karena  $a_t$  berdistribusi normal, maka  $Z_1$  juga berdistribusi normal (Hamilton,). Sehingga p.d.f untuk  $Z_1$  adalah

$$\begin{aligned} f_{Z_1}(z_1; \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_a^2/(1-\phi^2)}} \exp \left[ \frac{-(Z_1 - 0)^2}{2\sigma_a^2/(1-\phi^2)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_a^2/(1-\phi^2)}} \exp \left[ \frac{-Z_1^2}{2\sigma_a^2/(1-\phi^2)} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Kemudian akan dilihat distribusi dari observasi periode ke-2,  $Z_2$ , bersyarat  $Z_1 = z_1$ . Dari persamaan (2.2) untuk  $t=2$

$$Z_2 = \phi Z_1 + a_2 \quad (2.14)$$

maka  $(Z_2 | Z_1 = z_1) \sim N(\phi z_1, \sigma_a^2)$ , p.d.f untuk  $Z_2$

$$f_{Z_2|Z_1}(z_2 | z_1; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp \left[ \frac{-(z_2 - \phi z_1)^2}{2\sigma_a^2} \right] \quad (2.15)$$

Joint p.d.f untuk  $Z_1, Z_2$  adalah perkalian (2.13) dan (2.15), yaitu

$$f_{Z_2, Z_1}(z_2, z_1; \theta) = f_{Z_2|Z_1}(z_2 | z_1; \theta) \cdot f_{Z_1}(z_1; \theta)$$



Sama halnya untuk p.d.f observasi periode ke-3,  $Z_3$  bersyarat  $Z_1 = z_1, Z_2 = z_2$  yaitu

$$f_{Z_3|Z_2, Z_1}(z_3 | z_2, z_1; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp\left[\frac{-(z_3 - \phi z_2)^2}{2\sigma_a^2}\right]$$

Terlihat bahwa distribusi untuk observasi periode ke-3 bersyarat  $Z_1 = z_1, Z_2 = z_2$  hanya memerlukan nilai dari  $Z_2 = z_2$ , hal ini disebabkan karena modelnya adalah AR(1). Joint p.d.f untuk  $Z_1, Z_2, Z_3$  adalah

$$\begin{aligned} f_{Z_3, Z_2, Z_1}(z_3, z_2, z_1; \theta) &= f_{Z_3|Z_2, Z_1}(z_3 | z_2, z_1; \theta) \cdot f_{Z_2, Z_1}(z_2, z_1; \theta) \\ &= f_{Z_3|Z_2}(z_3 | z_2; \theta) \cdot f_{Z_2, Z_1}(z_2, z_1; \theta) \end{aligned}$$

Secara umum untuk sembarang  $t$ , maka observasi periode ke- $t$  bersyarat  $Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_{t-1} = z_{t-1}$  hanya memerlukan nilai dari  $Z_{t-1}$ . Sehingga p.d.f  $Z_t$  bersyarat  $t-1$  observasi sebelumnya adalah

$$f_{Z_t|Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_1}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_1; \theta) = f_{Z_t|Z_{t-1}}(z_t | z_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp\left[\frac{-(z_t - \phi z_{t-1})^2}{2\sigma_a^2}\right] \quad (2.16)$$

Joint p.d.f untuk  $Z_1, Z_2, \dots, Z_T$  adalah

$$\begin{aligned} f_{Z_T, Z_{T-1}, \dots, Z_1}(z_T, z_{T-1}, \dots, z_1; \theta) &= f_{Z_T|Z_{T-1}, Z_{T-2}, \dots, Z_1}(z_T | z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1; \theta) \cdot f_{Z_{T-1}, Z_{T-2}, \dots, Z_1}(z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1; \theta) \\ &= f_{Z_T|Z_{T-1}}(z_T | z_{T-1}; \theta) \cdot f_{Z_{T-1}, Z_{T-2}, \dots, Z_1}(z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1; \theta) \end{aligned}$$

Fungsi likelihood dari  $Z_1, Z_2, \dots, Z_T$ , sebut  $L(\theta)$ , didefinisikan sebagai joint p.d.f dari  $Z_1, Z_2, \dots, Z_T$  atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= f_{z_T, z_{T-1}, \dots, z_1}(z_T, z_{T-1}, \dots, z_1; \theta) \\
&= f_{z_T | z_{T-1}}(z_T | z_{T-1}; \theta) \cdot f_{z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1}(z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1; \theta) \\
&= f_{z_T | z_{T-1}}(z_T | z_{T-1}; \theta) \cdot f_{z_{T-1} | z_{T-2}}(z_{T-1} | z_{T-2}; \theta) \cdot f_{z_{T-2}, \dots, z_1}(z_{T-2}, \dots, z_1; \theta) \\
&= f_{z_T | z_{T-1}}(z_T | z_{T-1}; \theta) \cdot f_{z_{T-1} | z_{T-2}}(z_{T-1} | z_{T-2}; \theta) \cdot \dots \cdot f_{z_1}(z_1; \theta) \\
&= f_{z_1}(z_1; \theta) \cdot \prod_{t=2}^T f_{z_t | z_{t-1}}(z_t | z_{t-1}; \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_a^2 / (1 - \phi^2)}} \exp\left[\frac{-z_1^2}{2\sigma_a^2 / (1 - \phi^2)}\right] \cdot \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp\left[\frac{-(z_t - \phi z_{t-1})^2}{2\sigma_a^2}\right]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Fungsi log likelihood, sebut  $l(\theta)$ , dapat diperoleh dengan melogaritmakan persamaan (2.17) diatas, menjadi

$$l(\theta) = \log f_{z_1}(z_1; \theta) + \sum_{t=2}^T \log f_{z_t | z_{t-1}}(z_t | z_{t-1}; \theta) \tag{2.18}$$

Sekarang akan dicari fungsi likelihood untuk model AR( $p$ ). Bentuk AR( $p$ ) berdasarkan persamaan (2.7) adalah

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

dimana  $a_t \sim NIID(0, \sigma_a^2)$ .

Sejumlah  $p$  observasi pertama pada sampel  $(z_1, z_2, \dots, z_p)$  dikumpulkan pada vektor ukuran  $(p \times 1)$ , sebut  $\mathbf{Z}_p$ . Dengan mean  $\mu_p = \mathbf{0}$ , yang merupakan vektor ukuran  $(p \times 1)$  dan berisi masing-masing elemennya adalah nol. Misalkan  $\sigma_a^2 \mathbf{V}$ , adalah matriks variansi-kovariansi ukuran  $(p \times p)$  dari  $(z_1, z_2, \dots, z_p)$

$$\sigma_a^2 \mathbf{V}_p = \begin{bmatrix} E(Z_1 - \mu)^2 & E(Z_1 - \mu)(Z_2 - \mu) & \dots & E(Z_1 - \mu)(Z_p - \mu) \\ E(Z_2 - \mu)(Z_1 - \mu) & E(Z_2 - \mu)^2 & \dots & E(Z_2 - \mu)(Z_p - \mu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(Z_p - \mu)(Z_1 - \mu) & E(Z_p - \mu)(Z_2 - \mu) & \dots & E(Z_p - \mu)^2 \end{bmatrix}$$

Atau

$$\sigma_a^2 \mathbf{V}_p = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

$\gamma_j$  didefinisikan sebagai autokovariansi ke- $j$  untuk proses AR( $p$ ), yang nilainya seperti pada persamaan (2.11)

P.d.f untuk  $p$  observasi pertama yang merupakan variabel berdistribusi  $N(\mu_p, \sigma_a^2 \mathbf{V}_p)$  adalah

$$\begin{aligned} f_{Z_p|Z_{p-1}, \dots, Z_1}(z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\sigma_a^{-2} \mathbf{V}_p^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{-1}{2\sigma_a^2} (\mathbf{Z}_p - \mu_p)' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{Z}_p - \mu_p) \right] \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\sigma_a^{-2})^{\frac{p}{2}} |\mathbf{V}_p^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{-1}{2\sigma_a^2} (\mathbf{Z}_p - \mu_p)' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{Z}_p - \mu_p) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sama halnya seperti pada model AR(1), Secara umum untuk  $Z_t$  bersyarat  $t-1$  observasi sebelumnya hanya memerlukan nilai dari  $p$  observasi terbaru atau dari observasi periode ke- $t-1$  hingga  $t-p$  saja dan berdistribusi normal dengan mean,  $E(\phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t) = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p}$  dan variansi,  $Var(\phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t) = \sigma_a^2$ . Maka untuk  $t > p$

$$\begin{aligned} f_{Z_t|Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_1}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_1; \theta) &= f_{Z_t|Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}; \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp \left[ \frac{-(Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \right] \end{aligned}$$

Sehingga, join p.d.f untuk  $Z_1, Z_2, \dots, Z_T$  adalah

$$\begin{aligned}
f_{z_T, z_{T-1}, \dots, z_1}(z_T, z_{T-1}, \dots, z_1; \theta) &= f_{z_T | z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1}(z_T | z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1; \theta) \cdot f_{z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1}(z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1; \theta) \\
&= f_{z_T | z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_{T-p}}(z_T | z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_1; \theta) \\
&\quad \cdot f_{z_{T-1} | z_{T-2}, z_{T-3}, \dots, z_{T-(p+1)}}(z_{T-1} | z_{T-2}, z_{T-3}, \dots, z_{T-(p+1)}; \theta) \\
&\quad \cdot f_{z_{T-2}, z_{T-3}, \dots, z_1}(z_{T-2}, z_{T-3}, \dots, z_1; \theta) \\
&= f_{z_T | z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_{T-p}}(z_T | z_{T-1}, z_{T-2}, \dots, z_{T-p}; \theta) \cdots f_{z_p, z_{p-1}, \dots, z_1}(z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) \\
&= \prod_{t=p+1}^T f_{z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}; \theta) \times f_{z_p, z_{p-1}, \dots, z_1}(z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) \\
&= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\sigma_a^{-2})^{\frac{p}{2}} |\mathbf{V}_p^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{-1}{2\sigma_a^2} (\mathbf{Z}_p - \mu_p)' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{Z}_p - \mu_p) \right] \\
&\quad \times \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \right)^{T-p} \exp \left[ \frac{-\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

Fungsi likelihood untuk keseluruhan sampel sebut  $L(\theta)$  adalah

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= f_{z_T, z_{T-1}, \dots, z_1}(z_T, z_{T-1}, \dots, z_1; \theta) \\
&= f_{z_p, z_{p-1}, \dots, z_1}(z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) \times \prod_{t=p+1}^T f_{z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}; \theta) \\
&= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\sigma_a^{-2})^{\frac{p}{2}} |\mathbf{V}_p^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{-1}{2\sigma_a^2} (\mathbf{Z}_p - \mu_p)' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{Z}_p - \mu_p) \right] \\
&\quad \times \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \right)^{T-p} \exp \left[ \frac{-\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

Dan log likelihoodnya, sebut  $l(\theta)$  adalah

$$\begin{aligned}
l(\theta) &= \log f_{Z_T, Z_{T-1}, \dots, Z_1}(z_T, z_{T-1}, \dots, z_1; \theta) \\
&= \log \left( f_{Z_p, Z_{p-1}, \dots, Z_1}(z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) \times \prod_{t=p+1}^T f_{Z_t | Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}; \theta) \right) \\
&= \log \left( f_{Z_p, Z_{p-1}, \dots, Z_1}(z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) \right) + \log \left( \prod_{t=p+1}^T f_{Z_t | Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}; \theta) \right) \\
&= \log \left( (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\sigma_a^2)^{\frac{p}{2}} |\mathbf{V}_p^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{-1}{2\sigma_a^2} (\mathbf{Z}_p - \mu_p)' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{Z}_p - \mu_p) \right] \right) \\
&\quad + \log \left( \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \right)^{T-p} \exp \left[ \frac{-\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \right] \right] \right) \\
&= -\frac{p}{2} \log(2\pi) - \frac{p}{2} \log(\sigma_a^2) + \frac{1}{2} \log |\mathbf{V}_p^{-1}| - \frac{1}{2\sigma_a^2} (\mathbf{Z}_p - \mu_p)' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{Z}_p - \mu_p) \\
&\quad - \frac{T-p}{2} \log(2\pi) - \frac{T-p}{2} \log(\sigma_a^2) - \frac{\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \\
l(\theta) &= -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma_a^2) + \frac{1}{2} \log |\mathbf{V}_p^{-1}| - \frac{1}{2\sigma_a^2} (\mathbf{Z}_p - \mu_p)' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{Z}_p - \mu_p) \\
&\quad - \frac{\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Dalam metode penaksiran *maximum likelihood* taksiran dari  $\theta$  diperoleh dengan menemukan nilai  $\theta$ , sebut  $\hat{\theta}$ , yang memaksimumkan fungsi likelihood. Maka  $\hat{\theta}$  disebut *maximum likelihood estimator* untuk  $\theta$ . Mencari nilai  $\theta$  yang memaksimumkan nilai  $L(\theta)$  sama dengan mencari nilai  $\theta$  yang memaksimumkan nilai  $l(\theta)$  (bukti dapat dilihat pada lampiran 9). Sehingga akan dicari nilai  $\theta$  yang memaksimumkan  $l(\theta)$ . Namun pada kenyataannya, ketika mencari nilai maksimum dari persamaan (2.18) dan (2.20) akan didapatkan sistem persamaan yang tidak linear antara  $\theta$  dan  $(z_1, z_2, \dots, z_T)$ , sehingga tidak ditemukan adanya solusi sederhana untuk  $\theta$ . Artinya dibutuhkan prosedur numerik untuk mendapatkan nilai maksimum dari persamaan (2.18) dan (2.20). Oleh karena itu, akan digunakan *conditional maximum likelihood*.

### 2.4.2.2 Conditional Maximum Likelihood untuk AR(1) dan AR(p)

Untuk model AR(1), prinsipnya adalah dengan menganggap nilai  $z_1$  sebagai nilai deterministik dan memaksimumkan likelihood bersyarat observasi ke-1,  $z_1$ .

$$f_{z_T, z_{T-1}, \dots, z_2 | z_1}(z_T, z_{T-1}, \dots, z_2 | z_1; \theta) = \prod_{t=2}^T f_{z_t | z_{t-1}}(z_t | z_{t-1}; \theta) \quad (2.21)$$

Yang akan dimaksimumkan adalah

$$\begin{aligned} \log f_{z_T, z_{T-1}, \dots, z_2 | z_1}(z_T, z_{T-1}, \dots, z_2 | z_1; \theta) &= \log \prod_{t=2}^T f_{z_t | z_{t-1}}(z_t | z_{t-1}; \theta) \\ &= \log \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp\left[-\frac{(z_t - \phi z_{t-1})^2}{2\sigma_a^2}\right] \\ &= -[(T-1)/2] \log(2\pi) - [(T-1)/2] \log(\sigma_a^2) \\ &\quad - \sum_{t=2}^T \left[ \frac{(z_t - \phi z_{t-1})^2}{2\sigma_a^2} \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Maksimum dari (2.22) terhadap  $\phi$  akan ekivalen dengan meminimumkan

$$\sum_{t=2}^T (z_t - \phi z_{t-1})^2 \quad (2.23)$$

Hasil taksiran  $\phi$  dengan menggunakan OLS dapat dilihat pada lampiran 1

Taksiran  $\sigma_a^2$  dengan conditional maximum likelihood didapatkan dengan mendiferensialkan (2.22) terhadap  $\sigma_a^2$  dan hasilnya sama dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial \left[ \log f_{z_1, z_{t-1}, \dots, z_2 | z_1} (z_t, z_{t-1}, \dots, z_2 | z_1; \theta) \right]}{\partial \sigma_a^2} = \frac{\partial \left[ -[(T-1)/2] \log(2\pi) - [(T-1)/2] \log(\sigma_a^2) - \sum_{t=2}^T \left[ \frac{(z_t - \hat{\phi}_{z_{t-1}})^2}{2\sigma_a^2} \right] \right]}{\partial \sigma_a^2}$$

$$= \frac{-(T-1)}{2\hat{\sigma}_a^2} + \sum_{t=2}^T \left[ \frac{(z_t - \hat{\phi}_{z_{t-1}})^2}{2\hat{\sigma}_a^4} \right] = 0$$

Didapat

$$\frac{-(T-1)}{2\hat{\sigma}_a^2} + \sum_{t=2}^T \left[ \frac{(z_t - \hat{\phi}_{z_{t-1}})^2}{2\hat{\sigma}_a^4} \right] = 0$$

$$\frac{-(T-1)}{2\hat{\sigma}_a^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}_a^4} \sum_{t=2}^T (z_t - \hat{\phi}_{z_{t-1}})^2 = 0$$

$$\frac{-\hat{\sigma}_a^2(T-1) + \sum_{t=2}^T (z_t - \hat{\phi}_{z_{t-1}})^2}{2\hat{\sigma}_a^4} = 0$$

$$-\hat{\sigma}_a^2(T-1) + \sum_{t=2}^T (z_t - \hat{\phi}_{z_{t-1}})^2 = 0$$

$$\hat{\sigma}_a^2(T-1) = \sum_{t=2}^T (z_t - \hat{\phi}_{z_{t-1}})^2$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{\sum_{t=2}^T (z_t - \hat{\phi}_{z_{t-1}})^2}{(T-1)}$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{SSE}{(T-1)}$$

Sama seperti pada model AR(1), dianggap nilai  $z_1, z_2, \dots, z_p$  sebagai deterministik. Fungsi likelihood bersyarat  $z_1, z_2, \dots, z_p$

$$f_{z_T, z_{T-1}, \dots, z_{p+1} | z_p, z_{p-1}, \dots, z_1} (z_T, z_{T-1}, \dots, z_{p+1} | z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) = \prod_{t=p+1}^T f_{z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}} (z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}; \theta)$$

Maksimum dari log likelihood bersyarat  $z_1, z_2, \dots, z_p$  adalah

$$\begin{aligned}
& \log f_{z_T, z_{T-1}, \dots, z_{p+1} | z_p, z_{p-1}, \dots, z_1} (z_T, z_{T-1}, \dots, z_{p+1} | z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) \\
&= \log \left[ (2\pi\sigma_a^2)^{-\frac{T-p}{2}} \exp \left[ -\frac{\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \right] \right] \\
&= -\frac{T-p}{2} \log(2\pi) - \frac{T-p}{2} \log(\sigma_a^2) \\
&\quad - \frac{\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Maksimum dari (2.24) terhadap  $\phi$  akan ekivalen dengan meminimumkan

$$\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2 \tag{2.25}$$

Hasil dari taksiran  $\phi$  dengan menggunakan metode *least square* dapat dilihat pada lampiran 1.

Taksiran  $\sigma_a^2$  dengan conditional maksimum likelihood didapatkan dengan mendeferensialkan (2.24) terhadap  $\sigma_a^2$  dan hasilnya sama dengan nol, yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left[ \log f_{z_T, z_{T-1}, \dots, z_{p+1} | z_p, z_{p-1}, \dots, z_1} (z_T, z_{T-1}, \dots, z_{p+1} | z_p, z_{p-1}, \dots, z_1; \theta) \right]}{\partial \sigma_a^2} &= \frac{\partial \left[ -\frac{T-p}{2} \log(2\pi) - \frac{T-p}{2} \log(\sigma_a^2) \right]}{\partial \sigma_a^2} \\
&\quad + \frac{\partial \left[ -\frac{\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\sigma_a^2} \right]}{\partial \sigma_a^2} \\
&= \frac{-(T-p)}{2\hat{\sigma}_a^2} + \sum_{t=p+1}^T \left[ \frac{(Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\hat{\sigma}_a^4} \right] = 0
\end{aligned}$$

Didapat



$$\begin{aligned}
& \frac{-(T-p)}{2\hat{\sigma}_a^2} + \sum_{t=p+1}^T \left[ \frac{(Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\hat{\sigma}_a^4} \right] = 0 \\
& \frac{-(T-p)}{2\hat{\sigma}_a^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}_a^4} \sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2 = 0 \\
& \frac{-\hat{\sigma}_a^2(T-p) + \sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{2\hat{\sigma}_a^4} = 0 \\
& -\hat{\sigma}_a^2(T-p) + \sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2 = 0 \\
& \hat{\sigma}_a^2(T-p) = \sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2 \\
& \hat{\sigma}_a^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^T (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2}{(T-p)} \\
& \hat{\sigma}_a^2 = \frac{SSE}{(T-p)} \tag{2.26}
\end{aligned}$$

### 2.4.3 Diagnosa Model

Pada tahap ini, model AR( $p$ ) yang telah diidentifikasi dan ditaksir akan dianalisis, apakah model sudah cukup baik (*goodness of fit*). Uji statistik yang dilakukan diantaranya uji untuk parameter-parameter pada model (uji parameter) dan analisis residual model.

#### 2.4.3.1 Uji Parameter

Untuk masing-masing parameter pada model *autoregressive*, hipotesisnya adalah (Gaynor & Kirkpatrick, 1994, p.425)

#### Hipotesis:

$$H_0 : \forall \phi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$H_1$  : tidak demikian

**Statistik uji:**

$$t = \frac{\hat{\phi}_i}{SE(\hat{\phi}_i)}$$

**Aturan Keputusan:**

Jika  $t > |t_{\alpha/2}|$ , maka tolak  $H_0$  pada tingkat signifikansi  $\alpha$ . Jika tidak demikian maka  $H_0$  tidak ditolak.

2.4.3.2 *Analisis Residual*

Setelah diperoleh beberapa model sementara yang cocok dengan data pada tahap identifikasi model, langkah selanjutnya adalah memilih model terbaik dari beberapa model tersebut. Untuk memilih model yang terbaik dapat dilakukan dengan analisis residual. Jika model benar, maka plot dari residual akan mendekati sifat *white noise* dan dapat diuji dengan menggunakan uji Portmanteau, dimana pada statistik ujinya digunakan fungsi autokorelasi sampel residual. Berikut ini akan dibahas mengenai residual, fungsi autokorelasi sampel *residual* dan uji Portmanteau

2.4.3.2.1 *Residual*

*Residual* didefinisikan sebagai:

$$\hat{a}_t = Z_t - \hat{Z}_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

dengan  $Z_t$  adalah pengamatan pada saat  $t$  dan  $\hat{Z}_t$  adalah nilai prediksi pada saat  $t$ .

### 2.4.3.2.2 Fungsi Autokorelasi Sampel *Residual*

Apabila model yang dimiliki cukup baik, maka (Box, Jenkins dan Reinsel, 1994, p.313) menyatakan:

$$\hat{a}_t = a_t + O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

Artinya apabila jumlah data besar, maka  $\hat{a}_t$  akan mendekati *white noise*  $a_t$ . Jika model yang dimiliki cocok dengan data dan jika parameter yang ditaksir mendekati nilai sebenarnya, maka residual akan mendekati sifat atau asumsi-asumsi *white noise* yaitu independen, berdistribusi identik, variabel random normal dengan mean nol dan variansi konstan (Cryer, 1985, p.146).

Untuk mengetahui apakah *residual* pada model bersifat random, maka yang perlu diperhatikan adalah fungsi autokorelasi sampel *residual* yang dinotasikan dengan  $\hat{r}_k(\hat{a})$ , yaitu:

$$\hat{r}_k(\hat{a}) = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} \hat{a}_t \hat{a}_{t+k}}{\sum_{t=1}^T \hat{a}_t^2} \quad k = 1, 2, \dots$$

Fungsi autokorelasi sample untuk *white noise* yaitu  $r_k(a)$  didekati oleh distribusi normal dengan mean nol dan variansi  $\frac{1}{T}$  serta tidak berkorelasi (cryer: 1985:104), yaitu:

$$r_k(a) \sim N\left(0, \frac{1}{T}\right),$$

$$\text{Corr}(r_k, r_j) \approx 0 \quad k \neq j$$

### 2.4.3.2.3 Uji Portmanteau

Untuk melihat pengaruh autokorelasi residual secara bersama-sama, Box-Pierce mengembangkan suatu statistik yaitu

$$Q = T \sum_{k=1}^K \hat{r}_k^2(\hat{a})$$

Apabila model ARMA( $p, q$ ) cocok dengan data, maka untuk  $T$  besar  $Q$  didekati oleh distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas =  $K-p-q$ . Uji Portmanteau akan menolak model ARMA( $p, q$ ) jika nilai  $Q$  lebih besar daripada nilai kritis *Chi-Square* dengan derajat bebas  $K-p-q$ . (Cryer: 1985:104)

Ljung dan Box menemukan bahwa distribusi *Chi-Square* bukan pendekatan yang cukup akurat untuk distribusi statistik  $Q$  dengan nilai  $Q$  cenderung lebih kecil daripada nilai kritis distribusi *Chi-Square*. (Box, Jenkins & Reinsei: 1994:314), yang artinya ada kecenderungan untuk tidak menolak  $H_0$ . Oleh karena itu, Ljung dan Box memodifikasi statistik  $Q$  yang selanjutnya disebut statistik modifikasi Ljung-Box-Pierce, yaitu:

$$Q^* = T(T+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{r}_k^2(\hat{a})}{T-k}$$

Oleh karena  $\left(\frac{T+2}{T-k}\right) > 1$  maka  $Q^* > Q$ , sehingga statistik  $Q^*$  yang merupakan hasil modifikasi lebih baik digunakan karena tidak memiliki kecenderungan untuk tidak menolak  $H_0$ .

Berikut ini hipotesis untuk uji Portmanteau

#### Hipotesis:

$$H_0 : r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$$

$$H_1 : \text{terdapat } r_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

**Statistik uji:**

$$Q^* = T(T+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{r}_k^2(\hat{a})}{T-k}$$

dengan:

$\hat{r}_k(\hat{a})$  = autokorelasi sample *residual* untuk lag  $k$   $k = 1, 2, \dots, K$

T = jumlah data runrun waktu stasioner

K = jumlah autokorelasi yang dihitung

**Aturan keputusan:**

$H_0$  ditolak jika  $Q^* > \chi_{K-p-q}^2$  artinya autokorelasi *residual* secara bersama-sama berbeda dari nol. Ini menunjukkan bahwa residual tidak bersifat *random*, dengan kata lain model tersebut kurang cocok dengan data.

$H_0$  tidak ditolak jika  $Q^* < \chi_{K-p-q}^2$  artinya autokorelasi *residual* secara bersama-sama tidak berbeda dari nol. Ini menunjukkan bahwa residual bersifat *random*, dengan kata lain model tersebut cocok dengan data.

## 2.5 MADN (*Median Absolute Deviation Normalized*)

Misalkan  $z_1, z_2, \dots, z_T$  nilai-nilai dari sampel random dari distribusi yang mempunyai *mean*  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$ .  $z_t$  dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$z_t = \mu + u_t \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Fungsi distribusi untuk  $z_t$  adalah  $F_0 \forall t = 1, 2, \dots, n$  dan  $u_t$  saling bebas.

Didefinisikan

$$\begin{aligned} MAD(z) &= MAD(z_1, z_2, \dots, z_T) \\ &= med \{ |z_t - med(z_t)| \} \end{aligned}$$

Dimana median adalah ukuran pusat data yang robust terhadap outlier. Jika  $z$  simetris, maka  $med(z) = \mu$ , sehingga diperoleh  $MAD(z) = med \{ |z_t - \mu| \}$  dan berlaku

$$\begin{aligned} \Pr \{ |z_t - \mu| \leq MAD(z) \} &= \frac{1}{2} \\ \Pr \{ -MAD(z) \leq z_t - \mu \leq MAD(z) \} &= \frac{1}{2} \\ \Pr \left\{ -\frac{MAD(z)}{\sigma} \leq \frac{z_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{MAD(z)}{\sigma} \right\} &= \frac{1}{2} \\ \Pr \left\{ -\frac{MAD(z)}{\sigma} \leq Z \leq \frac{MAD(z)}{\sigma} \right\} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Jika  $Z \sim N(0,1)$ , maka didapat  $\frac{MAD(z)}{\sigma} = 0,6745$

$\tilde{\sigma} = \frac{MAD(z)}{0,6745}$  disebut *Median Absolute Deviation Normalized* (MADN). MADN merupakan taksiran yang *robust* untuk  $\sigma$

### BAB III

## PENDETEKSIAN DAN PENGIDENTIFIKASIAN *OUTLIER* PADA MODEL AUTOREGRESSIVE

Pada pengumpulan data runtun waktu terkadang terjadi kesalahan dan gangguan yang tidak biasa (*unusual disturbance*). Beberapa contoh kesalahan yang mungkin seperti kesalahan pencatatan, kesalahan pengukuran, kesalahan perhitungan, dan lain sebagainya, sedangkan contoh gangguan yang tidak biasa adalah terjadinya krisis moneter, pemogokan, bencana alam, perang dan gangguan lainnya. Kesalahan dan gangguan tersebut dapat menyebabkan satu atau beberapa observasi menyimpang dari observasi-observasi lainnya. Observasi yang menyimpang tersebut mungkin merupakan *outlier*. Menurut Ferguson (1961) dan Barnett (1981), *outlier* merupakan observasi yang menyimpang dari sekumpulan data yang lain.

Karena keberadaan *outlier* ini dapat mempengaruhi model, yakni pada taksiran parameter model yang nantinya akan mengarah pada ketidakakuratan peramalan data untuk periode yang akan datang, maka penting untuk mengetahui pengaruh *outlier* dan mendeteksinya. Oleh karena itu, pada bab ini akan dibahas mengenai pengaruh adanya *outlier* terhadap SSE dan metode pendeteksian *outlier* pada model autoregressive. Metode pendeteksian *outlier* yang digunakan dikemukakan oleh Allan D. McQuarrie and Chih Ling Tsai (2003). Sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu mengenai jenis *outlier* pada model *autoregressive*.

### 3.1 Jenis *Outlier* Pada Model *Autoregressive*

Misalkan  $y_1, y_2, \dots, y_n$  adalah observasi runtun waktu dan misalkan model  $AR(p_0)$  untuk runtun tersebut adalah:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_{p_0} Z_{t-p_0} + a_t, \quad t = p_0 + 1, p_0 + 2, \dots, n \quad (3.1)$$

dimana nilai  $y_t = Z_t$  untuk setiap  $t$  dan asumsi  $a_t \sim NIID(0, \sigma_a^2)$ .

Menurut Fox (1972), Ada 2 jenis *outlier* yang mungkin muncul pada data runtun waktu, yaitu:

1. *Outlier* tipe I disebut *Additive Outlier* (AO), merupakan suatu *outlier* yang hanya mempengaruhi satu observasi dan biasanya terjadi akibat dari kesalahan, contohnya seperti kesalahan pencatatan, kesalahan input data, kesalahan perhitungan, dan lain sebagainya. Jika *Additive outlier* muncul pada periode ke-  $q$  dimana  $p_0 + 1 < q < T$ , maka

$$y_t = \begin{cases} Z_t + \Delta_{At} & , (t = q) \\ Z_t & , (t \neq q) \end{cases} \quad (3.2)$$

dimana  $\Delta_{At}$  merupakan besarnya *Additive Outlier*. Dari persamaan (3.2) diatas terlihat bahwa adanya AO hanya mempengaruhi satu observasi saja, yaitu  $y_q$  atau observasi pada waktu terjadinya *outlier*.

2. *Outlier* tipe II disebut *Innovation Outlier* (IO), merupakan *outlier* yang tidak hanya mempengaruhi observasi tertentu, tetapi juga observasi periode selanjutnya dan biasanya terjadi akibat dari gangguan yang tidak biasa, seperti ketidakstabilan politik, pemogokan, krisis moneter, bencana alam, perang, dan lain sebagainya. Jika terjadi *Innovation outlier* pada periode ke-  $q$  dimana  $p_0 + 1 < q < T$ , maka

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_{p_0} Z_{t-p_0} + u_t$$

$$u_t = \begin{cases} a_t + \Delta_{It} & (t = q) \\ a_t & (t \neq q) \end{cases} \quad (3.3)$$

dengan  $y_t = Z_t$  untuk setiap  $t$  dan  $\Delta_{It}$  adalah besarnya *Innovation Outlier*. Dari persamaan (3.3) diatas terlihat adanya *Innovation Outlier* tidak hanya mempengaruhi satu observasi tertentu, yaitu  $y_q$  tapi juga akan mempengaruhi observasi-observasi periode selanjutnya setelah  $y_q$ , yaitu



$y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_T$ . Berikut adalah ilustrasinya: dari persamaan (3.3), observasi periode ke-  $q+1$ , yaitu  $y_{q+1} = Z_{q+1}$  memerlukan nilai  $Z_q$ , sedangkan nilai  $Z_q$  telah dipengaruhi oleh *Innovation outlier*. Begitu pula untuk  $y_{q+2}, y_{q+3}, \dots, y_T$ . Jadi, secara tidak langsung *Innovation outlier* juga mempengaruhi  $y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_T$ .

Jika tidak terjadi *outlier*, baik AO maupun IO, maka  $y_t = Z_t$ ,  $\Delta_{A_t} = 0$  dan  $\Delta_{I_t} = 0$  untuk setiap  $t$ . Selanjutnya akan dibahas mengenai pengaruh kedua jenis *outlier* tersebut terhadap *Residual Sum of Square (SSE)*.

### 3.2 Pengaruh *Outlier* Terhadap *Residual Sum Of Square (SSE)*

Karena pada prakteknya baik order model yang sebenarnya ( $p_0$ ) ataupun ada atau tidaknya *outlier* tidak diketahui, maka  $y_t$  dimodelkan dengan kandidat model AR( $p$ ), yaitu:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + a_t, \quad t = p+1, p+2, \dots, T \quad (3.4)$$

dengan asumsi tidak ada *outlier* dan  $a_t \sim NIID(0, \sigma_a^2)$ .

Untuk mendapatkan *residual sum of square*, definisikan terlebih dahulu vektor  $\mathbf{Y}$  dan matriks  $\mathbf{X}$  sedemikian sehingga

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{p+1} \\ y_{p+2} \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-p} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Dimana vektor  $\mathbf{Y}$  merupakan vektor yang berisi nilai-nilai  $y_t$  dari observasi periode ke-  $p+1$  hingga observasi periode ke- $T$ , yaitu  $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_T$ .

Sedangkan matriks  $\mathbf{X}$  merupakan matriks ukuran  $(T-p) \times p$  yang bersesuaian dengan vektor  $\mathbf{Y}$ , yaitu berisi nilai-nilai observasi hingga  $p$  periode sebelumnya dari  $y_t$ . Sebagai contohnya untuk baris pertama pada matriks  $\mathbf{X}$  akan bersesuaian dengan unsur pertama pada vektor  $\mathbf{Y}$ , yaitu berisi nilai-nilai observasi hingga  $p$  periode sebelumnya dari  $y_{p+1}$ , yakni  $y_p, y_{p-1}, \dots, y_1$ . Model AR( $p$ ) pada sistem persamaan (3.4) jika dinotasikan dalam bentuk (3.5) akan menjadi

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{a}_t \quad (3.6)$$

dimana  $\beta = (\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p)'$  dan  $\mathbf{a}_t = (a_{p+1} \ a_{p+2} \ \dots \ a_T)'$ . Sebelumnya, akan dicari taksiran parameter  $\beta$  dan  $\sigma_a^2$  untuk persamaan (3.4). Hasil taksiran parameter  $\beta$  dengan menggunakan metode *least squares* berdasarkan lampiran 1 adalah

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (3.7)$$

Sedangkan taksiran parameter  $\sigma_a^2$  dengan menggunakan metode *conditional maximum likelihood* berdasarkan pada persamaan (2.26) adalah

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_a^2 &= \frac{\sum_{t=p+1}^T (y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\phi}_2 y_{t-2} - \dots - \hat{\phi}_p y_{t-p})^2}{(T-p)} \\ &= \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})}{(T-p)} = \frac{SSE}{(T-p)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dan nilai prediksi untuk  $\mathbf{Y}$  adalah

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}} &= \mathbf{X}\hat{\beta} \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.9)$$

dimana  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ .

*Residual sum of square* merupakan penjumlahan dari kuadrat-kuadrat *residual*. Berdasarkan pengertian *residual*, yaitu  $\hat{a}_t = y_t - \hat{y}_t$ , maka SSE adalah kuadrat dari  $\hat{a}_t$ . Sehingga bentuk SSE untuk persamaan (3.4) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 SSE &= \sum_{t=p+1}^T \hat{a}_t^2 = \hat{a}_{p+1}^2 + \hat{a}_{p+2}^2 + \dots + \hat{a}_T^2 \\
 &= \hat{\mathbf{a}}' \hat{\mathbf{a}} \\
 &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\
 &= (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) \\
 &= (\mathbf{Y}' - \hat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) \\
 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\hat{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{Y}}'\hat{\mathbf{Y}} \\
 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} + [\mathbf{HY}]' [\mathbf{HY}] && \text{dari persamaan (3.9)} \\
 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2[\mathbf{HY}]' \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{HY} \\
 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2[\mathbf{HY}]' \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{HY} && \text{dari lampiran 2} \\
 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\mathbf{H}^2\mathbf{Y} \\
 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y} && \text{dari lampiran 2} \\
 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y} \\
 &= \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{Y} && (3.10)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.10) diatas, yaitu  $SSE = \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{Y}$ , mengimplikasikan bahwa jika terdapat *outlier* pada model  $AR(p)$ , maka *outlier* tersebut akan berpengaruh terhadap SSE. Pengaruh adanya *outlier*, baik *Additive Outlier* maupun *Innovation Outlier* terhadap SSE akan dijelaskan dalam lemma 1 berikut:

**Lemma 1.** untuk  $p < T/2$ , misalkan pada observasi periode ke- $q$  dari model  $AR(p)$  yaitu,  $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$ , mempunyai masing-

masing besaran *Additive Outlier* sebesar  $\Delta_{At}$  dan *Innovation Outlier* sebesar  $\Delta_{It}$ , maka:

- *SSE* akan meningkat seiring  $|\Delta_{It}|$  meningkat,
- *SSE* pada akhirnya meningkat seiring  $|\Delta_{At}|$  meningkat hingga ke suatu bilangan besar.

**Bukti:**

Karena  $p < T/2$ , maka model  $AR(p)$  tidak *saturated*. **Model saturated (model penuh)** adalah suatu model yang jumlah parameter sama banyak dengan jumlah observasi. Jika model mempunyai jumlah parameter yang melebihi jumlah observasi, model tersebut merupakan model *oversaturated*. (Bukti untuk  $p < T/2$ , maka model  $AR(p)$  tidak saturated dapat dilihat pada lampiran 3).

**(ii) Untuk Innovation outlier:**

Bentuk model  $AR(p)$  adalah  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_t$ . Dimana

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Z_{p+1} \\ Z_{p+2} \\ \vdots \\ Z_T \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} Z_p & Z_{p-1} & \cdots & Z_1 \\ Z_{p+1} & Z_p & \cdots & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{T-1} & Z_{T-2} & \cdots & Z_{T-p} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}, \mathbf{a}_t = \begin{pmatrix} a_{p+1} \\ a_{p+2} \\ \vdots \\ a_T \end{pmatrix},$$

- Dari persamaan *SSE* pada persamaan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned} SSE &= \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_t)'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_t) \\ &= (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_t) + \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_t) \\ &= (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t \\ &= (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}')[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t \quad (3.11) \end{aligned}$$

Berdasarkan lampiran 4 bahwa

$$(\beta' \mathbf{X}')[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\beta) = 0, \quad (\beta' \mathbf{X}')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t = 0, \quad \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\beta) = 0$$

maka persamaan (3.11) menjadi:

$$SSE = \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t \quad (3.12)$$

Jika terdapat *innovation outlier* pada periode ke- $q$ , maka persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned} SSE &= (\mathbf{a}_t + \Delta_{it}\delta_t)'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{a}_t + \Delta_{it}\delta_t) \\ &= \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{a}_t + \Delta_{it}\delta_t) + \Delta_{it}\delta_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{a}_t + \Delta_{it}\delta_t) \\ &= \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\Delta_{it}\delta_t) + (\Delta_{it}\delta_t')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + \Delta_{it}\delta_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\Delta_{it}\delta_t \\ &= \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\Delta_{it}\delta_t) + (\Delta_{it}\delta_t')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + \Delta_{it}^2[1 - h_{qq}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

dimana  $\delta_t$  merupakan vektor yang bernilai 1 untuk  $t = q$  dan nol untuk lainnya, sedangkan  $h_{qq}$  merupakan elemen diagonal ke- $q$  dari  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ . Dari lampiran 4 yang menyatakan bahwa  $\mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}](\Delta_{it}\delta_t) = (\Delta_{it}\delta_t')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t$ , maka persamaan (3.13) diatas akan menjadi

$$\begin{aligned} SSE &= \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + (\Delta_{it}\delta_t')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + (\Delta_{it}\delta_t')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + \Delta_{it}^2[1 - h_{qq}] \\ &= \mathbf{a}_t'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + 2(\Delta_{it}\delta_t')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t + \Delta_{it}^2[1 - h_{qq}] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Karena:

- $2(\Delta_{it}\delta_t')[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t$  menghasilkan matriks  $1 \times 1$ , yaitu

$$2\Delta_{it} \left( [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q1} a_{p+1} + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q2} a_{p+2} + \dots + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q(T-p)} a_T \right). \text{ Dan karena } [\mathbf{I} - \mathbf{H}]$$

dan  $\mathbf{a}_t$  isinya bukanlah bilangan negatif, maka jika ada penambahan pada nilai  $|\Delta_{tt}|$  mengakibatkan meningkatnya nilai  $2(\Delta_{tt}\delta'_t)[\mathbf{I}-\mathbf{H}]\mathbf{a}_t$ .

- $[\mathbf{I}-\mathbf{H}]$  tidak berisi bilangan negatif, maka  $[1-h_{qq}]$  bukanlah bilangan negatif. Sehingga jika ada penambahan pada nilai  $|\Delta_{tt}|$  mengakibatkan meningkatnya nilai  $\Delta_{tt}^2[1-h_{qq}]$ .

Dari pernyataan diatas mengimplikasikan bahwa jika terjadi peningkatan pada nilai  $|\Delta_{tt}|$ , maka nilai  $SSE$  pada persamaan (3.14) juga akan meningkat.

### (iii) Untuk *Additive outlier*

- Model untuk AO pada observasi periode ke- $q$  berdasarkan persamaan (3.2):

$$y_t = \begin{cases} Z_t + \Delta_{At} & , (t = q) \\ Z_t & , (t \neq q) \end{cases}$$

Dimana  $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$  untuk semua  $t$ , dan  $p+1 < q < T$ .

Atau persamaan (3.2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_t = Z_t + \Delta_{At}, \quad \Delta_{At} = \begin{cases} \Delta_{At} & , (t = q) \\ 0 & , (t \neq q) \end{cases}$$

Berdasarkan persamaan (3.10), yaitu  $SSE = \mathbf{Y}'[\mathbf{I}-\mathbf{H}]\mathbf{Y}$  atau  $SSE = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}$ ,

Pandang kedua persamaan berikut:  $\mathbf{Y}'\mathbf{Y}$  dan  $\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}). \mathbf{Y}'\mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} y_{p+1} & & & \\ y_{p+2} & & & \\ \vdots & & & \\ y_T & & & \end{pmatrix} \\
&= y_{p+1}^2 + y_{p+2}^2 + \cdots + y_T^2 \\
&= \sum_{s=p+1}^T y_s^2 \\
&= \sum_{s=p+1}^T (Z_s + \Delta_{At})^2 \\
&= \sum_{s=p+1}^T Z_s^2 + 2 \sum_{s=p+1}^T \Delta_{At} Z_s + \sum_{s=p+1}^T \Delta_{At}^2 \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Ambil nilai  $\Delta_{At}$  yang maksimum, sehingga persamaan (3.15) menjadi

$$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} \leq \sum_{s=p+1}^T Z_s^2 + 2\Delta_{At} \sum_{s=p+1}^T Z_s + (T-p)\Delta_{At}^2 \tag{3.16}$$

Pilih suatu konstanta  $r = \max(|Z_s|, s = p+1, \dots, T)$  sehingga  $r|\Delta_{At}| \geq |Z_s|$  untuk setiap  $Z_s$ . Maka harga mutlak dari  $\mathbf{Y}'\mathbf{Y}$  adalah

$$\begin{aligned}
|\mathbf{Y}'\mathbf{Y}| &= \left| \sum_{s=p+1}^T Z_s^2 + 2 \sum_{s=p+1}^T \Delta_{At} Z_s + \sum_{s=p+1}^T \Delta_{At}^2 \right| \\
&\leq \left| \sum_{s=p+1}^T Z_s^2 + 2\Delta_{At} \sum_{s=p+1}^T Z_s + \sum_{s=p+1}^T \Delta_{At}^2 \right| \\
&\leq \sum_{s=p+1}^T |Z_s^2| + 2|\Delta_{At}| \sum_{s=p+1}^T |Z_s| + (T-p)|\Delta_{At}^2| \\
&\leq (T-p)(r|\Delta_{At}|)^2 + 2|\Delta_{At}|(T-p)r|\Delta_{At}| + (T-p)|\Delta_{At}^2| \\
&= (T-p)r^2|\Delta_{At}^2| + 2(T-p)r|\Delta_{At}^2| + (T-p)|\Delta_{At}^2| \\
&= |\Delta_{At}^2|(T-p)(r^2 + 2r + 1) \\
&= |\Delta_{At}^2|m \quad , \text{dimana } m = (T-p)(r^2 + 2r + 1) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Karena untuk suatu  $\varepsilon > 0$  terdapat konstanta  $m$  sedemikian sehingga

$$\Pr \left[ \frac{|\mathbf{Y}'\mathbf{Y}|}{|\Delta_{At}^2|} \leq m \right] \geq 1 - \varepsilon, \text{ maka berdasarkan pengertian terbatas dalam probabilitas}$$

(lampiran 5)  $\mathbf{Y}'\mathbf{Y}/\Delta_{At}^2$  akan terbatas dalam probabilitas seiring bertambahnya

$|\Delta_{At}|$ , dapat ditulis  $\mathbf{Y}'\mathbf{Y}/\Delta_{At}^2 = O_p(1)$  atau  $\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = O_p(\Delta_{At}^2)$ .

Dan,

$$(II). \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\hat{\mathbf{Y}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} y_{p+1} & y_{p+2} & \cdots & y_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{p+1} \\ \hat{y}_{p+2} \\ \vdots \\ \hat{y}_T \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{s=p+1}^T y_s \hat{y}_s \\
 &= \sum_{s=p+1}^T (Z_s + \Delta_{At}) Z_s \\
 &= \sum_{s=p+1}^T Z_s^2 + \sum_{s=p+1}^T \Delta_{At} Z_s
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ambil nilai  $\Delta_{At}$  yang maksimum, sehingga persamaan (3.18) menjadi

$$\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y} \leq \sum_{s=p+1}^T Z_s^2 + \Delta_{At} \sum_{s=p+1}^T Z_s \tag{3.19}$$

pilih suatu konstanta  $v = \max(|Z_s|, s = p+1, \dots, T)$  sehingga  $v \geq |Z_s|$  untuk setiap  $Z_s$ .

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}| &= \left| \sum_{s=p+1}^T z_s^2 + \sum_{s=p+1}^T \Delta_{At} z_s \right| \\
 &\leq \left| \sum_{s=p+1}^T z_s^2 + \Delta_{At} \sum_{s=p+1}^T z_s \right| \\
 &\leq \sum_{s=p+1}^T |z_s^2| + |\Delta_{At}| \sum_{s=p+1}^T |z_s| \\
 &\leq |\Delta_{At}| (T-p)v^2 + |\Delta_{At}| (T-p)v \\
 &= |\Delta_{At}| (T-p)(v^2 + v) \\
 &= |\Delta_{At}| w, \quad \text{dimana } w = (T-p)(v^2 + v)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$



Karena untuk suatu  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu konstanta  $w$  sedemikian sehingga

$\Pr \left[ \frac{|\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}|}{|\Delta_{At}|} \leq w \right] \geq 1 - \varepsilon$ , maka berdasarkan pengertian terbatas dalam probabilitas

(lampiran 5)  $\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}/|\Delta_{At}|$  terbatas dalam probabilitas seiring bertambahnya  $|\Delta_{At}|$  ke suatu bilangan besar, dapat ditulis  $\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}/\Delta_{At} = O_p(1)$  atau  $\mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y} = O_p(\Delta_{At})$ .

Dari persamaan (3.17) dan (3.20), mengimplikasikan bahwa persamaan  $SSE = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}$  juga akan meningkat seiring bertambahnya  $|\Delta_{At}|$  ke suatu bilangan besar.

Berdasarkan lemma 1 dapat disimpulkan bahwa nilai SSE dipengaruhi oleh nilai mutlak dari besaran kedua *outlier*, yaitu SSE membesar seiring nilai mutlak besaran kedua *outlier* meningkat. Hal ini yang mendasari teknik pendeteksian *outlier* yang dikemukakan oleh Allan D. McQuarrie and Chih Ling Tsai, yaitu dengan mencari taksiran besaran *outlier* yang meminimumkan SSE. Oleh karena itu, pada subbab berikut akan dicari taksiran untuk besaran masing-masing *outlier* yang meminimumkan SSE.

### 3.3 Taksiran Untuk Besaran AO dan IO

Lemma 1 mengasumsikan pada observasi periode ke- $q$  untuk model AR( $p$ ) mempunyai besaran kedua *outlier* masing-masing sebesar  $\Delta_{At}$  dan  $\Delta_{It}$ . Pada subbab ini akan dibahas tentang cara untuk mendapatkan taksiran  $\Delta_{At}$  dan  $\Delta_{It}$  yang meminimumkan SSE.

#### 3.3.1 Kasus *Innovation Outlier* (IO)

Berdasarkan persamaan (3.10) diketahui  $SSE = \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{Y}$ , dimana nilai  $y_t = Z_t$ , dan  $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$ . Namun, ketika terdapat *Innovation outlier* pada periode ke- $q$ , maka untuk observasi periode ke- $q$  bentuk model AR( $p$ ) berdasarkan persamaan (3.3)

$$Z_q = \phi_1 Z_{q-1} + \phi_2 Z_{q-2} + \dots + \phi_p Z_{q-p} + u_q$$

$$u_q = a_q + \Delta_{It}$$

Artinya, ada penambahan sebesar  $\Delta_{It}$  pada  $a_q$ , atau  $a_q = u_q - \Delta_{It}$ . Maka bentuk SSE setelah pengaruh *Innovation outlier* dihilangkan yang dinotasikan oleh  $SSE_{\Delta_{It}}$  adalah

$$\begin{aligned} SSE_{\Delta_{It}} &= \sum_{t=p+1}^T a_t^2 \\ &= a_{p+1}^2 + \dots + a_q^2 + \dots + a_T^2 \\ &= a_{p+1}^2 + \dots + (u_q - \Delta_{It})^2 + \dots + a_T^2 \\ &= (\mathbf{Y} - \Delta_{It} \delta_t)' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] (\mathbf{Y} - \Delta_{It} \delta_t) \\ &= (\mathbf{Y}' - \Delta_{It} \delta_t') [\mathbf{I} - \mathbf{H}] (\mathbf{Y} - \Delta_{It} \delta_t) \\ &= \mathbf{Y}' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] (\mathbf{Y} - \Delta_{It} \delta_t) - \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] (\mathbf{Y} - \Delta_{It} \delta_t) \\ &= \mathbf{Y}' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \Delta_{It} \delta_t - \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y} + \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \Delta_{It} \delta_t \\ &= SSE - \mathbf{Y}' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \Delta_{It} \delta_t - \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y} + \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \Delta_{It} \delta_t \end{aligned}$$

dimana  $\delta_t$  merupakan vektor yang bernilai 1 untuk  $t = q$  dan nol untuk lainnya. Berdasarkan lampiran 4, yang menyatakan bahwa

$\mathbf{Y}' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \Delta_{It} \delta_t = \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y}$ , maka persamaan diatas akan menjadi

$$\begin{aligned} SSE_{\Delta_{It}} &= SSE - (\Delta_{It} \delta_t)' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y} - \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y} + \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \Delta_{It} \delta_t \\ &= SSE - 2(\Delta_{It} \delta_t)' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y} + \Delta_{It} \delta_t' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \Delta_{It} \delta_t \\ &= SSE - 2(\Delta_{It} \delta_t)' [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y} + \Delta_{It}^2 [1 - h_{qq}] \\ &= SSE - 2\Delta_{It} \hat{a}_q + \Delta_{It}^2 [1 - h_{qq}] \end{aligned}$$

dimana  $h_{qq}$  merupakan elemen ke- $q$  dari  $\mathbf{H}$  dan  $\hat{a}_q$  adalah elemen ke- $q$  dari  $[\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y}$ , karena  $[\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y}$  merupakan bentuk dari residual maka  $\hat{\mathbf{a}}_t = [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y}$ .

Berdasarkan lemma 1 yang menyebutkan bahwa semakin besar nilai mutlak besaran masing-masing *outlier* mengakibatkan nilai SSE meningkat, atau semakin kecil nilai mutlaknya (besaran *outlier* mendekati nol atau dapat dikatakan tidak terdapat *outlier*) mengakibatkan SSE akan minimum. Sehingga, akan dicari taksiran dari besaran *Innovation Outlier* ( $\hat{\Delta}_t$ ) yang meminimumkan  $SSE_{\Delta_t}$ .

Untuk mendapatkan  $\hat{\Delta}_t$  yang meminimumkan  $SSE_{\Delta_t}$  harus memenuhi turunan pertama dari  $SSE_{\Delta_t}$  terhadap  $\Delta_t$  sama dengan nol dan turunan kedua dari  $SSE_{\Delta_t}$

terhadap  $\Delta_t$  lebih besar dari nol atau  $\frac{d(SSE_{\Delta_t})}{d\Delta_t} = 0$  dan  $\frac{d^2(SSE_{\Delta_t})}{d\Delta_t^2} > 0$

- Akan dicari  $\frac{d(SSE_{\Delta_t})}{d\Delta_t} = 0$

$$\frac{dSSE_{\Delta_t}}{d\Delta_t} = \frac{d[SSE - 2\Delta_t\hat{a}_q + \Delta_t^2[1-h_{qq}]]}{d\Delta_t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d[SSE]}{d\Delta_t} - \frac{d[2\Delta_t\hat{a}_q]}{d\Delta_t} + \frac{d[\Delta_t^2[1-h_{qq}]]}{d\Delta_t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 2\hat{a}_q + 2\Delta_t[1-h_{qq}] = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\hat{a}_q + 2\Delta_t[1-h_{qq}] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\Delta_t[1-h_{qq}] = 2\hat{a}_q$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Delta}_t = \frac{2\hat{a}_q}{2[1-h_{qq}]}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Delta}_t = \frac{\hat{a}_q}{[1-h_{qq}]}$$

- Akan dibuktikan bahwa  $\frac{d^2(SSE_{\Delta_t})}{d\Delta_t^2} > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d^2(SSE_{\Delta_t})}{d\Delta_t^2} &= \frac{d[-2\hat{a}_q + 2\Delta_t[1-h_{qq}]]}{d\Delta_t} \\ &= 2[1-h_{qq}] \\ &> 0\end{aligned}$$

Karena  $\frac{d(SSE_{\Delta_t})}{d\Delta_t} = 0$  dan  $\frac{d^2(SSE_{\Delta_t})}{d\Delta_t^2} > 0$ , didapat taksiran  $\Delta_t$  yang

meminimumkan  $SSE_{\Delta_t}$  adalah

$$\hat{\Delta}_t = \frac{\hat{a}_q}{1-h_{qq}} \quad (3.21)$$

dan biasa disebut nilai *predicted residual*. Nilai minimum dari  $SSE_{\hat{\Delta}_t}$  adalah

$$\begin{aligned}SSE_{\hat{\Delta}_t} &= SSE - 2\hat{\Delta}_t\hat{a}_q + (\hat{\Delta}_t)^2(1-h_{qq}) \\ &= SSE - 2\left[\frac{\hat{a}_q}{1-h_{qq}}\right]\hat{a}_q + \left[\frac{\hat{a}_q}{1-h_{qq}}\right]^2(1-h_{qq}) \\ &= SSE - \frac{2\hat{a}_q^2}{1-h_{qq}} + \frac{\hat{a}_q^2}{1-h_{qq}} \\ &= SSE - \frac{\hat{a}_q^2}{1-h_{qq}} \\ &= SSE - IO_t\end{aligned} \quad (3.22)$$

dimana

$$IO_t = \frac{\hat{a}_q^2}{1-h_{qq}} \quad (3.23)$$

Karena nilai minimum  $SSE_{\Delta_t}$  diperoleh ketika  $SSE$  dikurangi sebesar  $IO_t$ , maka  $IO_t$  adalah pengurangan terbesar pada  $SSE$  sehingga  $SSE_{\Delta_t}$  minimum dan merupakan kuadrat dari *unscaled predicted residual*.

Dari asumsi yang diberikan pada persamaan (3.1) diketahui  $a_t \sim NIID(0, \sigma_a^2)$  atau  $\mathbf{a}_t \sim N_T(0, \sigma_a^2 \mathbf{I})$ , sehingga distribusi dari  $IO_t$  adalah

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{a}}_t &= \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} \\
 &= \mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{Y} \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{Y} \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_t) \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{H}](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'](\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t \\
 &= [(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\boldsymbol{\beta})] + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t \\
 &= [(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})] + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t
 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\mathbf{a}}_t) &= E([\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{a}_t) \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{H}]E(\mathbf{a}_t) \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \cdot \mathbf{0} \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{\mathbf{a}}_t) &= \text{Var}[(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{a}_t] \\
&= [\mathbf{I} - \mathbf{H}]^2 \text{Var}(\mathbf{a}_t) \\
&= [\mathbf{I}^2 - 2\mathbf{I}\mathbf{H} + \mathbf{H}^2] \sigma_a^2 \mathbf{I} \\
&= [\mathbf{I} - 2\mathbf{H} + \mathbf{H}] \sigma_a^2 \mathbf{I} \quad \text{dari sifat hat matrix: } \mathbf{H}^2 = \mathbf{H} \\
&= [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \sigma_a^2 \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Karena  $\hat{a}_q$  merupakan elemen ke- $q$  dari  $\hat{\mathbf{a}}_t$ , maka  $E(\hat{a}_q) = E(0) = 0$  dan

$$\text{Var}(\hat{a}_q) = (1 - h_{qq}) \sigma_a^2 \text{ atau}$$

$$\hat{a}_q \sim N[0, (1 - h_{qq}) \sigma_a^2]$$

Dengan menggunakan metode standarisasi, diperoleh

$$\frac{\hat{a}_q - 0}{\sqrt{(1 - h_{qq}) \sigma_a^2}} = \frac{\hat{a}_q}{\sigma_a \sqrt{(1 - h_{qq})}} \sim N(0, 1)$$

Dan dari lampiran 6 yang menyatakan kuadrat dari suatu distribusi Normal standar adalah chi-square dengan derajat bebas 1, diperoleh

$$\left( \frac{\hat{a}_q}{\sigma_a \sqrt{(1 - h_{qq})}} \right)^2 = \frac{\hat{a}_q^2}{\sigma_a^2 (1 - h_{qq})} \sim \chi_1^2$$

Atau

$$\frac{\hat{a}_q^2}{(1 - h_{qq})} \sim \sigma_a^2 \chi_1^2$$

Karena  $IO_t = \frac{\hat{a}_q^2}{1-h_{qq}}$ , maka

$$IO_t \sim \sigma_a^2 \chi_1^2 \quad (3.24)$$

### 3.3.2 Kasus *Additive Outlier* (AO)

Berdasarkan persamaan (3.10) bentuk SSE adalah  $SSE = \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{H}]\mathbf{Y}$ , dimana nilai  $y_t = Z_t, \forall t$  dan  $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$ .

Misal terdapat *Additive outlier* pada periode ke- $q$ , maka bentuk model AR( $p$ ) berdasarkan persamaan (3.2)

$$y_t = \begin{cases} Z_t + \Delta_{At} & , (t = q) \\ Z_t & , (t \neq q) \end{cases}$$

Karena pada observasi periode ke- $q$   $y_q = Z_q + \Delta_{At}$ , maka AO tidak hanya berpengaruh pada vektor  $\mathbf{Y}$  tapi juga matriks  $\mathbf{X}$ . Misalkan vektor  $\tilde{\mathbf{Y}}$  dan matriks  $\tilde{\mathbf{X}}$  merupakan vektor dan matriks setelah ada pengaruh AO, maka  $\tilde{\mathbf{Y}}$  berisi nilai-nilai observasi untuk periode ke- $p+1$  hingga observasi periode ke- $T$  (dimana pada observasi periode ke- $q$ ,  $\tilde{y}_q = y_q - \Delta_{At}$ , sedangkan observasi lainnya  $\tilde{y}_t = y_t$ ) dan matriks  $\tilde{\mathbf{X}}$  yang bersesuaian dengan  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , yaitu berisi nilai-nilai observasi hingga  $p$  periode sebelumnya dari  $y_t$ . Maka setelah ada pengaruh AO bentuk SSE diatas dinotasikan oleh  $SSE_{\Delta_{At}}$  menjadi:

$$SSE_{\Delta_{At}} = \tilde{\mathbf{Y}}'[\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{H}}]\tilde{\mathbf{Y}}$$

Dimana

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} y_{p+1} \\ y_{p+2} \\ \vdots \\ y_q - \Delta_{At} \\ y_{q+1} \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \text{dan } \tilde{\mathbf{Y}}' \text{ merupakan transpose dari } \tilde{\mathbf{Y}}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_{p-2} & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{q-1} & y_{q-2} & \cdots & y_{q-p} \\ y_q - \Delta_{At} & y_{q-1} & \cdots & y_{q-p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-p} \end{pmatrix} \quad \text{dan } \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{X}}'$$

Setelah perhitungan secara aljabar, tidak ditemukan adanya bentuk taksiran besaran AO,  $\hat{\Delta}_{At}$ , yang meminimumkan  $SSE_{\Delta_{At}}$  (Allan dan Tsay). Hal ini disebabkan karena AO tidak hanya mempengaruhi vektor  $\mathbf{Y}$  tetapi juga akan mempengaruhi matriks  $\mathbf{X}$  dan matriks  $\mathbf{H}$ . Sehingga, diperlukan perhitungan secara numerik untuk mendapatkan taksiran besaran *Additive outlier*,  $\hat{\Delta}_{At}$ , sedemikian sehingga

$$\hat{\Delta}_{At} = \arg \min_{\Delta_{At}} SSE_{\Delta_{At}} \quad (3.25)$$

(penjelasan mengenai argmin dapat dilihat pada lampiran 7). Setelah  $\hat{\Delta}_{At}$  telah ditemukan, maka persamaan  $SSE_{\Delta_{At}}$  akan minimum ketika  $\Delta_{At}$  sebesar  $\hat{\Delta}_{At}$  sedemikian sehingga

$$SSE_{\hat{\Delta}_{At}} = SSE - AO_t \quad (3.26)$$



Karena  $SSE_{\Delta_{A_t}}$  minimum ketika SSE dikurangi dengan  $AO_t$ , maka  $AO_t$  merupakan pengurangan terbesar terhadap SSE sehingga  $SSE_{\Delta_{A_t}}$  minimum, yang nilainya

$$AO_t = SSE - SSE_{\Delta_{A_t}} \quad (3.27)$$

Lain halnya seperti pada kasus *Innovation Outlier*, distribusi untuk  $AO_t$  tidak diketahui. Namun begitu,  $AO_t$  masih dapat digunakan pada tahap pengidentifikasian jenis *outlier*.

### 3.4 Pendeteksian Dan Pengidentifikasian *Outlier*

Karena keberadaan *outlier* dapat berpengaruh terhadap penaksiran parameter yang nantinya akan mempengaruhi peramalan data untuk periode yang akan datang, sehingga penting untuk mendeteksi *outlier* dan mengidentifikasikan jenisnya. Pada subbab ini, akan dicari terlebih dahulu taksiran  $\sigma_a$  yang *robust* terhadap *outlier* (tidak terpengaruh oleh adanya *outlier*), yaitu dengan menggunakan taksiran median.

#### 3.4.1 Penaksiran Standar Deviasi Dengan Menggunakan Median

Berdasarkan Lemma 1 yang menyatakan bahwa nilai SSE dipengaruhi oleh nilai mutlak besaran masing-masing *outlier* atau dengan kata lain adanya *outlier* dapat mempengaruhi SSE, sedangkan dari persamaan (3.10), yaitu

$$\hat{\sigma}_a = \frac{SSE}{(T-p)},$$

nilai SSE tersebut digunakan dalam penaksiran  $\sigma_a$  yang ditaksir

dengan *conditional maximum likelihood*. Sehingga, adanya *outlier* secara tidak langsung akan mempengaruhi  $\hat{\sigma}_a$ . Artinya,  $\hat{\sigma}_a$  sudah tidak tepat untuk menaksir  $\sigma_a$  yang nantinya akan digunakan pada tahap pendeteksian *outlier*. Oleh karena itu, akan dicari taksiran  $\sigma_a$  yang *robust* terhadap *outlier*.

Pada lampiran 6 menyatakan bahwa kuadrat dari distribusi normal standar adalah distribusi chi-square dengan derajat bebas 1, maka akar dari distribusi chi-square adalah mutlak normal standar (dari sifat harga mutlak yaitu  $\sqrt{x^2} = |x|$ ). Sehingga berdasarkan persamaan (3.24), yaitu  $IO_t \sim \sigma_a^2 \chi_1^2$ , akan diperoleh (A.D. McQuarrie & C.L. Tsay, 455)

$$\sqrt{IO_t} \sim \sigma_a |N(0,1)| \quad (3.28)$$

karena  $\frac{\sqrt{IO_t}}{\sigma_a} \sim |N(0,1)|$ , dimana  $t = p+1, \dots, T$ , maka menurut persamaan (2.27), didapat

$$\Pr \left\{ \frac{\text{med} \{ \sqrt{IO_t} \}}{\sigma_a} \leq \frac{\sqrt{IO_t}}{\sigma_a} \leq \frac{\text{med} \{ \sqrt{IO_t} \}}{\sigma_a} \right\} = \frac{1}{2}$$

Atau

$$\frac{\text{med} \{ \sqrt{IO_t} \}}{\sigma_a} = \frac{\text{med} \{ \sqrt{IO_{p+1}}, \dots, \sqrt{IO_T} \}}{\sigma_a} = 0.6745$$

Misalkan

$$\tilde{\sigma}_a = \frac{1}{0,6745} \text{median} \{ \sqrt{IO_{p+1}}, \dots, \sqrt{IO_T} \} \quad (3.29)$$

dimana 0,6745 merupakan median dari  $|N(0,1)|$ . Maka  $\hat{\sigma}_a$  adalah taksiran yang robust terhadap *outlier*.

### 3.4.2 Besaran Pendeteksian *Outlier*

Untuk mendeteksi *outlier*, didefinisikan terlebih dahulu besaran diagnostik,  $D_t$ , yaitu

$$D_t = \frac{\sqrt{IO_t}}{\tilde{\sigma}_a} \quad (3.30)$$

Dari persamaan (3.28), yaitu  $\sqrt{IO_t} \sim \sigma_a |N(0,1)|$ , maka persamaan diatas menjadi

$$D_t = \frac{\sqrt{IO_t}}{\tilde{\sigma}_a} \sim |N(0,1)|$$

Perlu diperhatikan bahwa sebenarnya AO periode ke- $q$  dan IO periode ke- $q$  mempunyai bentuk yang sama, yaitu  $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \Delta + a_t$ .

Dimana  $\Delta = \Delta_{It}$  untuk IO ( $\Delta$  terjadi didalam runtun waktu AR( $p$ )) dan  $\Delta = -\Delta_{At}$  untuk AO ( $\Delta$  terjadi diluar runtun waktu AR( $p$ )). Berikut ilustrasinya:

$$y_t = Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \Delta + a$$

untuk *Innovation Outlier* :  $\Delta = \Delta_{It}$

$$\rightarrow y_t = Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \Delta_{It} + a_t$$

untuk *Additive Outlier* :  $\Delta = -\Delta_{At}$

$$\rightarrow y_t = Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} - \Delta_{At} + a_t$$

$$\rightarrow y_t = Z_t + \Delta_{At} = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

Karena AO dan IO mempunyai bentuk yang sama, maka walaupun  $D_t$  hanya menggunakan besaran IO tetapi  $D_t$  dapat digunakan untuk mendeteksi *outlier* tanpa memperhatikan jenis *outlier*. Pendeteksian adalah sebagai berikut:

**Hipotesis:**

$H_0 : \Delta = 0$  (Pada observasi periode ke- $q$  tidak terjadi *outlier*)

$H_1 : \Delta \neq 0$  (Pada observasi periode ke- $q$  terjadi *outlier*)

**Statistik Uji:**

$$D_t = \frac{\sqrt{IO_t}}{\hat{\sigma}} \sim |N(0,1)|$$

**Aturan Keputusan:**

Apabila  $D_t > Z_{\alpha/2}$ , maka  $H_0$  ditolak ( $\Delta \neq 0$ ) pada  $\alpha$  tertentu, dengan kata lain dapat disimpulkan bahwa pada observasi periode ke- $q$  merupakan *outlier*.

Apabila  $0 < D_t < Z_{\alpha/2}$ , maka  $H_0$  tidak ditolak ( $\Delta = 0$ ) pada  $\alpha$  tertentu, dengan kata lain dapat disimpulkan bahwa pada observasi periode ke- $q$  merupakan *outlier*.

Untuk  $\alpha = 0.05$  nilai  $Z_{\alpha/2} = 2$ .

3.4.3 Pengidentifikasian Jenis *Outlier*

Misalkan telah terdeteksi ada *outlier* pada observasi periode ke- $q$  dari besaran diagnostik,  $D_t$ , langkah selanjutnya adalah penentuan jenis *outlier* apakah *innovation outlier* (IO) atau *additive outlier* (AO). Dari persamaan (3.22) dan persamaan (3.26), yaitu:

$$SSE_{\Delta_t} = SSE - IO_t \quad \text{dan} \quad SSE_{\Delta_{At}} = SSE - AO_t$$

dimana  $IO_t$  dan  $AO_t$  merupakan nilai pengurangan terbesar terhadap  $SSE$ .

Sehingga jika yang terjadi adalah IO, maka pengurangan terbesar terhadap  $SSE$  haruslah berasal dari pengaruh IO. Begitu pula sebaliknya, jika yang terjadi

adalah AO, maka pengurangan terbesar terhadap  $SSE$  haruslah berasal dari pengaruh AO. Dapat dikatakan bahwa jika  $AO_i > IO_i$ , jenis *outlier* yang muncul adalah *Additive Outlier* (AO), sedangkan untuk yang lainnya merupakan *Innovation Outlier* (IO).



## BAB IV CONTOH APLIKASI

### 4.1 Sumber Data

Data yang akan dianalisa merupakan data “*Daily Average Number of Defects per Truck Found in The Final Inspection at The End of an Assembly Line of Truck Manufacturing Plant*” yang diambil dari buku dengan judul “*Statistical Quality Control*” karangan Irving Wingate Burr (1976, p.134). Burr melakukan pengamatan mengenai rata-rata banyaknya bagian truk yang cacat atau tidak memenuhi persyaratan pada saat perakitan yang ditemukan pada tiap truk yang keluar dari tempat pemeriksaan akhir per hari. Jumlah data yang diobservasi sebanyak 45 data dan merupakan data harian (5 hari dalam seminggu), yang diobservasi antara tanggal 4 November hingga 10 Januari. Per harinya di tempat pemeriksaan akhir diambil informasi mengenai banyaknya truk yang keluar dan total jumlah bagian truk yang cacat atau tidak memenuhi persyaratan pada saat perakitan yang ditemukan pada tiap truk. Dimana rata-rata banyaknya bagian truk yang cacat atau tidak memenuhi persyaratan pada saat perakitan per truk merupakan pembagian antara banyaknya truk pengantar yang keluar dan total jumlah bagian truk yang cacat pada saat perakitan yang ditemukan pada tiap truk. Data secara lengkap dapat dilihat pada lampiran. Program bantuan yang digunakan untuk menganalisa data tersebut adalah *evIEWS*, *minitab 13* dan *matlab*.

### 4.2 Analisis Data

Analisis yang dilakukan terhadap data tersebut diantaranya, penentuan model *autoregressive* yang sesuai untuk data tersebut, dan pendeteksian *outlier* pada model *autoregressive* yang telah terpilih. Semua gambar dan output pada bab ini ada pada halaman khusus gambar yang berada dibagian akhir skripsi.

Sebelumnya akan dilihat terlebih dahulu kestasioneritas data. Uji yang paling sederhana untuk melihat stasioneritas data yaitu dengan analisis grafik,

yang dilakukan dengan membuat plot antara nilai observasi ( $y_t$ ) terhadap waktu ( $t$ ), sebut Gambar 2.2.

Berdasarkan Gambar 2.2 tidak terlihat adanya *trend*, sehingga dapat dikatakan bahwa data telah stasioner atau mempunyai mean dan variansi konstan. Namun, analisis grafik masih bersifat subjektif sehingga perlu adanya uji formal, yaitu *unit root test* untuk menguji kestasioneran data. Dari hasil *Unit Root Test* pada Gambar 2.3, terlihat bahwa nilai ADF test statistic adalah  $-9.359429$  lebih kecil dibanding titik kritis, bahkan untuk  $\alpha = 1\%$  yaitu  $-2.619851$ . Dengan demikian berdasarkan teori *unit root test* dapat dikatakan bahwa data tidak mempunyai *unit root* yang artinya data stasioner. Karena data telah stasioner, maka data dapat digunakan pada metode ini.

#### 4.2.1 Tahap Penentuan Model

Setelah data sudah stasioner, barulah memasuki tahap penentuan model yang tepat untuk data tersebut. Hal ini dapat dilakukan dengan melihat plot dari fungsi autokorelasi sampel pada Gambar 2.4 dan fungsi autokorelasi parsial sampel pada Gambar 2.5.

Secara garis besar, pola ACF dan PACF untuk suatu model adalah sebagai berikut

Model	Pola ACF	Pola PACF
$AR(p)$	Menurun secara eksponensial atau pola sinusoidal yang tidak begitu jelas	terdapat tiang pancang yang jelas sampai lag- $p$
$MA(q)$	terdapat tiang pancang yang jelas sampai lag- $q$	menurun secara eksponensial
$ARMA(p,q)$	Menurun secara eksponensial	menurun secara eksponensial

Berdasarkan Gambar 2.4 dimana Autokorelasi Function (ACF) menurun secara eksponensial dan terdapat tiang pancang yang jelas sampai lag 1, serta dari Gambar 2.5 dimana Parsial Autokorelasi Function (PACF) yang mempunyai pola

yang sama dengan ACF, maka model yang mungkin adalah AR(1), MA(1) atau ARMA(1,1). Sekarang akan dipilih model mana yang lebih tepat menggambarkan data.

Untuk menguji apakah data sesuai dengan model MA(1), dilakukan pengujian sebagai berikut:

**Hipotesis:**

$$H_0 : \rho_k = 0 \quad k \geq 2 \quad (\text{atau modelnya MA(1)})$$

$H_1$  : tidak demikian

**Statistik Uji:**

$$\frac{r_k}{\sqrt{\frac{1+2r_1^2}{45}}} \sim N(0,1)$$

**Keputusan:**

Dari tabel ACF pada Gambar 2.4 didapat untuk  $\alpha = 0.05$ ,

$$|r_k| < Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1+2r_1^2}{45}} = 2 \sqrt{\frac{1+2(0.43)^2}{45}} = 0.348941255 \text{ atau}$$

$-0.348941255 < r_k < 0.348941255$ . Karena untuk semua  $r_k$  dimana  $k$  lebih dari 1 berada didalam interval, maka  $H_0$  tidak ditolak atau model MA(1) mungkin terpilih.

Sedangkan untuk menguji apakah data sesuai dengan model AR(1), dilakukan pengujian sebagai berikut:

**Hipotesis:**

$$H_0 : \phi_{kk} = 0, \quad k \geq 2$$

$H_1$  : tidak demikian



**Statistik Uji:**

$$\frac{|\hat{\phi}_{kk}|}{\frac{1}{\sqrt{45}}} \sim N(0,1)$$

**Keputusan:**

Dari tabel PACF pada Gambar 2.5 didapat untuk  $\alpha = 0.05$ ,

$$|\hat{\phi}_{kk}| < Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{45}} = 2 \sqrt{\frac{1}{45}} = 0.298142397 \text{ atau } -0.298142397 < \hat{\phi}_{kk} < 0.298142397.$$

Karena untuk semua  $\hat{\phi}_{kk}$  dimana  $p$  lebih dari 1 berada didalam interval, maka  $H_0$  tidak ditolak atau model AR(1) mungkin terpilih.

Berdasarkan hasil diatas, model sementara yang mungkin yaitu MA(1), AR(1) atau ARMA(1,1). Kemudian untuk memilih model mana yang lebih tepat, akan dilihat apakah ketiga model tersebut sudah memenuhi kriteria model yang baik. Menurut Gaynor & Kirkpatrick (1994) kriteria suatu model yang baik adalah:

1. Proses iterasi pada penaksiran parameter merupakan proses yang konvergen. Hal ini ditunjukkan dengan perubahan relatif yang kurang dari 0.001
  - Untuk model MA(1): dari Gambar 2.6 terlihat bahwa proses iterasi konvergen
  - Untuk model AR(1): dari Gambar 2.7 terlihat bahwa proses iterasi konvergen
  - Untuk model ARMA(1,1): dari Gambar 2.8 terlihat bahwa proses iterasi konvergen
2. Terpenuhinya kondisi invertibilitas dan kestasioneran
  - Untuk model MA(1): syarat invertibilitas untuk model MA(1) adalah  $|\theta| < 1$ . Dari Gambar 2.6 didapat  $|\theta| = |-0.3409| = 0.3409 < 1$ , maka model memenuhi kondisi invertibilitas

- Untuk model AR(1): syarat kestasioneran untuk model AR(1) adalah  $|\phi| < 1$ . Dari Gambar 2.7 didapat  $|\phi| = |0.4421| = 0.4421 < 1$ , maka model memenuhi kondisi kestasioneran
  - Untuk model ARMA(1,1): syarat invertibilitas dan kestasioneran untuk model ARMA(1,1) adalah  $|\theta| < 1$  dan  $|\phi| < 1$ . Gambar 2.8 didapat  $|\theta| = |0.1926| = 0.1926 < 1$  dan  $|\phi| = |0.5983| = 0.5983 < 1$ , maka model memenuhi kondisi invertibilitas dan kestasioneran
3. Residual bersifat random dan mendekati distribusi normal
- Untuk model MA(1): dengan menggunakan uji portmanteau, dari Gambar 2.6 didapat  $Q^* = 8.0 < 19.6751 = \chi_{0.05;11}$ , sehingga residual bersifat random atau dengan kata lain model cocok dengan data
  - Untuk model AR(1): dengan menggunakan uji portmanteau, dari Gambar 2.7 didapat  $Q^* = 4.9 < 19.6751 = \chi_{0.05;11}$ , sehingga residual bersifat random atau dengan kata lain model cocok dengan data
  - Untuk model ARMA (1,1): dengan menggunakan uji portmanteau, dari Gambar 2.8 didapat  $Q^* = 4.1 < 18.3070 = \chi_{0.05;10}$ , sehingga residual bersifat random atau dengan kata lain model cocok dengan data
  - Akan tetapi model AR(1) atau ARMA(1,1) lebih baik karena nilai  $p$ -value tidak berbeda jauh dan lebih besar dibandingkan model MA(1)
4. Semua parameter yang ditaksir berbeda signifikan dari nol

- Untuk model MA(1): dari Gambar 2.6 terlihat  
 $P = 0.022 < 0.05 = \alpha$ , maka parameter MA(1) signifikan
  - Untuk model AR(1): dari Gambar 2.7 terlihat  
 $P = 0.002 < 0.05 = \alpha$ , maka parameter AR(1) signifikan
  - Untuk model ARMA(1,1): dari Gambar 2.8 terlihat untuk AR  
 $P = 0.032 < 0.05 = \alpha$ , maka parameter AR signifikan. Namun untuk MA  
 $P = 0.562 > 0.05 = \alpha$  maka parameter MA tidak signifikan
5. Model memiliki bentuk sederhana (parsimoni)  
Model AR(1) atau MA(1) memiliki bentuk yang lebih sederhana jika dibandingkan ARMA(1,1)
6. Model memiliki RMSE (*Root Mean Square Error*) yang kecil  
Dari Gambar 2.6, Gambar 2.7 dan Gambar 2.8 terlihat bahwa nilai RMSE AR(1) lebih kecil dibandingkan MA(1) dan ARMA(1,1)

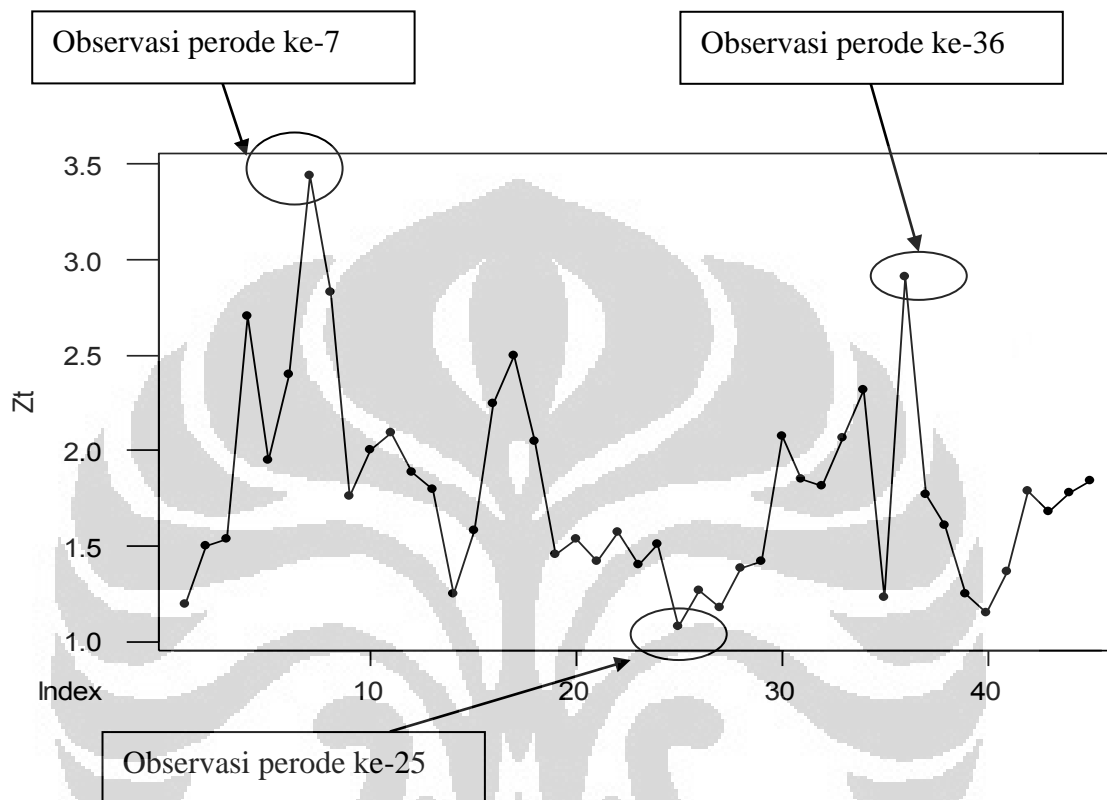
Dari hasil diatas dapat disimpulkan dalam tabel 1 berikut

No	Model	Proses iterasi	Parameter yang signifikan	Uji portmanteau	RMSE
1.	MA(1)	Konvergen	Seluruh parameter signifikan	Model cukup baik	0.48311
2.	AR(1)	Konvergen	Seluruh parameter signifikan	Model cukup baik	0.46949
3.	ARMA(1,1)	Konvergen	Parameter AR signifikan	Model cukup baik	0.47294

Sehingga dapat dikatakan bahwa model AR(1) lebih baik menggambarkan data dibandingkan model MA(1) maupun ARMA(1,1). Karena model yang terpilih adalah AR(1), maka data tersebut dapat digunakan untuk model ini.

#### 4.2.2 Tahap Pendeteksian dan Pengidentifikasian Outlier

Selanjutnya adalah tahap pendeteksian dan pengidentifikasian outlier. Jika dilihat dari Gambar 1a, yaitu plot antara observasi terhadap waktu,



Gambar 1a

diindikasikan terdapat 3 buah outlier, yaitu observasi periode ke-7, 25, dan 36. Akan tetapi hasil tersebut belum tentu benar, perlu adanya pendeteksian *outlier* secara formal. Pada pembahasan di bab 3, 2 tahap pendeteksian *outlier* yaitu, yang pertama adalah tahap pendeteksian *outlier*. Pada tahap ini, akan ditentukan apakah suatu observasi pada periode tertentu merupakan *outlier* atau bukan. Tahap kedua adalah tahap pengidentifikasian *outlier*, pada tahap ini, setelah suatu observasi pada periode tertentu dinyatakan sebagai *outlier*, akan ditentukan jenis *outlier* yang muncul apakah *additive outlier* (AO) atau *innovation outlier* (IO).

Sesuai dengan pembahasan di bab 3, pada tahap pendeteksian *outlier* membutuhkan nilai besaran pendeteksian *outlier*,  $D_t$ , sebagai besaran penentu pengambil keputusan apakah observasi tersebut merupakan *outlier* atau bukan.

Dari persamaan (3.30), yaitu  $D_t = \frac{\sqrt{IO_t}}{\tilde{\sigma}_a}$ , terlihat bahwa nilai  $D_t$  membutuhkan nilai  $IO_t$ , yang merupakan atau nilai pengurangan terbesar terhadap SSE untuk pengaruh IO, sehingga perlu dicari terlebih dahulu nilai  $IO_t$ . Sedangkan untuk nilai  $IO_t$  dapat dilihat pada persamaan (3.23), yaitu  $IO_t = \frac{\hat{a}_q^2}{1-h_{qq}}$ , dimana  $\hat{a}_q$  merupakan elemen ke- $q$  dari  $\hat{\mathbf{a}}_t = [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{Y}$  dan  $h_{qq}$  merupakan diagonal ke- $q$  dari matriks  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ . Jika pada observasi periode ke- $q$  nilai  $D_q > 2$ , maka observasi periode tersebut adalah *outlier* (subbab 3.4.2). Sebagai contoh untuk mengetahui apakah observasi periode ke-7 merupakan outlier seperti yang terlihat pada Gambar 1a, akan dicari nilai  $IO_7 = \frac{\hat{a}_7^2}{1-h_{77}} = \frac{1.2718}{1-0.0378} = 1.3218$ . Dan nilai  $D_7 = \frac{\sqrt{IO_7}}{\tilde{\sigma}_a} = \frac{\sqrt{1.3218}}{0.4002} = 2.8728$ . Karena  $D_7 = 2.8728 > 2$ , maka observasi periode ke-7 memang merupakan *outlier*. Hal yang sama dilakukan untuk ke-44 observasi lainnya.

Pada tahap pengidentifikasian outlier, selain membutuhkan nilai  $IO_t$  juga membutuhkan nilai  $AO_t$  atau nilai pengurangan terbesar terhadap SSE untuk pengaruh AO. Pada persamaan (3.27), yaitu  $AO_t = SSE - SSE_{\Delta_{Ar}}$ , dimana  $SSE_{\Delta_{Ar}}$  merupakan nilai SSE dengan pengaruh AO. Karena baik  $IO_t$  maupun  $AO_t$  merupakan pengurangan terbesar terhadap SSE, maka jika terjadi AO haruslah nilai  $AO_t$  lebih besar dari  $IO_t$ , begitu pula sebaliknya. Sebagai contoh, setelah observasi periode ke-7 dinyatakan sebagai outlier, akan dilihat jenis outlier untuk observasi periode ini. Didapat nilai  $AO_t$  adalah 1.76. Karena  $AO_t = 1.76 > 1.3218 = IO_t$ , maka pada observasi periode ke-7 terjadi *Additive Outlier* (AO). Hal yang sama dilakukan untuk ke-44 observasi yang lain. Hasil pendeteksian dan pengidentifikasian *outlier* dapat dilihat pada tabel 2 dibawah ini

Tabel 2 Hasil Pendeteksian dan Pengidentifikasian *Outlier*

<b>T</b>	<b>D<sub>t</sub></b>	<b>IO<sub>t</sub></b>	<b>AO<sub>t</sub></b>	<b>Type</b>	<b>Size</b>
4	3.06	1.50	1.76	AO	-1.000
7	2.87	1.32	1.26	IO	1.172
9	2.48	0.99	0.59	IO	-1.020
35	2.56	1.05	3.43	AO	1.000
36	4.33	3.01	3.53	AO	-1.000
37	2.66	1.13	-0.04	IO	-1.094

Berdasarkan tabel 2 di atas terlihat terdapat 6 buah *outlier*, yaitu observasi periode ke 4, 7, 9, 35, 36, 37. Dari ke-6 outlier, 3 diantaranya merupakan AO, yaitu observasi periode ke- 4, 35 dan 36. Sedangkan yang lainnya merupakan IO, yaitu periode ke- 7, 9 dan 37.

Setelah terdeteksi *outlier*, hal yang dapat dilakukan:

- Jika terjadi *Additive Outlier*, maka data dapat diperbaiki sesuai dengan nilai taksiran besaran AO
  - Jika terjadi *Innovation Outlier*, maka data-data setelah IO dapat diperbaiki sesuai taksiran besaran IO. Akan tetapi hal tersebut dapat dilakukan jika hanya terdeteksi *single* (satu) IO, jika terjadi lebih dari satu IO maka diperlukan pembelajaran lebih lanjut mengenai sequential procedure yang diperkenalkan oleh Chen & Liu (1993, J. American Statistical Assosiation 88, 284-297) (komunikasi dengan Francesco Battaglia, 21 Mei 2010).

## BAB V PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Pada pembahasan pendeteksian outlier pada model *autoregressive* atau AR ( $p$ ) untuk metode Allan, dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu

- Pengaruh outlier terhadap SSE berdasarkan lemma 1 adalah semakin besar nilai mutlak dari besaran masing-masing outlier, baik *additive outlier* maupun *innovation outlier*, maka nilai SSE pun semakin meningkat. Hal tersebut yang menjadi dasar teknik pendeteksian *outlier* untuk metode ini.
- Langkah-langkah pendeteksian *outlier* dengan menggunakan metode ini:
  - Cari masing-masing taksiran besaran *outlier* yang meminimumkan SSE, dimana:

- Untuk *innovation outlier* :  $\hat{\Delta}_{It} = \frac{\hat{a}_q}{1 - h_{qq}}$

- Untuk *additive outlier*:  $\hat{\Delta}_{At} = \arg \min_{\Delta_{At}} SSE_{\Delta_{At}}$

- Kemudian akan didapatkan besaran pengurangan terbesar terhadap *outlier* yang nilainya adalah:

- Untuk *innovation outlier* :  $IO_t = \frac{\hat{a}_q^2}{1 - h_{qq}}$

- Untuk *additive outlier*:  $AO_t = SSE - SSE_{\hat{\Delta}_{At}}$

- Cari besaran diagnostik,  $D_t$ , yaitu  $D_t = \frac{\sqrt{IO_t}}{\tilde{\sigma}_a}$ . Besaran inilah yang

nantinya digunakan sebagai besaran pendeteksian *outlier*.

- Jika  $D_t$  lebih besar dari 2 maka observasi tersebut merupakan *outlier*, sedangkan jika tidak maka observasi periode tersebut bukanlah *outlier*.
- Kemudian untuk menentukan jenis *outlier*, jika  $AO_t > IO_t$  maka terjadi *additive outlier*, jika lainnya maka *innovation outlier*.

- Berdasarkan analisis data, maka model yang cocok untuk data rata-rata bagian truk yang cacat atau tidak memenuhi persyaratan pada saat perakitan yang ditemukan pada tiap truk yang keluar dari tempat pemeriksaan akhir per hari adalah AR(1). Kemudian hasil pendeteksian *outlier* dengan menggunakan metode ini yaitu ditemukan sebanyak 6 buah *outlier*. 3 diantaranya merupakan *additive outlier*, yaitu observasi periode ke 4, 35, dan 36. Sedangkan yang lainnya merupakan *innovation outlier*, yaitu observasi periode ke 7, 9, dan 37.
- Salah satu langkah setelah terdeteksi adanya *outlier* adalah memperbaiki data. Untuk *additive outlier* data yang diperbaiki adalah data ketika terjadi *outlier*, sedangkan untuk *innovation outlier* data yang diperbaiki adalah data setelah terjadi *outlier*. Akan tetapi, perlu ada pembelajaran lebih lanjut mengenai *sequential procedure* yang diperkenalkan oleh Chen & Liu (1993, J. American Statistical Association 88, 284-297) jika terdapat lebih dari 1 *innovation outlier* (komunikasi dengan Francesco Battaglia, 21 Mei 2010).

## 5.2 Saran

Beberapa saran yang bermanfaat guna melanjutkan tugas akhir ini, adalah:

- Perlu dibahas mengenai pendeteksian *outlier* pada model *moving average* (MA), *autoregressive moving average* (ARMA)
- Perlu dibahas mengenai pendeteksian *outlier* untuk data yang belum stasioner, seperti *integrated moving average* (IMA), *autoregressive integrated* (ARI), *autoregressive integrated moving average* (ARIMA), ataupun pada model *seasonal*.



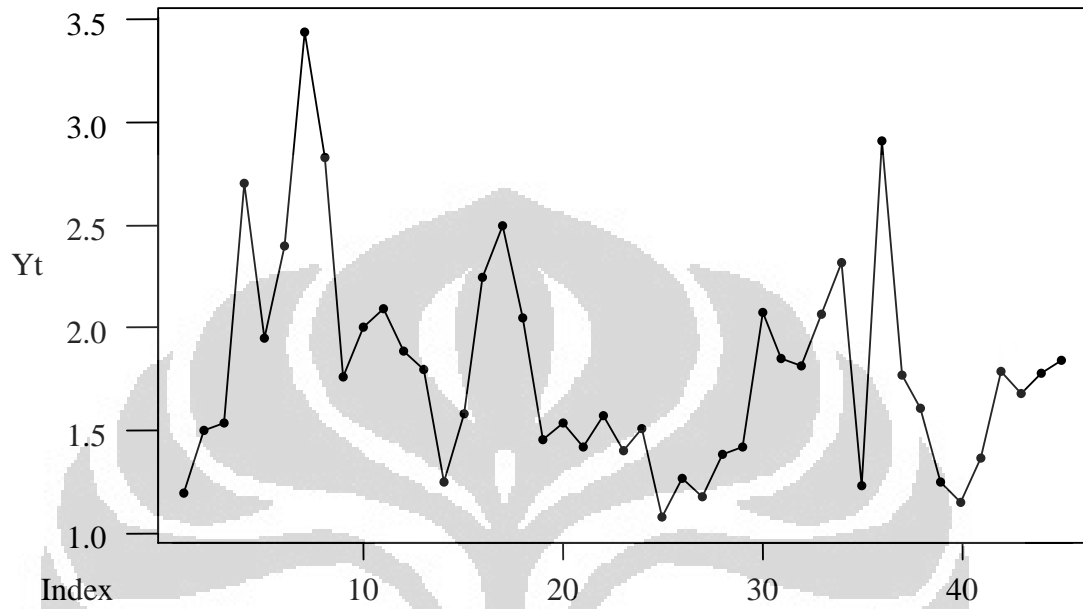
## DAFTAR PUSTAKA

- Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. 1976. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Rev. Ed. San Fransisco: Holden Day
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M. & Reinsel, G. C. 1994. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall International. London.
- Cryer, J. D. 1985. *Time Series Analysis*. PWT-KENT Publishing Company. Boston
- Fox, A. J. 1982. *Outlier in Time Series*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B. 3. 350-363
- Gaynor, P. E. & Kirkpatrick, R. C. 1994. *Introduction to Time Series modeling and Forecasting in Business and Economics*. Mc Graw-Hill International
- Greene, H. William. 1997. *Econometric Analysis*. Prentice-Hall International. New York
- Gujarati N. Damodar. 2003. *Basic Econometrics*. Fourth Ed. Mc Graw-Hill International
- Hamilton, J. D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press. United State of America
- Nachrowi, D. N, & Usman, Hardius. 2006. *Pendekatan Populer dan Praktis Ekonometrika Untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan*. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. Jakarta

**Gambar 2.1 Data Jumlah Rata-Rata Harian Ditemukannya Bagian Truk yang Cacat**

<b>No</b>	<b>Tanggal</b>	<b>Banyaknya truk yang keluar</b>	<b>Total jumlah bagian truk yang cacat per truk</b>	<b>Jumlah rata-rata</b>
1	4 November	95	114	1.20
2	5 November	95	143	1.50
3	6 November	95	146	1.54
4	7 November	95	256	2.70
5	8 November	95	185	1.95
6	11 November	95	228	2.40
7	12 November	95	327	3.44
8	13 November	95	269	2.83
9	14 November	95	167	1.76
10	15 November	95	190	2.00
11	18 November	95	199	2.09
12	19 November	95	180	1.89
13	20 November	95	171	1.80
14	21 November	130	162	1.25
15	22 November	130	205	1.58
16	25 November	130	292	2.25
17	26 November	130	325	2.50
18	27 November	130	266	2.05
19	29 November	130	190	1.46
20	2 Desember	130	200	1.54
21	3 Desember	130	185	1.42
22	4 Desember	130	204	1.57
23	5 Desember	130	182	1.40
24	6 Desember	130	196	1.51
25	9 Desember	130	140	1.08

26	10 Desember	130	165	1.27
27	11 Desember	130	153	1.18
28	12 Desember	130	181	1.39
29	13 Desember	130	185	1.42
30	16 Desember	130	270	2.08
31	17 Desember	130	240	1.85
32	18 Desember	130	237	1.82
33	19 Desember	130	269	2.07
34	20 Desember	130	302	2.32
35	23 Desember	130	160	1.23
36	24 Desember	130	378	2.91
37	26 Desember	130	230	1.77
38	27 Desember	130	209	1.61
39	30 Desember	130	162	1.25
40	3 Januari	130	149	1.15
41	6 Januari	130	178	1.37
42	7 Januari	130	233	1.79
43	8 Januari	130	218	1.68
44	9 Januari	130	231	1.78
45	10 Januari	130	239	1.84

**Gambar 2.2** Plot Observasi Terhadap Waktu

### Gambar 2.3 Output Views Pengujian Unit Root Test

Null Hypothesis: D(YT) has a unit root  
 Exogenous: None  
 Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=9)

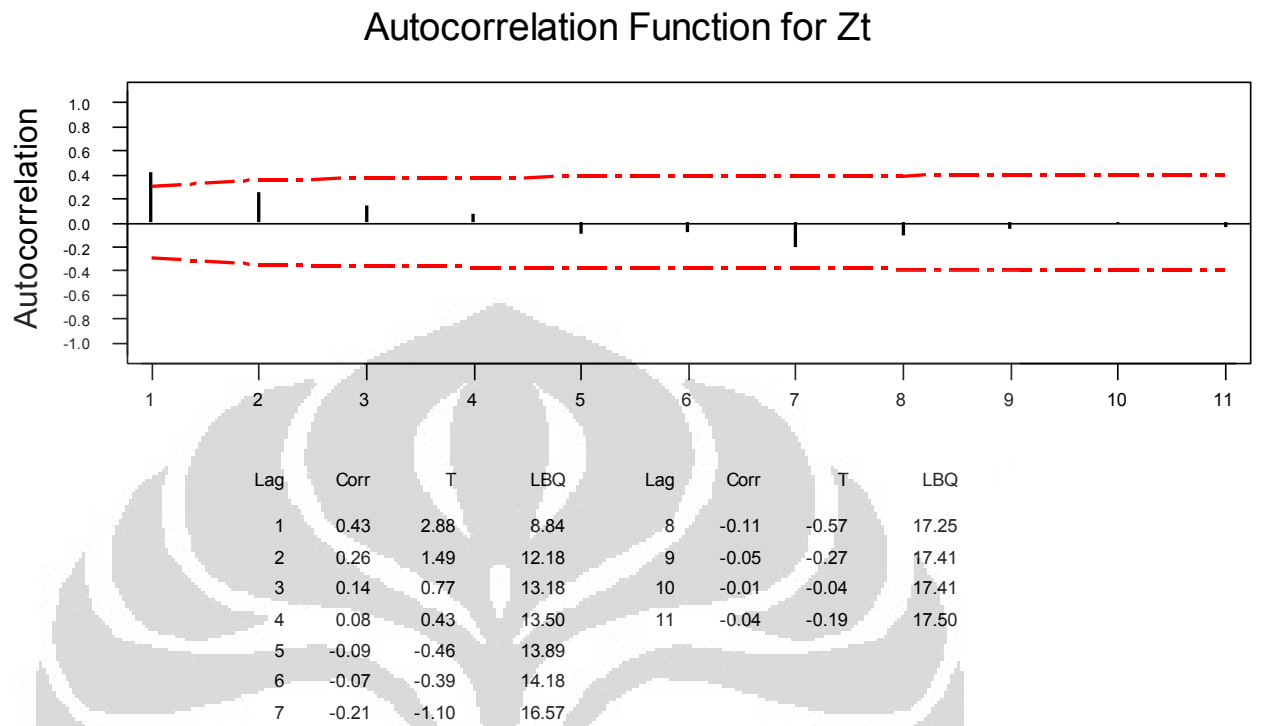
	t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>	<b>-9.359429</b>	0.0000
Test critical values:		
1% level	<b>-2.619851</b>	
5% level	<b>-1.948686</b>	
10% level	<b>-1.612036</b>	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

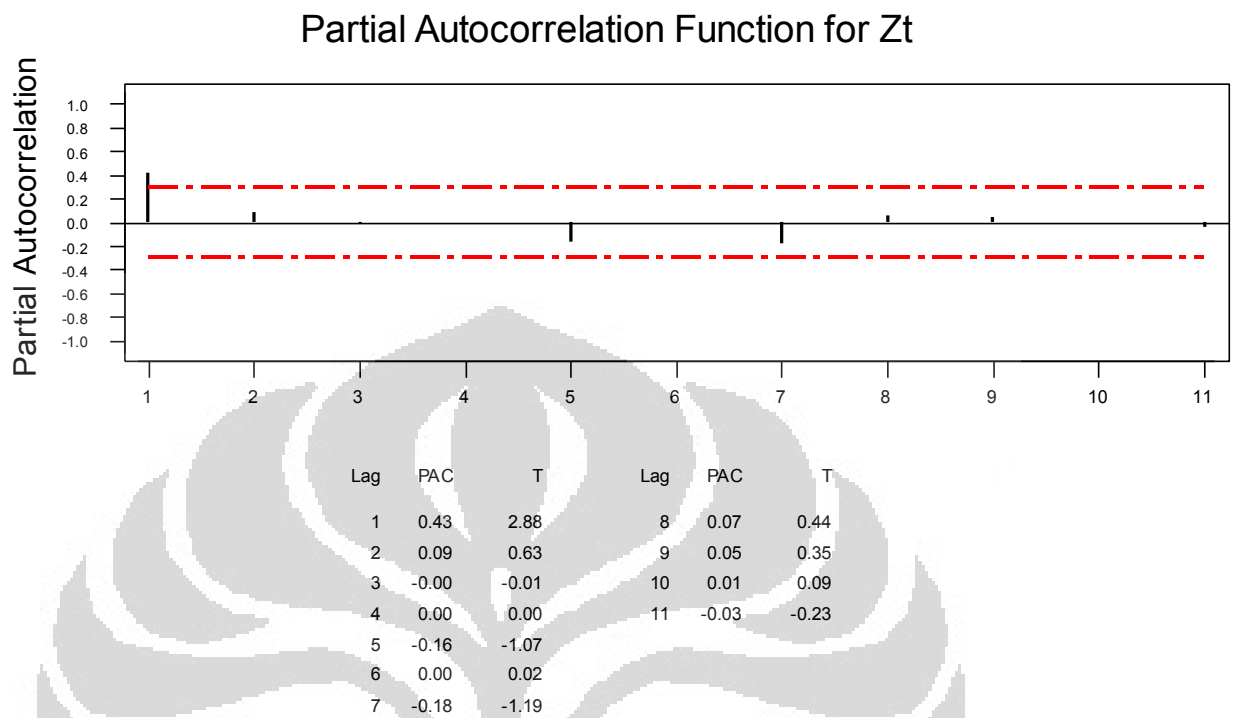
Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
 Dependent Variable: D(YT,2)  
 Method: Least Squares  
 Date: 05/05/10 Time: 04:13  
 Sample (adjusted): 3 45  
 Included observations: 43 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(YT(-1))	-1.348536	0.144083	-9.359429	0.0000
R-squared	0.675911	Mean dependent var		-0.005581
Adjusted R-squared	0.675911	S.D. dependent var		0.915450
S.E. of regression	0.521155	Akaike info criterion		1.557443
Sum squared resid	11.40731	Schwarz criterion		1.598401
Log likelihood	-32.48502	Hannan-Quinn criter.		1.572547
Durbin-Watson stat	2.135385			

Gambar 2.4 Fungsi Autokorelasi Sampel



Gambar 2.5 Fungsi Parsial Autokorelasi Sampel



Gambar 2.6 Output Model MA(1)

**ARIMA Model: yt**

ARIMA model for yt

Estimates at each iteration

Iteration	SSE	Parameters	
0	13.4980	0.100	1.889
1	11.5910	-0.050	1.873
2	10.4959	-0.200	1.850
3	10.0882	-0.350	1.809
4	10.0717	-0.338	1.786
5	10.0715	-0.342	1.785
6	10.0715	-0.341	1.785
7	10.0715	-0.341	1.785
8	10.0715	-0.341	1.785

Relative change in each estimate less than **0.0010** after iteration 8

Final Estimates of Parameters

Type	Coef	SE Coef	T	P
MA 1	-0.3409	0.1431	-2.38	<b>0.022</b>
Constant	1.78480	0.09651	18.49	0.000
Mean	1.78480	0.09651		

Number of observations: 45  
 Residuals: SS = 10.0362 (backforecasts excluded)  
 MS = **0.2334** DF = 43

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic

Lag	12	24	36	48
Chi-Square	<b>8.0</b>	13.2	35.7	*
DF	10	22	34	*
P-Value	0.633	0.928	<b>0.387</b>	*



Gambar 2.7 Output Model AR(1)

**ARIMA Model: yt**

ARIMA model for yt

Estimates at each iteration

Iteration	SSE	Parameters
0	11.2419	0.100 1.700
1	10.0858	0.250 1.393
2	9.5649	0.400 1.086
3	9.5316	0.436 1.006
4	9.5309	0.441 0.995
5	9.5309	0.442 0.993
6	9.5309	0.442 0.993

Relative change in each estimate less than **0.0010** after iteration 6

Final Estimates of Parameters

Type	Coef	SE Coef	T	P
AR 1	0.4421	0.1365	3.24	<b>0.002</b>
Constant	0.99280	0.06999	14.19	0.000
Mean	1.7795	0.1254		

Number of observations: 45  
 Residuals: SS = 9.47811 (backforecasts excluded)  
 MS = **0.22042** DF = 43

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic

Lag	12	24	36	48
Chi-Square	4.9	8.9	30.9	*
DF	10	22	34	*
P-Value	0.899	0.994	<b>0.620</b>	*

**Gambar 2.8 Output Model ARMA(1,1)**

**ARIMA Model: yt**

ARIMA model for yt

Estimates at each iteration

Iteration	SSE	Parameters		
0	12.2103	0.100	0.100	1.700
1	9.8981	0.250	-0.050	1.384
2	9.6543	0.400	0.069	1.098
3	9.4781	0.550	0.178	0.812
4	9.4488	0.591	0.191	0.729
5	9.4480	0.597	0.192	0.716
6	9.4479	0.598	0.193	0.714
7	9.4479	0.598	0.193	0.713

Relative change in each estimate less than **0.0010** after iteration 7

Final Estimates of Parameters

Type	Coef	SE Coef	T	P
AR 1	0.5983	0.2691	2.22	<b>0.032</b>
MA 1	0.1926	0.3294	0.58	<b>0.562</b>
Constant	0.71334	0.05693	12.53	0.000
Mean	1.7759	0.1417		

Number of observations: 45  
 Residuals: SS = 9.39423 (backforecasts excluded)  
 MS = **0.22367** DF = 42

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic

Lag	12	24	36	48
Chi-Square	<b>4.1</b>	8.3	29.1	*
DF	9	21	33	*
P-Value	0.902	0.994	<b>0.661</b>	*

## LAMPIRAN 1

### Penaksiran Parameter $\phi$ Pada Model AR( $p$ ) dengan Metode Least Square

Tujuan : Untuk mencari taksiran parameter AR( $p$ )

Dari persamaan (3.5) bentuk vektor  $\mathbf{Y}$  dan matriks  $\mathbf{X}$  adalah

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{p+1} \\ y_{p+2} \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-p} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Sehingga model AR( $p$ ) pada persamaan (3.4) akan menjadi  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{a}$ , dimana  $\beta = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$  dan  $\mathbf{a}_t = (a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_T)'$ . Taksiran  $\beta$  diperoleh dengan menggunakan Least Square, yaitu dengan meminimumkan SSE adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} SSE &= \sum_{t=p+1}^T \hat{a}_t^2 = \hat{a}_{p+1}^2 + \hat{a}_{p+2}^2 + \dots + \hat{a}_T^2 \\ &= \hat{\mathbf{a}}_t' \hat{\mathbf{a}}_t \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \\ &= [\mathbf{Y}' - (\mathbf{X}\hat{\beta})'] [\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}] \\ &= [\mathbf{Y}' - \hat{\beta}'\mathbf{X}'] [\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}] \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\beta} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \end{aligned} \quad (2)$$

Dimana  $\mathbf{a}_t'$  merupakan transpose  $\mathbf{a}_t$ . Karena  $\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$  adalah matriks berukuran  $1 \times 1$  atau skalar dan  $(\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y})' = \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\beta}$  adalah skalar yang sama, maka persamaan diatas menjadi

$$SSE = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \quad (3)$$

Penaksir *Least Square* harus memenuhi

$$\begin{aligned} \frac{\partial SSE}{\partial \beta} \Big|_{\hat{\beta}} &= \frac{\partial [\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta}]}{\partial \beta} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial(\mathbf{Y}'\mathbf{Y})}{\partial \beta} - \frac{\partial(2\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y})}{\partial \beta} + \frac{\partial(\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta})}{\partial \beta} = 0 \\ &\Rightarrow 0 - 2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = 0 \\ &\Rightarrow -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = 0 \\ &\Rightarrow 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = 2\mathbf{X}'\mathbf{Y} \\ &\Rightarrow \hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (4)$$

## LAMPIRAN 2

### Pembuktian Sifat Matriks Topi

Tujuan : Untuk membuktikan sifat matriks  $\mathbf{H}$

- Akan dibuktikan  $\mathbf{H}$  merupakan matriks simetris atau  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}' &= (\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')' \\ &= (\mathbf{X}')'((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})'\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{H}\end{aligned}$$

- Akan dibuktikan  $\mathbf{H}$  merupakan matriks idempoten atau  $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^2 &= (\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{H}\end{aligned}$$

### LAMPIRAN 3

#### Pembuktian Model Tidak Saturated

Tujuan : akan dibuktikan bahwa untuk  $p < T/2$ , maka model  $AR(p)$  tidak *saturated*.

Berdasarkan persamaan (3.4) didapatkan  $p < q < T$ . Jika  $p < T/2$ , misal

$p = T/2 - i$ , untuk sembarang  $i > 0$ , maka model  $AR(T/2 - i)$  adalah:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_{T/2-i} Z_{t-(T/2-i)} + a_t \quad \text{dimana } t = (T/2 - i) + 1, \dots, T$$

- jumlah observasi =  $T - (T/2 - i + 1) + 1$  (dari  $Z_{T/2-i+1}$  hingga  $Z_T$ )  
 $= T/2 + i$
- jumlah parameter =  $p = T/2 - i$

terlihat bahwa untuk  $p < T/2$  jumlah parameter lebih sedikit jumlah observasi ( $T/2 - i < T/2 + i$ ), maka model tidak *saturated*.

## LAMPIRAN 4

### Pembuktian Beberapa Persamaan

Tujuan : membuktikan  $(\beta'X')[I-H](X\beta) = 0$ ,  $(\beta'X')[I-H]a_t = 0$ ,

$a_t'[I-H](X\beta) = 0$ ,  $a_t'[I-H](\Delta_t\delta_t) = (\Delta_t\delta_t)'[I-H]a_t$ , dan

$Y'[I-H](\Delta_t\delta_t) = (\Delta_t\delta_t)'[I-H]Y$

- Akan dibuktikan  $(\beta'X')[I-H](X\beta) = 0$ :

$$\begin{aligned}(\beta'X')[I-H](X\beta) &= (\beta'X')[I - X(X'X)^{-1}X'](X\beta) \\ &= \beta'X'IX\beta - \beta'X'X(X'X)^{-1}X'X\beta \\ &= \beta'X'X\beta - \beta'X'XI\beta \\ &= \beta'X'X\beta - \beta'X'X\beta \\ &= 0\end{aligned}$$

- Akan dibuktikan  $(\beta'X')[I-H]a_t = 0$ :

$$\begin{aligned}(\beta'X')[I-H]a_t &= (\beta'X')[I - X(X'X)^{-1}X']a_t \\ &= \beta'X'Ia_t - \beta'X'X(X'X)^{-1}X'a_t \\ &= \beta'X'a_t - \beta'IX'a_t \\ &= \beta'X'a_t - \beta'X'a_t \\ &= 0\end{aligned}$$

- Akan dibuktikan  $a_t'[I-H](X\beta) = 0$

$$\begin{aligned}a_t'[I-H](X\beta) &= a_t'[I - X(X'X)^{-1}X'](X\beta) \\ &= a_t'IX\beta - a_t'X(X'X)^{-1}X'X\beta \\ &= a_t'X\beta - a_t'XI\beta \\ &= a_t'X\beta - a_t'X\beta \\ &= 0\end{aligned}$$

- Akan dibuktikan  $\mathbf{a}'_t [\mathbf{I} - \mathbf{H}] (\Delta_t \delta_t) = (\Delta_t \delta'_t) [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{a}_t$

$$\mathbf{a}'_t [\mathbf{I} - \mathbf{H}] (\Delta_t \delta_t)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_{p+2} & \cdots & a_T \end{pmatrix} [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \sum_{i=p+1}^T a_i [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{(i-p)1} \quad \sum_{i=p+1}^T a_i [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{(i-p)2} \quad \cdots \quad \sum_{i=p+1}^T a_i [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{(i-p)(T-p)} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( a_{p+1} [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{1q} + a_{p+2} [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{2q} + \cdots + a_T [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{(T-p)q} \right) \Delta_t$$

$$= a_{p+1} [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{11} \Delta_t + a_{p+2} [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{21} \Delta_t + \cdots + a_T [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{(T-p)1} \Delta_t$$

Karena  $[\mathbf{I} - \mathbf{H}]' = [\mathbf{I}' - \mathbf{H}'] = [\mathbf{I} - \mathbf{H}]$ , maka  $[\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{ij} = [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{ji}$ . Sehingga, persamaan diatas menjadi

$$\mathbf{a}'_t [\mathbf{I} - \mathbf{H}] (\Delta_t \delta_t) = \Delta_t [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q1} a_{p+1} + \Delta_t [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q2} a_{p+2} + \cdots + \Delta_t [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q(T-p)} a_T$$

$$= \Delta_t \left( [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q1} a_{p+1} + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q2} a_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{q(T-p)} a_T \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \Delta_t & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{11} a_{p+1} + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{12} a_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{1(T-p)} a_T \\ [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{21} a_{p+1} + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{22} a_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{2(T-p)} a_T \\ \vdots \\ [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{(T-p)1} a_{p+1} + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{(T-p)2} a_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I} - \mathbf{H}]_{(T-p)(T-p)} a_T \end{pmatrix}$$

$$= (\Delta_t \delta'_t) [\mathbf{I} - \mathbf{H}] \mathbf{a}_t$$



- Akan dibuktikan  $\mathbf{Y}'[\mathbf{I}-\mathbf{H}](\Delta_t \delta_t) = (\Delta_t \delta_t)'[\mathbf{I}-\mathbf{H}]\mathbf{Y}'$

$$\mathbf{Y}'[\mathbf{I}-\mathbf{H}](\Delta_t \delta_t)$$

$$= \begin{pmatrix} y_{p+1} & y_{p+2} & \cdots & y_T \end{pmatrix} [\mathbf{I}-\mathbf{H}] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \sum_{i=p+1}^T y_i [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{(i-p)1} \quad \sum_{i=p+1}^T y_i [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{(i-p)2} \quad \cdots \quad \sum_{i=p+1}^T y_i [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{(i-p)(T-p)} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( y_{p+1} [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{1q} + y_{p+2} [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{2q} + \cdots + y_T [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{(T-p)q} \right) \Delta_t$$

$$= y_{p+1} [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{11} \Delta_t + y_{p+2} [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{21} \Delta_t + \cdots + y_T [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{(T-p)1} \Delta_t$$

Karena  $[\mathbf{I}-\mathbf{H}]' = [\mathbf{I}' - \mathbf{H}'] = [\mathbf{I}-\mathbf{H}]$ , maka  $[\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{ij} = [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{ji}$ . Sehingga, persamaan diatas menjadi

$$\mathbf{Y}'[\mathbf{I}-\mathbf{H}](\Delta_t \delta_t) = \Delta_t [ [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{q1} y_{p+1} + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{q2} y_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{q(T-p)} y_T ]$$

$$= \Delta_t \left( [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{q1} y_{p+1} + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{q2} y_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{q(T-p)} y_T \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \Delta_t & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{11} y_{p+1} + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{12} y_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{1(T-p)} y_T \\ [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{21} y_{p+1} + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{22} y_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{2(T-p)} y_T \\ \vdots \\ [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{(T-p)1} y_{p+1} + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{(T-p)2} y_{p+2} + \cdots + [\mathbf{I}-\mathbf{H}]_{(T-p)(T-p)} y_T \end{pmatrix}$$

$$= (\Delta_t \delta_t)' [\mathbf{I}-\mathbf{H}] \mathbf{Y}$$

## LAMPIRAN 5

### Terbatas Dalam Probabilitas (bounded in probability)

#### Definisi:

Barisan dari variabel random  $\{X_n\}$  adalah terbatas dalam probabilitas jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu konstanta  $B_\varepsilon > 0$  dan bilangan bulat  $N_\varepsilon$  sedemikian sehingga

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow P[|X_n| \leq B_\varepsilon] \geq 1 - \varepsilon$$

Notasi big  $O$  dapat digunakan pada bentuk *bounded in probability*, biasanya ditulis dengan  $O_p(X_n)$ , yang berarti

$Y_n = O_p(X_n)$  jika dan hanya jika  $\frac{Y_n}{X_n}$  terbatas dalam probabilitas seiring  $n \rightarrow \infty$ .

Atau dapat ditulis, untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu konstanta  $B_\varepsilon > 0$  dan bilangan bulat  $N_\varepsilon$  sedemikian sehingga

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow P\left[\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| \leq B_\varepsilon\right] \geq 1 - \varepsilon$$

## LAMPIRAN 6

### Pembuktian Kuadrat Dari Variabel Random Berdistribusi Normal Adalah Variabel Random Berdistribusi Chi-square Derajat Bebas Satu.

Misalkan variable random  $X$  berdistribusi  $N(\mu, \sigma^2)$  dengan  $\sigma^2 > 0$ , maka

variable random  $V = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2$  berdistribusi  $\chi^2(1)$

Bukti:

Misalkan  $W = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$  sehingga  $W \sim N(0,1)$ . Berarti  $V = W^2$ . Fungsi distribusi

$G(v)$ , untuk  $v \geq 0$ ,

$$G(v) = \Pr(W^2 \leq v) = \Pr(-\sqrt{v} \leq W \leq \sqrt{v})$$

Yaitu,

$$G(v) = 2 \int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw \quad , 0 \leq v$$

$$= 0 \quad , v < 0$$

Jika variable integrasi diganti dengan menulis  $w = \sqrt{y}$ , maka

$$G(v) = \int_0^v \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{y}} e^{-y/2} dy \quad , 0 \leq v$$

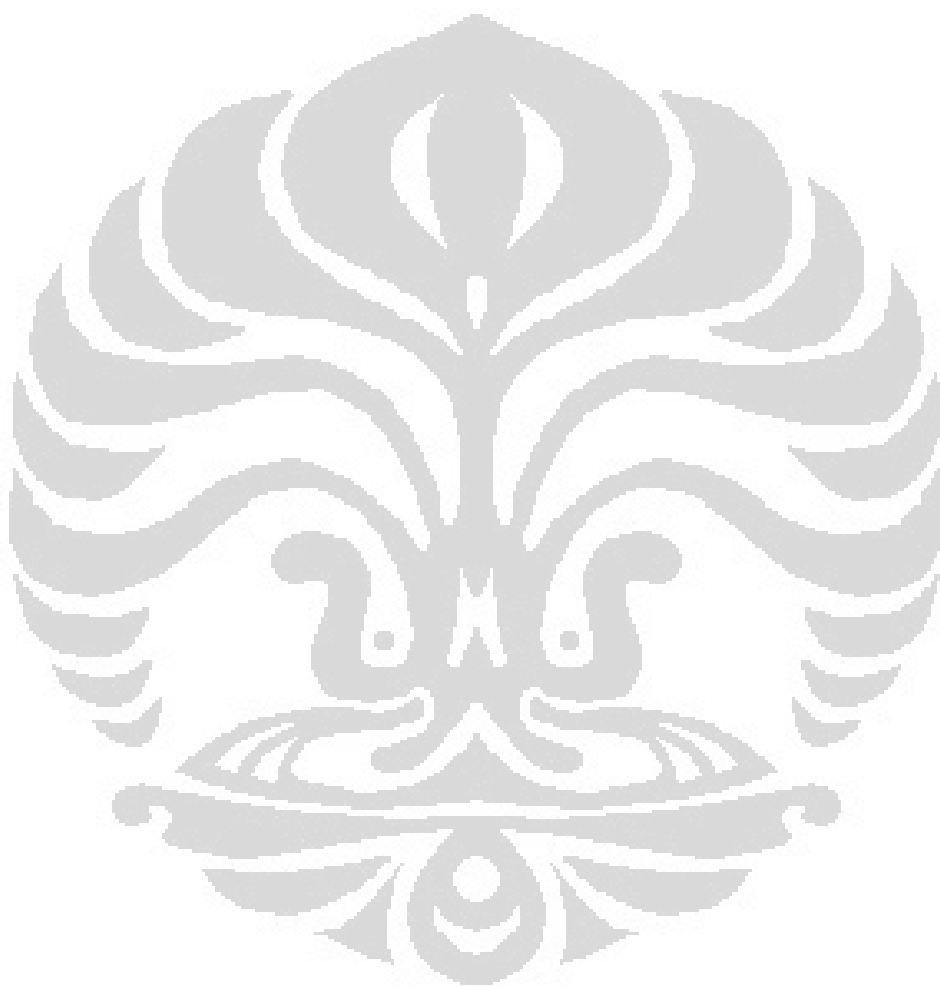
$$= 0 \quad , v < 0$$

Sehingga p.d.f  $g(v) = G(v)$  dari variable random kontinu  $V$  adalah

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^{1/2-1} e^{-v/2} \quad , 0 < v < \infty$$

$$= 0 \quad , \text{lainnya}$$

Bentuk ini adalah bentuk p.d.f dari distribusi  $\chi^2(1)$ . Oleh karena itu, terbukti bahwa variable random  $V$  berdistribusi  $\chi^2(1)$



## LAMPIRAN 7

### Argmin

#### Definisi:

arg min (atau argmin) singkatan dari *argument of the minimum* adalah kumpulan titik yang diberikan argument ketika nilai dari ekspresi tersebut mencapai nilai minimum.

$$\arg \min_x f(x) := \{x \mid \forall y : f(y) \leq f(x)\}$$

Dengan kata lain,  $\arg \min_x f(x)$  adalah kumpulan dari nilai-nilai  $x$  dimana nilai minimum untuk  $f(x)$  adalah  $M$ . contoh, jika  $f(x) = x^2 - 2x$ , maka akan mencapai nilai minimum, yaitu -1, ketika  $x = 1$ , atau  $\arg \min_x (x^2 - 2x) = \{1\}$

## LAMPIRAN 8

### Pembuktian Syarat Kestasioneran Untuk Model AR(2)

Tujuan : Menentukan syarat kestasioneran untuk AR(2)

Model AR(2) dinyatakan dengan:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \quad (1)$$

Model diasumsikan stasioner dengan  $E(Z_t) = 0$ .

Akan dicari syarat kestasioneran untuk model AR(2) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_t, Z_t) &= \text{Cov}(\phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t, \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t) \\ &= \text{Cov}(\phi_1 Z_{t-1}, \phi_1 Z_{t-1}) + \text{Cov}(\phi_1 Z_{t-1}, \phi_2 Z_{t-2}) + \text{Cov}(\phi_1 Z_{t-1}, a_t) \\ &\quad + \text{Cov}(\phi_2 Z_{t-2}, \phi_1 Z_{t-1}) + \text{Cov}(\phi_2 Z_{t-2}, \phi_2 Z_{t-2}) + \text{Cov}(\phi_2 Z_{t-2}, a_t) \\ &\quad + \text{Cov}(a_t, \phi_1 Z_{t-1}) + \text{Cov}(a_t, \phi_2 Z_{t-2}) + \text{Cov}(a_t, a_t) \\ \gamma_0 &= \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \phi_2 \phi_1 \gamma_1 + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma_a^2 \\ &= \phi_1^2 \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma_a^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Untuk mendapatkan  $\gamma_1$  yang akan disubstitusikan pada persamaan (2), maka kalikan persamaan (1) dengan  $Z_{t-1}$  kemudian diekspektasikan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} E(Z_t Z_{t-1}) &= \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-1}) + \phi_2 E(Z_{t-2} Z_{t-1}) + E(a_t Z_{t-1}) \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \\ \gamma_1 &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (2) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \phi_1^2 \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma_a^2 \\
 &= \phi_1^2 \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \left( \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \gamma_0 \right) + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma_a^2 \\
 \left( 1 - \phi_1^2 - 2\phi_1 \phi_2 \left( \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \right) - \phi_2^2 \right) \gamma_0 &= \sigma_a^2 \\
 \gamma_0 &= \frac{\sigma_a^2 (1-\phi_2)}{(1+\phi_2)(1-\phi_2+\phi_1)(1-\phi_2-\phi_1)}
 \end{aligned}$$

Karena variansi harus positif maka:

$$\frac{\sigma_a^2 (1-\phi_2)}{(1+\phi_2)(1-\phi_2+\phi_1)(1-\phi_2-\phi_1)} > 0 \quad (4)$$

Persamaan AR(2) jika ditulis dalam bentuk operator backshift:

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \phi_1 B Z_t + \phi_2 B^2 Z_t + a_t \\
 (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Z_t &= a_t
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan karakteristik AR(2) adalah

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0 \quad (5)$$

Akar-akarnya adalah  $x_1$  dan  $x_2$ . Syarat stasioner  $|x_1| > 1$ ,  $|x_2| > 1$  maka

$$|x_1| |x_2| > 1$$

Berdasarkan persamaan (5) diperoleh

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{\phi_2}$$

Maka

$$|x_1 x_2| = \left| \frac{1}{\phi_2} \right|$$

Sehingga

$$|x_1| |x_2| = \left| \frac{1}{\phi_2} \right| > 1 \quad (6)$$

Dari persamaan (6) didapatkan  $|\phi_2| < 1$ , ini merupakan syarat kestasioneran yang pertama.

Akan dicari syarat kestasioneran lainnya berdasarkan persamaan (4)

Berdasarkan syarat kestasioneran yang pertama  $|\phi_2| < 1$  maka  $-1 < \phi_2 < 1$  atau  $-1 < \phi_2$  dan  $\phi_2 < 1$ , dari sini diperoleh dua kasus sebagai berikut:

Kasus 1:

$$\begin{aligned} -1 < \phi_2 \\ \phi_2 > -1 \\ 1 + \phi_2 > 0 \end{aligned}$$

Kasus 2:

$$\begin{aligned} \phi_2 < 1 \\ 1 > \phi_2 \\ 1 - \phi_2 > 0 \end{aligned}$$

Dari kasus 1 dan 2 maka  $\frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} > 0$

Karena  $\frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} > 0$  maka persamaan (4) dapat terpenuhi berdasarkan dua

kemungkinan yaitu:

Kemungkinan pertama

$$1 - (\phi_2 + \phi_1) > 0$$

$$1 - (\phi_2 - \phi_1) > 0$$

Kemungkinan kedua



$$1 - (\phi_2 + \phi_1) < 0$$

$$1 - (\phi_2 - \phi_1) < 0$$

Berdasarkan kemungkinan pertama:

$$\begin{aligned} 1 - (\phi_2 + \phi_1) &> 0 \\ (\phi_2 + \phi_1) &< 1 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 1 - (\phi_2 - \phi_1) &> 0 \\ (\phi_2 - \phi_1) &< 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Dari (7) dan (8) diperoleh

$$(\phi_2 + \phi_1) + (\phi_2 - \phi_1) < 1 + 1 = 2$$

$$2\phi_2 < 2$$

$$\phi_2 < 1$$

Dari hasil diatas yaitu  $\phi_2 < 1$  memenuhi syarat sebelumnya yaitu  $|\phi_2| < 1$

Berdasarkan kemungkinan kedua:

$$\begin{aligned} 1 - (\phi_2 + \phi_1) &< 0 \\ (\phi_2 + \phi_1) &> 1 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} 1 - (\phi_2 - \phi_1) &< 0 \\ (\phi_2 - \phi_1) &> 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Dari (9) dan (10) diperoleh

$$(\phi_2 + \phi_1) + (\phi_2 - \phi_1) > 1 + 1 = 2$$

$$2\phi_2 > 2$$

$$\phi_2 > 1$$

Dari hasil diatas yaitu  $\phi_2 > 1$ , ternyata tidak memenuhi syarat sebelumnya yaitu  $|\phi_2| < 1$ .

Maka kemungkinan yang memenuhi persamaan (4) adalah kemungkinan yang pertama yaitu

$$1 - (\phi_2 + \phi_1) > 0$$

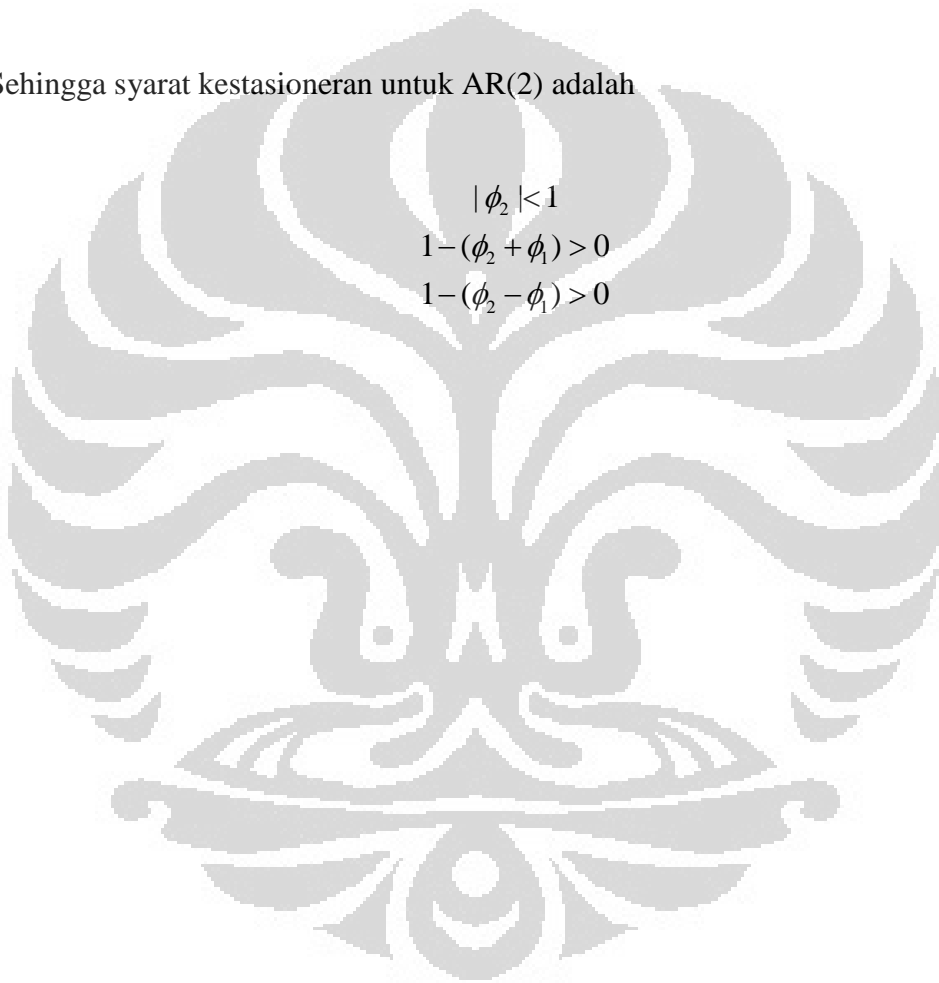
$$1 - (\phi_2 - \phi_1) > 0$$

Sehingga syarat kestasioneran untuk AR(2) adalah

$$|\phi_2| < 1$$

$$1 - (\phi_2 + \phi_1) > 0$$

$$1 - (\phi_2 - \phi_1) > 0$$



## LAMPIRAN 9

**Menunjukkan bahwa  $\theta$  memaksimumkan  $L(\theta)$  jika dan hanya jika  $\theta$  memaksimumkan  $\ln L(\theta)$**

- (i) bukti bahwa jika  $\theta$  memaksimumkan  $L(\theta)$  maka  $\theta$  memaksimumkan  $\ln L(\theta)$

karena  $\theta$  memaksimumkan  $L(\theta)$  maka:

- $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0,$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

- $\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0,$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0 \cdot \frac{1}{L(\theta)} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} &< \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} &< \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \right) \cdot 0 + 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \right) < 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} \right) < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} &< 0 \end{aligned}$$

Dengan perkataan  $\theta$  juga memaksimumkan  $\ln L(\theta)$

- (i) bukti bahwa jika  $\theta$  memaksimumkan  $\ln L(\theta)$  maka  $\theta$  memaksimumkan  $L(\theta)$

karena  $\theta$  memaksimumkan  $L(\theta)$  maka:

- $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0,$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow L(\theta) \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = L(\theta) \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

- $\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0,$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \right) < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \right) \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L(\theta)} \right) \cdot 0 + \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \cdot \frac{1}{L(\theta)} \cdot L(\theta) < 0 \cdot L(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

Dengan perkataan  $\theta$  juga memaksimumkan  $L(\theta)$

Terbukti bahwa  $\theta$  memaksimumkan  $L(\theta)$  jika dan hanya jika  $\theta$  memaksimumkan  $\ln L(\theta)$ .