UNIVERSITAS INDONESIA

METODE BAYESIAN PADA DATA BINOMIAL

SKRIPSI

NAFIA ARYUNA
0305010394

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010

UNIVERSITAS INDONESIA

METODE BAYESIAN PADA DATA BINOMIAL

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

NAFIA ARYUNA
0305010394

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
DEPARTEMEN MATEMATIKA
STATISTIKA
DEPOK
JULI 2010

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Nafia Aryuna
NPM	: 0305010394
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 12 Juli 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama	: Nafia Aryuna
NPM	: 0305010394
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Metode Bayesian pada Data Binomial

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam, Universitas Indonesia**.**

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra. Siti Nurrohmah, M.Si	( )
Pembimbing	: Sarini Abdullah, M.Stats	( )
Penguji	: Dra. Saskya Mary, M.Si.	( )
Penguji	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom.	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 12 Juli 2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya ucapkan kepada ALLAH SWT, karena atas berkat, rahmat, pertolongan, dan kekuatan-Nya, saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulisan tugas akhir ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, saya mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dra. Siti Nurrohmah, M.Si sebagai pembimbing 1 dan penasihat akademik yang telah banyak meluangkan waktu.
2. Sarini Abdullah, M.Stats sebagai pembimbing 2 yang telah banyak berjuang selama 1,5 tahun ini.
3. Dosen-dosen matematika yang telah membantu dalam pengerjaan tugas akhir ini, bu Ida terima kasih atas bimbingannya, bu Sri, mba Rahmi, pak Yudi, dan dosen-dosen lainnya yang telah banyak memberikan ilmu selama di bangku perkuliahan.
4. Orang tua penulis, Papa dan Mama, yang banyak memberikan pengertian atas semua yang dihadapi selama kuliah, senantiasa memberikan support, semangat, kasih sayang, perhatian, dan terimakasih Pa, Ma atas doa-doanya.
5. Adik-adik penulis, Qahhar (*perjuangan itu tidaklah mudah dek, makanya dia indah*), Hafizh (*makasi ya, kamu yang ngewisuda kakak*), Hakim dengan canda tawanya.
6. Keluarga besar penulis yang ada di Bogor dan di Duri.
7. Buat Panji Pratama, si *yut* gendut, yang selalu memberikan tawa, semangat, perhatian, doa, dan kasih sayangnya sehingga penulis selalu optimis untuk selalu berjuang melewati satu demi satu kesulitan demi target masa depan.

8. Staf TU Matematika dan perpustakaan yang banyak membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini.
9. Teman-teman se-angkatan 2005 yang selalu memberikan keceriannya selama perkuliahan. The orax's :Rif'ah, Qq, dan Dian yang selalu berjuang bersama hingga akhir dengan segala halang rintangnya.
10. Temen-temen seperjuangan skripsi dari awal sampai akhir, Rani, Miranti, Raisa, Anggie, Teha, Desti, Gyo, Fika, Reza, Lee, Yuri, Putri helmet, Farah, dan yang lainnya yang tidak dapat disebutkan semuanya, *maaf ya*.
11. Yanuar singgih yang telah membantu dalam pembuatan program.
12. Temen-temen angkatan '06, '07. Buat Hikmah tembem, *makasi atas canda-tawanya. Maaf kalau sering ngejahilin.*
13. Fosma Depok "Rumah Perantauanku" yang banyak mengajarkan arti sahabat, keluarga, agama, perjuangan, dan selalu menjadi tempat ku berlabuh dikala lelah dengan hiruk pikuk dunia. Buat neng Avi, mas Ahmad, mas Budiman, Fitri, Riky, Teha, Yudha, Wening, Aang, Aziz, Inayah, Radit, Asti, dan yang lainnya, *maaf ya gak bisa disebutin semua*.
14. Temen-temen liqo Alifa, mba Tia, Ayie, Wina, mba Ilwa, Nurina, dan yang lain.
15. Sahabat-sahabat penulis, The VIPers : Iin, Jimmy, Alfan, Mawi, Adi.

Pada tugas akhir ini, masih banyak kesalahan dan kekurangannya. Oleh karena itu, penulis mohon maaf. Semoga tugas akhir ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis
2010

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Nafia Aryuna
NPM : 0305010394
Program Studi : Sarjana Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Metode Bayesian pada Data Binomial

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Dengan pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada Tanggal : 12 Juli 2010
Yang menyatakan

Nafia Aryuna

ABSTRAK

Nama : Nafia Aryuna
Program Studi : Sarjana Matematika
Judul : Metode Bayesian pada Data Binomial

Tugas akhir ini membahas penaksiran parameter θ (probabilitas sukses) pada m distribusi binomial, dimana ada keterkaitan antar parameter θ pada masing-masing populasi. Metode penaksiran yang digunakan adalah metode Bayes. Pada metode ini, prosedur yang dilakukan meliputi transformasi parameter θ ke bentuk logit yaitu α, penentuan prior dan likelihood, pembentukan posterior, modifikasi pada likelihood, hingga akhirnya diperoleh m taksiran dari α yang akan digunakan untuk menaksir θ pada tiap populasi. Hasil yang diperoleh diaplikasikan pada penaksiran proporsi jumlah perempuan di 10 kursus pada suatu lembaga.

Kata kunci : Distribusi binomial, likelihood, metode Bayes, posterior, prior, transformasi logit.

xi + 61 halaman ; 3 tabel
Daftar Pustaka : 9 (1972 - 2009)

ABSTRACT

Name : Nafia Aryuna
Study Program: Mathematics Bachelor
Title : Bayesian Methods for Binomial Data

The focus of this study is the estimation of parameter θ (probability of success) for m binomial distribution, in the case there is a relationship among θ. Bayesian method will be used for estimation in this study. Several procedures are applied, they are transformation of parameter θ to the α (that is, the logit form), determination of prior and likelihood, posterior construction, and likelihood modification. The final result is m estimation of α which will be used in the estimation of parameter θ on each population. The result will be applied in estimating female number proportion in ten courses on an institution.

Keywords : Bayesian method, binomial distribution, likelihood, logit transformation, posterior, prior.

xi + 61 pages ; 3 tables
Bibliography : 9 (1972 - 2009)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN iii
KATA PENGANTAR iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH vi
ABSTRAK vii
DAFTAR ISI ix
DAFTAR TABEL xi
DAFTAR LAMPIRAN xi

BAB 1 PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Perumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penulisan 3
1.4 Pembatasan Masalah 3
1.5 Sistematika Penulisan 3

BAB 2 LANDASAN TEORI 5
2.1 Metode Bayesian 5
2.1.1 Model Hierarchical Bayes 7
2.2 Distribusi Prior *Conjugate* ……………………………. 8
2.3 Aproksimasi Normal pada Distribusi Posterior ……….. 10
2.4 Distribusi Multivariat Normal ……………….............. 12
2.5 Distribusi Binomial …………………………….......... 19
2.6 Distribusi Beta ………………………………… 21
2.7 *Exchangeable* 24

BAB 3 METODE BAYESIAN DALAM MENAKSIR PARAMETER PADA *m* DISTRIBUSI BINOMIAL 29
3.1 Distribusi Prior untuk α_i …………………….............. 29
3.2 Fungsi Likelihood untuk α_i ……………………………. 30
3.3 Distribusi Posterior untuk α_i …………………………... 31
3.4 Likelihood Modifikasi ………………………………… 35
3.4.1 Matriks Varians-Kovarians untuk P.d.f Multivariat Normal 36
3.4.2 Penyesuaian P.d.f Multivariat Normal pada Posterior 38
3.4.3 Pembentukan Likelihood dari Posterior yang disesuaikan 43
3.5 Taksiran α_i Eksplisit …………………………………...... 44

BAB 4 CONTOH APLIKASI ……......…………………………. 47
4.1 Sumber Data …………………………………………… 47

4.2 Analisis Data 48

BAB 5 PENUTUP 51
5.1 Kesimpulan 51
5.2 Saran 52

DAFTAR PUSTAKA 53

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. *Prior natural conjugate* untuk beberapa fungsi likelihood 9
Tabel 4.1. Klasifikasi siswa bergantung pada jenis kelamin 47
Tabel 4.2. Taksiran pada tiap kursus (dalam persentase) 49

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 54
Lampiran 2 61

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada percobaan pelemparan koin, hasil yang mungkin yaitu muka atau belakang. Dalam statistika, percobaan yang memiliki dua kemungkinan hasil disebut percobaan bernoulli. Hasil percobaannya dikenal dengan sukses-gagal. Pada percobaan bernoulli, hasil percobaan sukses dengan probabilitas sukses θ. Misal X adalah jumlah sukses dari n percobaan bernoulli yang *independent* dengan probabilitas sukses dari tiap percobaan sama yaitu θ. X merupakan variabel random yang berdistribusi binomial dengan parameter n dan θ, biasanya ditulis $X \sim B(n,\theta)$.

Misalkan X_i (i=1, ... , m) adalah variabel random yang berdistribusi binomial dan *independent* dengan parameter n_i dan θ_i. Ketika menaksir θ_i biasanya antar θ_i diasumsikan tidak memiliki keterkaitan. Namun, ada kondisi tertentu dimana antar θ_i dapat berkaitan.

Sebagai contoh, ingin diteliti jumlah siswa perempuan pada suatu kursus di suatu lembaga yang memiliki beberapa kursus. Katakan X_i adalah jumlah siswa perempuan pada kursus ke-i. Siswa boleh mengikuti lebih dari satu kursus. Akan tetapi pemilihan kursus ke-i tidak bergantung pada pemilihan kursus ke-j. Sehingga, ketika dihitung jumlah siswa perempuan di kursus i, tidak mempengaruhi jumlah siswa perempuan di kursus lainnya. Dengan demikian antar X_i tidak memiliki keterkaitan. Karena diasumsikan siswa boleh mengikuti lebih dari satu kursus, maka populasinya yang merupakan siswa-siswa yang ikut kursus, saling memiliki keterkaitan. Sehingga, ketika ingin dilihat proporsi dari siswa perempuan untuk suatu kursus tertentu, perlu dipertimbangkan proporsi dari siswa perempuan pada kursus yang lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa antar θ_i memiliki keterkaitan.

Pada keadaan antar θ_i tidak memiliki keterkaitan, θ_i dapat ditaksir dengan x_i/n_i, yang merupakan proporsi sampelnya. Akan tetapi, penaksiran tersebut tentunya tidak baik jika antar θ_i memiliki keterkaitan. Untuk kasus dimana diasumsikan terdapat keterkaitan antar θ_i, hasil taksirannya pun akan memiliki keterkaitan. Secara intuisi θ_i dapat ditaksir melalui pendekatan

$$\theta_i^* = \rho_i \frac{x_i}{n_i} + (1-\rho_i)\frac{\sum x_g}{\sum n_g} \qquad \left(0 \le \rho_i \le 1;\ i=1,\ldots,m; g=1,\ldots,m\right). \quad (1.1)$$

ρ_i pada persamaan (1.1) mengukur ketidakterkaitan antar θ_i. Hal ini ditunjukkan dengan, pada saat $\rho_i = 0$ diperoleh $\theta_i^* = \frac{\sum x_g}{\sum n_g}$, yang merupakan proporsi keseluruhan populasi (g menunjukkan populasi ke-g), yang berarti ada keterkaitan sempurna antar populasi sehingga proporsi sukses pada masing-masing populasi adalah sama. Sedangkan pada saat $\rho_i = 1$ diperoleh $\theta_i^* = \frac{x_i}{n_i}$, yang berarti antar populasi tidak memiliki keterkaitan sehingga probabilitas suksesnya adalah proporsi dari masing-masing sampel. Sehingga θ_i^* akan bernilai antara $\frac{\sum x_g}{\sum n_g}$ dan $\frac{x_i}{n_i}$.

Pada tugas akhir ini, akan dicari perumusan yang sesuai dengan persamaan (1.1) untuk penaksiran θ_i. Metode yang digunakan untuk mencari perumusan tersebut adalah metode Bayes. Metode Bayes merupakan metode yang menggunakan atau menggabungkan pengetahuan subjektif (terdahulu) tentang parameter yang akan ditaksir dengan informasi yang diperoleh dari data sampel. Informasi terdahulu disebut juga dengan informasi prior. Informasi prior diperoleh dari distribusi tentang parameter tersebut. Informasi dari data dirangkum dalam fungsi likelihood. Penggabungan dari informasi prior dan informasi dari data akan menghasilkan informasi posterior. Dari informasi posterior akan diperoleh taksiran dari parameter yang diinginkan. Dengan perkataan lain, metode ini memberikan taksiran parameter melalui informasi distribusinya.

Prosedur pada metode Bayes meliputi penentuan prior, likelihood, dan posterior. Pada tugas akhir ini, prior yang akan digunakan adalah prior untuk logit

θ_i, sebut α_i. Dengan transformasi demikian, diperoleh α_i yang berdistribusi normal dengan parameter mean μ dan variansi σ^2. Umumnya, parameter-parameter ini tidak diketahui. Namun, pada tugas akhir ini diasumsikan σ^2 diketahui.

Tugas akhir ini akan membahas prosedur Bayes untuk menaksir parameter (θ_i) dari m distribusi binomial dengan asumsi antar parameternya saling berkaitan.

1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana prosedur Bayes dalam menaksir parameter θ_i dari m distribusi binomial dengan antar parameter θ_i saling berkaitan?

1.3 Tujuan Penulisan

Tugas akhir ini akan membahas tentang prosedur Bayes untuk menentukan taksiran parameter θ_i secara simultan dari m distribusi binomial dimana antar θ_i saling berkaitan.

1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah pada tugas akhir ini yaitu θ_i diasumsikan memiliki distribusi prior beta.

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir yang merupakan hasil studi pustaka ini, dibagi menjadi lima bab, yaitu :

Bab 1 : Pendahuluan

Membahas tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab 2 : Landasan Teori

Membahas tentang dasar-dasar teori yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini, mencakup metode Bayes, model hierarchical Bayes, distribusi prior *conjugate*, aproksimasi normal pada distribusi posterior, distribusi multivariat normal, distribusi binomial, distribusi beta, dan *exchangeable*.

Bab 3 : Membahas bagaimana penaksiran parameter binomial (θ_i) dari m populasi, dimana antar parameter saling memiliki keterkaitan dengan menggunakan metode Bayes.

Bab 4 : Aplikasi dari hasil penaksiran parameter pada m distribusi binomial.

Bab 5 : Kesimpulan dan saran untuk tugas akhir ini.

BAB 2
LANDASAN TEORI

2.1 Metode Bayesian

Metode Bayesian merupakan metode yang menggunakan atau menggabungkan pengetahuan subjektif (terdahulu) tentang parameter yang akan ditaksir dengan informasi yang diperoleh dari data sampel. Informasi terdahulu disebut juga dengan informasi prior, diperoleh dari distribusi parameter tersebut. Informasi dari data dirangkum dalam fungsi likelihood. Penggabungan dari informasi prior dan informasi dari data akan menghasilkan informasi posterior. Selanjutnya, penarikan kesimpulan mengenai parameter yang ditaksir berdasarkan pada distribusi posterior ini (Ronald E. Walpole, 1992).

Secara garis besar, metode Bayesian tersebut didasarkan pada teorema Bayes berikut ini.

Teorema Bayes

Jika $B_1, B_2, \ldots, B_k$ merupakan kejadian-kejadian pada ruang sampel S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$, maka untuk sembarang kejadian A dimana $P(A) \neq 0$,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \cdots + P(B_k)P(A \mid B_k)}. \blacksquare$$

Pada inferensi Bayesian, parameter yang ditaksir dianggap suatu variabel random. Suatu variabel random akan memiliki distribusi probabilitas tertentu. Maka pada inferensi Bayesian, parameter yang akan ditaksir memiliki suatu distribusi tertentu. Dengan perkataan lain, metode ini memberikan taksiran parameter melalui informasi distribusinya (Robert V. Hogg, Joseph W. McKean, and Allen T. Craig, 2005).

Misalkan *X* adalah variabel random yang memiliki distribusi probabilitas yang bergantung pada θ, dimana θ adalah anggota dari himpunan Ω. Diketahui Ω adalah himpunan semua parameter. Misalkan juga Θ adalah variabel random yang memiliki distribusi probabilitas pada himpunan Ω. Jika x adalah nilai dari variabel random *X* dan θ adalah nilai dari variabel random Θ, maka $f(x \mid \theta)$ adalah p.d.f bersyarat dari *X* diberikan $\Theta = \theta$, dan $h(\theta)$ adalah p.d.f dari Θ.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari distribusi bersyarat *X*. P.d.f bersama dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$, diberikan $\Theta = \theta$, adalah

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta) = f(x_1 \mid \theta) f(x_2 \mid \theta) \cdots f(x_n \mid \theta).$$

P.d.f bersama dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan Θ adalah

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) &= f(x_1 \mid \theta) f(x_2 \mid \theta) \cdots f(x_n \mid \theta) h(\theta) \\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta) h(\theta). \end{aligned}$$

Jika Θ variabel random kontinu, maka p.d.f marginal bersama $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yaitu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) d\theta.$$

Jika Θ variabel random diskrit, maka integral diganti dengan penjumlahan (sumasi). P.d.f bersyarat dari Θ diberikan $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, adalah

$$\begin{aligned} p(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ &= \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta) h(\theta)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \end{aligned}$$

Ini merupakan bentuk lain dari aturan Bayes (Robert V. Hogg and Allen T. Craig, 1995). Pada statistik Bayesian, seringkali ditulis $p(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ proporsional dengan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta) h(\theta)$, yaitu

$$p(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \propto f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta) h(\theta) \tag{2.1}$$

(Robert V. Hogg and Allen T. Craig, 1995). Fungsi $p(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ disebut dengan p.d.f posterior dari Θ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta)$ merupakan likelihood dari $X_1, X_2, \ldots, X_k$, dan $h(\theta)$ disebut dengan p.d.f prior dari Θ.

2.1.1 Model Hierarchical Bayes

Pada Bayesian, p.d.f prior memiliki peranan yang sangat penting karena prior merupakan pengetahuan awal dari parameter yang akan ditaksir. Untuk beberapa model, p.d.f prior dapat bergantung juga dengan parameter lain. Metode Bayes yang digunakan untuk mengatasi masalah ini disebut dengan metode *Hierarchical Bayes*.

Misalkan terdapat variabel random *X*, Θ, dan Γ yang dijelaskan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
X \mid \theta &\sim f(x \mid \theta) \\
\Theta \mid \gamma &\sim h_1(\theta \mid \gamma) \\
\Gamma &\sim h_2(\gamma)
\end{aligned}
$$

- $X \mid \theta \sim f(x \mid \theta)$ merupakan variabel random *X* yang bergantung dengan θ yang memiliki distribusi sembarang dengan fungsi kepadatan $f(x \mid \theta)$. $f(x \mid \theta)$ berperan sebagai fungsi likelihood.
- $\Theta \mid \gamma \sim h_1(\theta \mid \gamma)$, merupakan variabel random Θ yang bergantung pada γ memiliki distribusi sembarang dengan fungsi kepadatan $h_1(\theta \mid \gamma)$. $h_1(\theta \mid \gamma)$ berperan sebagai p.d.f prior θ diberikan γ.
- $\Gamma \sim h_2(\gamma)$, variabel random Γ memiliki distribusi sembarang dengan fungsi kepadatan $h_2(\gamma)$. γ merupakan parameter pengganggu atau disebut juga dengan *hyperparameter* yang berasal dari variabel random Γ.

- Pada model Bayes yang biasa, prior dari θ hanya dijelaskan oleh $h(\theta)$. Namun, prior θ bisa juga bergantung dengan parameter lain, misal γ. Sehingga prior dari θ yang hanya dijelaskan oleh $h(\theta)$, pada *Hierarchical Bayes* dijelaskan kembali oleh $h_1(\theta \mid \gamma)$ dan $h_2(\gamma)$, ditulis $h(\theta) \propto h_1(\theta \mid \gamma) h_2(\gamma)$.

Dengan metode *Hierarchical Bayes* pengaruh γ akan dihilangkan sehingga inferensi akan bergantung hanya pada parameter θ. (Robert V. Hogg, Joseph W. McKean, and Allen T. Craig, 2005).

Model *Hierarchical Bayes* dari persamaan (2.1) diperoleh dengan cara sebagai berikut :

$$p(\theta \mid x_1, x_2, \dots, x_n) \propto f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) h(\theta)$$

karena $h(\theta) \propto h_1(\theta \mid \gamma) h_2(\gamma)$, maka :

$$\begin{aligned} p(\theta \mid x_1, x_2, \dots, x_n) &\propto f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) h(\theta) \\ p(\theta \mid x_1, x_2, \dots, x_n) &\propto f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) h_1(\theta \mid \gamma) h_2(\gamma) \\ &\propto \textit{likelihood} \times \textit{prior} \times \textit{hyperparameter}. \end{aligned}$$

Jadi, pada model *Hierarchical Bayes*, posterior proporsional dengan perkalian antara likelihood, prior, dan *hyperparameter*nya.

2.2 Distribusi Prior Conjugate

Misalkan F adalah kelas dari distribusi sampling $f(x \mid \theta)$, dan P adalah kelas dari distribusi prior θ, maka kelas P adalah *conjugate* untuk F jika

$$p(\theta \mid x) \in P \quad \text{untuk seluruh} \quad f(x \mid \theta) \in F \quad \text{dan} \quad h(\theta) \in P.$$

Definisi *conjugate* di atas merupakan definisi umum karena jika P adalah kelas dari seluruh distribusi, maka P selalu *conjugate* dari sembarang kelas distribusi sampling. Untuk memperoleh *conjugate* yang lebih spesifik lagi, dipilih P yang merupakan himpunan dari seluruh fungsi kepadatan yang memiliki bentuk fungsional sama dengan fungsi likelihood. Dalam kasus ini P disebut *prior natural conjugate* untuk F (Andrew G., John B.C, Hal S.S& Donald B.R, 2000). Jadi, kelas distribusi probabilitas prior $h(\theta)$ dikatakan *prior natural conjugate* dengan kelas fungsi likelihood $f(x \mid \theta)$ jika dihasilkan distribusi posterior $p(\theta \mid x)$ yang memiliki keluarga yang sama dengan $h(\theta)$.

Sebagai contoh, misalkan X berdistribusi binomial dengan p.d.f $f_1(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$ memiliki bentuk fungsional yang sama dengan p.d.f dari X yang berdistribusi beta, yaitu $f_2(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$. Sehingga distribusi beta seringkali dipilih menjadi *prior natural conjugate* untuk distribusi binomial. Berikut tabel beberapa *prior natural conjugate* untuk beberapa fungsi likelihood.

Tabel 2.1. *Prior natural conjugate* untuk beberapa fungsi likelihood

Likelihood	**Prior Natural Conjugate**
Binomial	Beta
Mutinomial	Dirichlet
Poisson	Gamma
Normal	
μ tidak diketahui, σ^2 diketahui	Normal
μ diketahui, σ^2 tidak diketahui	Inverse Chi-Square
Multivariat Normal	
$\boldsymbol{\mu}$ tidak diketahui, **V** diketahui	Multivariat Normal
$\boldsymbol{\mu}$ diketahui, **V** tidak diketahui	Inverse Wishart

[Sumber : *Introduction to Bayesian Analysis*, B.Walsh 2002]

2.3 Aproksimasi Normal pada Distribusi Posterior

Pada dasarnya, teorema limit pusat dari teori probabilitas dapat digunakan pada konteks Bayesian untuk menunjukkan :

$$\left(\frac{\theta - E(\theta \mid x)}{\sqrt{\mathrm{var}(\theta \mid x)}} \middle| x \right) \rightarrow N(0,1)$$

(Andrew G., John B.C, Hal S.S& Donald B.R, 2000).

Hasil ini sering digunakan untuk menunjukkan aproksimasi distribusi posterior dengan distribusi normal. Distribusi posterior $p(\theta \mid x)$ yang unimodal (satu modus) dan simetri, seringkali dapat diaproksimasi dengan distribusi normal yang terpusat pada modusnya; yaitu logaritma dari fungsi posteriornya diaproksimasi dengan fungsi kuadratik.

Modus dari θ dapat digunakan sebagai estimator untuk θ, katakan $\hat{\theta}$, diperoleh saat distribusi posterior $p(\theta \mid x)$ mencapai nilai maksimum, yakni ketika $p(\theta \mid x)$ memenuhi kondisi

$$\frac{dp(\theta \mid x)}{d\theta} = 0 . \tag{2.2}$$

Pada aproksimasi distribusi posterior, digunakan deret Taylor.

Diketahui ekspansi deret Taylor dari sembarang fungsi $b(x)$ untuk disekitar x_0, yaitu

$$b(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m$$

$b^{(m)}(x_0)$ menunjukkan turunan ke-*m* dari $b(x)$ terhadap *x* pada x_0.

Pada tugas akhir ini, akan dicari ekspansi deret Taylor dari $p(\theta \mid x)$. Namun, biasanya bentuk $p(\theta \mid x)$ bukanlah bentuk yang sederhana karena merupakan perkalian dari fungsi likelihood dan prior. Karena $\ln p(\theta \mid x)$ dan $p(\theta \mid x)$ maksimum pada nilai θ yang sama, maka $\ln p(\theta \mid x)$ dapat digunakan untuk mencari ekspansi deret Taylor dari $p(\theta \mid x)$ pada $\hat{\theta}$. Sebuah ekspansi deret

Taylor dari $\ln p(\theta \mid x)$ yang terpusat pada posterior modusnya, $\hat{\theta}$ (dimana θ bisa vektor), diberikan

$$\ln p(\theta \mid x) = \underbrace{\ln p(\hat{\theta} \mid x)}_{(1)} + \underbrace{\left[\frac{d}{d\theta}\ln p(\theta \mid x)\right]_{\theta=\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta})}_{(2)} + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln p(\theta \mid x)\right]_{\theta=\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta}) + \cdots .$$

$\ln p(\theta \mid x)$ dan $p(\theta \mid x)$ maksimum pada nilai θ yang sama, berarti $\ln p(\theta \mid x)$ memenuhi persamaan (2.2). Dengan demikian bentuk kedua dari ekspansi deret Taylor $\ln p(\theta \mid x)$ sama dengan nol. Bentuk pertama dari ekspansi deret Taylor $\ln p(\theta \mid x)$ pada $\hat{\theta}$ merupakan suatu konstanta, misal *K*. Sehingga bentuk ekspansi deret Taylor di atas yang lebih sederhana yaitu :

$$\ln p(\theta \mid x) = K + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln p(\theta \mid x)\right]_{\theta=\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta}) + \cdots, \qquad (2.3)$$

Aproksimasi ini akan lebih baik pada order yang lebih tinggi, yang memiliki nilai yang lebih kecil dari bentuk $m = 2$. Ambil bentuk eksponen dari persamaan (2.3) dan kembali pada bentuk posterior $p(\theta \mid x)$, yaitu :

$$p(\theta \mid x) \approx C \exp\left(\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})^T \left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln p(\theta \mid x)\right]_{\theta=\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta})\right)$$

dengan C adalah konstanta.

Perhatikan untuk X berdistribusi normal (μ, σ^2), p.d.f nya adalah :

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Jika kedua persamaan dibandingkan, maka $p(\theta \mid x)$ memiliki bentuk fungsional yang sama dengan distribusi normal dimana :

- $\mu = \hat{\theta}$
- $\sigma^2 = \left(\left[-\frac{d^2}{d\theta^2} \ln p(\theta \mid x) \right]_{\theta=\hat{\theta}} \right)^{-1}$.

Berdasarkan hal tersebut, seringkali distribusi normal digunakan untuk mengaproksimasi distribusi posterior Bayesian, yaitu :

$$p(\theta \mid x) \approx \mathrm{N}\left(\hat{\theta}, \left[I\left(\hat{\theta}\right) \right]^{-1} \right)$$

dimana $I\left(\hat{\theta}\right)$ disebut informasi terobservasi, yaitu $I\left(\hat{\theta}\right) = -\frac{d^2}{d\theta^2} \ln p(\theta \mid x) \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$.

Jika θ vektor parameter, maka $I\left(\hat{\theta}\right)$ adalah sebuah matriks.

2.4 Distribusi Multivariat Normal

Misalkan $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ merupakan vektor random berdimensi *n*. Vektor $\mathbf{X}$ dikatakan berdistribusi multivariat normal dimensi-*n* dengan mean $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ dan matriks varians-kovarians adalah $\mathbf{C}$ definit positif, maka p.d.f dari vektor random $\mathbf{X}$ adalah

$$f_4(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left\{ -\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{2} \right\} \tag{2.4}$$

Dengan $|\mathbf{C}|$ adalah determinan dari matriks $\mathbf{C}$.

$\mathbf{X}$ berdistribusi multivariat normal dilambangkan dengan $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$. Akan dibuktikan bahwa (2.4) adalah p.d.f bersama dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Bukti :

Misalkan :

- $\mathbf{E}$ adalah matriks simetris definit positif yang berukuran *nxn*.
- $\boldsymbol{\mu}$ adalah vektor berdimensi *n* sedemikian sehingga $\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]$ dimana μ_i adalah bilangan riil.
- $\mathbf{X}$ adalah vektor berdimansi *n* sedemikian sehingga $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Akan ditunjukkan bahwa jika *C* adalah bilangan positif maka :

$$f_5(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \mathbf{E}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right] \tag{2.5}$$

$$-\infty < x_i < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Merupakan p.d.f bersama dari variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yang bertipe kontinu.

Pertama akan ditunjukkan bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = 1$

Misalkan $\mathbf{t}' = [t_1, t_2, \ldots, t_n]$ dengan $t_i, i = 1, 2, \ldots, n$, adalah konstanta riil sembarang. Oleh karena itu, dapat dihitung :

$$C \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\mathbf{t}'\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \mathbf{E}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right] dx_1 \cdots dx_n \tag{2.6}$$

Untuk $t_i = 0$, persamaan (2.6) merupakan integral bersama dari p.d.f bersama $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Selanjutnya akan dilakukan transformasi variabel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ke $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dengan menggunakan transformasi

$$\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{Y}$$

dimana $\mathbf{Y}' = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$. Dengan demikian

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu},$$

dan jacobiannya adalah $\mathbf{J} = 1$, mengakibatkan

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathbf{t}'\mathbf{x}-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{E}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right]dx_1\cdots dx_n$$

$$=C\exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathbf{t}'\mathbf{y}-\frac{\mathbf{y}'\mathbf{E}\mathbf{y}}{2}\right].1\,dy_1\ldots dy_n$$

$$=C\exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathbf{t}'\mathbf{y}-\frac{\mathbf{y}'\mathbf{E}\mathbf{y}}{2}\right]dy_1\ldots dy_n \tag{2.7}$$

E merupakan matriks simetris definit positif, sehingga nilai-nilai *eigen* dari matriks **E** yaitu $e_1, e_2,..., e_n$ juga bernilai positif. Untuk matriks ortogonal **L** berukuran *nxn* dan sesuai definisi yang menyatakan bahwa matriks **L** berukuran *nxn* dikatakan matriks ortogonal, jika $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}'$ dapat dinyatakan bahwa $\mathbf{LL}' = \mathbf{L'L} = \mathbf{I}$, sehingga

$$\mathbf{L'EL}=\begin{pmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e_n\end{pmatrix}$$

Pada persamaan (2.7) akan dilakukan transformasi variabel $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ke $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ dengan transformasi

$$\mathbf{Z} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{Y},$$

dimana $\mathbf{Z}' = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_n]$, sehingga

$$\mathbf{Y} = \mathbf{LZ}$$

Sesuai sifat matriks ortogonal $\mathbf{L}$, jacobiannya adalah

$$\mathbf{J} = |\mathbf{L}| = 1 \text{ atau } \mathbf{J} = |\mathbf{L}| = -1.$$

Karena $\mathbf{L}$ matriks ortogonal maka $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}'$, persamaan (2.7) menjadi

$$C\exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathbf{t}'\mathbf{y}-\frac{\mathbf{y}'\mathbf{E}\mathbf{y}}{2}\right]dy_1\ldots dy_n$$

$$=C\exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathbf{t}'\mathbf{Lz}-\frac{(\mathbf{Lz})'\mathbf{E}(\mathbf{Lz})}{2}\right].1\,dz_1\ldots dz_n$$

$$=C\exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathbf{t}'\mathbf{Lz}-\frac{\mathbf{z}'(\mathbf{L}'\mathbf{EL})\mathbf{z}}{2}\right]dz_1\ldots dz_n. \tag{2.8}$$

Misalkan

t'L=w', dimana **w'**=[w$_1$, w$_2$, ... , w$_n$].

Berdasarkan persamaan di atas, maka

- $\exp[\mathbf{t'Lz}] = \exp[\mathbf{w'z}] = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right]$
- $\exp\left[-\dfrac{\mathbf{z'}(\mathbf{L'EL})\mathbf{z}}{2}\right] = \exp\left[-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i z_i^2}{2}\right]$

Oleh karena itu,

$$C\exp(\mathbf{t'\mu})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathbf{t'Lz}-\frac{\mathbf{z'}(\mathbf{L'EL})\mathbf{z}}{2}\right]dz_1\ldots dz_n$$

$$=C\exp(\mathbf{w'L^{-1}\mu})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}w_i z_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i z_i^2}{2}\right]dz_1\ldots dz_n$$

Karena **L** matriks ortogonal, $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L'}$

$$=C\exp(\mathbf{w'L'\mu})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\exp\left[w_i z_i-\frac{e_i z_i^2}{2}\right]dz_1\ldots dz_n$$

$$=C\exp(\mathbf{w'L'\mu})\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[w_i z_i-\frac{e_i z_i^2}{2}\right]dz_i$$

$$=C\exp(\mathbf{w'L'\mu})\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[w_i z_i]\exp\left[-\frac{z_i^2}{2/e_i}\right]dz_i$$

$$=C\exp(\mathbf{w'L'\mu})\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2\pi}{e_i}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[w_i z_i]\frac{\exp\left[-\dfrac{z_i^2}{2/e_i}\right]}{\sqrt{\dfrac{2\pi}{e_i}}}dz_i \qquad (2.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[w_i z_i\right] \frac{\exp\left[-\frac{z_i^2}{2/e_i}\right]}{\sqrt{\frac{2\pi}{e_i}}} dz_i$$ merupakan m.g.f dari $N\left(0, \frac{1}{e_i}\right)$ dengan t diganti

dengan w_i, maka (2.9) dapat ditulis kembali menjadi

$$C \exp\left(\mathbf{w'L'\mu}\right) \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi}{e_i}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[w_i z_i\right] \frac{\exp\left[-\frac{z_i^2}{2/e_i}\right]}{\sqrt{\frac{2\pi}{e_i}}} dz_i$$

$$= C \exp\left(\mathbf{w'L'\mu}\right) \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi}{e_i}} \exp\left[w_i.0 + \frac{\frac{1}{e_i}.w_i^2}{2}\right]$$

$$= C \exp\left(\mathbf{w'L'\mu}\right) \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi}{e_i}} \exp\left[\frac{w_i^2}{2e_i}\right]$$

$$= C \exp\left(\mathbf{w'L'\mu}\right) \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{e_1 e_2 \ldots e_n}} \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{2e_i}\right] \tag{2.10}$$

Karena **L** matriks ortogonal, maka

$$\left(\mathbf{L'EL}\right)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\left(\mathbf{L'}\right)^{-1}$$

$$= \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\left(\mathbf{L}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{L'E^{-1}L} = \begin{bmatrix} 1/e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/e_n \end{bmatrix} = diag\left[\frac{1}{e_1}, \cdots, \frac{1}{e_n}\right]$$

dan mengakibatkan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{e_i} = \mathbf{w'}\left(\mathbf{L'E^{-1}L}\right)\mathbf{w}$$

$$= \mathbf{w'L'E^{-1}Lw} \qquad Dan \quad |E^{-1}| = |L'E^{-1}L| = \frac{1}{e_1 e_2 \ldots e_n}$$

$$= \left(\mathbf{Lw}\right)\mathbf{'E^{-1}}\left(\mathbf{Lw}\right)$$

$$= \mathbf{t'E^{-1}t}$$

Selanjutnya (2.10) dapat ditulis :

$$C\exp\left(\mathbf{w'L'\mu}\right)\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{e_1e_2...e_n}}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2}{2e_i}\right]$$

$$=C\exp\left(\mathbf{t'\mu}\right)\sqrt{(2\pi)^n|E^{-1}|}\exp\left[\frac{\mathbf{t'E^{-1}t}}{2}\right] \qquad (2.11)$$

Untuk t_i =0, i=1,2,...,n , persamaan (2.11) menjadi

$$=C\sqrt{(2\pi)^n|E^{-1}|}$$

Berdasarkan persamaan (2.6), jika t_i =0, i=1,2,...,n maka persamaan (2.6) tersebut merupakan integral bersama dari p.d.f bersama $X_1, X_2, \dots, X_n$. Dengan demikian

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathbf{t'x}-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{E}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right]dx_1\cdots dx_n=1.$$

Akibatnya, persamaan $C\sqrt{(2\pi)^n|E^{-1}|}$ yang merupakan bentuk lain dari persamaan (2.6) harus sama dengan 1.

$$C\sqrt{(2\pi)^n|E^{-1}|}=1$$

Diperoleh :

$$C=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|E^{-1}|}}$$

Maka terbukti bahwa, jika $C=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|E^{-1}|}}$, maka

$$f_5(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|E^{-1}|}}\exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{E}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right],$$

$$-\infty<x_i<\infty,\ i=1,2,\dots,n$$

Merupakan suatu p.d.f bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang bertipe kontinu. Bentuk p.d.f tersebut disebut *Nonsingular Multivariat Normal*.

Kedua akan ditunjukkan p.d.f distribusi multivariat normal adalah :

$$f_4(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\mathbf{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\mathbf{C}|}}\exp\left\{-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right\},$$
$$-\infty < x_i < \infty,\ i = 1,2,\ldots,n$$

Berdasarkan penjelasan pertama, berikut ini bentuk m.g.f dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$M(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |E^{-1}|}}\exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{E}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right]dx_1\ldots dx_n$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |E^{-1}|}}.\exp(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}).\sqrt{(2\pi)^n |E^{-1}|}.\exp\left(\frac{\mathbf{t}'\mathbf{E}^{-1}\mathbf{t}}{2}\right)$$
$$= \exp\left(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} + \frac{\mathbf{t}'\mathbf{E}^{-1}\mathbf{t}}{2}\right)$$

Misalkan elemen-elemen dari matriks simetris $\mathbf{E}^{-1}$ yang definit positif adalah $\sigma_{ij}, i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n$, maka

$$M(0,\ldots,0,t_i,0,\ldots,0) = \exp\left(t_i\mu_i + \frac{\sigma_{ii}t_i^2}{2}\right)$$

adalah m.g.f dari $X_i, i = 1,2,\ldots,n$, sehingga disimpulkan

$$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_{ii}), i = 1,2,\ldots,n.$$

Jika $i \neq j$, maka

$$M(0,\ldots,0,t_i,t_j,0,\ldots,0) = \exp\left(t_i\mu_i + t_j\mu_j + \frac{\sigma_{ii}t_i^2 + 2\sigma_i\sigma_j t_i t_j + \sigma_{jj}t_j^2}{2}\right)$$

adalah m.g.f dari distribusi *Bivariat Normal.*

Dapat ditunjukkan bahwa σ_{ij} adalah kovariansi dari variabel random X_i dan X_j. Oleh karena itu, $\boldsymbol{\mu}$ dimana $\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n]$ menyatakan mean dari variabel-variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan elemen-elemen diagonal $\mathbf{E}^{-1}$ menyatakan variansi variabel-variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$, yaitu $\sigma_{ii} = \sigma_i^2, i = 1,2,\ldots,n$, sedangkan elemen selain diagonal $\mathbf{E}^{-1}$ menyatakan kovariansi variabel-variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$, yaitu $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, $i \neq j$.

Selanjutnya $\mathbf{E}^{-1}$ dijabarkan menjadi

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga $\mathbf{E}^{-1}$ adalah matriks varians-kovarians **X** yang berdistribusi multivariat normal, dan $\mathbf{E}^{-1}$ biasanya dinotasikan dengan **C.**

Dengan demikian, p.d.f distribusi multivariat normal adalah :

$$f_4(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\mathbf{C}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\,\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

$$-\infty < x_i < \infty,\ i = 1,2,\ldots,n$$

dan m.g.f distribusi multivariat normal adalah :

$$M(t_1,\ldots,t_n) = \exp\left(\mathbf{t'}\boldsymbol{\mu} + \frac{\mathbf{t'Ct}}{2}\right). \blacksquare$$

2.5 Distribusi Binomial

Pada percobaan pelemparan koin, hasil yang mungkin yaitu muka atau belakang. Dalam statistika, suatu percobaan acak yang memiliki dua kemungkinan hasil disebut percobaan bernoulli. Hasilnya biasa dikenal juga dengan sukses-gagal.

Misalkan X adalah variabel random yang berhubungan dengan suatu percobaan bernoulli yang didefinisikan sebagai berikut :

X (sukses) = 1 dan X (gagal) = 0.

p.d.f dari X dapat ditulis :

$$\begin{aligned} f_6(x) &= \theta^x (1-\theta)^{1-x}, && x = 0,1 \\ &= 0 \quad , && \textit{lainnya} \end{aligned} \qquad (2.12)$$

variabel random X dikatakan mempunyai distribusi bernoulli.

Misalkan n percobaan bernoulli dilakukan dengan antar ulangannya *independent* dan probabilitas sukses tiap percobaannya θ. Jika dimisalkan variabel random X adalah jumlah kejadian sukses dari n percobaan bernoulli dengan x= 0, 1, . . . , n, dan n-x banyaknya kejadian gagal, maka jumlah kemungkinan kejadian x sukses dalam n percobaan adalah :

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}. \tag{2.13}$$

Karena antar percobaannya *independent*, probabilitas sukses dari tiap percobaan sama yaitu θ dan probabilitas gagalnya 1- θ. Dengan demikian probabilitas tiap kemungkinan kejadian sukses adalah $\theta^x (1-\theta)^{n-x}$. Dengan demikian, p.d.f dari X yaitu :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, && x = 0,1,\ldots,n \\ &= 0 \quad , && \textit{yang lainnya} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Suatu variabel random yang memiliki p.d.f seperti di atas disebut berdistribusi binomial dengan parameter n dan θ, biasanya ditulis X~$B(n, \theta)$. M.g.f dari distribusi binomial yaitu :

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (\theta e^t)^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \left[(1-\theta) + \theta e^t\right]^n \end{aligned} \tag{2.15}$$

berdasarkan m.g.f ini, dapat dicari mean dan variansi dari variabel random X yang berdistribusi binomial, yaitu :

$$\begin{aligned} M'(t) &= n\left[(1-\theta) + \theta e^t\right]^{n-1} (\theta e^t) \\ &= n\theta e^t \left[(1-\theta) + \theta e^t\right]^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\mu = M'(0) = n\theta. \tag{2.16}$$

$$M''(t) = n\theta e^t\left[(1-\theta)+\theta e^t\right]^{n-1} + n\theta e^t(n-1)\left[(1-\theta)+\theta e^t\right]^{n-2}\left(\theta e^t\right)$$

$$= n\left[(1-\theta)+\theta e^t\right]^{n-1}\left(\theta e^t\right) + n(n-1)\left[(1-\theta)+\theta e^t\right]^{n-2}\left(\theta e^t\right)^2.$$

$$\sigma^2 = M''(0) - \mu^2$$

$$= n\left((1-\theta)+\theta\right)^{n-1}\theta + n(n-1)\left((1-\theta)+\theta\right)^{n-2}\theta^2 - (n\theta)^2$$

$$= n\theta + n(n-1)\theta^2 - (n\theta)^2$$

$$= n\theta\left(1+(n-1)\theta - n\theta\right)$$

$$= n\theta\left(1+n\theta-\theta-n\theta\right)$$

$$= n\theta(1-\theta). \tag{2.17}$$

2.6 Distribusi Beta

Misalkan X_1 dan X_2 adalah 2 variabel random *independent* yang memiliki distribusi gamma dengan parameter $(\alpha,1)$ dan $(\beta,1)$, $\alpha>0,\beta>0$. P.d.f dari X_1 yaitu :

$$f_7(x_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)1^\alpha}x_1^{\alpha-1}e^{-x_1/1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x_1^{\alpha-1}e^{-x_1}, \qquad 0<x_1<\infty \tag{2.18}$$

$$= 0, \qquad \textit{lainnya} \quad .$$

P.d.f dari X_2 yaitu :

$$f_7(x_2) = \frac{1}{\Gamma(\beta)1^\beta}x_1^{\beta-1}e^{-x_2/1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)}x_1^{\beta-1}e^{-x_2}, \qquad 0<x_2<\infty \tag{2.19}$$

$$= 0, \qquad \textit{lainnya} \quad .$$

P.d.f bersama X_1 dan X_2 adalah :

$$f\left(x_1,x_2\right)=f_7(x_1)f_7\left(x_2\right)$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}e^{-x_1-x_2},0<x_1<\infty,0<x_2<\infty \qquad (2.20)$$
$$=0 \qquad ,lainnya \qquad .$$

dimana $\alpha>0,\beta>0$.

Misalkan $Y_1 = X_1+X_2$ dan $Y_2 = X_1/(X_1+X_2)$.

Maka transformasinya adalah

- $y_1 = x_1 + x_2$ dan
- $y_2 = \dfrac{x_1}{x_1+x_2}$

dan inversnya yaitu

- $x_1 = y_1 y_2$ dan
- $x_2 = y_1(1-y_2)$.

Sehingga Jacobiannya adalah $J=\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix}=-y_1\neq 0$.

Transformasi tersebut adalah transformasi satu-satu yang memetakan dari

$$\mathrm{A}=\left\{\left(x_1,x_2\right):0<x_1<\infty,0<x_2<\infty\right\}$$

Ke

$$\mathrm{B}=\left\{\left(y_1,y_2\right):0<y_1<\infty,0<y_2<1\right\}.$$

Diperoleh p.d.f bersama dari Y_1 dan Y_2 :

$$f\left(y_1,y_2\right)=f\left(y_1y_2,y_1(1-y_2)\right)|J|$$
$$=|-y_1|\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(y_1y_2\right)^{\alpha-1}\left(y_1(1-y_2)\right)^{\beta-1}e^{-(y_1y_2+y_1(1-y_2))}$$
$$=(y_1)\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(y_1y_2\right)^{\alpha-1}\left(y_1(1-y_2)\right)^{\beta-1}e^{-y_1}$$
$$=\frac{y_2^{\alpha-1}(1-y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y_1^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}, \qquad 0<y_1<\infty,0<y_2<1 \qquad (2.21)$$
$$=0 \qquad , \qquad lainnya$$

P.d.f marginal dari Y_2 adalah :

$$
\begin{aligned}
f(y_2) &= \int_0^\infty f(y_1, y_2)\, dy_1 \\
&= \int_0^\infty \frac{y_2^{\alpha-1}(1-y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1} dy_1 \\
&= \frac{y_2^{\alpha-1}(1-y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \Gamma(\alpha+\beta) \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1} dy_1 \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Diketahui bahwa p.d.f dari distribusi gamma yaitu

$$
\begin{aligned}
f_7(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \qquad 0 < x < \infty \\
&= 0 \qquad , \qquad \textit{lainnya}
\end{aligned}
$$

dengan parameter α dan β.

Maka $\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1}$ adalah p.d.f gamma dengan parameter $\alpha+\beta$ dan 1.

Sehingga

$$
\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1} dy_1 = 1.
$$

Maka (2.22) menjadi :

$$
\begin{aligned}
f(y_2) &= \frac{y_2^{\alpha-1}(1-y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \Gamma(\alpha+\beta) \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1} dy_1}_{=1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y_2^{\alpha-1}(1-y_2)^{\beta-1} \quad , \qquad 0 < y_2 < 1 \\
&= 0 \qquad , \qquad \textit{lainnya}
\end{aligned}
$$

Variabel random Y_2 yang memiliki p.d.f seperti di atas, dikatakan berdistribusi beta dengan parameter α dan β.

2.7 *Exchangeable*

Variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dikatakan *exchangeable* jika untuk setiap permutasi $i_1, \ldots, i_n$ dari bilangan bulat $1, \ldots, n$

$$\Pr\left\{X_{i_1} \le x_1, X_{i_2} \le x_2, \ldots, X_{i_n} \le x_n\right\} = \Pr\left\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n\right\}$$

Untuk semua $x_1, \ldots, x_n$.

Artinya, n variabel random dikatakan *exchangeable* jika distribusi bersamanya sama bagaimanapun urutan observasinya.

Variabel random diskrit akan *exchangeable* jika

$$\Pr\left\{X_{i_1} = x_1, X_{i_2} = x_2, \ldots, X_{i_n} = x_n\right\} = \Pr\left\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right\}$$

Untuk semua permutasi $i_1, \ldots, i_n$ dan semua nilai $x_1, \ldots, x_n$. Ini ekivalen untuk menyatakan bahwa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Pr\left\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right\}.$$

adalah sebuah fungsi yang simetri atas vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, yang maksudnya adalah nilainya tidak berubah ketika elemen dari vektor dipermutasikan (Sheldon M.Ross, 2002).

Bukti :

Akan dibuktikan

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Pr\left\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right\}$$

adalah sebuah fungsi yang simetri atas vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dengan menggunakan induksi matematik.

Definisi:

Fungsi simetri pada n variabel adalah fungsi yang nilainya tidak berubah ketika nilai variabelnya dipermutasikan.

Untuk $n=2$, akan dibuktikan

$f(x_1,x_2)=f(x_2,x_1)$.

- Berdasarkan definisi *exchangeable*, nilai dari probabilitasnya tidak berubah ketika variabel randomnya dipermutasikan. Berarti

$$\Pr\left\{X_{i_1}=x_1,X_{i_2}=x_2\right\} = \Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2\right\}=\Pr\left\{X_2=x_1,X_1=x_2\right\} \qquad (2.23)$$

  Diketahui bahwa $f(x_1,x_2)=\Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2\right\}$.

  Berdasarkan (2.23), maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= \Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2\right\} \\ &= \Pr\left\{X_2=x_1,X_1=x_2\right\} \\ &= \Pr\left\{X_1=x_2,X_2=x_1\right\} \\ &= f(x_2,x_1) \end{aligned}$$

  Maka terbukti bahwa $f(x_1,x_2)=f(x_2,x_1)$.

  Berarti $f(x_1,x_2)=\Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2\right\}$ adalah fungsi yang simetri atas vektor (x_1,x_2)

Untuk $n=3$, akan dibuktikan

$f(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_3,x_2)=\cdots=f(x_3,x_2,x_1)$.

- Berdasarkan definisi *exchangeable*,

$$\begin{aligned} \Pr\left\{X_{i_1}=x_1,X_{i_2}=x_2,X_{i_3}=x_3\right\} &= \Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_3\right\} \\ &= \Pr\left\{X_1=x_1,X_3=x_2,X_2=x_3\right\} \\ &\vdots \\ &= \Pr\left\{X_3=x_1,X_2=x_2,X_1=x_3\right\} \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Diketahui bahwa $f(x_1, x_2, x_3) = \Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\}$.

Berdasarkan (2.24), maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\} \\ &= \Pr\{X_1 = x_1, X_3 = x_2, X_2 = x_3\} \\ &= \Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_3, X_3 = x_2\} \\ &= f(x_1, x_3, x_2) \\ f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, x_3, x_2) \\ &= \Pr\{X_1 = x_1, X_3 = x_2, X_2 = x_3\} \\ &\vdots \\ &= \Pr\{X_3 = x_1, X_2 = x_2, X_1 = x_3\} \\ &= \Pr\{X_1 = x_3, X_2 = x_2, X_3 = x_1\} \\ &= f(x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

Maka terbukti bahwa

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3, x_2) = \cdots = f(x_3, x_2, x_1).$$

Berarti $f(x_1, x_2, x_3) = \Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\}$ adalah fungsi yang simetri atas vektor (x_1, x_2, x_3).

Untuk $n = 4$, akan dibuktikan

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_4, x_3) = \cdots = f(x_4, x_3, x_2, x_1).$$

- Berdasarkan definisi *exchangeable*,

$$\begin{aligned} \Pr\{X_{i_1} = x_1, X_{i_2} = x_2, X_{i_3} = x_3, X_{i_4} = x_4\} &= \Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4\} \\ &= \Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_4 = x_3, X_3 = x_4\} \\ &\vdots \\ &= \Pr\{X_4 = x_1, X_3 = x_2, X_2 = x_3, X_1 = x_4\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Diketahui bahwa $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4\}$.

Berdasarkan (2.25), maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) &= \Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_3,X_4=x_4\right\}\\
&= \Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2,X_4=x_3,X_3=x_4\right\}\\
&= \Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_4,X_4=x_3\right\}\\
&= f\left(x_1,x_2,x_4,x_3\right)\\
f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) &= f\left(x_1,x_2,x_4,x_3\right)\\
&= \Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2,X_4=x_3,X_3=x_4\right\}\\
&\vdots\\
&= \Pr\left\{X_4=x_1,X_3=x_2,X_2=x_3,X_1=x_4\right\}\\
&= \Pr\left\{X_1=x_4,X_2=x_3,X_3=x_2,X_4=x_1\right\}\\
&= f\left(x_4,x_3,x_2,x_1\right)
\end{aligned}
$$

Maka terbukti bahwa

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=f\left(x_1,x_2,x_4,x_3\right)=\cdots=f\left(x_4,x_3,x_2,x_1\right).$$

Berarti $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\Pr\left\{X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_3,X_4=x_4\right\}$ adalah fungsi yang simetri atas vektor $\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$.

$\vdots$

Untuk n, akan dibuktikan

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\cdots=f\left(x_n,\ldots,x_1\right).$$

- Berdasarkan definisi *exchangeable*,

$$
\begin{aligned}
\Pr\left\{X_{i_1}=x_1,\ldots,X_{i_n}=x_n\right\} &= \Pr\left\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right\}\\
&\vdots\\
&= \Pr\left\{X_n=x_1,\ldots,X_1=x_n\right\}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Diketahui bahwa $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\Pr\left\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right\}$.

Berdasarkan (2.26), maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1,\ldots,x_n\right) &= \Pr\left\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right\}\\
&\vdots\\
&= \Pr\left\{X_n=x_1,\ldots,X_1=x_n\right\}\\
&= \Pr\left\{X_1=x_n,\ldots,X_n=x_1\right\}\\
&= f\left(x_n,\ldots,x_1\right)
\end{aligned}
$$

Maka terbukti bahwa $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\cdots=f\left(x_n,\ldots,x_1\right)$.

Berarti $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\Pr\left\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right\}$ adalah fungsi yang simetri atas vektor $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

Maka terbukti bahwa $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\Pr\left\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right\}$ adalah fungsi yang simetri atas vektor $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.■

Contoh :

Bola diambil satu persatu tanpa pengembalian dari sebuah ember yang berisi n bola dan diantara n bola tersebut terdapat k bola yang khusus. Tiap pengambilan bersifat *equally likely* atas sejumlah bola yang tersisa pada ember tersebut saat pengambilan. Misal $X_i=1$ jika bola ke-i yang terambil adalah bola khusus, dan $X_i=0$ jika yang terambil bukan bola khusus.

$\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ adalah vektor yang mengandung 1 sebanyak k kali dan 0 sebanyak n-k kali.

Misalkan vektor $\left(1,1,0,1,0,\ldots,0,1\right)$, maka

$$f\left(1,1,0,1,0,\ldots,0,1\right)=\frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1}\frac{n-k}{n-2}\frac{k-2}{n-3}\frac{n-k-1}{n-4}\cdots\frac{1}{2}\frac{1}{1}=\frac{k!\left(n-k\right)!}{n!}.$$

karena ini adalah fungsi yang simetri atas $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, maka variabel randomnya *exchangeable*.

BAB 3
METODE BAYESIAN DALAM MENAKSIR PARAMETER PADA *m* DISTRIBUSI BINOMIAL

Misalkan $X_1, X_2, \cdots, X_m$ adalah variabel random berdistribusi binomial yang saling *independent* dengan asumsi antar θ_i saling berkaitan. Untuk setiap i $(i = 1,\ldots,m)$, prior dari θ_i berdistribusi beta. Prior beta dipilih dari prior *natural conjugate* dari distribusi binomial.

Pada kasus ini, penaksiran parameter θ_i tidak menggunakan θ_i secara langsung melainkan melalui sebuah transformasi θ_i dalam bentuk *logit*, yaitu :

$$\alpha_i = \ln\theta_i - \ln(1-\theta_i) \quad (i = 1,\cdots,m). \tag{3.1}$$

Dipilih transformasi *logit* karena dengan transformasi ini, bentuk α_i lebih mudah ditransformasi kembali dalam bentuk θ_i. Penaksiran θ_i dimulai dengan penentuan distribusi prior α_i.

3.1 Distribusi Prior untuk α_i

Tahap awal dari penaksiran parameter menggunakan metode Bayes adalah penentuan distribusi prior dari parameter tersebut yaitu θ_i. Namun, karena θ_i ditaksir melalui bentuk *logit*nya, maka distribusi prior yang akan digunakan nantinya merupakan distribusi prior dari bentuk *logit* yaitu α_i. Distribusi prior dari α_i, $i = 1,\cdots,m$, dijelaskan dalam dua tahap, yaitu :

1. α_i berdistribusi normal dan *independent* dengan mean μ dan variansi σ^2, dengan μ dan σ^2 diketahui.
2. Mean μ terdistribusi secara *uniform* sepanjang garis riil.

Tahap kedua pada distribusi prior α_i diperlukan untuk menjembatani estimasi parameter μ pada tahap pertama. Distribusi prior ini bersifat *exchangeable* untuk setiap α_i, dimana α_i memiliki informasi prior yang sama dan informasi itu similar untuk seluruh subset dari himpunan parameter $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$; dimana α_i, α_j, $i \neq j$, terkait dengan θ_i, θ_j, $(i \neq j)$ yang berasal dari distribusi binomial dengan ukuran sampel yang sama.

3.2 Fungsi Likelihood untuk α_i

Diketahui $X_1, X_2, \cdots, X_m$ berdistribusi binomial dan *independent*, dimana $X_i \sim B(n_i, \theta_i)$. P.d.f bersama dari $X_1, X_2, \cdots, X_m$, yaitu :

$$f_1(x_1).f_1(x_2).\cdots.f_1(x_m)$$
$$= \frac{(n_1)!}{(x_1)!(n_1 - x_1)!}\theta_1^{x_1}(1-\theta_1)^{n_1 - x_1} . \frac{(n_2)!}{(x_2)!(n_2 - x_2)!}\theta_2^{x_2}(1-\theta_2)^{n_2 - x_2} . \cdots .$$
$$\frac{(n_m)!}{(x_m)!(n_m - x_m)!}\theta_m^{x_m}(1-\theta_m)^{n_m - x_m}$$
$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!}\theta_i^{x_i}(1-\theta_i)^{n_i - x_i}$$

Persamaan $\prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!}\theta_i^{x_i}(1-\theta_i)^{n_i - x_i}$ merupakan fungsi likelihood dalam θ, ditulis :

$$L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!}\theta_i^{x_i}(1-\theta_i)^{n_i - x_i} .$$

Karena akan dicari taksiran θ_i melalui α_i, maka bentuk θ_i pada $L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x})$ dapat ditulis kembali dalam bentuk $\frac{e^{\alpha_i}}{(1+e^{\alpha_i})}$. Sehingga $L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x})$ dapat ditulis ulang menjadi fungsi dari α dalam bentuk $L(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x})$ sebagai berikut :

$$L(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!} \theta_i^{x_i} (1-\theta_i)^{n_i - x_i}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!} \right] \left[\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{e^{\alpha_i}}{1+e^{\alpha_i}} \right)^{x_i} \left(\frac{1}{1+e^{\alpha_i}} \right)^{n_i - x_i} \right]$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!} \right] \left[\left(\frac{e^{\alpha_1 x_1}}{(1+e^{\alpha_1})^{x_1}} . \frac{1}{(1+e^{\alpha_1})^{n_1 - x_1}} \right) \left(\frac{e^{\alpha_2 x_2}}{(1+e^{\alpha_2})^{x_2}} . \frac{1}{(1+e^{\alpha_2})^{n_2 - x_2}} \right) \cdots \left(\frac{e^{\alpha_m x_m}}{(1+e^{\alpha_m})^{x_m}} . \frac{1}{(1+e^{\alpha_m})^{n_m - x_m}} \right) \right]$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!} \right] \left[\frac{e^{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i}}{\prod_{i=1}^{m} (1+e^{\alpha_i})^{x_i + n_i - x_i}} \right]$$

$$L(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!} \right] \left[\frac{e^{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i}}{\prod_{i=1}^{m} (1+e^{\alpha_i})^{n_i}} \right] \tag{3.2}$$

Jika $A = \prod_{i=1}^{m} \frac{(n_i)!}{(x_i)!(n_i - x_i)!}$, maka persamaan (3.2) menjadi

$$L(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) = A. \left[\frac{e^{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i}}{\prod_{i=1}^{m} (1+e^{\alpha_i})^{n_i}} \right] \tag{3.3}$$

Persamaan (3.3) merupakan persamaan fungsi likelihood dari $\boldsymbol{\alpha}$ yang akan digunakan pada pembentukan posteriornya. Pada pembentukan distribusi posterior, akan dibagi atas dua kasus yaitu variansi prior diketahui dan variansi prior tidak diketahui. Pada tugas akhir ini hanya akan dibahas variansi prior yang diketahui.

3.3 Distribusi Posterior untuk α_i

Mengacu pada metode *Hierarchical Bayes* seperti pembahasan di 2.1.1, distribusi posterior dapat ditulis sebagai :

$$p(\theta \mid x) \propto f(x \mid \theta) h_1(\theta \mid \gamma) h_2(\gamma)$$

Dengan :

- $f(x \mid \theta)$ adalah fungsi likelihood.
- $h_1(\theta \mid \gamma)$ adalah fungsi prior dari θ yang bergantung pada parameter lain yaitu γ (*hyperparameter*), dan
- $h_2(\gamma)$ adalah fungsi kepadatan dari γ.

Dalam metode Bayes, $f(x \mid \theta)$ memiliki makna likelihood dari θ diberikan x, dan ditulis $L(\theta \mid x)$.

Pada masalah ini, posteriornya dapat ditulis sebagai berikut :

$$p(\boldsymbol{\alpha}, \mu \mid \mathbf{x}, \sigma^2) \propto L(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) h_1(\boldsymbol{\alpha} \mid \mu, \sigma^2) h_2(\mu) \tag{3.4}$$

yang mana $p(\boldsymbol{\alpha}, \mu \mid \mathbf{x}, \sigma^2)$ merupakan posterior bersama dari $\boldsymbol{\alpha}$ dan μ, karena $h_1(\boldsymbol{\alpha} \mid \mu, \sigma^2)$ (priornya) bergantung pada parameter μ. Berdasarkan penjelasan di sub bab 3.1 dan 3.2, diketahui :

a. $L(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) = A.\left[\dfrac{e^{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i}}{\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{n_i}}\right]$

b. $h_1(\boldsymbol{\alpha} \mid \mu, \sigma^2) = \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^m \exp\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$,

perkalian dari *m* distribusi normal,

c. $h_2(\mu) = 1$,

merupakan probabilitas μ ada di daerah sepanjang garis riil.

Sehingga, bentuk posterior pada (3.4), dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
p\left(\boldsymbol{\alpha},\mu \mid \mathbf{x},\sigma^2\right) &\propto L\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}\right) h_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mu,\sigma^2\right) h_2\left(\mu\right) \\
&= A.\left[\frac{e^{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i}}{\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{n_i}}\right].\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^m \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right).1 \\
&\propto \exp\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right).1 \\
&\propto \exp\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}
$$

Jika bentuk akhir dari persamaan di atas disusun ulang maka akan diperoleh:

$$
\begin{aligned}
p\left(\boldsymbol{\alpha},\mu \mid \mathbf{x},\sigma^2\right) &\propto \exp\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&\propto \exp\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right).\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right).\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i} \\
&\propto \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i-\frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Untuk memperoleh bentuk posterior α_i yang tidak bergantung pada μ, maka dilakukan integrasi terhadap μ.

$$
\begin{aligned}
p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x},\sigma^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\boldsymbol{\alpha},\mu \mid \mathbf{x},\sigma^2\right) d\mu \\
&\propto \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i-\frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i} d\mu
\end{aligned}
$$

Integrasi ini mengakibatkan μ dapat dinyatakan dalam bentuk $\bar{\alpha}=m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k$ (lampiran 1). Sehingga hasil bentuk posterior dari α_i yang tidak bergantung μ, yaitu :

$$p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - \frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}. \tag{3.6}$$

Jadi, persamaan (3.6) adalah persamaan posterior marginal dari $\boldsymbol{\alpha}$.

Jika persamaan (3.6) dijabarkan, maka diperoleh bentuk (1) dan (2), yaitu:

$$\begin{aligned} p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) &\propto e^{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i} \prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i} . e^{-\frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\bar{\alpha}\right)^2} \\ &\propto \underbrace{e^{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i} \prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}}_{(1)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(\alpha_i-\bar{\alpha}\right)^2}{\sigma^2}}}_{(2)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dengan (1) merupakan likelihood α_i, dan (2) adalah p.d.f multivariat normal yang matriks varians kovariansnya merupakan matriks diagonal. Modus posterior akan memberikan penyelesaian persamaan yang baik, dimana nilai α_i akan memaksimalkan fungsi (3.6). Taksiran dari θ_i dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan turunan pertama $\ln p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)$ sama dengan nol.

$$p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}$$

$$\begin{aligned} \ln p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) &= \ln\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} n_i \ln\left(1+e^{\alpha_i}\right) \end{aligned}$$

Berikutnya, akan dicari turunan pertama dari $\ln p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)$ terhadap α_i.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} n_i \ln\left(1+e^{\alpha_i}\right)\right]}{\partial \alpha_i} \\ &= x_i - \frac{1}{2\sigma^2}.2\left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right) - n_i.\frac{1}{1+e^{\alpha_i}}.e^{\alpha_i} \end{aligned}$$

Kemudian, samakan $\dfrac{\partial \ln p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)}{\partial \alpha_i}$ dengan 0, yaitu :

$$x_i - \frac{1}{2\sigma^2}.2\left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right) - n_i.\frac{1}{1+e^{\alpha_i}}.e^{\alpha_i} = 0$$

Jika bentuk ini dikalikan $\frac{1}{n_i}$, maka diperoleh :

$$x_i - \frac{1}{2\sigma^2}.2\left(\alpha_i - \overline{\alpha}\right) - n_i.\frac{1}{1+e^{\alpha_i}}.e^{\alpha_i} = 0 \qquad \times\frac{1}{n_i}$$

$$\frac{x_i}{n_i} - \frac{\left(\alpha_i - \overline{\alpha}\right)}{n_i\sigma^2} - \frac{n_i}{n_i}.\frac{e^{\alpha_i}}{1+e^{\alpha_i}} = 0 \tag{3.8}$$

α yang memenuhi persamaan ini, sebut $\tilde{\alpha}$ (yang merupakan modus posterior). Persamaan (3.8) disusun ulang, sehingga diperoleh :

$$\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1+e^{\tilde{\alpha}_i}} = \frac{x_i}{n_i} - \frac{\left(\tilde{\alpha}_i - \tilde{\overline{\alpha}}\right)}{n_i\sigma^2} \tag{3.9}$$

$\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1+e^{\tilde{\alpha}_i}}$ merupakan bentuk lain dari θ_i. Namun, persamaan (3.9) yang dihasilkan adalah bentuk taksiran yang implisit untuk θ_i karena nilai $\tilde{\alpha}_i$ dan $\tilde{\overline{\alpha}}$ tidak dapat diketahui dari data. Dengan demikian, perlu dicari taksiran α_i yang dapat dihitung langsung dari data.

3.4 Likelihood Modifikasi

Dari hasil sebelumnya, $\tilde{\alpha}_i$ merupakan taksiran untuk α_i. Akan tetapi, dari $\tilde{\alpha}_i$ belum bisa diperoleh taksiran untuk θ_i. Oleh karena itu, melalui $\tilde{\alpha}_i$ akan dicari taksiran untuk α_i yang eksplisit. Hal ini dijembatani oleh pembentukan likelihood modifikasi yang didasarkan pada aproksimasi normal pada posterior (bab 2.3). Pada bab 2.3 telah ditunjukkan bahwa posterior dapat diaproksimasi oleh distribusi normal. Dengan demikian, langkah pertama adalah mencari matriks varians-kovarians untuk mencari aproksimasi dari p.d.f multivariat normal atas posterior. Langkah selanjutnya adalah penyesuaian p.d.f multivariat normal pada posterior dan kemudian pembentukan likelihood dari posterior yang disesuaikan.

3.4.1 Matriks Varians-Kovarians untuk P.d.f Multivariat Normal

Bentuk posterior yang dihasilkan pada persamaan (3.7) merupakan bentuk perkalian likelihood dengan p.d.f multivariat normal. Pada bab 2.3 telah dijelaskan aproksimasi normal pada metode Bayes untuk distribusi posterior. Berdasarkan penjelasan tersebut, persamaan (3.7) dapat diaproksimasi dengan p.d.f multivariat normal, yaitu :

$$f_4(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{\alpha}-\bar{\boldsymbol{\alpha}})'\,\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}-\bar{\boldsymbol{\alpha}})}{2}\right\} \tag{3.10}$$

Dengan :

- $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ adalah matriks mean dari $\boldsymbol{\alpha}$ berukuran $m \times 1$, $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m)'$, dan
- $\mathbf{C}$ adalah matriks varians-kovarians yang diperoleh dari invers matriks informasi.

Dibawah asumsi normal, mean identik dengan modus, sehingga mean $\bar{\alpha}_i$ dapat diaproksimasi oleh modus $\tilde{\alpha}_i$.

Diketahui bahwa matriks varians-kovarians diperoleh dari invers matriks informasi. Oleh karena itu, terlebih dahulu dicari matriks informasinya. Misal matriks informasi dinotasikan dengan I_m. Entri dari matriks I_m, yaitu a_{ij}, diperoleh sebagai berikut :

$$a_{ij} = -\frac{\partial^2 \ln p_1\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)}{\partial \tilde{\alpha}_i \, \partial \tilde{\alpha}_j} = -\frac{\partial^2 \left[\sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} \left(\tilde{\alpha}_i - \tilde{\tilde{\alpha}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} n_i \ln\left(1 + e^{\tilde{\alpha}_i}\right) \right]}{\partial \tilde{\alpha}_i \, \partial \tilde{\alpha}_j}$$

$$= -\frac{\partial \left[x_i - \frac{\left(\tilde{\alpha}_i - \tilde{\tilde{\alpha}}\right)}{\sigma^2} - n_i \cdot \frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1 + e^{\tilde{\alpha}_i}} \right]}{\partial \tilde{\alpha}_j}$$

$$= -\frac{\partial \left[x_i - \frac{\left(\tilde{\alpha}_i - m^{-1} \sum_{k=1}^{m} \tilde{\alpha}_k\right)}{\sigma^2} - n_i \cdot \frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1 + e^{\tilde{\alpha}_i}} \right]}{\partial \tilde{\alpha}_j}$$

$$\textit{untuk } i = j \rightarrow \qquad a_{ii} = -\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(1 - m^{-1}\right) - n_i \cdot \frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{\left(1 + e^{\tilde{\alpha}_i}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - m^{-1}\right) + n_i \cdot \frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{\left(1 + e^{\tilde{\alpha}_i}\right)^2} \qquad (3.11)$$

$$\textit{untuk } i \neq j \rightarrow \qquad a_{ij} = -\frac{1}{\sigma^2} m^{-1} \qquad (3.12)$$

Jika disusun dalam bentuk matriks, maka I_m adalah :

$$I_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2}\left(1-m^{-1}\right)+n_1 \cdot \frac{e^{\tilde{\alpha}_1}}{\left(1+e^{\tilde{\alpha}_1}\right)^2} & -\frac{1}{\sigma^2} m^{-1} & \cdots & -\frac{1}{\sigma^2} m^{-1} \\ -\frac{1}{\sigma^2} m^{-1} & \frac{1}{\sigma^2}\left(1-m^{-1}\right)+n_2 \cdot \frac{e^{\tilde{\alpha}_2}}{\left(1+e^{\tilde{\alpha}_2}\right)^2} & \cdots & -\frac{1}{\sigma^2} m^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\sigma^2} m^{-1} & -\frac{1}{\sigma^2} m^{-1} & \cdots & \frac{1}{\sigma^2}\left(1-m^{-1}\right)+n_m \cdot \frac{e^{\tilde{\alpha}_m}}{\left(1+e^{\tilde{\alpha}_m}\right)^2} \end{bmatrix}$$

Entri dari matriks yang merupakan invers I_m adalah :

$$C_{ij} = \begin{cases} u_i + m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_i^2 & (i = j) \\ m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_i u_j & (i \neq j) \end{cases}$$

Dimana

$$u_i^{-1} = \sigma^{-2} + n_i e^{\tilde{\alpha}_i}\left(1 + e^{\tilde{\alpha}_i}\right)^{-2}$$

dan

$$u = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_k}{m}.$$

Jika C_{ij} disusun dalam bentuk matriks $m \times m$, menjadi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} u_1 + m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_1^2 & m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_1 u_2 & \cdots & m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_1 u_m \\ m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_2 u_1 & u_2 + m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_2^2 & \cdots & m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_2 u_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_m u_1 & m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_m u_2 & \cdots & u_m + m^{-1}\left(\sigma^2 - u\right)^{-1} u_m^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Matriks (3.13) merupakan matriks varians-kovarians pada persamaan (3.10).

3.4.2 Penyesuaian P.d.f Multivariat Normal pada Posterior

P.d.f multivariat normal pada persamaan (3.7) memiliki matriks varians-kovarians yang diagonal. Sedangkan pada (3.13), matriks varians-kovarians yang dihasilkan bukan matriks diagonal. Untuk mendapatkan matriks diagonal, diperlukan adanya penyesuaian. Dalam penyesuaiannya dilakukan dengan mengambil kasus khusus $\sigma^2 \approx \infty$ pada taksirannya yaitu pada persamaan (3.9), dan pada matriks informasinya yaitu persamaan (3.11) dan (3.12). Dengan pemisalan seperti ini, bentuk dari $\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1+e^{\tilde{\alpha}_i}}$ dan matriks informasi adalah sebagai berikut :

1. Taksiran θ_i

$$\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1+e^{\tilde{\alpha}_i}} = \frac{x_i}{n_i} - \frac{\left(\tilde{\alpha}_i - \tilde{\tilde{\alpha}}\right)}{n_i\sigma^2}$$

$$\approx \frac{x_i}{n_i} - \frac{\left(\tilde{\alpha}_i - \tilde{\tilde{\alpha}}\right)}{n_i.\infty}$$

$$\approx \frac{x_i}{n_i} - 0$$

$$\approx \frac{x_i}{n_i}$$

Jika kita selesaikan persamaan di atas, diperoleh

$$\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1+e^{\tilde{\alpha}_i}} = \frac{x_i}{n_i}$$

$$n_i e^{\tilde{\alpha}_i} = x_i + x_i e^{\tilde{\alpha}_i}$$

$$e^{\tilde{\alpha}_i}\left(n_i - x_i\right) = x_i$$

$$e^{\tilde{\alpha}_i} = \frac{x_i}{\left(n_i - x_i\right)}$$

Dengan mengambil logaritma pada kedua ruas, diperoleh :

$$\ln\left(e^{\tilde{\alpha}_i}\right) = \ln\frac{x_i}{\left(n_i - x_i\right)}$$

$$\tilde{\alpha}_i = \ln x_i - \ln\left(n_i - x_i\right)$$

Notasikan $\tilde{\alpha}_i$ dengan l_i, diperoleh :

$$l_i = \ln x_i - \ln\left(n_i - x_i\right) \tag{3.14}$$

2. Matriks informasi
   a. *untuk i = j*,

$$a_{ii} = \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - m^{-1}\right) + n_i.\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{\left(1+e^{\tilde{\alpha}_i}\right)^2}$$

$$\approx \underbrace{\frac{1}{\infty}\left(1 - m^{-1}\right)}_{=0} + n_i.\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{\left(1+e^{\tilde{\alpha}_i}\right)^2}$$

$$\approx n_i.\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{\left(1+e^{\tilde{\alpha}_i}\right)^2} \tag{3.15}$$

Jika diberikan data x_i dan n_i, maka persamaan (3.15) dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai fungsi dalam x_i dan n_i saja, dengan penjelasan sebagai berikut :

- $e^{\tilde{\alpha}_i} = e^{\ln\frac{x_i}{(n_i - x_i)}} = \frac{x_i}{(n_i - x_i)}$
- $1 + e^{\tilde{\alpha}_i} = 1 + \frac{x_i}{(n_i - x_i)} = \frac{n_i - x_i + x_i}{(n_i - x_i)} = \frac{n_i}{(n_i - x_i)}$
- $\frac{1}{1 + e^{\tilde{\alpha}_i}} = \frac{1}{\frac{n_i}{(n_i - x_i)}} = \frac{(n_i - x_i)}{n_i}$

Sehingga persamaan (3.15) menjadi :

$$\begin{aligned} n_i . \frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{\left(1 + e^{\tilde{\alpha}_i}\right)^2} &= n_i . \frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{\left(1 + e^{\tilde{\alpha}_i}\right)} . \frac{1}{1 + e^{\tilde{\alpha}_i}} \\ &= n_i . \frac{x_i}{n_i} . \frac{(n_i - x_i)}{n_i} \\ &= \frac{x_i (n_i - x_i)}{n_i} \end{aligned}$$

sehingga

$$a_{ii} = \frac{x_i (n_i - x_i)}{n_i}.$$

Jika bentuk ini dimisalkan v_i^{-1} dengan

$$v_i^{-1} = \frac{x_i (n_i - x_i)}{n_i},$$

maka :

$$v_i = \frac{n_i}{x_i (n_i - x_i)} \tag{3.16}$$

$$= \frac{n_i - x_i + x_i}{x_i (n_i - x_i)} = \frac{(n_i - x_i)}{x_i (n_i - x_i)} + \frac{x_i}{x_i (n_i - x_i)} = \frac{1}{x_i} + \frac{1}{(n_i - x_i)}$$

b. *untuk* $i \neq j$

$$a_{ij} = -\frac{1}{\sigma^2} m^{-1}$$

$$\approx -\frac{1}{\infty} m^{-1}$$
$$\approx 0$$

Dengan demikian, entri matriks informasi yang baru adalah :

$$a_{ij} = \begin{cases} v_i^{-1} & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

Jika entri-entri ini disusun dalam bentuk matriks informasi, maka matriks informasinya yang baru (telah disesuaikan) adalah :

$$I_m^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{v_m} \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Dengan bentuk I_m^* seperti di atas, diperoleh matriks varians-kovarians yang baru adalah :

$$C^* = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_m \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Perhatikan kembali persamaan (3.10),

$$f_4(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left\{ -\frac{(\boldsymbol{\alpha} - \overline{\boldsymbol{\alpha}})' \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\alpha} - \overline{\boldsymbol{\alpha}})}{2} \right\}$$

dengan $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_m)'$.

Pada persamaan (3.13) $\tilde{\alpha}_i = l_i$.

Karena $\overline{\alpha}_i$ identik dengan $\tilde{\alpha}_i$, sehingga $\tilde{\alpha}_i = l_i = \overline{\alpha}_i$.

Dengan demikian, $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_m)' = (l_1, \ldots, l_m)$.

Dengan penyesuaian yang dilakukan pada persamaan (3.14), (3.17) dan (3.18), persamaan (3.10) dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sqrt{|\mathbf{C}|}}\exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{\alpha}-\bar{\boldsymbol{\alpha}})'\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}-\bar{\boldsymbol{\alpha}})}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sqrt{v_1 v_2\cdots v_m}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\alpha_1-l_1\\ \alpha_2-l_2\\ \vdots\\ \alpha_m-l_m\end{pmatrix}'\begin{bmatrix}\frac{1}{v_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{v_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{v_m}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1-l_1\\ \alpha_2-l_2\\ \vdots\\ \alpha_m-l_m\end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\left(\sqrt{v_1}\sqrt{v_2}\cdots\sqrt{v_m}\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha_1-l_1)^2}{v_1}+\frac{(\alpha_2-l_2)^2}{v_2}+\cdots+\frac{(\alpha_m-l_m)^2}{v_m}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\left(\prod_{i=1}^{m}v_i^{\frac{1}{2}}\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{(\alpha_i-l_i)^2}{v_i}\right]\right\}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\left(\prod_{i=1}^{m}v_i^{-\frac{1}{2}}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}v_i^{-1}(\alpha_i-l_i)^2\right\}$$

Misal

$$B^*=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\left(\prod_{i=1}^{m}v_i^{-\frac{1}{2}}\right),$$

diperoleh aproksimasi pada posterior yang disesuaikan yaitu :

$$p^*\left(\boldsymbol{\alpha}\mid\mathbf{x},\sigma^2\approx\infty\right)=B^*\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}v_i^{-1}(\alpha_i-l_i)^2\right\}\qquad(3.19)$$

3.4.3 Pembentukan Likelihood dari Posterior yang Disesuaikan

Perhatikan kasus $\sigma^2 \approx \infty$ pada distribusi posterior, persamaan (3.6), menjadi :

$$p_2\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2 \approx \infty\right) = B \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right\} \prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i} \tag{3.20}$$

Dimana

$$B = \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - 1\right)!}{\left(x_i - 1\right)!\left(n_i - x_i - 1\right)!} \quad \text{(T.Leonard, 1972).}$$

Dengan membandingkan persamaan (3.20) dengan persamaan (3.3), yaitu :

a. Persamaan (3.20)

$$p_2\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2 \approx \infty\right) = B \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right\} \prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}, B = \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - 1\right)!}{\left(x_i - 1\right)!\left(n_i - x_i - 1\right)!},$$

b. Persamaan (3.3)

$$L\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}\right) = A.\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right\} \prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}, A = \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i\right)!}{\left(x_i\right)!\left(n_i - x_i\right)!}.$$

Terlihat bahwa bentuk fungsional kedua persamaan tersebut adalah sama, kecuali konstantanya. Sehingga dapat diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned} L\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}\right) &= AB^{-1} p_2\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2 \approx \infty\right) \\ &= D p_2\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2 \approx \infty\right) \end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned} D &= \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i\right)!}{\left(x_i\right)!\left(n_i - x_i\right)!} . \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(x_i - 1\right)!\left(n_i - x_i - 1\right)!}{\left(n_i - 1\right)!} \\ &= \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i\right)}{\left(x_i\right)\left(n_i - x_i\right)} \\ &= \prod_{i=1}^{m} n_i x_i^{-1}\left(n_i - x_i\right)^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^{m} v_i . \qquad \text{(berdasarkan (3.16))} \end{aligned}$$

Melalui hubungan di atas, $L(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) = Dp_2(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2 \approx \infty)$ dapat diaproksimasi dengan $L^*(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) = Dp^*(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2 \approx \infty)$, yaitu :

$$
\begin{aligned}
L^*(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) &= Dp^*(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2 \approx \infty) \\
&= DB^* \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}(\alpha_i - l_i)^2\right\} \qquad \text{(berdasarkan (3.19))} \\
&= \prod_{i=1}^{m} v_i \cdot \left[(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\left(\prod_{i=1}^{m} v_i^{-\frac{1}{2}}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}(\alpha_i - l_i)^2\right\}\right] \\
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{m} v_i \cdot \prod_{i=1}^{m} v_i^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}(\alpha_i - l_i)^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
L^*(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}m} \prod_i v_i^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}(\alpha_i - l_i)^2\right\} \qquad (3.21)
$$

Dengan demikian $L^*(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x})$ adalah aproksimasi untuk likelihood pada persamaan (3.3).

Hingga pada tahap ini, telah dilakukan penyesuaian terhadap posterior dan diperoleh likelihood modifikasi. Selanjutnya, kembali pada ke permasalahan utama dari penulisan tugas akhir ini, yaitu mencari taksiran untuk θ_i dengan memaksimalkan fungsi likelihood (ingat kembali bahwa pada tahap awal (bab 3.3, hal 30-31), hal ini sudah dilakukan namun taksiran yang dihasilkan adalah taksiran yang implisit).

3.5 Taksiran α_i Eksplisit

Kembali lagi pada keadaan σ^2 sembarang, akan dicari aproksimasi untuk distribusi posteriornya. Persamaan $p_1(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2)$ pada (3.6) diaproksimasi dengan $p_1^*(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2)$, dimana

$$p_1^*\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) \quad \propto L^*\left(\alpha \mid x\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_i \left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2\right\}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}\left(\alpha_i - l_i\right)^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_i \left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2\right\}$$

$$p_1^*\left(\alpha \mid x, \sigma^2\right) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}\left(\alpha_i - l_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_i \left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2\right\} \qquad (3.22)$$

Dari $p_1^*\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)$, akan diperoleh estimasi α_i.

Estimasi α_i diperoleh dari menyelesaikan turunan pertama $\ln p_1^*\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)$ sama dengan nol, yaitu :

$$\ln p_1^*\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) = \ln\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}\left(\alpha_i - l_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_i \left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2\right\}\right].$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}\left(\alpha_i - l_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_i \left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2$$

Turunan pertama $\ln p_1^*\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)$ yaitu :

$$-\frac{\partial \ln p_1^*\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)}{\partial \alpha_i} = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\sum_i v_i^{-1}\left(\alpha_i - l_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_i \left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)^2\right)}{\partial \alpha_i}$$

$$= v_i^{-1}\left(\alpha_i - l_i\right) + \frac{\left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)}{\sigma^2}$$

$$= v_i^{-1}\alpha_i - v_i^{-1} l_i + \frac{\alpha_i}{\sigma^2} - \frac{\bar{\alpha}}{\sigma^2}$$

Samakan $-\dfrac{\partial \ln p_1^*\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right)}{\partial \alpha_i}$ dengan nol, sehingga diperoleh :

$$v_i^{-1}\alpha_i - v_i^{-1} l_i + \frac{\alpha_i}{\sigma^2} - \frac{\bar{\alpha}}{\sigma^2} = 0$$

$$v_i^{-1}\alpha_i + \frac{\alpha_i}{\sigma^2} \quad = v_i^{-1} l_i + \frac{\bar{\alpha}}{\sigma^2}$$

$$\alpha_i\left(v_i^{-1} + \frac{1}{\sigma^2}\right) \quad = v_i^{-1} l_i + \frac{\bar{\alpha}}{\sigma^2}$$

Katakan $\hat{\alpha}$ adalah α yang memenuhi persamaan ini dan persamaan tersebut disusun ulang, diperoleh :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{v_i^{-1} l_i + \dfrac{\hat{\hat{\alpha}}}{\sigma^2}}{v_i^{-1} + \dfrac{1}{\sigma^2}} = \frac{v_i^{-1} l_i + \hat{\hat{\alpha}} \sigma^{-2}}{v_i^{-1} + \sigma^{-2}}. \tag{3.23}$$

Jika keseluruhan $\hat{\alpha}_i$ dijumlahkan untuk $i = 1, \cdots, m$, maka diperoleh

$$\hat{\hat{\alpha}} = \bar{l},$$

dimana

$$\bar{l} = \sum_i l_i \left(\sigma^2 + v_i\right)^{-1} \Big/ \sum_i \left(\sigma^2 + v_i\right)^{-1}$$ (T. Leonard, 1972).

Sehingga didapat mean posterior

$$E\left(\hat{\alpha}_i \mid \mathbf{x}\right) \approx \frac{v_i^{-1} l_i + \sigma^{-2} \bar{l}}{v_i^{-1} + \sigma^{-2}}. \tag{3.24}$$

Bentuk yang lebih sederhana dari (3.24) yaitu

$$E\left(\hat{\alpha}_i \mid \mathbf{x}\right) \approx \phi_i l_i + \left(1 - \phi_i\right) \bar{l}$$

dimana

$$\phi_i = \frac{\sigma^2}{\left(\sigma^2 + v_i\right)}.$$

Mean posterior $\hat{\alpha}_i$ merupakan estimasi untuk $\tilde{\alpha}_i$.

Jadi, dengan menyelesaikan tahap ini telah diperoleh estimasi untuk $\tilde{\alpha}_i$ yaitu $E\left(\hat{\alpha}_i \mid \mathbf{x}\right)$, yang dapat dihitung langsung dari data yang disajikan dalam x_i dan n_i. Hasil penghitungan $E\left(\hat{\alpha}_i \mid \mathbf{x}\right)$ dapat disubstitusi langsung pada persamaan $\theta_i = \dfrac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1 + e^{\tilde{\alpha}_i}}$, dimana nilai $\tilde{\alpha}_i$ diperoleh dari $E\left(\hat{\alpha}_i \mid \mathbf{x}\right)$.

BAB 4
CONTOH APLIKASI

Dalam bab ini akan diberikan contoh dalam mencari taksiran parameter (θ) pada data binomial dengan menggunakan metode Bayes.

4.1 Sumber Data

Pada contoh aplikasi ini, diberikan data dari 10 kursus pada 1 lembaga tertentu. Tiap kursus diketahui jumlah siswa yang dikategorikan pada jenis kelamin yaitu perempuan dan laki-laki. Jumlah siswa perempuan dinyatakan dengan X_i, dimana X_i merupakan variabel random yang berdistribusi binomial dengan probabilitas θ_i, dan n_i (i=1, . . . , 10), jumlah total siswa pada kursus ke-i. Dengan demikian jumlah siswa laki-laki pada kursus ke-i yaitu $n_i - x_i$. Siswa boleh mengikuti lebih dari satu kursus. Akan tetapi, pemilihan kursus ke-i tidak bergantung pada pemilihan kursus yang lainnya. Sehingga jumlah siswa perempuan yang mengikuti kursus i tidak bergantung pada jumlah siswa perempuan pada kursus lainnya. Dengan demikian antar X_i *independent*. Pada tabel 4.1. akan diberikan input data yaitu berupa jumlah perempuan dan laki-laki.

Tabel 4.1. Klasifikasi siswa bergantung pada jenis kelamin

Kursus (i)	Perempuan (x_i)	Laki-laki ($n_i - x_i$)
1	7	20
2	3	13
3	3	12
4	10	16
5	11	84

6	42	47
7	5	22
8	32	40
9	45	57
10	12	72

Diketahui bahwa variansi populasi yaitu $\sigma^2 = 0.296$.

Asumsi *exchangeable* berlaku karena kursus berasal dari 1 lembaga tertentu. Sehingga tiap kursus memiliki kebijakan yang sama dan tidak ada kebijakan yang mempengaruhi jenis kelamin pada kursus tertentu. Dengan demikian informasi prior yang ada sama untuk setiap kursus. Asumsi *exchangeable* akan tidak berlaku jika urutan kursus mempengaruhi penelitian. Misalnya tahun kelulusan; pada kursus pertama memiliki tingkat kelulusan yang lebih cepat dibandingkan dengan kursus ke 10. Hal ini tentunya urutan pengambilan sampel akan mempengaruhi prior.

4.2 Analisis Data

Dalam contoh analisis ini, ingin diestimasi $\theta_1,...,\theta_{10}$ yang merupakan proporsi siswa perempuan tiap kursus. Diasumsikan siswa boleh mengikuti lebih dari satu kursus, berarti proporsi jumlah siswa perempuan antar kursus memiliki keterkaitan. Salah satu kegunaan dari estimasi ini adalah dapat memperkirakan proporsi perempuan pada suatu kursus pada tahun yang akan datang. Dengan menggunakan bantuan matlab, maka diperoleh hasil taksiran untuk $\theta_1,...,\theta_{10}$. Berikut akan dijelaskan secara singkat taksiran dengan menggunakan metode standar dan taksiran jika menggunakan hasil di bab 3 (taksiran aproksimasi). Taksiran tersebut akan dibandingkan dengan estimasi eksak yaitu proporsi eksaknya.

Jika hanya menggunakan metode standar, yaitu $\hat{\theta}_i = \dfrac{x_i}{n_i}$, maka diperoleh :

Kursus 1 : $\hat{\theta}_1 = \dfrac{x_1}{n_1} = \dfrac{7}{27} = 0.259$

Kursus 2 : $\hat{\theta}_2 = \dfrac{x_2}{n_2} = \dfrac{3}{16} = 0.188$.

Untuk kursus yang lain, $\hat{\theta}_i$ dapat diperoleh dengan cara yang serupa.

Dengan menggunakan hasil penaksiran di pembahasan bab 3 (selanjutnya akan disebut taksiran aproksimasi), akan diperoleh taksiran sebagai berikut :

Kursus 1 : $\hat{\theta}_1 = 0.268$

Kursus 2 : $\hat{\theta}_2 = 0.239$.

Untuk menilai mana taksiran yang lebih baik, antara metode standar dengan penaksiran dari metode Bayes, perlu dibandingkan dengan sesuatu yang eksak. Pada tugas akhir ini, nilai pembanding tersebut diperoleh dengan metode tertentu yang tidak dibahas disini. Selanjutnya nilai pembanding itu disebut estimasi eksak. Diketahui estimasi eksak pada kursus 1 dan kursus 2 adalah sebagai berikut:

Kursus 1 : $\theta_1 = 0.267$,

Kursus 2 : $\theta_2 = 0.236$.

Untuk lebih mudah memahaminya, berikut akan dirangkum dalam tabel yaitu:

Tabel 4.2. Taksiran pada tiap kursus (dalam persentase)

Kursus	% perempuan (metode standar)	Estimasi Eksak	Taksiran aproksimasi	Selisih metode standar dengan estimasi eksak	Selisih taksiran aproksimasi dengan estimasi eksak
1	25.9	26.7	26.8	0.8	0.1
2	18.8	23.6	23.9	4.8	0.3
3	20	24.3	24.5	4.3	0.2
4	38.5	34.5	34.6	4.0	0.1

5	11.6	14.5	14.8	2.9	0.3
6	47.2	44.4	44.4	2.8	0.0
7	18.5	22.3	22.5	3.8	0.2
8	44.4	41.6	41.6	2.8	0.0
9	44.1	42.1	42.1	2.0	0.0
10	14.3	16.9	17.1	2.6	0.2

Pada tabel 4.2., rentang terbesar antara estimasi eksak dengan persentase perempuan yaitu pada kursus 2 : 23.6 - 18.8 = 4.8 dan rentang terkecilnya yaitu pada kursus 1 : 26.7 – 25.9 = 0.8. Sehingga perbedaan antara persentase perempuan dan estimasi eksak bervariasi antara 0.8 sampai 4.8. Sedangkan perbedaan antara estimasi eksak dan taksiran aproksimasi tidak pernah melebihi 0.3 (rentang terbesarnya ada di kursus 2 dan 5) meskipun terdapat entri data sekecil 3. Hal ini menunjukkan bahwa taksiran aproksimasi lebih baik dibandingkan dengan metode standar dalam menaksir $\theta_1,\ldots,\theta_{10}$.

BAB 5
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada tugas akhir ini disimpulkan bahwa untuk menaksir parameter (probabilitas sukses) yang saling berkaitan pada data binomial dengan menggunakan metode Bayes, terlebih dahulu dilakukan transformasi *logit* dari parameter tersebut. Hal ini dilakukan untuk kemudahan dalam penaksiran. Langkah selanjutnya adalah menentukan distribusi prior dan fungsi likelihood dari *logit* parameter tersebut. Pembentukan distribusi posterior dari *logit* parameter diperoleh dari penggabungan informasi dari distribusi prior dan informasi data yang dirangkum dalam fungsi likelihood. Berdasarkan distribusi posterior yang dibentuk, kemudian diperoleh taksiran parameter dengan metode maksimum likelihood. Namun, taksiran parameter yang dihasilkan masih merupakan taksiran yang implisit.

Selanjutnya, untuk memperoleh taksiran yang eksplisit, akan dicari likelihood modifikasi dari posterior yang disesuaikan. Setelah memperoleh likelihood modifikasi, dibentuk kembali posterior dengan likelihood tersebut. Posterior yang terbentuk merupakan aproksimasi dari posterior sebelumnya. Berdasarkan posterior yang dibentuk ini, kemudian diperoleh taksiran dari logit parameter dengan metode maksimum likelihood. Bentuk taksiran ini adalah bentuk yang eksplisit yang dapat dihitung dari data.

5.2 Saran

Tugas akhir ini dapat dilanjutkan untuk taksiran parameter pada data binomial dimana variansi prior tidak diketahui.

DAFTAR PUSTAKA

Carlin, B.P. dan Louis, T.A. (2000). *Bayes and empirical Bayes methods for data analysis* (2nd ed.). Minnesota: CRC Press Company.

Gelman, A., et al. (2000). *Bayesian data analysis*. New York: Chapman & Hall/CRC.

Hogg, R.V. dan Craig, A.T. (1995). *Introduction to mathematical statistics* (5th ed.). New Jersey: Prentice – Hall International.

Hogg, R.V., McKean, J.W., dan Craig, A.T. (2005). *Introduction to mathematical statistics* (6th ed.). New Jersey: Pearson Prentice – Hall.

Leonard, T. (1972). Bayesian method for binomial data. *Biometrika*. 55, 3, 581 – 589.

Mardhiyah, Iffatul. (2009). *Penaksiran parameter model regresi data panel tidak lengkap komponen error dua arah*. Skripsi Sarjana Fakultas MIPA Jurusan Matematika. Depok: Universitas Indonesia.

Ross, Sheldon M. (2002). *A first course in probability* (6th ed). New Jersey: Prentice – Hall.

Walpole, Ronald E. (1992). *Pengantar statistika* (edisi ke-3). Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.

Walsh, B. (2002). *Introduction to Bayesian Analysis*. Paper of Lecture Notes for EEB 596z.

Lampiran 1

Pembuktian pers.(3.6)

Akan dibuktikan bahwa, dengan $p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x},\sigma^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} p\left(\boldsymbol{\alpha},\mu \mid \mathbf{x},\sigma^2\right)d\mu$ mengakibatkan μ dapat diganti dengan $\bar{\alpha}=m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k$.

Bukti :

$$p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x},\sigma^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} p\left(\boldsymbol{\alpha},\mu \mid \mathbf{x},\sigma^2\right)d\mu$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}d\mu$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}d\mu$$

Jika yang tidak mengandung μ dikeluarkan dari dalam integral, maka :

$$=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}\left(1+e^{\alpha_i}\right)^{-n_i}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu\right)^2\right\}d\mu$$

$$=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\alpha_i-\mu\right)^2+(\alpha_2-\mu)^2+\cdots+(\alpha_m-\mu)^2\right]\right\}d\mu$$

$$=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\alpha_1^2+\mu^2-2\alpha_1\mu+\alpha_2^2+\mu^2-2\alpha_2\mu+\cdots+\alpha_m^2-2\alpha_m\mu+\mu^2\right]\right\}d\mu$$

(Lanjutan)

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[m\mu^2-2\mu(\alpha_i+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)+(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_m^2)\right]\right\}d\mu$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[m\mu^2-2\mu\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2\right]\right\}d\mu$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2}{2\sigma^2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\underbrace{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[m\mu^2-2\mu\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right]}_{(1)}\right\}d\mu$$

Jika pada (1) ditambahkan dan dikurangi $\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}+\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}$, maka :

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2}{2\sigma^2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{m\mu^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sigma^2}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}\right\}d\mu$$

(Lanjutan)

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{m\mu^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sigma^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}\right\}d\mu$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[m\mu^2-2\mu\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\frac{2\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m}\right]\right\}d\mu$$

(Lanjutan)

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{\left[m\mu^2-2\mu\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m}\right]}_{(2)}\right\}d\mu$$

Pada (2), dibuat menjadi kuadrat sempurna, sehingga :

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m\sigma^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2}\right\}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\mu\sqrt{m}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sqrt{m}}\right]^2\right\}d\mu}_{(3)} \qquad (*)$$

Misal :

$$y = \frac{\mu\sqrt{m}-\frac{\sum_i \alpha_i}{\sqrt{m}}}{\sigma} = \frac{m\mu-\sum_i \alpha_i}{\sigma\sqrt{m}}$$

$$\mu = \frac{y\sigma\sqrt{m}+\sum_i \alpha_i}{m}$$

(Lanjutan)

$$d\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{m}} dy$$

(3) menjadi : $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mu\sqrt{m} - \frac{\sum_i \alpha_i}{\sqrt{m}} \right]^2 \right\} dy \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} dy$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \sqrt{2\pi}$$

$$= \sigma \sqrt{\frac{2\pi}{m}}$$

sehingga (*) menjadi :

$$p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i - \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)^2}{m\sigma^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)^2}{2m\sigma^2} \right\} \prod_{i=1}^{m} \left(1 + e^{\alpha_i}\right)^{-n_i} \sigma \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \qquad (**)$$

(Lanjutan)

Karena $\sigma\sqrt{\frac{2\pi}{m}}$ adalah konstanta maka bentuk (**) proporsional dengan

$$p_1\left(\boldsymbol{\alpha}\mid \mathbf{x},\sigma^2\right)\propto \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2-2\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)+\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)^2}{m}\right]\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}$$

$$=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_m^2\right)-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\right)+m\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)^2\right]\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}$$

$$=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\alpha_1^2-2\alpha_1\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)+\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)^2\right)+\left(\alpha_2^2-2\alpha\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)+\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)^2\right)+\cdots+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\alpha_m^2-2\alpha_m\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)+\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)^2\right)\right]\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}$$

(Lanjutan)

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\alpha_1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)\right)^2 + \left(\alpha_2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)\right)^2 + \cdots + \left(\alpha_m - \left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)\right)^2\right]\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - \frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{m}\right)^2\right]\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - \overline{\alpha}\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}$$

Jadi, $p_1\left(\boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\boldsymbol{\alpha}, \mu \mid \mathbf{x}, \sigma^2\right) d\mu = \exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i - \overline{\alpha}\right)^2\right\}\prod_{i=1}^{m}(1+e^{\alpha_i})^{-n_i}$.

Sehingga μ dapat diganti dengan $\overline{\alpha} = m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k$.

Lampiran 2

Hasil penghitungan dengan menggunakan matlab

```
clear; clc;
load 'data.mat'

v = 1./x + 1./(n-x)
l = log(x./(n-x))
L_bar = sum(l.*(sigma^2 + v).^(-1))/sum((sigma^2 + v).^(-1))
alpha_bar = (v.^(-1).*l + sigma^(-2)*L_bar)./(v.^(-1) + sigma^(-
2))
alpha = (v.^(-1).*l + sigma^(-2)*L_bar)./(v.^(-1) + sigma^(-2))

theta2 = exp(alpha)./(1+exp(alpha))
```

theta2 =

0.2679
0.2389
0.2454
0.3463
0.1480
0.4449
0.2254
0.4165
0.4208
0.1708