



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**PELABELAN TOTAL BUSUR ANTI AJAIB PADA  
GABUNGAN GRAF DARI KELAS GRAF YANG SAMA  
UNTUK  $d = 1$  DAN  $d = 2$**

**SKRIPSI**

**WIDYA M. NIAGARA  
0606067894**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA  
DEPOK  
JULI 2010**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**PELABELAN TOTAL BUSUR ANTI AJAIB PADA  
GABUNGAN GRAF DARI KELAS GRAF YANG SAMA  
UNTUK  $d = 1$  DAN  $d = 2$**

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains**

**WIDYA M. NIAGARA  
0606067894**

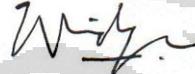
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA  
DEPOK  
JULI 2010**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Widya M. Niagara

NPM : 0606067894

Tanda Tangan : 

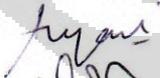
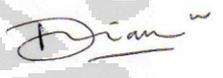
Tanggal : 9 Juli 2010

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :  
Nama : Widya M. Niagara  
NPM : 0606067894  
Program Studi : S1 Matematika  
Judul Skripsi : Pelabelan Total Busur Anti Ajaib pada  
Gabungan Graf dari Kelas Graf yang Sama untuk  
 $d = 1$  dan  $d = 2$

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Kiki A. Sugeng (  )  
Pembimbing : Dra. Denny R. Silaban, M.Kom (  )  
Penguji : Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech (  )  
Penguji : Dhian Widya, S.Si, M.Kom (  )

Ditetapkan di : Depok  
Tanggal : 9 Juli 2010

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena atas rahmat dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Departemen Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

- (1) Ibu Dr. Kiki A. Sugeng selaku dosen pembimbing I sekaligus Pembimbing Akademik, dan Ibu Dra. Denny R. Silaban, M.Kom selaku dosen pembimbing II, yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis selama penelitian dalam penyusunan skripsi ini, serta memberikan nasihat, saran, dan dukungan yang luar biasa;
- (2) Bapak Yudi Satria, MT. selaku ketua Departemen, Ibu Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech selaku sekretaris Departemen, dan Ibu Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah membantu dalam proses pengesahan skripsi ini;
- (3) Seluruh dosen pengajar Departemen Matematika FMIPA UI yang dengan sepenuh hati memberikan ilmu dan bimbingan dalam belajar;
- (4) Papa, Mama, adik-adik penulis, Adit dan Cendy, keluarga Alm. Pakde Supardjo, dan seluruh keluarga besar penulis yang telah memberikan dukungan, doa, dan bantuan baik material maupun moral;
- (5) Teman-teman di Departemen Matematika UI angkatan 2006: Yunita, Farah, Nurgi, Alfa, Mella, Mila, Tami, Nisa, Nadya, Lena, Memed, Puspa, Indah, dll. yang telah banyak membantu dan memberi semangat serta doa kepada penulis selama kuliah maupun saat menyelesaikan skripsi ini, “bisa bertemu dan mengenal kalian semua adalah hal yang menyenangkan dalam hidup ini”;

- (6) Teman-teman di Departemen Matematika angkatan 2004 (Kak Intan), 2005 (Kak Amri, Kak Andre, Kak May), dan 2007 (Stefi, dkk.) yang telah memberi dukungan dan bantuan selama kuliah dan penyusunan skripsi.
- (7) Teman-teman seperjuangan: Elma Rahmalia, Nurul Aisyiyah Sholeh, Siti Aulia, Suryani, Khisnul, Eli, dan teman-teman Asrama UI yang telah memberi bantuan, semangat, dan doa untuk penulis selama kuliah maupun penyusunan skripsi;
- (8) Seseorang yang sejak lama memperhatikan, membuat semangat, dan memberi motivasi kepada penulis; dan
- (9) Seluruh karyawan Departemen Matematika FMIPA UI yang telah memberikan bantuan selama kuliah dan menyusun skripsi.

Akhir kata, semoga Allah SWT membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Penulis berharap skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

**Penulis**

2010

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI  
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Widya M. Niagara  
NPM : 0606067894  
Program Studi : S1 Matematika  
Departemen : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :  
Pelabelan Total Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf dari Kelas Graf yang Sama untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada tanggal : 9 Juli 2010  
Yang menyatakan



( Widya M. Niagara )

## ABSTRAK

Nama : Widya M. Niagara  
Program Studi : Matematika  
Judul : Pelabelan Total Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf dari Kelas Graf yang Sama untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$

Misalkan  $G = (V, E)$  adalah suatu graf berhingga, sederhana dan tak berarah dengan  $n = |V|$  simpul dan  $e = |E|$  busur. Pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib adalah suatu pemetaan bijektif  $\lambda$  dari  $V \cup E$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, n + e\}$ , sedemikian sehingga himpunan dari seluruh bobot busur membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a > 0$  dan beda  $d \geq 0$ . Dalam skripsi ini diberikan konstruksi pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib pada beberapa gabungan graf dari kelas graf yang sama, yaitu gabungan graf lingkaran, gabungan graf matahari dan gabungan graf *dumbbell*, untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ .

Kata Kunci : pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib, gabungan graf, graf lingkaran, graf matahari, graf *dumbbell*.  
xi+63 halaman ; 20 gambar; 1 tabel  
Daftar Pustaka : 10 (1986-2010)

## ABSTRACT

Name : Widya M. Niagara  
Program Study : Mathematics  
Title : An Edge Antimagic Total Labeling on Union Graphs of the Same Classes of Graphs for  $d = 1$  and  $d = 2$

Let  $G = (V, E)$  be a finite, simple and undirected graph with  $n = |V|$  vertices and  $e = |E|$  edges. An  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling is a bijection  $\lambda$  from  $V \cup E$  to the set of consecutive integers  $\{1, 2, \dots, n + e\}$ , such that the weights of the edges form an arithmetic progression with the initial term  $a > 0$  and the common difference  $d \geq 0$ . This *skripsi* gives the construction of such labeling for some disjoint unions of the same classes of graphs, such as union of cycles, union of suns, and union of dumbbell graphs, for  $d = 1$  and  $d = 2$ .

Key Words :  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling, union of graph, cycle graph, sun graph, dumbbell graph.

xi+63 pages ; 20 pictures; 1 table

Bibliography : 10 (1986-2010)

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	ii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS .....	iii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iv
KATA PENGANTAR .....	v
HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH.....	vii
ABSTRAK .....	viii
DAFTAR ISI .....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR TABEL .....	xi
<b>1. PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Permasalahan .....	3
1.3 Tujuan Penulisan.....	4
1.4 Pembatasan Masalah .....	4
1.5 Sistematika Penulisan.....	4
<b>2. LANDASAN TEORI .....</b>	<b>5</b>
2.1 Definisi Graf .....	5
2.2 Kelas-kelas Graf.....	8
2.3 Operasi pada Graf.....	10
2.4 Pelabelan Graf.....	11
2.5 Hasil-hasil yang Diketahui .....	15
<b>3. <math>(a, d)</math>-PTBAA PADA GABUNGAN GRAF DARI KELAS GRAF YANG SAMA UNTUK <math>d = 1</math> DAN <math>d = 2</math>.....</b>	<b>16</b>
3.1 $(a, d)$ -PTBAA pada Gabungan Graf Lingkaran.....	16
3.2 $(a, d)$ -PTBAA pada Gabungan Graf Matahari Isomorfik.....	25
3.3 $(a, d)$ -PTBAA pada Gabungan Graf <i>Dumbbell</i> .....	47
<b>4. KESIMPULAN.....</b>	<b>61</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>63</b>

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.	Graf $G_1$ .....	6
Gambar 2.2.	Contoh subgraf dari $G$ .....	7
Gambar 2.3.	Dua graf yang isomorfik .....	7
Gambar 2.4.	Graf dengan 5 komponen .....	8
Gambar 2.5.	Contoh (a) graf lintasan $P_4$ dan (b) graf lingkaran $C_4$ .....	9
Gambar 2.6.	Graf matahari $C_5 \odot \overline{K}_1$ .....	9
Gambar 2.7.	Graf <i>dumbbell</i> $D_{6,5,4}$ .....	10
Gambar 2.8.	Operasi gabungan pada graf $C_4$ dan $C_3$ .....	11
Gambar 2.9.	(a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan busur, dan (c) Pelabelan total .....	12
Gambar 3.1.	Gabungan 3 graf lingkaran: $C_5 \cup C_4 \cup C_6$ .....	17
Gambar 3.2.	(40, 1)-PTBAA pada gabungan 3 graf lingkaran: (a) $C_6 \cup C_5 \cup C_8$ dan (b) $C_5 \cup C_8 \cup C_6$ .....	21
Gambar 3.3.	(32, 2)-PTBAA pada gabungan 3 graf lingkaran: (a) $C_5 \cup C_7 \cup C_3$ dan (b) $C_7 \cup C_3 \cup C_5$ .....	24
Gambar 3.4.	Gabungan 3 graf matahari isomorfik: $3C_4 \odot \overline{K}_1$ .....	25
Gambar 3.5.	(86, 1)-PTBAA pada gabungan 4 graf matahari isomorfik $4C_6 \odot \overline{K}_1$ .....	36
Gambar 3.6.	(110, 1)-PTBAA pada gabungan 4 graf matahari isomorfik: $4C_6 \odot \overline{K}_1$ .....	37
Gambar 3.7.	(50, 2)-PTBAA pada gabungan 2 graf matahari isomorfik: $2C_8 \odot \overline{K}_1$ .....	45
Gambar 3.8.	(51, 2)-PTBAA pada gabungan 2 graf matahari isomorfik: $2C_8 \odot \overline{K}_1$ .....	46
Gambar 3.9.	Gabungan 2 graf <i>dumbbell</i> : $D_{5,4,5} \cup D_{4,6,4}$ .....	48
Gambar 3.10.	(68, 1)-PTBAA pada $D_{6,3,4} \cup D_{5,5,3} \cup D_{4,5,4}$ .....	55
Gambar 3.11.	(35, 2)-PTBAA pada graf <i>dumbbell</i> $D_{6,7,5}$ .....	59

## DAFTAR TABEL

Tabel 4.1.	Daftar Pelabelan Total ( $a, d$ )-Busur Anti Ajaib .....	61
------------	--	----

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang digunakan sebagai alat bantu untuk memodelkan suatu masalah sehingga lebih mudah dipahami dan diselesaikan. Dasar lahirnya teori ini ditandai dengan munculnya masalah orang yang ingin melewati tujuh jembatan Königsberg dimana setiap jembatan dilewati tepat satu kali. Pada tahun 1736, Euler berhasil memecahkan masalah tersebut dengan cara memodelkannya dalam bentuk suatu graf. Hingga kini teori graf terus mengalami perkembangan karena dapat diaplikasikan ke dalam berbagai bidang kehidupan, seperti penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, jaringan komunikasi, analisis algoritma, peta, struktur organisasi, dan lain-lain.

Menurut Chartrand dan Lesniak (1986), suatu graf  $G = (V(G), E(G))$  dibentuk oleh suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut simpul, dengan suatu himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut simpul-simpul yang berbeda pada  $G$  yang disebut busur. Himpunan simpul pada  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$ , disingkat  $V$ , dan himpunan busur pada  $G$  dinotasikan dengan  $E(G)$ , disingkat  $E$ . Banyaknya anggota dari himpunan simpul dan busur pada  $G$  secara berurutan dinotasikan oleh  $n = |V|$ ,  $n > 0$ , dan  $e = |E|$ .

Salah satu bagian dari teori graf yang menghasilkan banyak penemuan adalah pelabelan graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček pada tahun 1963 (Bača & Miller, 2008). Pelabelan  $\lambda$  pada graf  $G$  merupakan pemetaan dari elemen-elemen pada  $G$  ke suatu himpunan bilangan bulat. Pembahasan dalam skripsi ini adalah pelabelan dengan kodomain berupa himpunan bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan berupa himpunan simpul maka pelabelan  $\lambda$  disebut pelabelan simpul. Jika domain dari pemetaan berupa himpunan busur maka pelabelan  $\lambda$  disebut pelabelan busur. Jika domain dari pemetaan berupa himpunan simpul dan busur maka pelabelan  $\lambda$  disebut pelabelan total.

Bentuk penjumlahan label yang dikenakan pada elemen-elemen  $G$  di bawah pelabelan  $\lambda$  disebut bobot. Bobot dari suatu simpul adalah label simpul ditambah dengan label busur-busur yang hadir pada simpul tersebut. Bobot dari suatu busur adalah label busur ditambah dengan label simpul-simpul yang dihubungkan oleh busur tersebut.

Dalam pelabelan graf dikenal pula istilah pelabelan ajaib dan pelabelan anti ajaib. Konsep pelabelan anti ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990, dimana pelabelan menghasilkan bobot simpul-simpul (atau busur-busur) yang berbeda (Bača & Miller, 2008). Hartsfield dan Ringel (2003) mengeluarkan konjektur bahwa setiap graf yang terhubung, kecuali  $K_2$ , memiliki pelabelan anti ajaib. Kemudian pada tahun 1993 Bodendiek dan Walter mengembangkan hasil tersebut, dimana bobot simpul-simpul (atau busur-busur) yang dihasilkan tidak hanya berbeda tetapi juga membentuk suatu barisan aritmatika (Bača & Miller, 2008). Graf  $G$  dikatakan memiliki suatu pelabelan  $(a, d)$  anti ajaib jika bobot simpul-simpul (atau busur-busur) pada  $G$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a > 0$  dan beda  $d \geq 0$ . Jika  $d = 0$  maka pelabelan disebut pelabelan ajaib.

Simanjuntak, dkk. mendefinisikan pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib (disingkat  $(a, d)$ -PTBAA) untuk graf  $G$  sebagai suatu pemetaan bijektif  $\lambda$  dari  $V \cup E$  ke himpunan bilangan  $\{1, 2, \dots, n + e\}$  sedemikian sehingga himpunan bobot busur,  $\{w_\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) \mid xy \in E\}$ , membentuk barisan aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d$ , dimana  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  adalah bilangan bulat (Gallian, 2009). Suatu pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib pada  $G$  disebut pelabelan total super  $(a, d)$ -busur anti ajaib (disingkat  $(a, d)$ -PTSBA) jika himpunan simpul pada  $G$  diberi label  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Jika penghitungan bobot dilakukan terhadap simpul-simpul di  $G$ , yaitu  $w_\lambda(x) = \lambda(x) + \sum_{y \in A(x)} \lambda(y), \forall x \in V$ , dimana  $A(x)$  adalah himpunan busur yang bertetangga dengan simpul  $x$ , maka pelabelan disebut pelabelan total  $(a, d)$ -simpul anti ajaib (disingkat  $(a, d)$ -PTSAA) dan untuk kasus super disingkat  $(a, d)$ -PTSSAA). Pelabelan yang dibahas dalam skripsi ini adalah  $(a, d)$ -PTBAA.

Sejak definisi  $(a, d)$ -PTBAA diperkenalkan oleh Simanjuntak, dkk. tahun 2000, konstruksi  $(a, d)$ -PTBAA untuk graf-graf terhubung terus mengalami perkembangan. Hal ini mendorong munculnya banyak penemuan konstruksi  $(a, d)$ -PTBAA pada beberapa kelas graf.

Hasil-hasil yang diketahui untuk  $(a, d)$ -PTBAA dari graf terhubung (tunggal) antara lain: graf lingkaran memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d \in \{1, 2, 3, 4\}$  (Bača & Miller, 2008); graf matahari memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d \in \{2, 4\}$  (Sugeng & Silaban, 2008); graf lintasan memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d \in \{1, 2, 3, 4\}$  (Gallian, 2009).

Awalnya pelabelan graf hanya dilakukan pada berbagai jenis graf terhubung (tunggal). Namun pada perkembangan selanjutnya, muncul penelitian mengenai pelabelan untuk gabungan graf yang terdiri dari graf-graf terhubung, baik gabungan graf dari kelas graf yang sama maupun tidak. Gabungan graf dari kelas graf yang sama ini dapat berupa gabungan dari graf-graf yang saling isomorfik maupun gabungan dari graf-graf yang non-isomorfik. Hasil-hasil yang diketahui untuk  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf antara lain: gabungan graf lingkaran isomorfik memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d \in \{0, 1, 2\}$ , gabungan graf lintasan isomorfik memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d \in \{0, 1, 2, 3\}$  (Bača & Miller, 2008). Pada skripsi ini, akan dilakukan penelitian terhadap  $(a, d)$ -PTBAA untuk gabungan graf dari kelas graf yang sama, dimana kelas graf tersebut memiliki lingkaran sebagai subgraf-nya.

## 1.2 Permasalahan

Bagaimanakah konstruksi  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf dari kelas graf yang sama?

### 1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah membuat konstruksi dan rumus umum untuk  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf dari kelas graf yang sama, antara lain gabungan graf lingkaran, gabungan graf matahari, dan gabungan graf *dumbbell* untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ .

### 1.4 Pembatasan Masalah

Penelitian yang dilakukan dalam skripsi ini adalah membuat konstruksi  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$  pada graf-graf berikut:

- Gabungan  $t$  graf lingkaran,
- Gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dengan banyak simpul dalam genap, dan
- Gabungan  $t$  graf *dumbbell* dengan banyak simpul yang sama.

### 1.5 Sistematika Penulisan

Pembahasan skripsi ini, selanjutnya dilakukan dengan sistematika sebagai berikut: Bab 2 berisi landasan teori yang membahas mengenai definisi dan konsep dasar dari suatu graf, kelas-kelas graf yang digunakan, operasi gabungan graf, definisi  $(a, d)$ -PTBAA dan hasil-hasil yang diketahui untuk  $(a, d)$ -PTBAA; Bab 3 berisi pembahasan  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf yang mengandung lingkaran beserta buktinya; dan Bab 4 berisi kesimpulan dan masalah terbuka untuk  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf yang menjadi obyek penelitian.

## BAB 2 LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari suatu graf, kelas-kelas graf yang digunakan, operasi gabungan graf, dan pelabelan graf yang akan digunakan selanjutnya beserta hasil-hasil yang diketahui.

### 2.1 Definisi Graf

Semua definisi yang digunakan pada subbab ini mengacu pada buku yang ditulis oleh Chartrand dan Lesniak (1986) dan West (1996). Menurut Chartrand dan Lesniak (1986), suatu **graf**  $G$  didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut **simpul-simpul** (*vertices*; bentuk tunggal *vertex*) bersama dengan suatu himpunan (mungkin kosong) dari pasangan-pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang berbeda pada  $G$  yang disebut **busur-busur** (*edges*). Himpunan simpul pada  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$ , atau disingkat  $V$ , dan himpunan busur pada  $G$  dinotasikan dengan  $E(G)$ , atau disingkat  $E$ . Sedangkan menurut West (1996), suatu **graf**  $G$  dengan  $n$  simpul dan  $m$  busur terdiri dari suatu himpunan simpul  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan suatu himpunan busur  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , dimana masing-masing busur terdiri atas dua simpul (mungkin sama) yang disebut **titik-titik ujung** (*endpoints*) dari busur.

**Gelung** (*loop*) adalah suatu busur yang memiliki titik-titik ujung yang sama. **Busur-busur ganda** (*multiple edges/parallel edges*) adalah kumpulan busur yang memiliki pasangan titik-titik ujung yang sama. **Graf sederhana** (*simple graph*) adalah suatu graf yang tidak memiliki gelang ataupun busur-busur ganda. **Graf berarah** (*directed graph/digraph*) adalah suatu graf yang terdiri dari himpunan simpul  $V$  dan himpunan busur  $E$ , dimana setiap busur merupakan suatu pasangan terurut simpul-simpul yang disebut **busur berarah** (*arc/directed edge*).

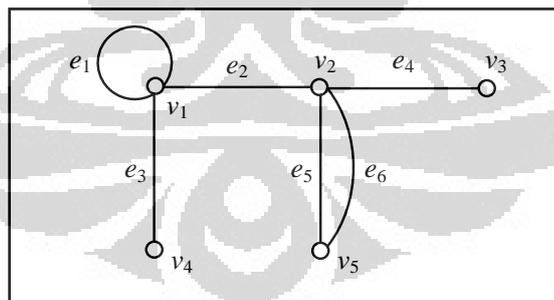
Misalkan  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  adalah himpunan simpul dan busur pada  $G$ . **Banyaknya anggota** (*cardinality*) dari himpunan simpul pada graf  $G$  disebut **order** dari  $G$ , dinotasikan dengan  $n = |V|$ ,  $n > 0$ .

Sedangkan banyaknya anggota dari himpunan busur pada graf  $G$  disebut **ukuran**

(size) dari  $G$ , dinotasikan dengan  $m = E$ . Suatu graf  $G$  dikatakan **berhingga** (*finite*) jika order dan ukuran dari  $G$  adalah berhingga.

Busur  $e = \{u, v\} = uv$  menghubungkan simpul-simpul  $u$  dan  $v$ . Jika  $e = uv$  adalah suatu busur pada graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  disebut **simpul-simpul yang bertetangga** (*adjacent vertices*), sedangkan busur  $e$  dan simpul  $v$  dikatakan saling **hadir** (*incident*), begitu pula dengan busur  $e$  dan simpul  $u$ . Jika  $e_1$  dan  $e_2$  adalah dua busur berbeda di  $G$  yang hadir pada suatu simpul yang sama, maka  $e_1$  dan  $e_2$  disebut **busur-busur yang bertetangga** (*adjacent edges*). **Derajat** (*degree*) dari suatu simpul  $v$  pada graf  $G$  adalah bilangan yang menyatakan banyaknya busur di  $G$  yang hadir pada simpul  $v$ , dinotasikan dengan  $d(v)$ . Suatu simpul di  $G$  dengan derajat 0 ( $d(v) = 0$ ) disebut **simpul terpencil** (*isolated vertex*). Suatu simpul di  $G$  dengan derajat 1 ( $d(v) = 1$ ) disebut **simpul akhir** (*end-vertex*). Suatu graf  $G$  dikatakan **teratur** (*regular*) dengan derajat  $r$ , jika setiap simpul  $v$  di  $G$  memiliki derajat  $r$  ( $d(v) = r$ ).

Biasanya suatu graf digambarkan dalam bentuk diagram, dimana setiap simpul direpresentasikan oleh titik (lingkaran kecil) dan setiap busur  $e = uv$  direpresentasikan oleh ruas garis atau kurva yang menghubungkan titik-titik  $u$  dan  $v$ .

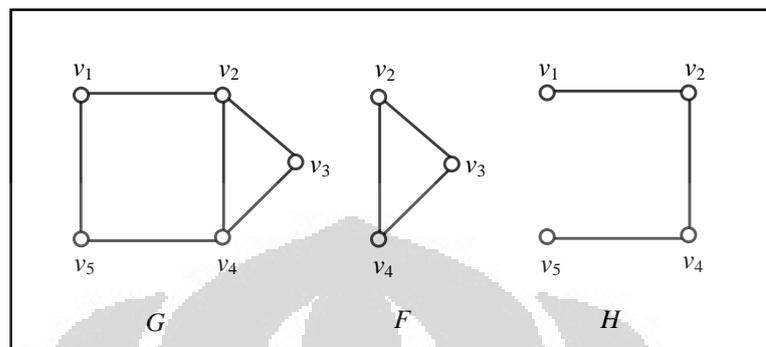


Gambar 2.1. Graf  $G_1$

Pada Gambar 2.1 diberikan contoh suatu graf,  $G_1$ , dengan himpunan simpul  $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan himpunan busur  $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \{v_1v_1, v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_5, v_5v_2\}$ . Graf  $G_1$  ini bukan merupakan graf yang sederhana karena mengandung gelang  $e_1$  dan busur-busur ganda  $\{e_5, e_6\}$ .

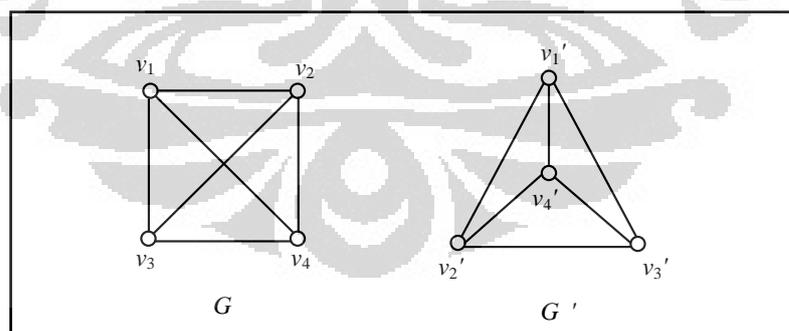
Banyaknya simpul dan busur pada  $G_1$  adalah  $|V| = 5$  dan  $|E| = 6$ . Derajat dari

simpul  $v_2$  ( $d(v_2)$ ) adalah 4 karena busur  $\{e_2, e_4, e_5, e_6\}$  hadir pada simpul  $v_2$ . Oleh karena  $d(v_1) = 4$ ,  $d(v_2) = 4$ ,  $d(v_3) = 1$ ,  $d(v_4) = 1$ , dan  $d(v_5) = 2$ , maka graf  $G_1$  bukan graf yang teratur.



Gambar 2.2. Contoh subgraf dari  $G$

Graf  $H$  adalah **subgraf** dari graf  $G$  (ditulis  $H \subseteq G$ ) jika  $(V)H \subseteq (V)G$  dan  $(E)H \subseteq (E)G$ . Setiap subgraf dari  $G$  dapat diperoleh dengan cara menghapus simpul-simpul dan busur-busur yang ada di  $G$ . Pada Gambar 2.2 dapat dilihat bahwa  $F$  dan  $H$  merupakan subgraf dari  $G$ , dimana  $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\})$ ,  $F = (\{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\})$ , dan  $H = (\{v_1, v_2, v_4, v_5\}, \{v_1v_2, v_2v_4, v_4v_5\})$ . Oleh karena  $(V)F \subseteq (V)G$  dan  $(E)F \subseteq (E)G$ , maka  $F$  adalah subgraf dari  $G$ , begitu pula antara  $H$  dengan  $G$ .

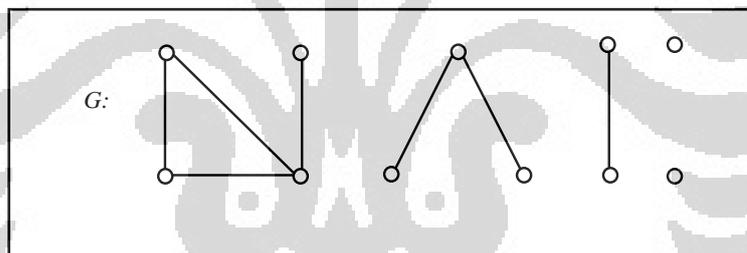


Gambar 2.3. Dua graf yang isomorfik

Dua graf seringkali mempunyai struktur yang sama, dimana graf-graf tersebut hanya berbeda pada cara pemberian label pada simpul-simpul dan busur-busur ataupun pada cara graf-graf tersebut digambarkan. Dua graf  $G$  dan  $G'$  dikatakan **isomorfik** jika terdapat suatu pemetaan bijektif  $\lambda: V(G) \rightarrow V(G')$

sedemikian sehingga  $uv \in E(G)$  jika dan hanya jika  $\lambda(u)\lambda(v) \in E(G')$ . Pada Gambar 2.3 diberikan contoh dua graf yang isomorfik,  $G$  dan  $G'$ .

Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah simpul-simpul (tidak perlu berbeda) pada graf  $G$ . **Jalan** (*walk*)  $u-v$  pada  $G$  adalah suatu barisan berhingga di  $G$  yang terdiri dari simpul dan busur secara berselingan,  $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, v_n = v$ , yang diawali dengan simpul  $u$  dan diakhiri dengan simpul  $v$ , sedemikian sehingga  $e_i = u_{i-1}u_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . **Jejak** (*trail*)  $u-v$  adalah suatu jalan  $u-v$  dimana tidak ada busur yang berulang. **Lintasan** (*path*)  $u-v$  adalah suatu jalan  $u-v$  dimana tidak ada simpul yang berulang. Suatu graf  $G$  dikatakan **terhubung** (*connected*) jika terdapat suatu lintasan  $u-v$  untuk setiap pasang simpul  $u, v \in V$ . Apabila syarat ini tidak terpenuhi maka graf  $G$  dikatakan **tak terhubung** (*disconnected*). **Komponen-komponen** (*components*) dari suatu graf  $G$  adalah subgraf-subgraf terhubung yang maksimal pada  $G$ . Pada Gambar 2.4 diberikan contoh graf  $G$  yang terdiri dari 5 komponen.

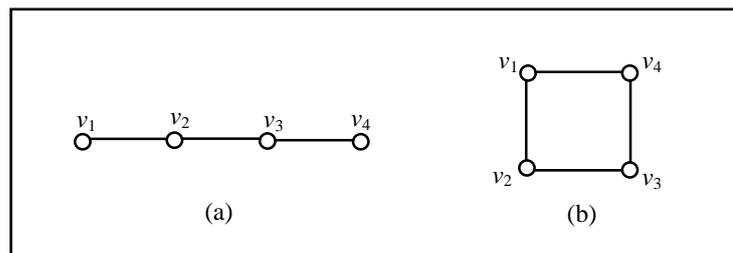


Gambar 2.4. Graf dengan 5 komponen

Graf yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah graf berhingga, sederhana dan tak berarah. Berikut ini adalah definisi dari beberapa kelas graf yang akan digunakan dalam skripsi ini.

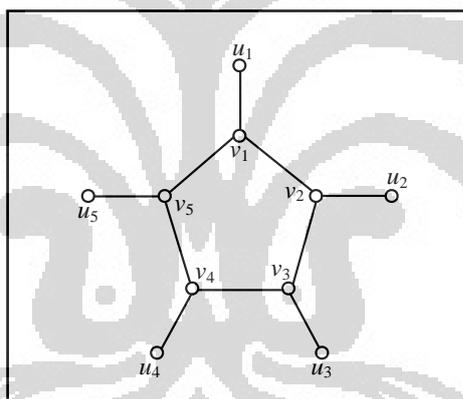
## 2.2 Kelas-kelas Graf

Graf lintasan (*path graph*) adalah suatu graf terhubung dimana setiap simpulnya memiliki derajat 2, kecuali pada kedua simpul ujungnya yang berderajat satu. Graf lintasan dengan  $n$  simpul dinotasikan sebagai  $P_n$  dan memiliki jumlah busur sebanyak  $n - 1$ .



Gambar 2.5. (a) graf lintasan  $P_4$  dan (b) graf lingkaran  $C_4$

Graf lingkaran (*cycle graph*) adalah suatu graf yang diperoleh dari graf lintasan yang kedua simpul ujungnya dihubungkan oleh satu busur. Umumnya, graf lingkaran dengan  $n$  simpul ( $n \geq 3$ ) dinotasikan sebagai  $C_n$ . Jumlah simpul dan busur pada graf lingkaran adalah sama, yaitu  $|V(C_n)| = |E(C_n)| = n$ . Pada Gambar 2.5 diberikan contoh graf lintasan dan graf lingkaran: (a) graf lintasan  $P_4$  dan (b) graf lingkaran  $C_4$ .

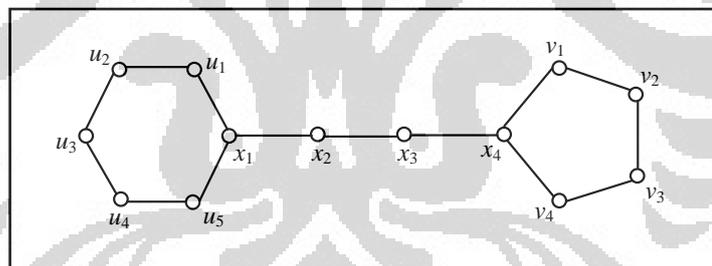


Gambar 2.6. Graf matahari  $C_5 \odot \overline{K}_1$

Graf matahari (*sun graph*) adalah suatu graf yang diperoleh dari graf lingkaran dengan penambahan satu simpul berderajat satu pada tiap simpul  $C_n$ , sedemikian sehingga setiap simpul pada graf lingkaran  $C_n$  memiliki derajat 3. Graf matahari dinotasikan dengan  $C_n \odot \overline{K}_1$ , dimana  $n$  menunjukkan banyak simpul pada graf lingkaran. Himpunan simpul dan himpunan busur dari graf matahari dinyatakan sebagai  $V(C_n \odot \overline{K}_1) = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(C_n \odot \overline{K}_1) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Untuk selanjutnya, simpul graf matahari yang terletak pada graf lingkaran atau  $v_i$ , disebut simpul dalam dan

simpul yang berderajat satu atau  $u_i$ , disebut simpul luar. Pada graf matahari, banyak simpul sama dengan banyak busur, yaitu  $2n$ . Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf matahari dengan 5 simpul dalam.

Graf *dumbbell* adalah graf yang dibentuk dari dua graf lingkaran  $C_m$  dan  $C_n$  yang dihubungkan oleh suatu graf lintasan  $P_k$ , dimana titik-titik ujung dari graf lintasan  $P_k$  adalah salah satu simpul dari masing-masing graf lingkaran (Wang et al., 2010). Graf *dumbbell* dinotasikan dengan  $D_{m,n,k}$ , dimana  $m, n \geq 3$  menyatakan jumlah simpul pada masing-masing graf lingkaran dan  $k \geq 2$  menyatakan jumlah simpul pada graf lintasan. Graf *dumbbell* memiliki simpul sebanyak  $m + n + k - 2$  dan busur sebanyak  $m + n + k - 1$ . Himpunan simpul dan himpunan busur pada graf *dumbbell* dinyatakan sebagai  $V(D_{m,n,k}) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  dan  $E(D_{m,n,k}) = \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m - 2\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 2\} \cup \{x_i x_{i+1} \mid 1 \leq i \leq k - 1\}$ , dimana  $u_i$  dan  $v_i$  adalah simpul pada graf lingkaran, dan  $x_i$  adalah simpul pada graf lintasan. Pada Gambar 2.7 diberikan contoh graf *dumbbell*  $D_{6,5,4}$ .



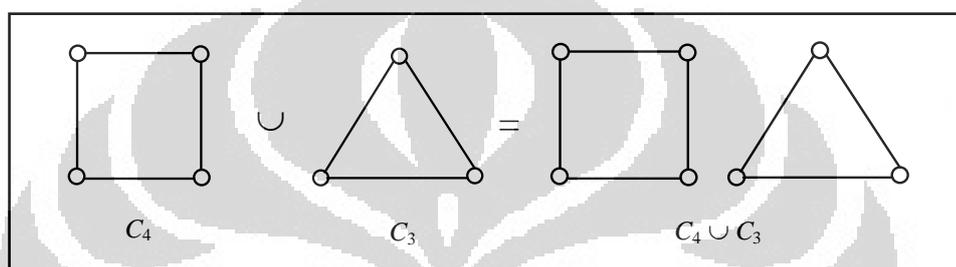
Gambar 2.7. Graf *dumbbell*  $D_{6,5,4}$

Suatu graf yang memiliki tepat satu subgraf lingkaran disebut graf *unicyclic* dan yang memiliki tepat dua subgraf lingkaran disebut graf *bicyclic*. Graf matahari adalah graf *unicyclic*, sedangkan graf *dumbbell* adalah graf *bicyclic*.

### 2.3 Operasi pada Graf

Ada banyak cara dalam mengkombinasikan graf-graf untuk memperoleh graf-graf baru. Diantaranya adalah dengan mendefinisikan operasi-operasi biner pada graf-graf tersebut. Operasi biner pada graf yang akan digunakan pada skripsi

ini adalah **gabungan graf** (*union of graphs*). Misalkan  $G_1$  dan  $G_2$  adalah dua graf terhubung yang memenuhi  $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$  dan  $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$ . Suatu graf  $G$  gabungan graf  $G_1$  dan  $G_2$  (dinotasikan dengan  $G = G_1 \cup G_2$ ) mempunyai himpunan simpul  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan busur  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ . Untuk gabungan  $n$  graf terhubung dinotasikan dengan  $\bigcup_{i=1}^n G_i$ . Jika  $G_1 = G_2 = \dots = G_n = G$ , maka gabungan graf tersebut dapat dinotasikan sebagai  $nG$ . (Chartrand dan Lesniak, 1986). Pada Gambar 2.8 diberikan contoh operasi gabungan pada graf-graf lingkaran,  $C_4$  dan  $C_3$ .



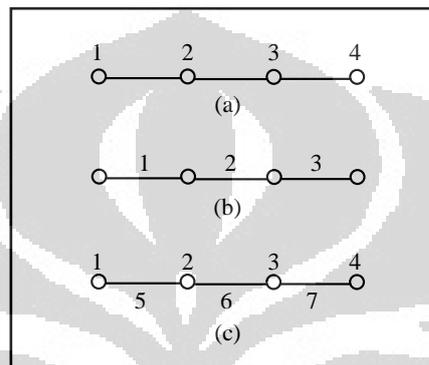
Gambar 2.8. Operasi gabungan pada graf  $C_4$  dan  $C_3$

#### 2.4 Pelabelan Graf

**Pelabelan**  $\lambda$  pada graf  $G$  merupakan pemetaan dari elemen-elemen pada  $G$  ke suatu himpunan bilangan bulat. Bilangan yang dihasilkan dari pemetaan  $\lambda$  disebut **label** (Bača & Miller, 2008). Jika domain dari pemetaan berupa himpunan simpul maka pelabelan  $\lambda$  disebut **pelabelan simpul**. Jika domain dari pemetaan berupa himpunan busur maka pelabelan  $\lambda$  disebut **pelabelan busur**. Jika domain dari pemetaan berupa himpunan simpul dan busur maka pelabelan  $\lambda$  disebut **pelabelan total**. Pada Gambar 2.9 diberikan contoh pelabelan pada graf lintasan: (a) pelabelan simpul, (b) pelabelan busur, dan (c) pelabelan total.

Bentuk penjumlahan label yang dikenakan pada elemen-elemen dari graf  $G$  di bawah pelabelan  $\lambda$  disebut **bobot** (*weight*). Bobot dari suatu simpul diperoleh dengan menjumlahkan label simpul dengan label busur-busur yang hadir pada simpul tersebut (jika ada) untuk setiap simpul di  $G$ . Bobot dari suatu busur diperoleh dengan menjumlahkan label busur dengan label simpul-simpul ujung

pada busur tersebut (jika ada) untuk setiap busur di  $G$ . Secara matematis, **bobot simpul**  $x \in V$  di bawah suatu pelabelan  $\lambda$  yang dinotasikan dengan  $w_\lambda(x)$ , dapat dinyatakan sebagai  $w_\lambda(x) = \lambda(x) + \sum_{y \in A(x)} \lambda(x)$ ,  $\forall x \in V$ , dimana  $A(x)$  adalah himpunan semua simpul yang bertetangga dengan  $x$ . Sedangkan **bobot busur**  $xy \in E$  di bawah suatu pelabelan  $\lambda$  yang dinotasikan dengan  $w_\lambda(xy)$ , dapat dinyatakan sebagai  $w_\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(x)$ ,  $\forall xy \in E$ .



Gambar 2.9. (a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan busur, dan (c) Pelabelan total

Dalam pelabelan graf terdapat istilah pelabelan ajaib dan pelabelan anti ajaib. Suatu pelabelan disebut pelabelan ajaib jika pelabelan tersebut menghasilkan bobot simpul-simpul (atau busur-busur) yang sama. Sebaliknya, jika suatu pelabelan menghasilkan bobot simpul-simpul (atau busur-busur) yang berbeda maka pelabelan ini disebut pelabelan anti ajaib. Pelabelan anti ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990 (Bača & Miller, 2008). Setelah memperkenalkan konsep pelabelan anti ajaib, Hartsfield dan Ringel (2003) mengeluarkan konjektur bahwa setiap graf yang terhubung, kecuali  $K_2$ , memiliki pelabelan anti ajaib. Pada tahun 1993 Bodendiek dan Walter mengembangkan hasil tersebut, dimana bobot simpul-simpul (atau busur-busur) yang dihasilkan tidak hanya berbeda tetapi juga membentuk suatu barisan aritmatika (Bača & Miller, 2008). Dengan kata lain, graf  $G$  dikatakan memiliki suatu **pelabelan  $(a, d)$  anti ajaib** jika himpunan bobot simpul (atau busur) pada  $G$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a > 0$  dan beda  $d \geq 0$ , dimana  $a$  dan  $d$  merupakan bilangan bulat. Jika nilai  $d = 0$  maka pelabelan disebut **pelabelan ajaib**.

Misalkan  $G$  adalah suatu graf dengan  $n$  simpul dan  $e$  busur. Pelabelan yang menjadi obyek penelitian dalam skripsi ini adalah pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib dengan definisi sebagai berikut:

**Definisi 2.1** Misalkan  $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$  adalah suatu pemetaan bijektif pada  $G$ . Jika himpunan bobot busur,  $\{w_\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) \mid xy \in E\}$ , membentuk barisan aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d$ , dengan  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  adalah bilangan bulat, maka pemetaan  $\lambda$  disebut **pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib**. (Bača & Miller, 2008)

Jika pada pemetaan  $\lambda$ , nilai  $V(\lambda) = \{1, 2, \dots, n\}$  maka pelabelan  $\lambda$  disebut **pelabelan total super  $(a, d)$ -busur anti ajaib**. Untuk selanjutnya pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib disingkat menjadi  **$(a, d)$ -PTBAA** dan pelabelan total super  $(a, d)$ -busur anti ajaib disingkat menjadi  **$(a, d)$ -PTSBA**. Berikut ini akan didefinisikan pelabelan dual pada  $G$ .

**Definisi 2.2** Misalkan pemetaan  $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$  adalah  $(a, d)$ -PTBAA pada  $G$ .

Definisikan pelabelan  $\lambda': V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$  sebagai berikut:

$$\lambda'(x) = n + e + 1 - \lambda(x), \forall x \in V \quad (2.1)$$

$$\lambda'(xy) = n + e + 1 - \lambda(xy), \forall xy \in E \quad (2.2)$$

Maka pemetaan  $\lambda'$  disebut **dual** dari  $\lambda$ . (Bača & Miller, 2008)

Hubungan antara  $(a, d)$ -PTBAA dengan pelabelan dual dari  $(a, d)$ -PTBAA diberikan dalam Teorema 2.1.

**Teorema 2.1** Jika  $\lambda$  adalah  $(a, d)$ -PTBAA pada  $G$  maka  $\lambda'$  adalah  $(3n + 3e + 3 - a - (e - 1)d, d)$ -PTBAA pada  $G$ . (Bača & Miller, 2008)

**Bukti.** Diketahui bahwa  $\lambda$  adalah  $(a, d)$ -PTBAA pada  $G$ , maka berdasarkan Definisi 2.2 terdapat pelabelan  $\lambda': V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$  sedemikian sehingga berlaku  $\lambda'(x) = n + e + 1 - \lambda(x), \forall x \in V$  dan  $\lambda'(xy) = n + e + 1 - \lambda(xy), \forall xy \in E$ . Bobot busur pada pelabelan  $\lambda'$  adalah

$$\begin{aligned}
w_{\lambda}(xy) &= \lambda'(x) + \lambda'(xy) + \lambda'(y) \\
&= (n + e + 1 - \lambda(x)) + (n + e + 1 - \lambda(xy)) + \\
&\quad (n + e + 1 - \lambda(y)) \\
&= 3(n + e + 1) - (\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)) \\
&= 3n + 3e + 3 - w_{\lambda}(xy).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Oleh karena  $w_{\lambda}(xy) \in \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d\}$ ,  $\forall xy \in E$ , maka berdasarkan (2.3) diperoleh  $w_{\lambda}(xy) \in \{3n + 3e + 3 - a - (e - 1)d, 3n + 3e + 3 - a - (e - 2)d, \dots, 3n + 3e + 3 - a - d, 3n + 3e + 3 - a\}$  yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $3n + 3e + 3 - a - (e - 1)d > 0$  dan beda  $d \geq 0$ . Jadi,  $\lambda'$  adalah  $(3n + 3e + 3 - a - (e - 1)d, d)$ -PTBAA pada  $G$ . ■

Misalkan suatu graf  $G$  akan diberi label  $(a, d)$ -PTBAA. Dengan menggunakan struktur graf  $G$ , dapat ditentukan batas nilai yang mungkin untuk  $a$  dan  $d$ .

Misalkan pemetaan  $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$  adalah  $(a, d)$ -PTBAA pada  $G$  dengan  $n$  simpul dan  $e$  busur, sedemikian sehingga  $\{w_{\lambda}(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) \mid xy \in E\}$  adalah himpunan bobot busur yang membentuk barisan aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d$ , dengan suku awal  $a > 0$  dan beda  $d \geq 0$ . Bobot busur minimum yang mungkin dari pelabelan ini adalah  $1 + 2 + 3$ , sehingga diperoleh

$$a \geq 6. \tag{2.4}$$

Sedangkan bobot busur maksimum yang mungkin adalah  $(n + e - 2) + (n + e - 1) + (n + e) = 3n + 3e - 3$ , sehingga diperoleh

$$a + (e - 1)d \leq 3n + 3e - 3. \tag{2.5}$$

Dari (2.4) dan (2.5) diperoleh  $6 + (e - 1)d \leq 3n + 3e - 3$ , yang mengakibatkan

$$d \leq \frac{3n + 3e - 9}{e - 1}. \tag{2.6}$$

Pertidaksamaan (2.6) merupakan batas atas dari  $d$  untuk suatu  $(a, d)$ -PTBAA pada  $G$ . Contohnya untuk graf lingkaran  $C_7$  dengan jumlah simpul  $n = 7$  dan jumlah busur  $e = 7$ , maka berdasarkan (2.5) diperoleh  $d \leq 5$ . Dalam hal ini berarti graf

lingkaran  $C_7$  memiliki  $(a, d)$ -PTBAA dengan nilai  $d$  yang mungkin adalah  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

## 2.5 Hasil-hasil yang Diketahui

Berikut ini adalah hasil-hasil yang diketahui dari  $(a, d)$ -PTBAA untuk graf terhubung (tunggal) antara lain: pada graf lingkaran, Simanjuntak, dkk. membuktikan bahwa setiap graf lingkaran  $C_n$ ,  $n \geq 3$ , memiliki  $(2n + 2, 1)$ -PTBAA dan  $(3n + 2, 1)$ -PTBAA;  $C_{2n}$ ,  $n \geq 2$ , memiliki  $(4n + 2, 2)$ -PTBAA dan  $(4n + 3, 2)$ -PTBAA;  $C_{2n+1}$ ,  $n \geq 1$ , memiliki  $(3n + 4, 3)$ -PTBAA dan  $(3n + 5, 3)$ -PTBAA (Gallian, 2009); pada graf matahari, Sugeng dan Silaban (2008) membuktikan bahwa graf matahari  $C_n \odot \overline{K_1}$  memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d \in \{2, 4\}$ ; graf matahari  $C_n \odot \overline{K_1}$  tidak memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $n$  dan  $d$  yang keduanya bernilai ganjil. Sugeng dan Silaban (2008) memberikan masalah terbuka (*open problem*) dari  $(a, d)$ -PTBAA pada graf matahari  $C_n \odot \overline{K_1}$ , untuk  $d \in \{1, 3, 5\}$ .

Hasil yang diketahui dari  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf antara lain: pada gabungan graf lingkaran, Bača, dkk. membuktikan bahwa gabungan  $m$  graf lingkaran isomorfik,  $mC_n$ ,  $n \geq 3$ , memiliki  $(a, d)$ -PTSBAA untuk  $d \in \{0, 1, 2\}$ ; Ngurah, dkk. membuktikan bahwa  $mC_n$ ,  $n \geq 3$ , memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d \in \{1, 2, 3, 4\}$  (Gallian, 2009). Pada penelitian Sugeng dan Silaban diketahui bahwa gabungan dari graf-graf lingkaran memiliki  $(a, 1)$ -PTSSAA (Sugeng & Silaban, 2009). Dengan memanfaatkan struktur dari graf lingkaran, maka dari  $(a, 1)$ -PTSSAA ini dapat juga diperoleh suatu  $(a, 1)$ -PTBAA untuk gabungan graf lingkaran non-isomorfik. Pada bab berikutnya, akan dibahas mengenai hasil penelitian terhadap  $(a, d)$ -PTBAA untuk gabungan graf dari kelas graf yang sama, baik gabungan graf-graf yang saling isomorfik maupun non-isomorfik. Kelas graf yang digunakan adalah graf lingkaran, graf matahari, dan graf *dumbbell*.

### BAB 3

#### **$(a, d)$ -PTBAA PADA GABUNGAN GRAF DARI KELAS GRAF YANG SAMA UNTUK $d = 1$ DAN $d = 2$**

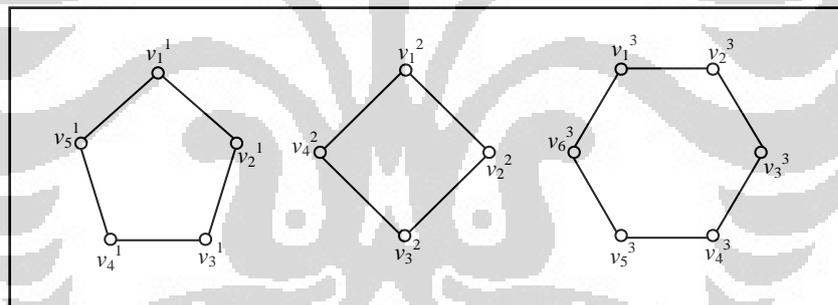
Pada bab ini akan diberikan konstruksi pelabelan total  $(a, d)$ -busur anti ajaib, disingkat  $(a, d)$ -PTBAA, dari beberapa kelas graf, yaitu gabungan graf lingkaran, gabungan graf matahari isomorfik, dan gabungan graf *dumbbell*. Untuk mengkonstruksi pelabelan dan menunjukkan bahwa konstruksi yang diberikan adalah  $(a, d)$ -PTBAA dari graf terkait, maka secara garis besar pembuktian dilakukan dengan alur sebagai berikut: pertama-tama didefinisikan fungsi pelabelan untuk simpul dan busur, selanjutnya ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan yang diberikan adalah fungsi bijektif, dan akhirnya ditunjukkan bahwa semua bobot busur yang diperoleh dari pelabelan tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a > 0$  dan beda  $d \geq 0$ . Sebelumnya, dengan menggunakan pertidaksamaan (2.6) pada subbab 2.4 akan diberikan beberapa nilai  $d$  yang mungkin untuk masing-masing graf dan yang akan dibahas selanjutnya adalah  $d = 1$  dan  $d = 2$ . Untuk nilai  $d$  yang tidak dibahas dalam skripsi ini akan menjadi masalah terbuka dan diberikan pada bab kesimpulan. Pada Definisi 2.2 dan Teorema 2.1 telah diberikan definisi pelabelan dual dari  $(a, d)$ -PTBAA dan hubungan antara suatu  $(a, d)$ -PTBAA dengan dualnya. Menggunakan definisi dan teorema ini, akan diperoleh konstruksi lain untuk setiap graf yang merupakan akibat dari teorema-teorema yang akan diberikan.

Pada subbab 3.1 akan dibahas mengenai hasil yang diperoleh untuk  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf lingkaran dengan  $d = 1$  dan  $d = 2$ .

#### 3.1 $(a, d)$ -PTBAA pada Gabungan Graf Lingkaran

Graf lingkaran merupakan graf terhubung yang teratur dengan derajat 2. Graf ini dinotasikan dengan  $C_n$ , dengan  $n \geq 3$  menyatakan banyaknya simpul. Pada graf lingkaran, banyaknya simpul sama dengan banyaknya busur, yaitu  $|V| = |E| = n$ .

Gabungan  $t$  graf lingkaran,  $t \geq 2$ , adalah graf tak terhubung yang terdiri dari  $t$  komponen dimana setiap komponennya adalah graf lingkaran  $C_{n_j}$ , dengan  $n_j \geq 3$  untuk  $1 \leq j \leq t$ . Graf ini dapat diperoleh dengan melakukan operasi gabungan terhadap dua atau lebih graf lingkaran, dimana banyak simpul dari masing-masing graf lingkaran tidak perlu sama. Gabungan  $t$  graf lingkaran dapat dinotasikan sebagai  $\bigcup_{j=1}^t C_{n_j} = C_{n_1} \cup \dots \cup C_{n_t}$ . Himpunan simpul dan busur dari graf ini dinyatakan oleh  $V\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right) = \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq t\}$  dan  $E\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right) = \{v_i^j v_{i+1}^j \mid 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq t\}$ , dimana indeks dihitung dengan modulo  $n_j$ . Sama halnya pada graf lingkaran, gabungan  $t$  graf lingkaran juga memiliki banyak simpul yang sama dengan banyak busur, yaitu  $\left|V\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right)\right| = \left|E\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right)\right| = \sum_{j=1}^t n_j$ .



Gambar 3.1. Gabungan 3 graf lingkaran:  $C_5 \cup C_4 \cup C_6$

Pada Gambar 3.1 diberikan contoh dari gabungan 3 graf lingkaran:  $C_5 \cup C_4 \cup C_6$ , beserta notasi penamaan simpul. *Superscript*  $j$  pada simpul  $v_i^j$  menyatakan graf lingkaran ke- $j$ ,  $1 \leq j \leq t$ , dari gabungan  $t$  graf lingkaran, sedangkan *subscript*  $i$  menyatakan simpul ke- $i$ ,  $1 \leq i \leq n_j$ , dari masing-masing graf lingkaran.

Pertidaksamaan (2.6) pada subbab 2.4 dapat digunakan untuk menghitung suatu batas atas nilai  $d$  dari  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf lingkaran. Misalkan  $n_j$  dan  $e_j$ ,  $1 \leq j \leq t$ ,  $t \geq 2$ , masing-masing menyatakan banyak simpul dan

busur pada graf lingkaran ke- $j$  pada gabungan  $t$  graf lingkaran, maka berlaku  $n_j = e_j$ . Jika  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$  dan  $e = e_1 + e_2 + \dots + e_t$  adalah banyak simpul dan busur pada gabungan  $t$  graf lingkaran, maka  $n = e$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $n$  dan  $e$  dari gabungan  $t$  graf lingkaran ke pertidaksamaan (2.6) diperoleh hubungan sebagai berikut

$$d \leq \frac{3n+3n-9}{n-1}$$

atau

$$d \leq 5 + \frac{n-4}{n-1}. \quad (3.1)$$

Nilai dari  $\frac{n-4}{n-1}$  pada pertidaksamaan (3.1) selalu bernilai lebih kecil dari satu untuk setiap bilangan bulat  $n \geq 6$  (karena banyak simpul minimum pada graf lingkaran adalah 3 dan banyak graf minimum pada gabungan graf adalah 2), sehingga nilai  $d$  yang mungkin untuk  $(a, d)$ -PTBAA dari gabungan graf lingkaran adalah  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Dalam skripsi ini, pembahasan  $(a, d)$ -PTBAA dari gabungan  $t$  graf lingkaran hanya dilakukan untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ .

Pada Teorema 3.1 diberikan hasil yang diperoleh untuk  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf lingkaran dengan  $d = 1$ .

**Teorema 3.1** Gabungan dari  $t$  graf lingkaran  $C_{n_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ , memiliki  $(2 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 1)$ -PTBAA untuk setiap bilangan bulat  $n_j \geq 3$  dan  $t \geq 2$ .

**Bukti.** Banyaknya simpul dan busur pada gabungan  $t$  graf lingkaran masing-masing adalah  $\sum_{k=1}^t n_k$ . Misalkan  $\lambda_1$  adalah pelabelan yang didefinisikan dari  $V\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right) \cup E\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right)$  ke  $\{1, 2, \dots, 2 \sum_{k=1}^t n_k\}$ .

Untuk  $1 \leq j \leq t$ , label simpul dari gabungan  $t$  graf lingkaran dengan

$$\lambda_1(v_i^j) = \sum_{k=1}^{j-1} n_k + i \quad ; i = 1, 2, \dots, n_j \quad (3.2)$$

dan label busur dengan

$$\lambda_1(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} \sum_{k=1}^t n_k + \sum_{k=j}^t n_k - i & ; i = 1, 2, \dots, n_j - 1 \\ \sum_{k=1}^t n_k + \sum_{k=j}^t n_k & ; i = n_j \end{cases} \quad (3.3)$$

dimana  $\sum_{k=1}^0 n_k = 0$ . Semua label dari simpul dan busur yang diperoleh dengan pelabelan  $\lambda_1$  saling berbeda, yaitu  $\lambda_1(V) = \{1, 2, \dots, \sum_{k=1}^t n_k\}$  dan  $\lambda_1(E) = \{\sum_{k=1}^t n_k + 1, \sum_{k=1}^t n_k + 2, \dots, 2 \sum_{k=1}^t n_k\}$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_1$  merupakan pemetaan bijektif dari himpunan ke  $V\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right) \cup E\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right)$  himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, \sum_{k=1}^t n_k\}$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $\lambda_1$  adalah  $(a, 1)$ -PTBAA dengan  $a = 2 \sum_{k=1}^t n_k + 2$ . Bobot dari sembarang busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  pada gabungan  $t$  graf lingkaran terhadap pelabelan  $\lambda_1$  adalah

$$w_{\lambda_1}(v_i^j v_{i+1}^j) = \lambda_1(v_i^j) + \lambda_1(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_1(v_{i+1}^j)$$

dimana semua indeks dihitung dengan modulo  $n_j$ . Berdasarkan pelabelan  $\lambda_1$ , label dari busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  pada persamaan (3.3) dibagi menjadi 2 bagian. Sehingga penghitungan bobot dari busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dibedakan ke dalam 2 kasus, yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, n_j - 1$  dan  $i = n_j$ .

Pertama, untuk  $i = 1, 2, \dots, n_j - 1$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_1}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_1(v_i^j) + \lambda_1(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_1(v_{i+1}^j) \\ &= (\sum_{k=1}^{j-1} n_k + i) + (\sum_{k=1}^t n_k + \sum_{k=j}^t n_k - i) + \\ &\quad (\sum_{k=1}^{j-1} n_k + i + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} n_k + \sum_{k=1}^t n_k + (\sum_{k=1}^{j-1} n_k + \sum_{k=j}^t n_k) + i + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} n_k + \sum_{k=1}^t n_k + \sum_{k=1}^t n_k + i + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2 \sum_{k=1}^t n_k + i + 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Kedua, untuk  $i = n_j$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_1}(v_{n_j}^j v_{n_j+1}^j) &= \lambda_1(v_{n_j}^j) + \lambda_1(v_{n_j}^j v_{n_j+1}^j) + \lambda_1(v_{n_j+1}^j) \\
 &= \lambda_1(v_{n_j}^j) + \lambda_1(v_{n_j}^j v_1^j) + \lambda_1(v_1^j) \\
 &= (\sum_{k=1}^{j-1} n_k + n_j) + (\sum_{k=1}^t n_k + \sum_{k=j}^t n_k) + \\
 &\quad (\sum_{k=1}^{j-1} n_k + 1) \\
 &= \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2 \sum_{k=1}^t n_k + n_j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dari persamaan (3.4) dan (3.5), untuk  $i = 1, 2, \dots, n_j$  diperoleh bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  terhadap pelabelan  $\lambda_1$ , yaitu

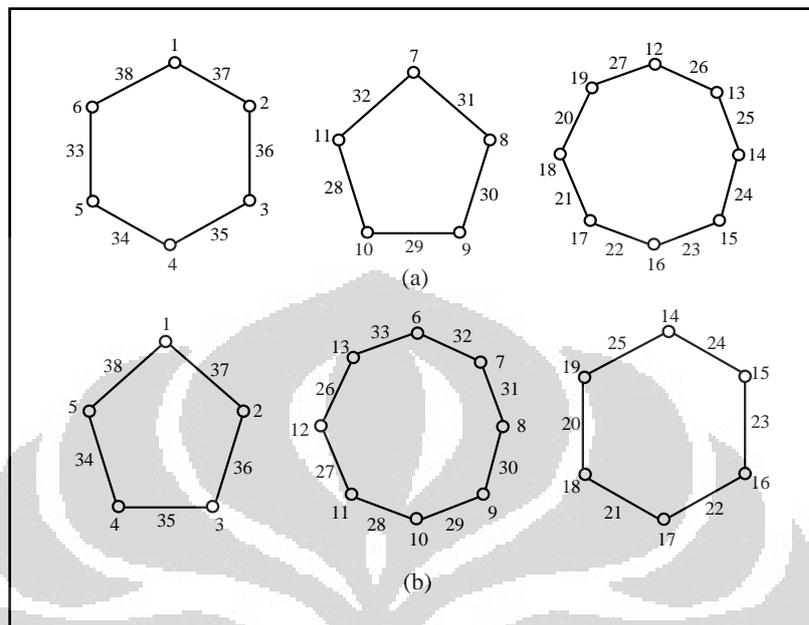
$$w_{\lambda_1}(v_i^j v_{i+1}^j) = \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2 \sum_{k=1}^t n_k + i + 1. \tag{3.6}$$

Himpunan bobot busur pada gabungan  $t$  graf lingkaran dari pelabelan  $\lambda_1$  adalah  $W_1 = \{w_{\lambda_1}(v_i^j v_{i+1}^j) | 1 \leq j \leq t, v_i^j v_{i+1}^j \in E\} = \{2 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 2 \sum_{k=1}^t n_k + 3, \dots, 2 \sum_{k=1}^t n_k + \sum_{k=1}^t n_k, 2 \sum_{k=1}^t n_k + \sum_{k=1}^t n_k + 1\}$ . Dapat dilihat bahwa semua bobot busur di  $W_1$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = 2 \sum_{k=1}^t n_k + 2$  dan beda  $d = 1$ . Bobot busur terkecil  $a$  pada persamaan (3.6) diperoleh pada saat nilai  $i = j = 1$  (karena  $\sum_{k=1}^{j-1} n_k = \sum_{k=1}^0 n_k = 0$ ), yaitu pada busur  $v_1^1 v_2^1$  dengan bobot  $2 \sum_{k=1}^t n_k + 2$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_1$  adalah  $(2 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 1)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf lingkaran. ■

Oleh karena semua label simpul pada gabungan graf lingkaran yang diperoleh dari pelabelan  $\lambda_1$  adalah bilangan bulat terkecil  $1, 2, \dots, \sum_{k=1}^t n_k$ , maka pelabelan  $\lambda_1$  juga merupakan  $(a, 1)$ -PTSBA dengan  $a = 2 \sum_{k=1}^t n_k + 2$ .

Pada Gambar 3.2 diberikan contoh  $(a, 1)$ -PTBAA pada gabungan 3 graf lingkaran:  $C_6 \cup C_5 \cup C_8$  (a) dan  $C_5 \cup C_8 \cup C_6$  (b), dengan nilai  $a = 2 \sum_{k=1}^3 n_k + 2 = 2(6 + 5 + 8) + 2 = 40$ . Dapat dilihat bahwa urutan graf tidak mempengaruhi konstruksi  $(a, 1)$ -PTBAA pada gabungan graf lingkaran. Sehingga baik  $C_6 \cup C_5 \cup C_8$  maupun  $C_5 \cup C_8 \cup C_6$  akan memiliki  $(a, 1)$ -PTBAA dengan nilai  $a$  yang

sama. Sebagai catatan, konstruksi pelabelan yang diberikan pada Teorema 3.1 dapat juga digunakan untuk melabel 1 graf lingkaran dengan mengambil  $t = 1$ .



Gambar 3.2.  $(40, 1)$ -PTBAA pada gabungan 3 graf lingkaran: (a)  $C_6 \cup C_5 \cup C_8$  dan (b)  $C_5 \cup C_8 \cup C_6$

Dengan menggunakan pelabelan dual pada Definisi 2.2 dan Teorema 2.1, dari Teorema 3.1 diperoleh Akibat 3.1.

**Akibat 3.1** Gabungan dari  $t$  graf lingkaran  $C_{n_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ , memiliki  $(3\sum_{k=1}^t n_k + 2, 1)$ -PTBAA untuk setiap bilangan bulat  $n_j \geq 3$  dan  $t \geq 2$ .

Pada bagian selanjutnya, akan dibahas mengenai  $(a, d)$ -PTBAA dari gabungan graf lingkaran untuk  $d = 2$ .

**Teorema 3.2** Gabungan dari  $t$  graf lingkaran  $C_{n_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ , memiliki  $(2\sum_{k=1}^t n_k + 2, 2)$ -PTBAA untuk setiap bilangan bulat  $n_j \geq 3$  dan  $t \geq 2$ .

**Bukti.** Banyaknya simpul dan busur pada gabungan  $t$  graf lingkaran masing-masing adalah  $\sum_{k=1}^t n_k$ . Misalkan  $\lambda_2$  adalah pelabelan yang didefinisikan dari

$$V\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right) \cup E\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right) \text{ ke } \{1, 2, \dots, 2 \sum_{k=1}^t n_k\}.$$

Untuk  $1 \leq j \leq t$ , label simpul dari gabungan  $t$  graf lingkaran dengan

$$\lambda_2(v_i^j) = 2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2i - 1 \quad ; i = 1, 2, \dots, n_j \quad (3.7)$$

dan label busur dengan

$$\lambda_2(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} 2 \sum_{k=j}^t n_k - 2i & ; i = 1, 2, \dots, n_j - 1 \\ 2 \sum_{k=j}^t n_k & ; i = n_j \end{cases} \quad (3.8)$$

dimana  $\sum_{k=1}^0 n_k = 0$ . Semua label dari simpul dan busur yang diperoleh dengan pelabelan  $\lambda_2$  saling berbeda, yaitu  $\lambda_2(V) = \{1, 3, \dots, 2 \sum_{k=1}^t n_k - 1\}$  dan  $\lambda_2(E) = \{2, 4, \dots, 2 \sum_{k=1}^t n_k\}$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_2$  merupakan pemetaan bijektif dari himpunan  $V\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right) \cup E\left(\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}\right)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 2 \sum_{k=1}^t n_k\}$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $\lambda_2$  adalah  $(a, 2)$ -PTBAA dengan  $a = 2 \sum_{k=1}^t n_k + 2$ . Bobot dari sembarang busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  pada gabungan  $t$  graf lingkaran terhadap pelabelan  $\lambda_2$  adalah

$$w_{\lambda_2}(v_i^j v_{i+1}^j) = \lambda_2(v_i^j) + \lambda_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_2(v_{i+1}^j)$$

dimana semua indeks dihitung dengan modulo  $n_j$ . Berdasarkan pelabelan  $\lambda_2$ , label dari busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  pada persamaan (3.8) dibagi menjadi 2 bagian. Sehingga penghitungan bobot dari busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dibedakan ke dalam 2 kasus, yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, n_j - 1$  dan  $i = n_j$ .

Pertama, untuk  $i = 1, 2, \dots, n_j - 1$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_2}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_2(v_i^j) + \lambda_2(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_2(v_{i+1}^j) \\ &= (2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2i - 1) + (2 \sum_{k=j}^t n_k - 2i) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2(i+1) - 1) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + (2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2 \sum_{k=j}^t n_k) + 2i \\
&= 2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2 \sum_{k=1}^t n_k + 2i \\
&= 2(\sum_{k=1}^{j-1} n_k + \sum_{k=1}^t n_k + i). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

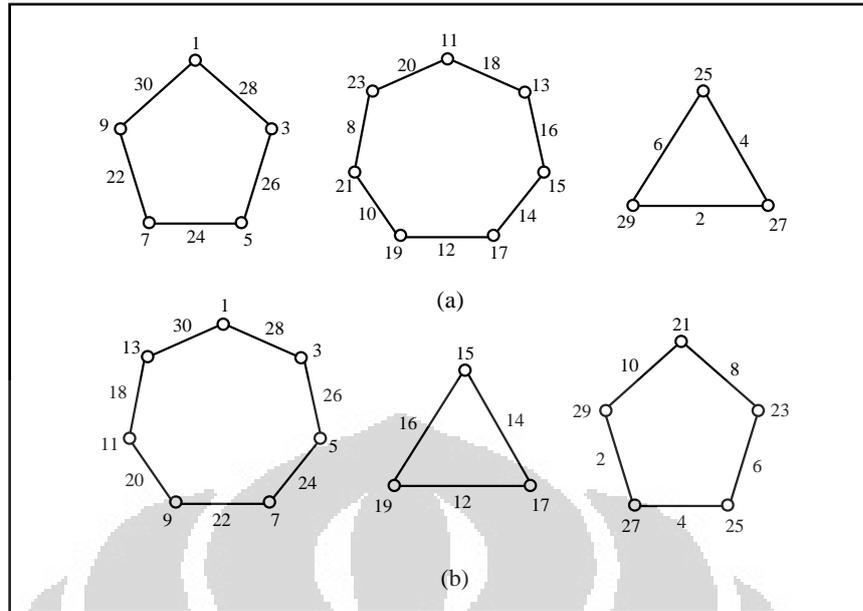
Kedua, untuk  $i = n_j$  diperoleh

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_2}(v_{n_j}^j v_{n_j+1}^j) &= \lambda_2(v_{n_j}^j) + \lambda_2(v_{n_j}^j v_{n_j+1}^j) + \lambda_2(v_{n_j+1}^j) \\
&= \lambda_2(v_{n_j}^j) + \lambda_2(v_{n_j}^j v_1^j) + \lambda_2(v_1^j) \\
&= (2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2n_j - 1) + (2 \sum_{k=j}^t n_k) + \\
&\quad (2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2 - 1) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{j-1} n_k + 2 \sum_{k=1}^t n_k + 2n_j \\
&= 2(\sum_{k=1}^{j-1} n_k + \sum_{k=1}^t n_k + n_j). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.9) dan (3.10), untuk  $i = 1, 2, \dots, n_j$  diperoleh bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  terhadap pelabelan  $\lambda_2$ , yaitu

$$w_{\lambda_2}(v_i^j v_{i+1}^j) = 2(\sum_{k=1}^{j-1} n_k + \sum_{k=1}^t n_k + i). \tag{3.11}$$

Himpunan bobot busur pada gabungan  $t$  graf lingkaran dari pelabelan  $\lambda_2$  adalah  $W_2 = \{w_{\lambda_2}(v_i^j v_{i+1}^j) \mid 1 \leq j \leq t, v_i^j v_{i+1}^j \in E\} = \{2 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 2 \sum_{k=1}^t n_k + 4, \dots, 2 \sum_{k=1}^t n_k + 2 \sum_{k=1}^t n_k\}$ . Dapat dilihat bahwa semua bobot busur di  $W_2$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = 2 \sum_{k=1}^t n_k + 2$  dan beda  $d = 2$ . Nilai dari bobot busur terkecil  $a$  dari gabungan  $t$  graf lingkaran dapat dihitung dari persamaan (3.11) dengan mengambil  $i = j = 1$  (karena  $\sum_{k=1}^{j-1} n_k = \sum_{k=1}^0 n_k = 0$ ), yaitu pada busur  $v_1^1 v_2^1$  dengan bobot  $2 \sum_{k=1}^t n_k + 2$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_2$  adalah  $(2 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 2)$ -PTBAA untuk gabungan  $t$  graf lingkaran. ■



Gambar 3.3.  $(32, 2)$ -PTBAA pada gabungan 3 graf lingkaran: (a)  $C_5 \cup C_7 \cup C_3$  dan (b)  $C_7 \cup C_3 \cup C_5$

Pada Gambar 3.3 diberikan  $(a, 2)$ -PTBAA dari gabungan 3 graf lingkaran:  $C_5 \cup C_7 \cup C_3$  (a) dan  $C_7 \cup C_3 \cup C_5$  (b), dengan nilai  $a = 2 \sum_{k=1}^3 n_k + 2 = 2(5 + 7 + 3) + 2 = 32$ . Dapat dilihat bahwa  $(a, 2)$ -PTBAA pada  $C_5 \cup C_7 \cup C_3$  dan  $C_7 \cup C_3 \cup C_5$  menghasilkan nilai  $a$  yang sama, sehingga urutan graf pada gabungan graf lingkaran tidak mempengaruhi konstruksi  $(a, 2)$ -PTBAA.

Pada Teorema 3.2 telah dibuktikan bahwa gabungan  $t$  graf lingkaran memiliki  $(2 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 2)$ -PTBAA. Selanjutnya dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4 diperoleh Akibat 3.2.

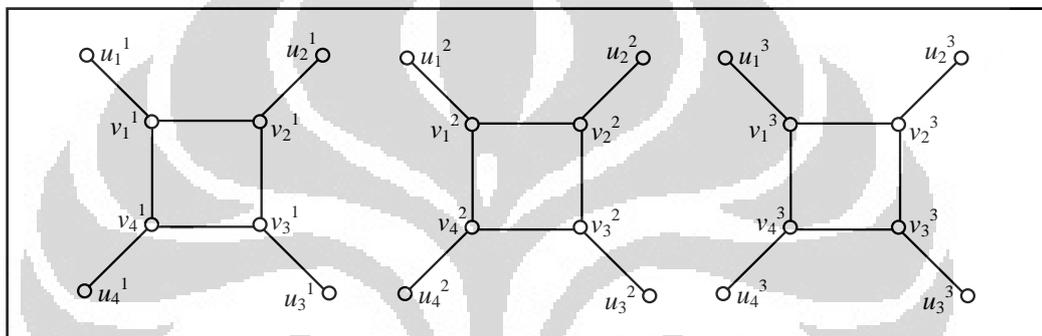
**Akibat 3.2** Gabungan dari  $t$  graf lingkaran  $C_{n_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ , memiliki  $(2 \sum_{k=1}^t n_k + 3, 2)$ -PTBAA untuk setiap bilangan bulat  $n_j \geq 3$  dan  $t \geq 2$ .

Pada subbab selanjutnya akan dibahas mengenai  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf matahari isomorfik untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ . Hasil ini dimotivasi oleh adanya masalah terbuka untuk  $(a, d)$ -PTBAA pada graf matahari (tunggal)  $C_n \odot \overline{K_1}$ ,  $n$  genap, untuk  $d \in \{1, 3, 5\}$  (Sugeng & Silaban, 2008) yang kemudian diperumum ke gabungan  $t$  graf matahari dengan beberapa syarat tertentu.

Universitas Indonesia

### 3.2 $(a, d)$ -PTBAA pada Gabungan Graf Matahari Isomorfik

Graf matahari adalah graf yang diperoleh dari graf lingkaran  $C_n$  dengan penambahan satu simpul berderajat satu pada setiap simpul graf lingkaran. Graf ini dinotasikan dengan  $C_n \odot \overline{K_1}$ , dimana  $n$  menunjukkan banyak simpul yang terdapat pada graf lingkaran. Pada graf matahari, banyak simpul sama dengan banyak busur, yaitu  $|V| = |E| = 2n$ . Untuk selanjutnya, simpul graf matahari yang terletak pada graf lingkaran disebut simpul dalam, sedangkan simpul yang berderajat satu disebut simpul luar.



Gambar 3.4. Gabungan 3 graf matahari isomorfik:  $3C_4 \odot \overline{K_1}$

Gabungan  $t$  graf matahari isomorfik,  $t \geq 2$ , adalah graf tak terhubung yang terdiri dari  $t$  komponen dimana setiap komponennya adalah graf matahari  $C_n \odot \overline{K_1}$ ,  $n \geq 3$ . Graf ini dapat diperoleh dengan melakukan operasi gabungan terhadap dua atau lebih graf matahari dengan banyak simpul dalam yang sama (isomorfik).

Gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dinotasikan sebagai  $tC_n \odot \overline{K_1}$ ,  $n \geq 3$ .

Himpunan simpul dan busur dari graf ini dinyatakan oleh  $V(tC_n \odot \overline{K_1}) =$

$\{v_i^j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t\} \cup \{u_i^j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t\}$  dan  $E(tC_n \odot \overline{K_1}) =$

$\{v_i^j v_{i+1}^j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t\} \cup \{v_i^j u_i^j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t\}$ , dimana  $v_i^j$  dan  $u_i^j$

masing-masing menyatakan simpul-simpul dalam ke- $i$  dan simpul-simpul luar ke- $i$  dari graf matahari ke- $j$ , dengan indeks dihitung menggunakan modulo  $n$ . Sama halnya pada graf matahari, gabungan  $t$  graf matahari isomorfik juga memiliki banyak simpul dan busur yang sama, yaitu  $|V(tC_n \odot \overline{K_1})| = |E(tC_n \odot \overline{K_1})| = 2tn$ .

Pada Gambar 3.4 diberikan contoh gabungan 3 graf matahari yang isomorfik masing-masing dengan 4 simpul dalam beserta notasi penamaan simpul.

Batas atas nilai  $d$  dari  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf matahari isomorfik dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.6) pada subbab 2.4. Misalkan suatu graf matahari memiliki banyak simpul  $n$  dan banyak busur  $e$ , maka berlaku  $e = n$ . Sehingga untuk gabungan  $t$  graf matahari isomorfik akan memiliki banyak simpul dan busur masing-masing sebanyak  $tn$ . Dengan mensubstitusikan nilai ini ke dalam pertidaksamaan (2.6) diperoleh hasil sebagai berikut

$$d \leq \frac{3tn + 3tn - 9}{tn - 1}$$

atau

$$d \leq 5 + \frac{tn - 4}{tn - 1}. \quad (3.12)$$

Untuk setiap bilangan bulat  $n \geq 3$  dan  $t \geq 2$ , dari pertidaksamaan (3.12) diperoleh nilai  $d$  yang mungkin dari  $(a, d)$ -PTBAA untuk gabungan  $t$  graf matahari isomorfik adalah  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Dalam skripsi ini, pembahasan  $(a, d)$ -PTBAA dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik hanya dilakukan untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ . Gabungan graf matahari yang dibahas selanjutnya adalah gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik dengan banyak simpul dalam genap,  $n \geq 4$ .

$(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf matahari isomorfik untuk  $d = 1$  diberikan dalam Teorema 3.3.

**Teorema 3.3** Gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik  $C_n \odot \overline{K_1}$ , memiliki

(i)  $\left(\frac{7tn}{2} + 2, 1\right)$ -PTBAA

(ii)  $\left(\frac{9tn}{2} + 2, 1\right)$ -PTBAA

untuk setiap bilangan genap  $n \geq 4$  dan bilangan bulat  $t \geq 2$ .

**Bukti.** (i) Pertama akan ditunjukkan bahwa gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik atau  $tC_n \odot \bar{K}_1$ ,  $n \geq 4$  genap, memiliki  $(a, 1)$ -PTBAA dengan  $a = \frac{7tn}{2} + 2$ . Banyaknya simpul dan busur pada  $tC_n \odot \bar{K}_1$  masing-masing adalah  $2tn$ . Misalkan  $\lambda_3$  adalah pelabelan yang didefinisikan dari  $V(tC_n \odot \bar{K}_1) \cup E(tC_n \odot \bar{K}_1)$  ke  $\{1, 2, \dots, 4tn\}$ .

Untuk  $1 \leq j \leq t$ , label simpul dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dengan

$$\lambda_3(v_i^j) = \begin{cases} t(i-1) + j & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t\left(\frac{3n}{2} - i\right) + j & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\lambda_3(u_i^j) = t(n+i-1) + j \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.14)$$

dan label busur dengan

$$\lambda_3(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} t(4n-i) - j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ t\left(\frac{5n}{2} + i + 1\right) - j + 1 & ; i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1 \\ 4ti - j + 1 & ; i = n \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\lambda_3(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} t\left(\frac{5n}{2} - i + 1\right) - j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t(2n+i) - j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.16)$$

Label dari semua simpul dan busur yang diperoleh dengan pelabelan  $\lambda_3$  saling berbeda, yaitu  $\lambda_3(V) = \{1, 2, \dots, 2tn\}$  dan  $\lambda_3(E) = \{2tn+1, 2tn+2, \dots, 4tn\}$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_3$  merupakan pemetaan bijektif dari himpunan  $V(tC_n \odot \bar{K}_1) \cup E(tC_n \odot \bar{K}_1)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4tn\}$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa pelabelan  $\lambda_3$  adalah  $\left(\frac{7tn}{2} + 2, 1\right)$ -

PTBAA. Bobot dari sembarang busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dan busur  $v_i^j u_i^j$  pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik,  $tC_n \odot \bar{K}_1$ ,  $n \geq 4$ ,  $t \geq 2$ , terhadap pelabelan  $\lambda_3$  adalah

$$w_{\lambda_3}(v_i^j v_{i+1}^j) = \lambda_3(v_i^j) + \lambda_3(v_{i+1}^j) + \lambda_3(v_i^j v_{i+1}^j) \quad (3.17)$$

dan

$$w_{\lambda_3}(v_i^j u_i^j) = \lambda_3(v_i^j) + \lambda_3(v_i^j u_i^j) + \lambda_3(u_i^j) \quad (3.18)$$

untuk bilangan bulat  $1 \leq j \leq t$  dan  $1 \leq i \leq n$ , dimana indeks dihitung dengan modulo  $n$ . Berdasarkan pelabelan  $\lambda_3$ , dari persamaan (3.13) dan (3.15) terdapat 4 kasus penghitungan bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$ , yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1, i = \frac{n}{2}, i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$ , dan  $i = n$ .

Pertama, untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_3(v_i^j) + \lambda_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_3(v_{i+1}^j) \\ &= [t(i-1) + j] + [t(4n-i) - j + 1] + \\ &\quad [t((i+1)-1) + j] \\ &= t(4n+i-1) + j + 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Kedua, untuk  $i = \frac{n}{2}$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_3(v_i^j) + \lambda_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_3(v_{i+1}^j) \\ &= \lambda_3\left(v_{\frac{n}{2}}^j\right) + \lambda_3\left(v_{\frac{n}{2}}^j v_{\frac{n}{2}+1}^j\right) + \lambda_3\left(v_{\frac{n}{2}+1}^j\right) \\ &= \left[t\left(\frac{n}{2}-1\right) + j\right] + \left[t\left(\frac{5n}{2} + \frac{n}{2} + 1\right) - j + 1\right] + \\ &\quad \left[t\left(\frac{3n}{2} - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right) + j\right] \\ &= t\left(4n + \frac{n}{2} - 1\right) + j + 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Jika pada persamaan (3.19) nilai  $i = \frac{n}{2}$ , maka akan diperoleh persamaan (3.20).

Ketiga, untuk  $i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$  diperoleh

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_3(v_i^j) + \lambda_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_3(v_{i+1}^j) \\
&= \left[ t \left( \frac{3n}{2} - i \right) + j \right] + \left[ t \left( \frac{5n}{2} + i + 1 \right) - j + 1 \right] + \\
&\quad \left[ t \left( \frac{3n}{2} - (i + 1) \right) + j \right] \\
&= t \left( 4n + \frac{3n}{2} - i \right) + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Keempat, untuk  $i = n$  diperoleh

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_3}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_3(v_i^j) + \lambda_3(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_3(v_{i+1}^j) \\
&= \lambda_3(v_n^j) + \lambda_3(v_n^j v_1^j) + \lambda_3(v_1^j) \\
&= \left[ t \left( \frac{3n}{2} - n \right) + j \right] + [4tn - j + 1] + [t(1 - 1) + j] \\
&= t \left( 4n + \frac{n}{2} \right) + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Jika pada persamaan (3.21) nilai  $i = n$ , maka diperoleh persamaan (3.22).

Dari persamaan (3.19) hingga (3.22) diperoleh bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik, yaitu

$$w_{\lambda_3}(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} t(4n + i - 1) + j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t \left( 4n + \frac{3n}{2} - i \right) + j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \tag{3.23}$$

untuk  $1 \leq j \leq t$ , dengan  $n \geq 4$  adalah bilangan genap. Himpunan bobot busur yang diperoleh dari persamaan (3.23) adalah  $\left\{ 4tn + 2, 4tn + 3, \dots, 4tn + \frac{tn}{2}, 4tn + \frac{tn}{2} + 1 \right\}$

untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $\left\{ 4tn + \frac{tn}{2} + 2, 4tn + \frac{tn}{2} + 3, \dots, 4tn + tn, 4tn + tn + 1 \right\}$  untuk

$i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ . Dapat dilihat bahwa masing-masing dari himpunan bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

Berikutnya dalam penghitungan bobot dari busur  $v_i^j u_i^j$ , dengan menggunakan persamaan (3.13), (3.14) dan (3.16) pada persamaan (3.18) maka

terdapat 2 kasus, yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n$ .

Pertama, untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_3}(v_i^j u_i^j) &= \lambda_3(v_i^j) + \lambda_3(v_i^j u_i^j) + \lambda_3(u_i^j) \\ &= [t(i-1) + j] + \left[ t\left(\frac{5n}{2} - i + 1\right) - j + 1 \right] + \\ &\quad [t(n+i-1) + j] \\ &= t\left(4n - \frac{n}{2} + i - 1\right) + j + 1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Kedua, untuk  $i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_3}(v_i^j u_i^j) &= \lambda_3(v_i^j) + \lambda_3(v_i^j u_i^j) + \lambda_3(u_i^j) \\ &= \left[ t\left(\frac{3n}{2} - i\right) + j \right] + [t(2n+i) - j + 1] + [t(n+i-1) + j] \\ &= t\left(4n + \frac{n}{2} + i - 1\right) + j + 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dari kedua persamaan di atas diperoleh bobot busur  $v_i^j u_i^j$  pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik sebagai berikut

$$w_{\lambda_3}(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} t\left(4n - \frac{n}{2} + i - 1\right) + j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t\left(4n + \frac{n}{2} + i - 1\right) + j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.26)$$

untuk  $1 \leq j \leq t$  dan bilangan genap  $n \geq 4$ . Himpunan bobot busur yang diperoleh

dari persamaan (3.26) adalah  $\left\{ 4tn - \frac{tn}{2} + 2, 4tn - \frac{tn}{2} + 3, \dots, 4tn, 4tn + 1 \right\}$  untuk

$i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $\left\{ 4tn + tn + 2, 4tn + tn + 3, \dots, 4tn + \frac{3tn}{2}, 4tn + \frac{3tn}{2} + 1 \right\}$  untuk

$i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n$ . Masing-masing dari himpunan bobot busur  $v_i^j u_i^j$

membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

Jadi, himpunan semua bobot busur pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dari pelabelan  $\lambda_3$  adalah

$$\begin{aligned}
 W_3 &= \left\{ w_{\lambda_3}(v_i^j v_{i+1}^j) \mid v_i^j v_{i+1}^j \in E \right\} \cup \left\{ w_{\lambda_3}(v_i^j u_i^j) \mid v_i^j u_i^j \in E \right\} \\
 &= \left\{ 4tn - \frac{tn}{2} + 2, 4tn - \frac{tn}{2} + 3, \dots, 4tn, 4tn + 1 \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ 4tn + 2, 4tn + 3, \dots, 4tn + \frac{tn}{2}, 4tn + \frac{tn}{2} + 1 \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ 4tn + \frac{tn}{2} + 2, 4tn + \frac{tn}{2} + 3, \dots, 4tn + tn, 4tn + tn + 1 \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ 4tn + tn + 2, 4tn + tn + 3, \dots, 4tn + \frac{3tn}{2}, 4tn + \frac{3tn}{2} + 1 \right\} \\
 &= \left\{ 4tn - \frac{tn}{2} + 2, 4tn - \frac{tn}{2} + 3, \dots, 4tn + \frac{3tn}{2} + 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa seluruh bobot busur tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = 4tn - \frac{tn}{2} + 2 = \frac{7tn}{2} + 2$  dan beda  $d = 1$ . Bobot busur terkecil  $a$  diperoleh pada persamaan (3.26) dengan mengambil nilai  $i = j = 1$ , yaitu busur  $v_1^1 u_1^1$  dengan bobot  $a = \frac{7tn}{2} + 2$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_3$  adalah  $\left( \frac{7tn}{2} + 2, 1 \right)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik, untuk bilangan bulat  $t \geq 2$  dan bilangan genap  $n \geq 4$ .

(ii) Kedua akan ditunjukkan bahwa gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik atau  $tC_n \odot \bar{K}_1$ ,  $n \geq 4$  genap, memiliki  $(a, 1)$ -PTBAA dengan  $a = \frac{9tn}{2} + 2$ .

Banyaknya simpul dan busur pada  $tC_n \odot \bar{K}_1$  masing-masing adalah  $2tn$ . Misalkan  $\lambda_4$  adalah pelabelan yang didefinisikan dari  $V(tC_n \odot \bar{K}_1) \cup E(tC_n \odot \bar{K}_1)$  ke  $\{1, 2, \dots, 4tn\}$ .

Untuk  $1 \leq j \leq t$ , label simpul dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dengan

$$\lambda_4(v_i^j) = \begin{cases} t(n + i - 1) + j & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t\left(\frac{5n}{2} - i\right) + j & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.27)$$

Universitas Indonesia

$$\lambda_4(u_i^j) = t(i-1) + j \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.28)$$

dan label busur dengan

$$\lambda_4(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} t(3n-i) - j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ t\left(\frac{3n}{2} + i + 1\right) - j + 1 & ; i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1 \\ 3ti - j + 1 & ; i = n \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\lambda_4(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} t\left(\frac{7n}{2} - i + 1\right) - j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t(3n+i) - j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.30)$$

Label dari semua simpul dan busur yang diperoleh dengan pelabelan  $\lambda_4$  saling berbeda, yaitu  $\lambda_4(V) = \{1, 2, \dots, 2tn\}$  dan  $\lambda_4(E) = \{2tn+1, 2tn+2, \dots, 4tn\}$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_4$  merupakan pemetaan bijektif dari himpunan  $V(tC_n \odot \overline{K_1}) \cup E(tC_n \odot \overline{K_1})$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4tn\}$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa pelabelan  $\lambda_4$  adalah  $\left(\frac{9tn}{2} + 2, 1\right)$ -

PTBAA. Bobot dari sembarang busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dan busur  $v_i^j u_i^j$  pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik,  $tC_n \odot \overline{K_1}$ ,  $n \geq 4$ ,  $t \geq 2$ , terhadap pelabelan  $\lambda_4$  adalah

$$w_{\lambda_4}(v_i^j v_{i+1}^j) = \lambda_4(v_i^j) + \lambda_4(v_{i+1}^j) + \lambda_4(v_i^j v_{i+1}^j) \quad (3.31)$$

dan

$$w_{\lambda_4}(v_i^j u_i^j) = \lambda_4(v_i^j) + \lambda_4(u_i^j) + \lambda_4(v_i^j u_i^j) \quad (3.32)$$

untuk bilangan bulat  $1 \leq j \leq t$  dan  $1 \leq i \leq n$ , dimana indeks dihitung dengan modulo  $n$ . Oleh karena pembagian label simpul dan busur sama seperti konstruksi  $(a, d)$ -PTBAA pada (i), maka penghitungan bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  terhadap pelabelan  $\lambda_4$  dibagi menjadi 4 kasus, yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1$ ,  $i = \frac{n}{2}$ ,

$i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$ , dan  $i = n$ .

Pertama, untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_4}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_4(v_i^j) + \lambda_4(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_4(v_{i+1}^j) \\
 &= [t(n+i-1) + j] + [t(3n-i) - j + 1] + \\
 &\quad [t(n+(i+1)-1) + j] \\
 &= t(5n+i-1) + j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Kedua, untuk  $i = \frac{n}{2}$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_4}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_4(v_i^j) + \lambda_4(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_4(v_{i+1}^j) \\
 &= \lambda_4\left(v_{\frac{n}{2}}^j\right) + \lambda_4\left(v_{\frac{n}{2}}^j v_{\frac{n}{2}+1}^j\right) + \lambda_4\left(v_{\frac{n}{2}+1}^j\right) \\
 &= \left[t\left(n + \frac{n}{2} - 1\right) + j\right] + \left[t\left(\frac{3n}{2} + \frac{n}{2} + 1\right) - j + 1\right] + \\
 &\quad \left[t\left(\frac{5n}{2} - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right) + j\right] \\
 &= t\left(5n + \frac{n}{2} - 1\right) + j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Persamaan (3.34) dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai  $i = \frac{n}{2}$  ke dalam persamaan (3.33).

Ketiga, untuk  $i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_4}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_4(v_i^j) + \lambda_4(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_4(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[t\left(\frac{5n}{2} - i\right) + j\right] + \left[t\left(\frac{3n}{2} + i + 1\right) - j + 1\right] + \\
 &\quad \left[t\left(\frac{5n}{2} - (i+1)\right) + j\right] \\
 &= t\left(5n + \frac{3n}{2} - i\right) + j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Keempat, untuk  $i = n$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_4}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_4(v_i^j) + \lambda_4(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_4(v_{i+1}^j) \\
 &= \lambda_4(v_n^j) + \lambda_4(v_n^j v_1^j) + \lambda_4(v_1^j) \\
 &= \left[ t \left( \frac{5n}{2} - n \right) + j \right] + [3tn - j + 1] + [t(n + 1 - 1) + j] \\
 &= t \left( 5n + \frac{n}{2} \right) + j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Persamaan (3.36) dapat juga diperoleh dengan mensubstitusikan nilai  $i = n$  ke dalam persamaan (3.35).

Dari persamaan (3.33) hingga (3.36) diperoleh bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik, yaitu

$$w_{\lambda_4}(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} t(5n + i - 1) + j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t \left( 5n + \frac{3n}{2} - i \right) + j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \tag{3.37}$$

untuk  $1 \leq j \leq t$  dan bilangan genap  $n \geq 4$ . Himpunan bobot busur yang diperoleh

dari persamaan (3.37) adalah  $\left\{ 5tn + 2, 5tn + 3, \dots, 5tn + \frac{tn}{2} + 1 \right\}$  untuk

$i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $\left\{ 5tn + \frac{tn}{2} + 2, 5tn + \frac{tn}{2} + 3, \dots, 5tn + tn + 1 \right\}$  untuk

$i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ . Masing-masing dari himpunan bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$

membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

Sedangkan penghitungan bobot busur  $v_i^j u_i^j$  terhadap pelabelan  $\lambda_4$  dibagi menjadi 2 kasus, yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ .

Pertama, untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_4}(v_i^j u_i^j) &= \lambda_4(v_i^j) + \lambda_4(v_i^j u_i^j) + \lambda_4(u_i^j) \\
 &= [t(n + i - 1) + j] + \left[ t \left( \frac{7n}{2} - i + 1 \right) - j + 1 \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [t(i-1) + j] \\
& = t\left(5n - \frac{n}{2} + i - 1\right) + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Kedua, untuk  $i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n$  diperoleh

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_4}(v_i^j u_i^j) & = \lambda_4(v_i^j) + \lambda_4(v_i^j u_i^j) + \lambda_4(u_i^j) \\
& = \left[t\left(\frac{5n}{2} - i\right) + j\right] + [t(3n + i) - j + 1] + [t(i-1) + j] \\
& = t\left(5n + \frac{n}{2} + i - 1\right) + j + 1.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Dari persamaan (3.38) dan (3.39) di atas diperoleh bobot busur  $v_i^j u_i^j$  pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik sebagai berikut

$$w_{\lambda_4}(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} t\left(5n - \frac{n}{2} + i - 1\right) + j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t\left(5n + \frac{n}{2} + i - 1\right) + j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \tag{3.40}$$

untuk  $1 \leq j \leq t$  dan bilangan genap  $n \geq 4$ . Himpunan bobot busur yang diperoleh

dari persamaan (3.40) adalah  $\left\{5tn - \frac{tn}{2} + 2, 5tn - \frac{tn}{2} + 3, \dots, 5tn + 1\right\}$  untuk

$i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $\left\{5tn + tn + 2, 5tn + tn + 3, \dots, 5tn + \frac{3tn}{2} + 1\right\}$  untuk

$i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ . Masing-masing dari himpunan bobot busur  $v_i^j u_i^j$  membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

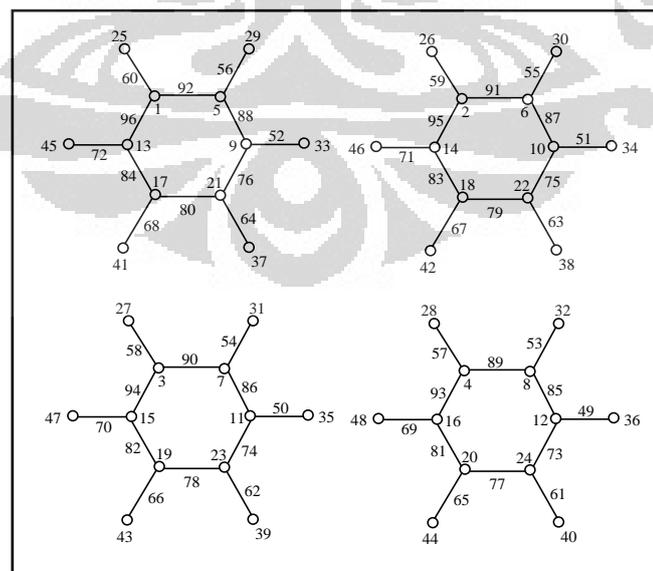
Jadi, himpunan seluruh bobot busur pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dari pelabelan  $\lambda_4$  adalah

$$\begin{aligned}
W_4 & = \left\{w_{\lambda_4}(v_i^j v_{i+1}^j) \mid v_i^j v_{i+1}^j \in E\right\} \cup \left\{w_{\lambda_4}(v_i^j u_i^j) \mid v_i^j u_i^j \in E\right\} \\
& = \left\{5tn - \frac{tn}{2} + 2, 5tn - \frac{tn}{2} + 3, \dots, 5tn + 1\right\} \cup \\
& \quad \left\{5tn + 2, 5tn + 3, \dots, 5tn + \frac{tn}{2} + 1\right\} \cup
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ 5tn + \frac{tn}{2} + 2, 5tn + \frac{tn}{2} + 3, \dots, 5tn + tn + 1 \right\} \cup \\ & \left\{ 5tn + tn + 2, 5tn + tn + 3, \dots, 5tn + \frac{3tn}{2} + 1 \right\} \\ & = \left\{ 5tn - \frac{tn}{2} + 2, 5tn - \frac{tn}{2} + 3, \dots, 5tn + \frac{3tn}{2} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

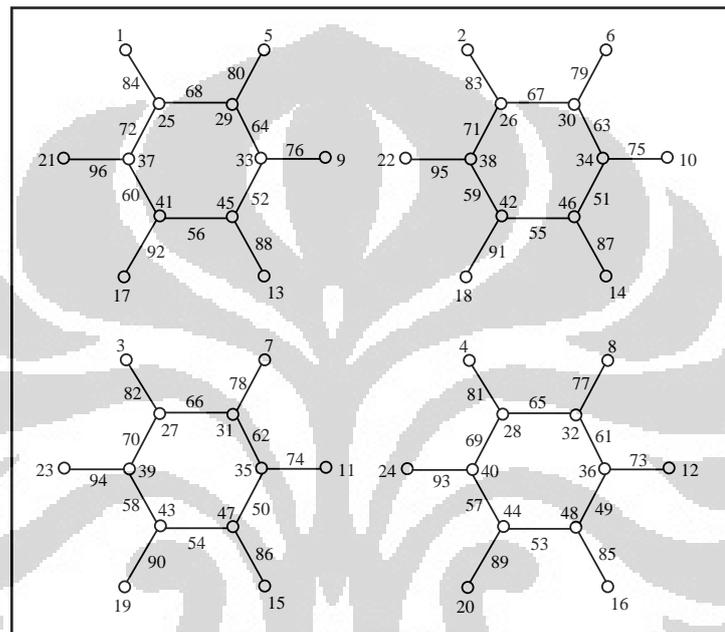
Dapat dilihat bahwa seluruh bobot busur tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = 5tn - \frac{tn}{2} + 2 = \frac{9tn}{2} + 2$  dan beda  $d = 1$ . Bobot busur terkecil  $a$  diperoleh pada persamaan (3.40) dengan mengambil nilai  $i = j = 1$ , yaitu busur  $v_1^1 u_1^1$  dengan bobot  $a = \frac{9tn}{2} + 2$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_4$  adalah  $\left( \frac{9tn}{2} + 2, 1 \right)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik, untuk  $n \geq 4$  genap dan bilangan bulat  $t \geq 2$ . ■

Pelabelan  $\lambda_3$  dan pelabelan  $\lambda_4$  yang telah dijelaskan sebelumnya, merupakan pelabelan-pelabelan yang tidak saling dual, artinya pelabelan  $\lambda_4$  tidak diperoleh dengan melakukan pelabelan dual terhadap pelabelan  $\lambda_3$ , begitu pula sebaliknya. Jadi,  $(a, 1)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dengan  $a = \frac{7tn}{2} + 2$  (i) dan  $a = \frac{9tn}{2} + 2$  (ii) pada Teorema 3.3 adalah dua konstruksi  $(a, 1)$ -PTBAA yang berbeda.



Gambar 3.5.  $(86, 1)$ -PTBAA pada gabungan 4 graf matahari isomorfik:  $4C_6 \odot \overline{K_1}$

Contoh  $(a, 1)$ -PTBAA dari gabungan 4 graf matahari isomorfik,  $4C_6 \odot \overline{K_1}$ , diberikan pada Gambar 3.5 dan Gambar 3.6. Pada Gambar 3.5 diberikan contoh  $(a, 1)$ -PTBAA dengan nilai  $a = \frac{7tn}{2} + 2$ , yaitu  $a = \frac{7(4)(6)}{2} + 2 = 84 + 2 = 86$ . Sedangkan pada Gambar 3.6 diberikan contoh  $(a, 1)$ -PTBAA dengan nilai  $a = \frac{9tn}{2} + 2$ , yaitu  $a = \frac{9(4)(6)}{2} + 2 = 108 + 2 = 110$ .



Gambar 3.6.  $(110, 1)$ -PTBAA pada gabungan 4 graf matahari isomorfik:  $4C_6 \odot \overline{K_1}$

Label dari semua simpul pada gabungan graf matahari isomorfik yang dihasilkan oleh pelabelan  $\lambda_3$  dan pelabelan  $\lambda_4$  selalu berupa bilangan bulat terkecil, yaitu  $1, 2, \dots, 2tn$ , sehingga kedua pelabelan ini disebut juga sebagai  $(a, 1)$ -PTSBA. Sebagai catatan, konstruksi pelabelan yang diberikan pada Teorema 3.3 dapat juga digunakan untuk melabel 1 graf matahari dengan mengambil nilai  $t = 1$ .

Selanjutnya, dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4 dari Teorema 3.3 diperoleh Akibat 3.3.

**Akibat 3.3** Gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik  $C_n \odot \overline{K_1}$ , memiliki

$$(i) \quad \left( \frac{13tn}{2} + 2, 1 \right)\text{-PTBAA}$$

$$(ii) \quad \left( \frac{11tn}{2} + 2, 1 \right)\text{-PTBAA}$$

untuk setiap bilangan genap  $n \geq 4$  dan bilangan bulat  $t \geq 2$ .

Pada bagian berikutnya akan dibahas mengenai  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dengan banyak simpul dalam genap untuk  $d = 2$ .

**Teorema 3.4** Gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik  $C_n \odot \overline{K_1}$ , memiliki

$$(i) \quad (3tn + 2, 2)\text{-PTBAA}$$

$$(ii) \quad (3tn + 3, 2)\text{-PTBAA}$$

untuk setiap bilangan genap  $n \geq 4$  dan bilangan bulat  $t \geq 2$ .

**Bukti.** (i) Pertama akan ditunjukkan bahwa gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik,  $tC_n \odot \overline{K_1}$ ,  $n \geq 4$  genap, memiliki  $(a, 2)$ -PTBAA dengan  $a = 3tn + 2$ .

Banyaknya simpul dan busur pada  $tC_n \odot \overline{K_1}$  masing-masing adalah  $2tn$ . Misalkan  $\lambda_5$  adalah pelabelan yang didefinisikan dari  $V(tC_n \odot \overline{K_1}) \cup E(tC_n \odot \overline{K_1})$  ke  $\{1, 2, \dots, 4tn\}$ .

Untuk  $1 \leq j \leq t$ , label simpul dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dengan

$$\lambda_5(v_i^j) = \begin{cases} 2t(i-1) + 2j - 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ 2t\left(\frac{3n}{2} - i\right) + 2j - 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\lambda_5(u_i^j) = 2t(n+i-1) + 2j - 1 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.42)$$

dan label busur dengan

$$\lambda_5(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} 2t(2n-i) - 2j + 2 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ 2t\left(\frac{n}{2} + i + 1\right) - 2j + 2 & ; i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1 \\ 4ti - 2j + 2 & ; i = n \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\lambda_5(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} 2t \left( \frac{n}{2} - i + 1 \right) - 2j + 2 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ 2ti - 2j + 2 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.44)$$

Dapat ditunjukkan bahwa label dari simpul-simpul dan busur-busur yang diperoleh dengan pelabelan  $\lambda_5$  adalah bilangan-bilangan bulat positif yang berbeda, yaitu  $\lambda_5(V) = \{1, 3, 5, \dots, 4tn - 1\}$  dan  $\lambda_5(E) = \{2, 4, 6, \dots, 4tn\}$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_5$  merupakan pemetaan bijektif dari himpunan  $V(tC_n \odot \overline{K}_1) \cup E(tC_n \odot \overline{K}_1)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4tn\}$ .

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa pelabelan  $\lambda_5$  adalah  $(3tn + 2, 2)$ -PTBAA. Bobot dari sembarang busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dan busur  $v_i^j u_i^j$  pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik,  $tC_n \odot \overline{K}_1$ ,  $t \geq 2$ ,  $n \geq 4$ , terhadap pelabelan  $\lambda_5$  adalah

$$w_{\lambda_5}(v_i^j v_{i+1}^j) = \lambda_5(v_i^j) + \lambda_5(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_5(v_{i+1}^j) \quad (3.45)$$

dan

$$w_{\lambda_5}(v_i^j u_i^j) = \lambda_5(v_i^j) + \lambda_5(v_i^j u_i^j) + \lambda_5(u_i^j) \quad (3.46)$$

untuk bilangan bulat  $1 \leq j \leq t$  dan  $1 \leq i \leq n$ , dimana indeks dihitung dengan modulo  $n$ . Berdasarkan pelabelan  $\lambda_5$ , dari persamaan (3.41) dan (3.43) terdapat 4 kasus penghitungan bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$ , yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$ ,  $i = \frac{n}{2}$ ,  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1$ , dan  $i = n$ .

Pertama, untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_5}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_5(v_i^j) + \lambda_5(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_5(v_{i+1}^j) \\ &= [2t(i - 1) + 2j - 1] + [2t(2n - i) - 2j + 2] + \\ &\quad [2t((i + 1) - 1) + 2j - 1] \\ &= t(4n + 2i - 2) + 2j. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Kedua, untuk  $i = \frac{n}{2}$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_5}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_5(v_i^j) + \lambda_5(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_5(v_{i+1}^j) \\
 &= \lambda_5\left(v_{\frac{n}{2}}^j\right) + \lambda_5\left(v_{\frac{n}{2}}^j v_{\frac{n}{2}+1}^j\right) + \lambda_5\left(v_{\frac{n}{2}+1}^j\right) \\
 &= \left[2t\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 2j - 1\right] + \left[2t\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1\right) - 2j + 2\right] + \\
 &\quad \left[2t\left(\frac{3n}{2} - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right) + 2j - 1\right] \\
 &= t(4n + n - 2) + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Ketiga, untuk  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n - 1$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_5}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_5(v_i^j) + \lambda_5(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_5(v_{i+1}^j) \\
 &= \left[2t\left(\frac{3n}{2} - i\right) + 2j - 1\right] + \left[2t\left(\frac{n}{2} + i + 1\right) - 2j + 2\right] + \\
 &\quad \left[2t\left(\frac{3n}{2} - (i + 1)\right) + 2j - 1\right] \\
 &= t(4n + 3n - 2i) + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Keempat, untuk  $i = n$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_5}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_5(v_i^j) + \lambda_5(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_5(v_{i+1}^j) \\
 &= \lambda_5(v_n^j) + \lambda_5(v_n^j v_1^j) + \lambda_5(v_1^j) \\
 &= \left[2t\left(\frac{3n}{2} - n\right) + 2j - 1\right] + [4tn - 2j + 2] + \\
 &\quad [2t(1 - 1) + 2j - 1] \\
 &= t(4n + n) + 2j.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik yang diperoleh dari persamaan (3.47) sampai (3.50) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$w_{\lambda_5}(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} t(4n + 2i - 2) + 2j & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t(4n + 3n - 2i) + 2j & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \tag{3.51}$$

untuk  $1 \leq j \leq t, n \geq 4$ . Himpunan bobot busur yang diperoleh dari persamaan (3.51) adalah  $\{4tn + 2, 4tn + 4, \dots, 4tn + tn - 2, 4tn + tn\}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $\{4tn + tn + 2, 4tn + tn + 4, \dots, 4tn + 2tn - 2, 4tn + 2tn\}$  untuk  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ . Masing-masing dari himpunan bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  membentuk barisan aritmatika dengan beda 2.

Kemudian dalam menghitung bobot busur  $v_i^j u_i^j$ , dengan mensubstitusikan persamaan (3.41), (3.42) dan (3.44) ke dalam persamaan (3.46) dibagi menjadi 2 kasus, yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ .

Pertama, untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_5}(v_i^j u_i^j) &= \lambda_5(v_i^j) + \lambda_5(v_i^j u_i^j) + \lambda_5(u_i^j) \\ &= [2t(i-1) + 2j - 1] + \left[2t\left(\frac{n}{2} - i + 1\right) - 2j + 2\right] + \\ &\quad [2t(n+i-1) + 2j - 1] \\ &= t(4n - n + 2i - 2) + 2j. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Kedua, untuk  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$  diperoleh

$$\begin{aligned} w_{\lambda_5}(v_i^j u_i^j) &= \lambda_5(v_i^j) + \lambda_5(v_i^j u_i^j) + \lambda_5(u_i^j) \\ &= \left[2t\left(\frac{3n}{2} - i\right) + 2j - 1\right] + [2ti - 2j + 2] + \\ &\quad [2t(n+i-1) + 2j - 1] \\ &= t(4n + n + 2i - 2) + 2j. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dari persamaan (3.52) dan (3.53) diperoleh bobot busur  $v_i^j u_i^j$  pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik berikut

$$w_{\lambda_5}(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} t(4n - n + 2i - 2) + 2j & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t(4n + n + 2i - 2) + 2j & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.54)$$

dimana  $1 \leq j \leq t, n \geq 4$ . Himpunan bobot busur yang dihasilkan dari persamaan (3.54) adalah  $\{4tn - tn + 2, 4tn - tn + 4, \dots, 4tn - 2, 4tn\}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $\{4tn + 2tn + 2, 4tn + 2tn + 4, \dots, 4tn + 3n - 2, 4tn + 3n\}$  untuk  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ . Masing-masing dari himpunan bobot busur  $v_i^j u_i^j$  membentuk barisan aritmatika dengan beda 2.

Jadi, himpunan seluruh bobot busur pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dari pelabelan  $\lambda_5$  adalah

$$\begin{aligned} W_5 &= \left\{ w_{\lambda_5} \left( v_i^j v_{i+1}^j \right) \mid v_i^j v_{i+1}^j \in E \right\} \cup \left\{ w_{\lambda_5} \left( v_i^j u_i^j \right) \mid v_i^j u_i^j \in E \right\} \\ &= \{4tn - tn + 2, 4tn - tn + 4, \dots, 4tn - 2, 4tn\} \cup \\ &\quad \{4tn + 2, 4tn + 4, \dots, 4tn + tn - 2, 4tn + tn\} \cup \\ &\quad \{4tn + tn + 2, 4tn + tn + 4, \dots, 4tn + 2tn - 2, 4tn + 2tn\} \cup \\ &\quad \{4tn + 2tn + 2, 4tn + 2tn + 4, \dots, 4tn + 3tn - 2, 4tn + 3tn\} \\ &= \{4tn - tn + 2, 4tn - tn + 4, \dots, 4tn + 3tn\}. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa seluruh bobot busur tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = 4tn - tn + 2 = 3tn + 2$  dan beda  $d = 2$ . Bobot busur terkecil  $a$  dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik ini diperoleh pada persamaan (3.54) dengan nilai  $i = j = 1$ , yaitu busur  $v_1^1 u_1^1$  dengan bobot  $a = 3tn + 2$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_5$  adalah  $(3tn + 2, 2)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik  $C_n \odot \overline{K}_1$ , untuk bilangan bulat  $t \geq 2$  dan bilangan genap  $n \geq 4$ .

(ii) Kedua, akan ditunjukkan bahwa gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik,  $tC_n \odot \overline{K}_1$ ,  $n \geq 4$  genap, memiliki  $(a, 2)$ -PTBAA dengan  $a = 3tn + 3$ .

Banyaknya simpul dan busur pada  $tC_n \odot \overline{K}_1$  masing-masing adalah  $2tn$ . Misalkan  $\lambda_6$  adalah pelabelan yang didefinisikan dari  $V(tC_n \odot \overline{K}_1) \cup E(tC_n \odot \overline{K}_1)$  ke  $\{1, 2, \dots, 4tn\}$ .

Untuk  $1 \leq j \leq t$ , label simpul dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik dengan

$$\lambda_6(v_i^j) = \begin{cases} 2t(i-1) + 2j & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ 2t\left(\frac{3n}{2} - i\right) + 2j & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\lambda_6(u_i^j) = 2t(n+i-1) + 2j \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.56)$$

dan label busur dengan

$$\lambda_6(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} 2t(2n-i) - 2j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ 2t\left(\frac{n}{2} + i + 1\right) - 2j + 1 & ; i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1 \\ 4ti - 2j + 1 & ; i = n \end{cases} \quad (3.57)$$

$$\lambda_6(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} 2t\left(\frac{n}{2} - i + 1\right) - 2j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ 2ti - 2j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.58)$$

Label dari seluruh simpul dan busur yang diperoleh dengan pelabelan  $\lambda_6$  adalah bilangan-bilangan bulat positif yang berbeda, yaitu  $\lambda_6(V) = \{2, 4, 6, \dots, 4tn\}$  dan  $\lambda_6(E) = \{1, 3, 5, \dots, 4tn-1\}$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_6$  merupakan pemetaan bijektif dari himpunan  $V(tC_n \odot \overline{K}_1) \cup E(tC_n \odot \overline{K}_1)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4tn\}$ .

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa pelabelan  $\lambda_6$  adalah  $(3tn+3, 2)$ -PTBAA. Bobot dari sembarang busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dan busur  $v_i^j u_i^j$  pada gabungan graf matahari isomorfik  $tC_n \odot \overline{K}_1$ , terhadap pelabelan  $\lambda_6$  adalah

$$w_{\lambda_6}(v_i^j v_{i+1}^j) = \lambda_6(v_i^j) + \lambda_6(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_6(v_{i+1}^j) \quad (3.59)$$

dan

$$w_{\lambda_6}(v_i^j u_i^j) = \lambda_6(v_i^j) + \lambda_6(v_i^j u_i^j) + \lambda_6(u_i^j) \quad (3.60)$$

untuk bilangan bulat  $1 \leq j \leq t$  dan  $1 \leq i \leq n$ , dimana indeks dihitung dengan modulo  $n$ . Seperti pada bukti sebelumnya, penghitungan bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik terhadap pelabelan  $\lambda_6$  dibagi menjadi 4 kasus, yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1$ ,  $i = \frac{n}{2}$ ,  $i = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$ , dan  $i = n$ .

Dengan cara yang sama, yaitu mensubstitusi persamaan (3.55) dan (3.57) ke dalam persamaan (3.59) untuk masing-masing kasus  $i$ , akan diperoleh bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik sebagai berikut

$$w_{\lambda_6}(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} t(4n + 2i - 2) + 2j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t(4n + 3n - 2i) + 2j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.61)$$

dimana  $1 \leq j \leq t, n \geq 4$ . Himpunan bobot busur yang diperoleh dari persamaan (3.61) adalah  $\{4tn + 3, 4tn + 5, \dots, 4tn + tn + 1\}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $\{4tn + tn + 3, 4tn + tn + 5, \dots, 4tn + 2tn + 1\}$  untuk  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ .

Masing-masing dari himpunan bobot busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  membentuk barisan aritmatika dengan beda 2.

Selanjutnya, penghitungan bobot busur  $v_i^j u_i^j$  terhadap pelabelan  $\lambda_6$  dibagi menjadi 2 kasus, yaitu untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ .

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.55), (3.56) dan (3.58) ke dalam persamaan (3.60) untuk 2 kasus  $i$  tersebut, akan diperoleh bobot busur  $v_i^j u_i^j$  dari gabungan  $t$  graf matahari isomorfik berikut

$$w_{\lambda_6}(v_i^j u_i^j) = \begin{cases} t(4n - n + 2i - 2) + 2j + 1 & ; i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ t(4n + n + 2i - 2) + 2j + 1 & ; i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.62)$$

untuk  $1 \leq j \leq t, n \geq 4$ . Himpunan bobot busur yang diperoleh dari persamaan (3.62) adalah  $\{4tn - tn + 3, 4tn - tn + 5, \dots, 4tn + 1\}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$  dan  $\{4tn + 2tn + 3, 4tn + 2tn + 5, \dots, 4tn + 3tn + 1\}$  untuk  $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ .

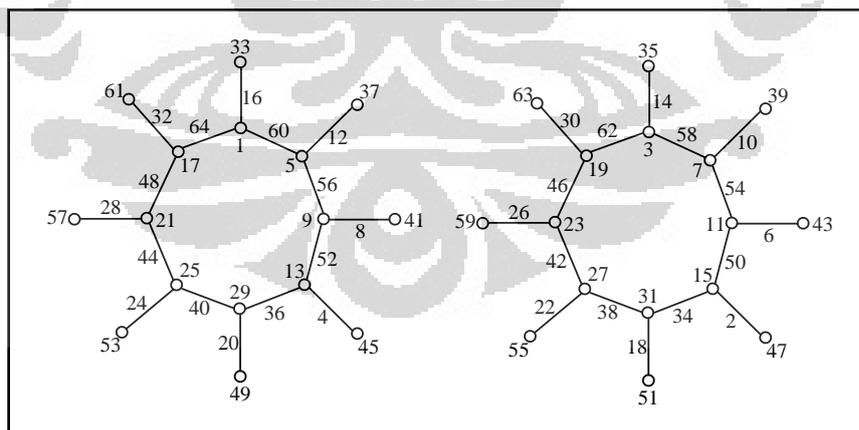
Masing-masing dari himpunan bobot busur  $v_i^j u_i^j$  membentuk barisan aritmatika dengan beda 2.

Jadi, himpunan dari semua bobot busur pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik adalah

$$\begin{aligned}
 W_6 &= \{w_{\lambda_6}(v_i^j v_{i+1}^j) \mid v_i^j v_{i+1}^j \in E\} \cup \{w_{\lambda_6}(v_i^j u_i^j) \mid v_i^j u_i^j \in E\} \\
 &= \{4tn - tn + 3, 4tn - tn + 5, \dots, 4tn + 1\} \cup \\
 &\quad \{4tn + 3, 4tn + 5, \dots, 4tn + tn + 1\} \cup \\
 &\quad \{4tn + tn + 3, 4tn + tn + 5, \dots, 4tn + 2tn + 1\} \cup \\
 &\quad \{4tn + 2tn + 3, 4tn + 2tn + 5, \dots, 4tn + 3tn + 1\} \\
 &= \{4tn - tn + 3, 4tn - tn + 5, \dots, 4tn + 3tn + 1\}.
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa seluruh bobot busur tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = 4tn - tn + 3 = 3tn + 3$  dan beda  $d = 2$ . Bobot busur terkecil  $a$  pada gabungan graf matahari isomorfik diperoleh pada persamaan (3.62) dengan mengambil nilai  $i = j = 1$ , yaitu busur  $v_1^1 u_1^1$  dengan bobot  $a = 3tn + 3$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_6$  adalah  $(3tn + 3, 2)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik,  $tC_n \odot \overline{K_1}$ , untuk bilangan bulat  $t \geq 2$  dan bilangan genap  $n \geq 4$ . ■

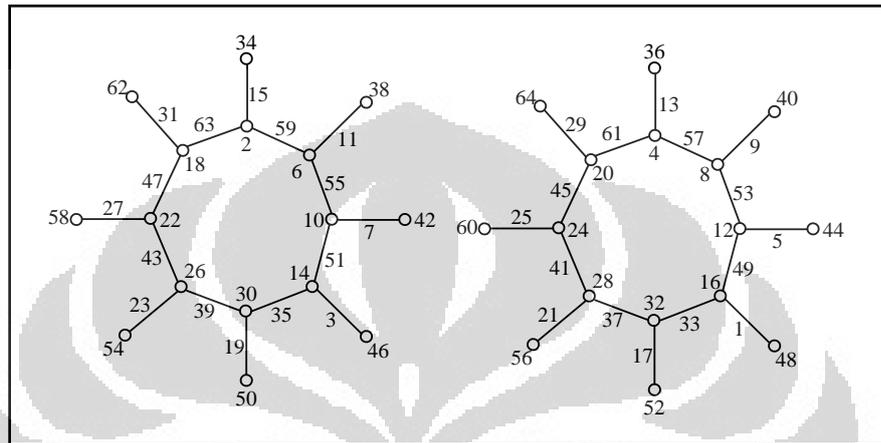
Baik pelabelan  $\lambda_5$  maupun pelabelan  $\lambda_6$ , kedua-duanya merupakan pelabelan-pelabelan yang tidak saling dual. Sehingga pada Teorema 3.4, konstruksi  $(a, 2)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf matahari isomorfik untuk  $a = 3tn + 2$  (i) berbeda dengan konstruksi  $(a, 2)$ -PTBAA untuk  $a = 3tn + 3$  (ii).



Gambar 3.7.  $(50, 2)$ -PTBAA pada gabungan 2 graf matahari isomorfik:  $2C_8 \odot \overline{K_1}$

Contoh  $(a, 2)$ -PTBAA dari gabungan 2 graf matahari isomorfik,  $2C_8 \odot \overline{K_1}$  diberikan pada Gambar 3.7 dan Gambar 3.8. Pada Gambar 3.7,  $(a, 2)$ -PTBAA

memiliki bobot busur terkecil  $a = 3tn + 2 = 3(2)(8) + 2 = 48 + 2 = 50$ . Sedangkan pada Gambar 3.8,  $(a, 2)$ -PTBAA memiliki bobot busur terkecil  $a = 3tn + 3 = 3(2)(8) + 3 = 48 + 3 = 51$ . Sebagai catatan bahwa konstruksi pelabelan yang diberikan pada Teorema 3.4 dapat pula digunakan untuk melabel 1 graf matahari dengan mengambil nilai  $t = 1$ .



Gambar 3.8.  $(51, 2)$ -PTBAA pada gabungan 2 graf matahari isomorfik:  $2C_8 \odot \overline{K_1}$

$(a, 2)$ -PTBAA lain dari gabungan graf matahari isomorfik dapat pula diperoleh dengan menggunakan definisi pelabelan dual pada subbab 2.4 pada Teorema 3.4. Hasil ini diberikan pada Akibat 3.4.

**Akibat 3.4** Gabungan dari  $t$  graf matahari isomorfik  $C_n \odot \overline{K_1}$  memiliki

- (i)  $(5tn + 3, 2)$ -PTBAA
- (ii)  $(5tn + 2, 2)$ -PTBAA

untuk setiap bilangan genap  $n \geq 4$  dan bilangan bulat  $t \geq 2$ .

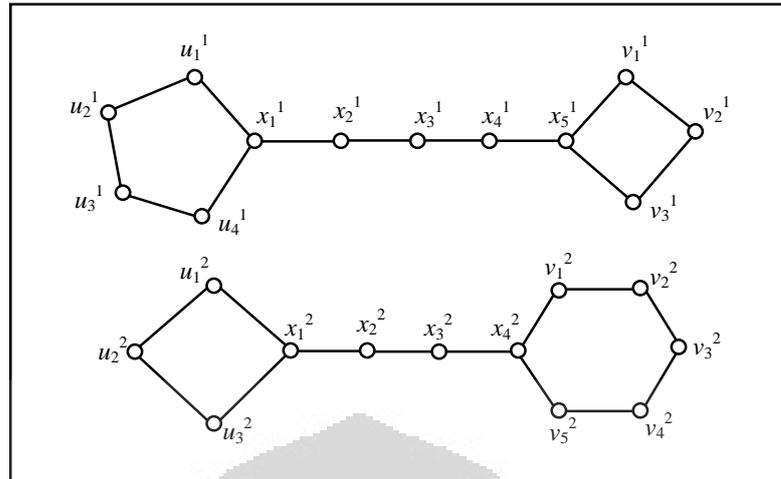
Pada subbab 3.3 akan dibahas mengenai  $(a, d)$ -PTBAA pada  $t$  gabungan graf *dumbbell* untuk  $d = 1$ , dimana masing-masing dari graf *dumbbell* harus memiliki banyak simpul yang sama. Pembahasan  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d = 2$  hanya dilakukan pada graf *dumbbell* tunggal karena  $(a, 2)$ -PTBAA pada gabungan graf *dumbbell* belum dapat ditemukan.

### 3.3 (a, d)-PTBAA pada Gabungan Graf *Dumbbell*

Graf *dumbbell* adalah graf yang dibentuk dari dua graf lingkaran  $C_m$  dan  $C_n$  yang dihubungkan oleh suatu graf lintasan  $P_k$ , dimana titik-titik ujung dari graf lintasan  $P_k$  adalah salah satu simpul dari masing-masing graf lingkaran. Graf ini dinotasikan dengan  $D_{m,n,k}$ , dimana  $m, n \geq 3$  menyatakan banyak simpul pada masing-masing graf lingkaran dan  $k \geq 2$  menyatakan banyak simpul pada graf lintasan.

Gabungan  $t$  graf *dumbbell*,  $t \geq 2$ , adalah graf tak terhubung yang terdiri dari  $t$  komponen dimana setiap komponennya adalah graf *dumbbell*  $D_{m_j, n_j, k_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ , dengan  $m_j, n_j \geq 3$  dan  $k_j \geq 2$  adalah bilangan bulat. Gabungan  $t$  graf *dumbbell* dinotasikan sebagai  $\bigcup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j} = D_{m_1, n_1, k_1} \cup \dots \cup D_{m_t, n_t, k_t}$ . Himpunan simpul dan busur dari graf ini masing-masing dinyatakan oleh  $V(\bigcup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}) = \{u_i^j \mid 1 \leq i \leq m_j - 1, 1 \leq j \leq t\} \cup \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq n_j - 1, 1 \leq j \leq t\} \cup \{x_i^j \mid 1 \leq i \leq k_j, 1 \leq j \leq t\}$  dan  $E(\bigcup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}) = \{x_i^j u_i^j \mid 1 \leq j \leq t\} \cup \{u_i^j u_{i+1}^j \mid 1 \leq i \leq m_j - 2, 1 \leq j \leq t\} \cup \{u_{m_j-1}^j x_1^j \mid 1 \leq j \leq t\} \cup \{x_i^j x_{i+1}^j \mid 1 \leq i \leq k_j - 1, 1 \leq j \leq t\} \cup \{x_{k_j-1}^j v_1^j \mid 1 \leq j \leq t\} \cup \{v_i^j v_{i+1}^j \mid 1 \leq i \leq n_j - 2, 1 \leq j \leq t\} \cup \{v_{n_j-1}^j x_{k_j}^j \mid 1 \leq j \leq t\}$ . Notasi  $u_i^j$  dan  $v_i^j$  masing-masing menyatakan simpul-simpul dari graf lingkaran  $C_{m_j}$  dan  $C_{n_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ , sedangkan notasi  $x_i^j$  menyatakan simpul-simpul dari graf lintasan  $P_{k_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ .

Graf yang menjadi obyek penelitian pada subbab ini adalah gabungan  $t$  graf *dumbbell* dimana setiap graf *dumbbell* memiliki banyak simpul yang sama. Graf ini dapat diperoleh dengan melakukan operasi gabungan terhadap dua atau lebih graf *dumbbell* dengan banyak simpul yang sama. Sehingga pada  $\bigcup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}$  berlaku  $m_h + n_h + k_h = m_j + n_j + k_j$ ,  $h \neq j$ ,  $1 \leq h, j \leq t$ . Pada Gambar 3.9 diberikan contoh gabungan dari 2 graf *dumbbell*:  $D_{5,4,5} \cup D_{4,6,4}$ , dimana masing-masing graf *dumbbell* memiliki 12 simpul, beserta dengan notasi penamaan simpul.



Gambar 3.9. Gabungan 2 graf *dumbbell*:  $D_{5,4,5} \cup D_{4,6,4}$

Suatu graf *dumbbell*  $D_{m,n,k}$  terdiri atas 2 graf lingkaran, yaitu  $C_m$  dan  $C_n$ , dan 1 graf lintasan  $P_k$ , dimana  $m, n \geq 3, k \geq 2$ . Pada graf lingkaran  $C_m$  telah diketahui bahwa banyak busur sama dengan banyak simpul, atau  $|V(C_m)| = |E(C_m)|$ . Begitu pula pada graf lingkaran  $C_n$ , berlaku  $|V(C_n)| = |E(C_n)|$ . Sedangkan pada graf lintasan  $P_k$  diketahui bahwa banyak simpul sama dengan banyak busur ditambah satu, atau  $|V(P_k)| = |E(P_k)| + 1$ . Meskipun simpul-simpul ujung dari graf lintasan pada graf *dumbbell* merupakan salah satu simpul dari subgraf yang berbentuk lingkaran, tetapi banyak busur dari graf *dumbbell* yang terdapat pada graf lintasan tetap sama. Sehingga pada graf *dumbbell*  $D_{m,n,k}$  berlaku hubungan:

$$\begin{aligned}
 |V(D_{m,n,k})| &= |V(C_m)| + |V(C_n)| + |V(P_k)| - 2 \\
 &= |E(C_m)| + |E(C_n)| + (|E(P_k)| + 1) - 2 \\
 &= (|E(C_m)| + |E(C_n)| + |E(P_k)|) - 1 \\
 &= |E(D_{m,n,k})| - 1.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Misalkan  $n_j$  dan  $e_j$ ,  $1 \leq j \leq t$ , masing-masing menyatakan banyak simpul dan busur pada graf *dumbbell* ke- $j$  pada gabungan  $t$  graf *dumbbell*, maka berdasarkan (3.63) diperoleh

$$e_j = n_j + 1 \quad (3.64)$$

untuk  $1 \leq j \leq t$ . Jika  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$  dan  $e = e_1 + e_2 + \dots + e_t$  adalah banyak simpul total dan busur total pada gabungan  $t$  graf *dumbbell*, maka dengan menjumlahkan persamaan (3.64) untuk  $1 \leq j \leq t$  diperoleh

$$e = n + t. \quad (3.65)$$

Persamaan (3.65) dapat digunakan untuk menghitung batas atas nilai  $d$  dari  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf *dumbbell*. Caranya adalah dengan mensubstitusikan (3.65) ke pertidaksamaan (2.6), sehingga diperoleh hubungan

$$d \leq \frac{3n + 3(n+t) - 9}{(n+t) - 1}.$$

atau

$$d \leq 5 + \frac{n - 2t - 4}{n + t - 1}. \quad (3.66)$$

Jadi, nilai  $d$  yang mungkin untuk  $(a, d)$ -PTBAA dari gabungan  $t$  graf *dumbbell* adalah  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Pembahasan selanjutnya mengenai  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf *dumbbell* hanya dilakukan untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ .  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf *dumbbell* untuk  $d = 1$  diberikan pada Teorema 3.5.

**Teorema 3.5** Gabungan  $t$  graf *dumbbell*,  $\cup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}$ , dengan  $m_h + n_h + k_h = m_j + n_j + k_j$ ,  $h \neq j$ ,  $1 \leq h, j \leq t$ , memiliki  $((2 \sum_{j=1}^t m_j + n_j + k_j) - 4t + 2, 1)$ -PTBAA untuk setiap bilangan bulat  $k_j \geq 2$  dan  $m_j, n_j \geq 3$ ,  $1 \leq j \leq t$ ,  $t \geq 2$ .

**Bukti.** Banyaknya simpul dan busur pada gabungan  $t$  graf *dumbbell* dengan jumlah simpul yang sama, masing-masing adalah  $\sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 2)$  dan  $\sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 1)$ , dengan  $m_h + n_h + k_h = m_j + n_j + k_j$ ,  $h \neq j$ ,  $1 \leq h, j \leq t$ .

Misalkan  $\lambda_7$  adalah pelabelan yang didefinisikan dari  $V(\cup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}) \cup E(\cup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j})$  ke  $\{1, 2, \dots, \sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 2) + \sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 1)\}$ .

Untuk  $1 \leq j \leq t$ , label simpul dari gabungan  $t$  graf *dumbbell* dengan

$$\lambda_7(u_i^j) = j + ti \quad ; i = 1, 2, \dots, m_j - 1 \quad (3.67)$$

$$\lambda_7(x_i^j) = \begin{cases} j & ; i = 1 \\ t(m_j + n_j + i - 3) + j & ; i = 2, 3, \dots, k_j \end{cases} \quad (3.68)$$

$$\lambda_7(v_i^j) = t(m_j + i - 1) + j \quad ; i = 1, 2, \dots, n_j - 1 \quad (3.69)$$

dan label busur dengan

$$\lambda_7(x_1^j u_1^j) = t(2m_j + 2n_j + 2k_j - 4) - j + 1 \quad (3.70)$$

$$\lambda_7(u_i^j u_{i+1}^j) = t(2m_j + 2n_j + 2k_j - i - 4) - j + 1 \quad ; i = 1, 2, \dots, m_j - 2 \quad (3.71)$$

$$\lambda_7(u_{m_j-1}^j x_1^j) = t(2m_j + 2n_j + 2k_j - 3) - j + 1 \quad (3.72)$$

$$\lambda_7(x_i^j x_{i+1}^j) = t(m_j + n_j + 2k_j - i - 2) - j + 1 \quad ; i = 1, 2, \dots, k_j - 1 \quad (3.73)$$

$$\lambda_7(x_{k_j}^j v_1^j) = t(m_j + 2n_j + 2k_j - 3) - j + 1 \quad (3.74)$$

$$\lambda_7(v_i^j v_{i+1}^j) = t(m_j + 2n_j + 2k_j - i - 3) - j + 1 \quad ; i = 1, 2, \dots, n_j - 2 \quad (3.75)$$

$$\lambda_7(v_{n_j-1}^j x_{k_j}^j) = t(m_j + n_j + 2k_j - 2) - j + 1 \quad (3.76)$$

Label-label untuk semua simpul dan busur yang diperoleh dari pelabelan  $\lambda_7$  adalah bilangan-bilangan bulat positif yang saling berbeda, yaitu  $\lambda_7(V) = \{1, 2, \dots,$

$\sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 2)\}$  dan  $\lambda_7(E) = \{\sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 2) + 1,$

$\sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 2) + 2, \dots, \sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 2) + \sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 1)\}$ .

Jadi, pelabelan  $\lambda_7$  merupakan pemetaan bijektif dari himpunan  $V(\cup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}) \cup$

$E(\cup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j})$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, \sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 2) +$

$\sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j - 1)\}$ .

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa pelabelan  $\lambda_7$  adalah  $(a, 1)$ -PTBAA dari gabungan  $t$  graf *dumbbell* dengan  $a = (2 \sum_{j=1}^t m_j + n_j + k_j) - 4t + 2$ . Berdasarkan persamaan (3.67) sampai dengan persamaan (3.76), penghitungan seluruh bobot busur dari gabungan  $t$  graf *dumbbell* terhadap pelabelan  $\lambda_7$  dibagi menjadi 8 kasus yang sesuai dengan 3 graf pembentuknya, yaitu 3 kasus pada graf lingkaran  $C_{m_j}$ , 3 kasus pada graf lingkaran  $C_{n_j}$ , dan 2 kasus pada graf lintasan  $P_{k_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ .

Kasus 1: untuk graf lingkaran  $C_{m_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ .

Bobot busur pada graf lingkaran  $C_{m_j}$  terbagi dalam 3 kasus, yaitu busur  $x_1^j u_1^j$ , busur  $u_i^j u_{i+1}^j$ , dan busur  $u_{m_j-1}^j x_1^j$ , dengan perhitungan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 1.a. \quad w_{\lambda_7}(x_1^j u_1^j) &= \lambda_7(x_1^j) + \lambda_7(x_1^j u_1^j) + \lambda_7(u_1^j) \\
 &= [j] + [t(2m_j + 2n_j + 2k_j - 4) - j + 1] + [j + t] \\
 &= t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + j + 1
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

1.b. untuk  $i = 1, 2, \dots, m_j - 2$ ,

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_7}(u_i^j u_{i+1}^j) &= \lambda_7(u_i^j) + \lambda_7(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda_7(u_{i+1}^j) \\
 &= [j + ti] + [t(2m_j + 2n_j + 2k_j - i - 4) - j + 1] + \\
 &\quad [j + t(i + 1)] \\
 &= t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + ti + j + 1
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
 1.c. \quad w_{\lambda_7}(u_{m_j-1}^j x_1^j) &= \lambda_7(u_{m_j-1}^j) + \lambda_7(u_{m_j-1}^j x_1^j) + \lambda_7(x_1^j) \\
 &= [j + t(m_j - 1)] + [t(2m_j + 2n_j + 2k_j - 3) - j + 1] + \\
 &\quad [j] \\
 &= t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j - 1) + j + 1.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Jadi, himpunan bobot dari busur  $x_i^j u_i^j$  adalah  $\{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + j + 1 \mid 1 \leq j \leq t\}$ , busur  $u_i^j u_{i+1}^j$  adalah  $\{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + ti + j + 1 \mid 1 \leq i \leq m_j - 2, 1 \leq j \leq t\}$ , dan busur  $u_{m_j-1}^j x_1^j$  adalah  $\{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j - 1) + j + 1 \mid 1 \leq j \leq t\}$ . Oleh karena  $m_j + n_j + k_j$  selalu bernilai sama untuk setiap  $j$ ,  $1 \leq j \leq t$ , maka ketiga himpunan tersebut masing-masing membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

Kasus 2: untuk graf lingkaran  $C_{n_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ .

Bobot busur pada graf lingkaran  $C_{n_j}$  terbagi dalam 3 kasus, yaitu busur  $x_{k_j}^j v_1^j$ , busur  $v_i^j v_{i+1}^j$ , dan busur  $v_{n_j-1}^j x_{k_j}^j$ , dengan perhitungan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 2.a. \quad w_{\lambda_7}(x_{k_j}^j v_1^j) &= \lambda_7(x_{k_j}^j) + \lambda_7(x_{k_j}^j v_1^j) + \lambda_7(v_1^j) \\
 &= [t(m_j + n_j + k_j - 3) + j] + [t(m_j + 2n_j + 2k_j - 3) \\
 &\quad - j + 1] + [t(m_j) + j] \\
 &= t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j + k_j - 3) \\
 &\quad + j + 1 \tag{3.80}
 \end{aligned}$$

2.b. untuk  $i = 1, 2, \dots, n_j - 2$ ,

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda_7}(v_i^j v_{i+1}^j) &= \lambda_7(v_i^j) + \lambda_7(v_i^j v_{i+1}^j) + \lambda_7(v_{i+1}^j) \\
 &= [t(m_j + i - 1) + j] + [t(m_j + 2n_j + 2k_j - i - 3) - j + 1] \\
 &\quad + [t(m_j + (i + 1) - 1) + j] \\
 &= t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + i - 1) + j + 1 \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.c. \quad w_{\lambda_7}(v_{n_j-1}^j x_{k_j}^j) &= \lambda_7(v_{n_j-1}^j) + \lambda_7(v_{n_j-1}^j x_{k_j}^j) + \lambda_7(x_{k_j}^j) \\
 &= [t(m_j + (n_j - 1) - 1) + j] + [t(m_j + n_j + 2k_j - 2) \\
 &\quad - j + 1] + [t(m_j + n_j + k_j - 3) + j]
 \end{aligned}$$

$$= t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j + k_j - 4) + j + 1. \quad (3.82)$$

Jadi, himpunan bobot dari busur  $x_{k_j}^j v_1^j$  adalah  $\{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j + k_j) - 3) + j + 1 \mid 1 \leq j \leq t\}$ , busur  $v_i^j v_{i+1}^j$  adalah  $\{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + i - 1) + j + 1 \mid 1 \leq i \leq n_j - 2, 1 \leq j \leq t\}$ , dan busur  $v_{n_j-1}^j x_{k_j}^j$  adalah  $\{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j + k_j) - 4) + j + 1 \mid 1 \leq j \leq t\}$ . Oleh karena  $m_j + n_j + k_j$  selalu bernilai sama untuk setiap  $j$ ,  $1 \leq j \leq t$ , maka ketiga himpunan tersebut masing-masing membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

Kasus 3: untuk graf lintasan  $P_{k_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ .

Bobot busur pada graf lintasan  $P_{k_j}$  terbagi dalam 2 kasus, yaitu busur  $x_i^j x_{i+1}^j$  untuk  $i = 1$  dan untuk  $i = 2, 3, \dots, k_j$ , dengan perhitungan sebagai berikut

3.a. untuk  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_7}(x_1^j x_2^j) &= \lambda_7(x_1^j) + \lambda_7(x_1^j x_2^j) + \lambda_7(x_2^j) \\ &= [j] + [t(m_j + n_j + 2k_j - 1 - 2) - j + 1] + \\ &\quad [t(m_j + n_j + 2 - 3) + j] \\ &= t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) - t + j + 1 \end{aligned} \quad (3.83)$$

3.b. untuk  $i = 2, 3, \dots, k_j$ ,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_7}(x_i^j x_{i+1}^j) &= \lambda_7(x_i^j) + \lambda_7(x_i^j x_{i+1}^j) + \lambda_7(x_{i+1}^j) \\ &= [t(m_j + n_j + i - 3) + j] + [t(m_j + n_j + 2k_j - i - 2) \\ &\quad - j + 1] + [t(m_j + n_j + (i + 1) - 3) + j] \\ &= t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j + i - 4) + j + 1. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Jadi, himpunan bobot dari busur  $x_i^j x_{i+1}^j$  adalah  $\{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) - t + j + 1 \mid 1 \leq j \leq t\}$  untuk  $i = 1$  dan  $\{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j + i - 4) + j + 1 \mid 1 \leq j \leq t\}$  untuk  $i = 2, 3, \dots, k_j$ . Oleh karena  $m_j + n_j + k_j$  selalu bernilai sama untuk setiap  $j$ ,  $1 \leq j \leq t$ , maka kedua himpunan tersebut masing-masing membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

Jadi, untuk  $1 \leq j \leq t$ , himpunan bobot busur pada gabungan  $t$  graf *dumbbell* dari pelabelan  $\lambda_7$  adalah

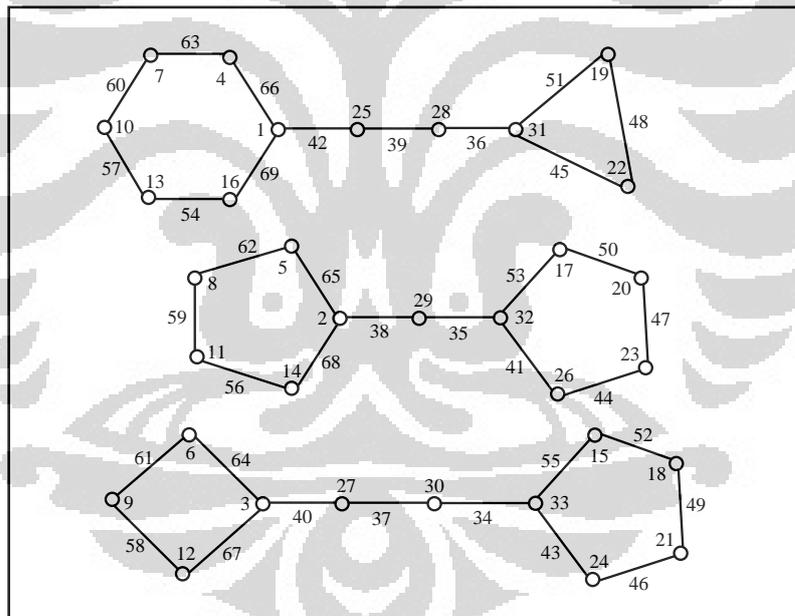
$$\begin{aligned}
W_7 &= \left\{ w_{\lambda_7} \left( x_i^j u_1^j \right) \mid x_i^j u_1^j \in E \right\} \cup \left\{ w_{\lambda_7} \left( u_i^j u_{i+1}^j \right) \mid u_i^j u_{i+1}^j \in E, 1 \leq i \leq m_j - 2 \right\} \cup \\
&\quad \left\{ w_{\lambda_7} \left( u_{m_j-1}^j x_1^j \right) \mid u_{m_j-1}^j x_1^j \in E \right\} \cup \left\{ w_{\lambda_7} \left( x_{k_j}^j v_1^j \right) \mid x_{k_j}^j v_1^j \in E \right\} \cup \\
&\quad \left\{ w_{\lambda_7} \left( v_i^j v_{i+1}^j \right) \mid v_i^j v_{i+1}^j \in E, 1 \leq i \leq n_j - 2 \right\} \cup \left\{ w_{\lambda_7} \left( v_{n_j-1}^j x_{k_j}^j \right) \mid v_{n_j-1}^j x_{k_j}^j \in E \right\} \cup \\
&\quad \left\{ w_{\lambda_7} \left( x_1^j x_2^j \right) \mid x_1^j x_2^j \in E \right\} \cup \left\{ w_{\lambda_7} \left( x_i^j x_{i+1}^j \right) \mid x_i^j x_{i+1}^j \in E, 1 \leq i \leq k_j - 1 \right\} \\
&= \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) - t + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + 1\} \cup \\
&\quad \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t + 1\} \cup \\
&\quad \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) \\
&\quad + t(m_j - 2) + t + 1\} \cup \\
&\quad \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j - 1) + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) \\
&\quad + t(m_j - 1) + t + 1\} \cup \\
&\quad \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j) + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) \\
&\quad + t(m_j + n_j - 3) + t + 1\} \cup \\
&\quad \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j - 3) + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) \\
&\quad + t(m_j + n_j + k_j - 5) + t + 1\} \cup \\
&\quad \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j + k_j - 4) + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) \\
&\quad + t(m_j + n_j + k_j - 4) + t + 1\} \cup \\
&\quad \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) + t(m_j + n_j + k_j - 3) + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) \\
&\quad + t(m_j + n_j + k_j - 3) + t + 1\} \\
&= \{t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) - t + 2, \dots, t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) \\
&\quad + t(m_j + n_j + k_j - 3) + t + 1\}.
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa semua bobot busur di  $W_7$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) - t + 2$  dan beda  $d = 1$ . Bobot busur terkecil  $a$  pada persamaan (3.3.27) diperoleh pada saat nilai  $j = 1$ , yaitu pada busur

$x_1^1 x_2^1$  dengan besar bobot  $t(2(m_j + n_j + k_j) - 3) - t + 2 = 2t(m_j + n_j + k_j) - 4t + 2$  atau  $(2 \sum_{j=1}^t m_j + n_j + k_j) - 4t + 2$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_7$  adalah  $((2 \sum_{j=1}^t m_j + n_j + k_j) - 4t + 2, 1)$ -PTBAA pada gabungan  $t$  graf *dumbbell*, untuk bilangan bulat  $k_j \geq 2$  dan  $m_j, n_j \geq 3, 1 \leq j \leq t, t \geq 2$ . ■

Label dari seluruh simpul pada gabungan  $t$  graf *dumbbell* yang diperoleh dari pelabelan  $\lambda_7$  adalah bilangan bulat terkecil  $1, 2, \dots, \sum_{j=1}^t (m_j + n_j + k_j) - 2$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_7$  juga merupakan  $(a, 1)$ -PTSBA untuk gabungan  $t$  graf *dumbbell* dengan banyak simpul sama, dimana  $a = (2 \sum_{j=1}^t m_j + n_j + k_j) - 4t + 2$ .

Pada Gambar 3.10 diberikan contoh  $(a, 1)$ -PTBAA untuk gabungan 3 graf *dumbbell*:  $D_{6,3,4} \cup D_{5,5,3} \cup D_{4,5,4}$ . Sesuai dengan pelabelan  $\lambda_7$ , nilai bobot terkecil  $a = (2 \sum_{j=1}^3 m_j + n_j + k_j) - 4t + 2 = (2 \sum_{j=1}^3 m_j + n_j + k_j) - 4(3) + 2 = 78 - 10 = 68$ .



Gambar 3.10.  $(68, 1)$ -PTBAA pada  $D_{6,3,4} \cup D_{5,5,3} \cup D_{4,5,4}$

Dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4, dari Teorema 3.5 diperoleh Akibat 3.5.

**Akibat 3.5** Gabungan  $t$  graf *dumbbell*,  $\cup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}$ , dengan  $m_h + n_h + k_h = m_j + n_j + k_j$ ,  $h \neq j$ ,  $1 \leq h, j \leq t$ , memiliki  $((3\sum_{j=1}^t m_j + n_j + k_j) + 2t - 4, 1)$ -PTBAA untuk setiap bilangan bulat  $k_j \geq 2$  dan  $m_j, n_j \geq 3$ ,  $1 \leq j \leq t$ ,  $t \geq 2$ .

Berikut ini adalah  $(a, d)$ -PTBAA pada graf *dumbbell* untuk  $d = 2$ , dimana pelabelan simpul dan busur hanya dilakukan untuk 1 graf *dumbbell*.

**Teorema 3.6** Graf *dumbbell*  $D_{m,n,k}$  memiliki  $(2(m+n+k) - 1, 2)$ -PTBAA untuk setiap bilangan bulat  $k \geq 2$  dan  $m, n \geq 3$ .

**Bukti.** Jumlah simpul dan busur pada graf *dumbbell*  $D_{m,n,k}$ , masing-masing adalah  $m+n+k-2$  dan  $m+n+k-1$ . Misalkan  $\lambda_8$  adalah pelabelan yang didefinisikan dari  $V(tD_{m,n,k}) \cup E(tD_{m,n,k})$  ke  $\{1, 2, \dots, 2(m+n+k)-3\}$ .

Label simpul dari graf *dumbbell*  $D_{m,n,k}$ , dengan

$$\lambda_8(u_i) = 2(i+1) \quad ; i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.85)$$

$$\lambda_8(x_i) = \begin{cases} 2i & ; i = 1 \\ 2(m+n+i-2) & ; i = 2, 3, \dots, k \end{cases} \quad (3.86)$$

$$\lambda_8(v_i) = 2(m+i) \quad ; i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.87)$$

dan label busur dengan

$$\lambda_8(u_i u_{i+1}) = 2(m+n+k-i) - 5 \quad ; i = 1, 2, \dots, m-2 \quad (3.88)$$

$$\lambda_8(x_1 u_1) = 2(m+n+k) - 5 \quad (3.89)$$

$$\lambda_8(u_{m-1} x_1) = 2(m+n+k) - 3 \quad (3.90)$$

$$\lambda_8(x_i x_{i+1}) = 2(k-i) - 1 \quad ; i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (3.91)$$

$$\lambda_8(v_i v_{i+1}) = 2(k+n-i) - 3 \quad ; i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (3.92)$$

$$\lambda_8(x_k v_1) = 2(k+n) - 3 \quad (3.93)$$

$$\lambda_8(v_{n-1} x_k) = 2k - 1 \quad (3.94)$$

Semua label dari simpul-simpul dan busur-busur yang diperoleh dengan pelabelan  $\lambda_8$  ini adalah bilangan-bilangan bulat positif yang saling berbeda, yaitu

$\lambda_8(V) = \{2, 4, \dots, 2(m+n+k-2)\}$  dan  $\lambda_8(E) = \{1, 3, \dots, 2(m+n+k-2)+1\}$ .  
Jadi, pelabelan  $\lambda_8$  merupakan pemetaan bijektif dari himpunan  $V(tD_{m,n,k}) \cup E(tD_{m,n,k})$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 2(m+n+k)-3\}$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa pelabelan  $\lambda_8$  adalah  $(a, 2)$ -PTBAA dengan  $a = 2(m+n+k) - 1$ . Bobot busur pada graf *dumbbell*  $D_{m,n,k}$  terhadap pelabelan  $\lambda_8$  dibagi menjadi 8 kasus. Penghitungan bobot busur ini akan diuraikan berdasarkan 3 graf pembentuknya, yaitu graf lingkaran  $C_m$ , graf lingkaran  $C_n$ , dan graf lintasan  $P_k$ .

Pertama, bobot busur pada graf lingkaran  $C_m$ , dibagi menjadi 3 kasus, yaitu

Kasus 1.a. Busur  $x_1u_1$ ,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_8}(x_1u_1) &= \lambda_8(x_1) + \lambda_8(x_1u_1) + \lambda_8(u_1) \\ &= [2(1)] + [2(m+n+k) - 5] + [2(1+1)] \\ &= 2(m+n+k) + 1 \end{aligned} \quad (3.95)$$

Kasus 1.b. Busur  $u_iu_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-2$ ,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_8}(u_iu_{i+1}) &= \lambda_8(u_i) + \lambda_8(u_iu_{i+1}) + \lambda_8(u_{i+1}) \\ &= [2(i+1)] + [2(m+n+k-i) - 5] + [2((i+1)+1)] \\ &= 2(m+n+k+i) + 1 \end{aligned} \quad (3.96)$$

Kasus 1.c. Busur  $u_{m-1}x_1$ ,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_8}(u_{m-1}x_1) &= \lambda_8(u_{m-1}) + \lambda_8(u_{m-1}x_1) + \lambda_8(x_1) \\ &= [2((m-1)+1)] + [2(m+n+k) - 3] + [2(1)] \\ &= 2(2m+n+k) - 1. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Kedua, bobot busur pada graf lingkaran  $C_n$ , dibagi menjadi 3 kasus, yaitu

Kasus 2.a. Busur  $x_kv_1$ ,

$$w_{\lambda_8}(x_kv_1) = \lambda_8(x_k) + \lambda_8(x_kv_1) + \lambda_8(v_1)$$

$$\begin{aligned}
&= [2(m+n+k-2)] + [2(k+n)-3] + [2(m+1)] \\
&= 2(2m+2n+2k) - 5
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Kasus 2.b. Busur  $v_i v_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-2$ ,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_8}(v_i v_{i+1}) &= \lambda_8(v_i) + \lambda_8(v_i v_{i+1}) + \lambda_8(v_{i+1}) \\
&= [2(m+i)] + [2(k+n-i)-3] + [2(m+(i+1))] \\
&= 2(2m+n+k+i) - 1.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Kasus 2.c. Busur  $v_{n-1} x_k$ ,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_8}(v_{n-1} x_k) &= \lambda_8(v_{n-1}) + \lambda_8(v_{n-1} x_k) + \lambda_8(x_k) \\
&= [2(m+(n-1))] + [2k-1] + [2(m+n+k-2)] \\
&= 2(2m+2n+2k) - 7.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Ketiga, bobot busur pada graf lintasan  $P_k$ , dibagi menjadi 2 kasus, yaitu

Kasus 3.a. Busur  $x_i x_{i+1}$ , untuk  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_8}(x_1 x_2) &= \lambda_8(x_1) + \lambda_8(x_1 x_2) + \lambda_8(x_2) \\
&= [2(1)] + [2(k-1)-1] + [2(m+n+2-2)] \\
&= 2(m+n+k) - 1
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Kasus 3.b. Busur  $x_i x_{i+1}$ , untuk  $i = 2, 3, \dots, k-1$ ,

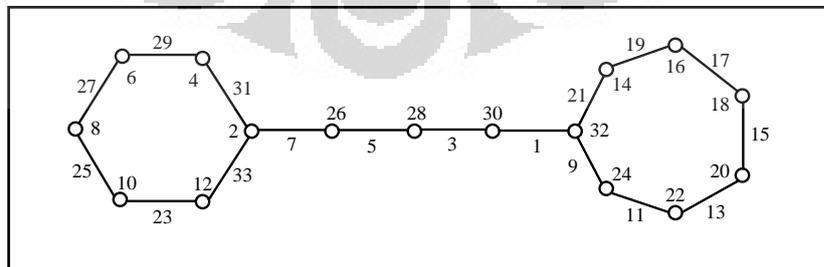
$$\begin{aligned}
w_{\lambda_8}(x_i x_{i+1}) &= \lambda_8(x_i) + \lambda_8(x_i x_{i+1}) + \lambda_8(x_{i+1}) \\
&= [2(m+n+i-2)] + [2(k-i)-1] + \\
&\quad [2(m+n+(i+1)-2)] \\
&= 2(2m+2n+k+i) - 7.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Jadi, himpunan bobot busur pada graf *dumbbell* dari pelabelan  $\lambda_8$  adalah

$$\begin{aligned}
 W_8 &= \{w_{\lambda_8}(x_1u_1) \mid x_1u_1 \in E\} \cup \{w_{\lambda_8}(u_iu_{i+1}) \mid u_iu_{i+1} \in E, 1 \leq i \leq m-2\} \cup \\
 &\quad \{w_{\lambda_8}(u_{m-1}x_1) \mid u_{m-1}x_1 \in E\} \cup \{w_{\lambda_8}(x_kv_1) \mid x_kv_1 \in E\} \cup \\
 &\quad \{w_{\lambda_8}(v_iv_{i+1}) \mid v_iv_{i+1} \in E, 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{w_{\lambda_8}(v_{n-1}x_k) \mid v_{n-1}x_k \in E\} \cup \\
 &\quad \{w_{\lambda_8}(x_1x_2) \mid x_1x_2 \in E\} \cup \{w_{\lambda_8}(x_ix_{i+1}) \mid x_ix_{i+1} \in E, 1 \leq i \leq k-1\} \\
 &= \{2(m+n+k)-1\} \cup \{2(m+n+k)+1\} \cup \\
 &\quad \{2(m+n+k+2)+1, 2(m+n+k+3)+1, \dots, \\
 &\quad 2(m+n+k+(m-2))+1\} \cup \\
 &\quad \{2(m+n+k+m)-1\} \cup \\
 &\quad \{2(m+n+k+m+1)-1, 2(m+n+k+m+2)-1, \dots, \\
 &\quad 2(m+n+k+m+n-1)-1\} \cup \\
 &\quad \{2(m+n+k+m+n+2)-7, 2(m+n+k+m+n+3)-7, \dots, \\
 &\quad 2(m+n+k+m+n+k-1)-7\} \cup \\
 &\quad \{2(2m+2n+2k)-7\} \cup \{2(2m+2n+2k)-5\} \\
 &= \{2(m+n+k)-1, 2(m+n+k)+1, \dots, 2(2m+2n+2k)-5\}.
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa semua bobot busur di  $W_8$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = 2(m+n+k) - 1$  dan beda  $d = 2$ . Jadi, pelabelan  $\lambda_8$  adalah  $(2(m+n+k) - 1, 2)$ -PTBAA pada graf *dumbbell*  $D_{m,n,k}$ , untuk bilangan bulat  $t, k \geq 2$  dan  $m, n \geq 3$ . ■

Contoh  $(a, 2)$ -PTBAA dari graf *dumbbell*  $D_{6,7,5}$  diberikan pada Gambar 3.11. Sesuai dengan pelabelan  $\lambda_8$ , nilai bobot terkecil  $a = 2(m+n+k) - 1 = 2(6+7+5) - 1 = 35$ .



Gambar 3.11.  $(35, 2)$ -PTBAA pada graf *dumbbell*  $D_{6,7,5}$

Konstruksi lain dari  $(a, 2)$ -PTBAA pada graf *dumbbell* ini, dapat pula diperoleh dengan menggunakan pelabelan dual pada subbab 2.4 terhadap pelabelan  $\lambda_8$ . Namun, bobot busur terkecil yang diperoleh dari pelabelan dual ini menghasilkan nilai  $a$  yang sama dengan Teorema 3.6.

Pada Bab 3 ini telah dibuktikan bahwa gabungan graf lingkaran, gabungan graf matahari isomorfik, dan gabungan graf *dumbbell* memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ . Pada bab selanjutnya akan diberikan kesimpulan dari hasil-hasil yang telah diperoleh beserta dengan masalah terbuka untuk  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf yang menjadi obyek penelitian untuk beberapa nilai  $d$  lainnya.



## BAB 4 KESIMPULAN

Dalam skripsi ini telah dibuktikan bahwa gabungan graf dari kelas graf yang sama, yaitu gabungan graf lingkaran, gabungan graf matahari, dan gabungan graf *dumbbell*, memiliki  $(a, d)$ -PTBAA untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$  dengan beberapa nilai  $a$ . Hasil-hasil tersebut dirangkum dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Pelabelan Total  $(a, d)$ -Busur Anti Ajaib

Graf	Pelabelan	Hasil	Keterangan
Gabungan $t$ graf lingkaran, $\bigcup_{j=1}^t C_{n_j}$	$(2 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 1)$ -PTBAA	Teorema 3.1	$n_j \geq 3, t \geq 2$
	$(3 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 1)$ -PTBAA	Akibat 3.1	
	$(2 \sum_{k=1}^t n_k + 2, 2)$ -PTBAA	Teorema 3.2	
	$(2 \sum_{k=1}^t n_k + 3, 2)$ -PTBAA	Akibat 3.2	
Gabungan $t$ graf matahari isomorfik, $tC_n \odot \bar{K}_1$	$\left(\frac{7m}{2} + 2, 1\right)$ -PTBAA	Teorema 3.3 (i)	$n$ genap, $n \geq 4,$ $t \geq 2$
	$\left(\frac{9m}{2} + 2, 1\right)$ -PTBAA	Teorema 3.3 (ii)	
	$\left(\frac{13m}{2} + 2, 1\right)$ -PTBAA	Akibat 3.3 (i)	
	$\left(\frac{11m}{2} + 2, 1\right)$ -PTBAA	Akibat 3.3 (ii)	
	$(3tn + 2, 2)$ -PTBAA	Teorema 3.4 (i)	
	$(3tn + 3, 2)$ -PTBAA	Teorema 3.4 (ii)	
	$(5tn + 3, 2)$ -PTBAA	Akibat 3.4 (i)	
	$(5tn + 2, 2)$ -PTBAA	Akibat 3.4 (ii)	
Gabungan $t$ graf <i>dumbbell</i> , $\bigcup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}$	$((2 \sum_{j=1}^t m_j + n_j + k_j) - 4t + 2, 1)$ - PTBAA	Teorema 3.5	$m_h + n_h + k_h =$ $m_j + n_j + k_j;$ $h \neq j; 1 \leq h, j \leq t;$ $k_j \geq 2; m_j, n_j \geq 3;$ $1 \leq j \leq t; t \geq 2$
	$((3 \sum_{j=1}^t m_j + n_j + k_j) + 2t - 4, 1)$ - PTBAA	Akibat 3.5	
Graf <i>dumbbell</i> $D_{m, n, k}$	$(2(m + n + k) - 1, 2)$ -PTBAA	Teorema 3.6	$k \geq 2; m, n \geq 3$

Penelitian lebih lanjut mengenai konstruksi  $(a, d)$ -PTBAA pada gabungan graf lingkaran, gabungan graf matahari, dan gabungan graf *dumbbell* untuk nilai  $d$  lain yang belum ditemukan diberikan dalam masalah terbuka berikut.

**Masalah terbuka 1.** Apakah gabungan dari  $t$  graf lingkaran  $C_{n_j}$ ,  $1 \leq j \leq t$ , memiliki  $(a, d)$ -PTBAA dengan  $d \in \{0, 3, 4, 5\}$  untuk setiap bilangan bulat  $n_j \geq 3$  dan  $t \geq 2$ .

**Masalah terbuka 2.** Apakah gabungan isomorfik dari  $t$  graf matahari  $C_n \odot \overline{K_1}$ , memiliki  $(a, d)$ -PTBAA dengan  $d \in \{0, 3, 4, 5\}$  untuk setiap bilangan genap  $n \geq 4$  dan bilangan bulat  $t \geq 2$ .

**Masalah terbuka 3.** Apakah gabungan  $t$  graf *dumbbell*,  $\bigcup_{j=1}^t D_{m_j, n_j, k_j}$ , dimana  $m_h + n_h + k_h = m_j + n_j + k_j$ ,  $h \neq j$ ,  $1 \leq h, j \leq t$ , memiliki  $(a, d)$ -PTBAA dengan  $d \in \{0, 2, 3, 4, 5\}$  untuk setiap bilangan bulat  $k_j \geq 2$  dan  $m_j, n_j \geq 3$ ;  $1 \leq j \leq t$ ;  $t \geq 2$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Bača, M. dan Miller, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs: A Wealth of Problems and Some Solutions*. Florida: Brown Walker Press.
- Chartrand, G. dan Lesniak, L. (1986). *Graphs & Digraphs*. California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.
- Gallian, J. A. (2009). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* 16, #DS6.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. (2003). *Pearls in Graph Theory*. New York: Dover Publications, Inc.
- Niagara, W. M., Silaban, D.R., dan Sugeng, K.A. (2010). *Pelabelan Total (a, d)-Busur Anti Ajaib pada Gabungan Graf Lingkaran*. dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika di Universitas Indonesia. preprint.
- Parestu, A., Silaban, D.R., dan Sugeng, K. A. (2008). *Pelabelan Simpul-Ajaib Total dari Gabungan Graf Matahari*. Prosiding Seminar Nasional Matematika (vol.3, 407-414), Universitas Katolik Parahyangan.
- Sugeng, K.A. dan Silaban, D.R. (2008). Edge antimagic total labeling on paths and unicycles. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 65, pp. 127-132.
- Sugeng, K.A. dan Silaban, D.R. (2009). Super (a, d)-vertex antimagic total labeling on a disjoint union of regular graphs. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 71, pp. 217-225.
- Wang, J., Belardo, F., Huang, Q., dan Marzi, E. M. L. (2010). Spectral characterizations of dumbbell graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics* 17, #R42.
- West, D.B. (1996). *Introduction to Graph Theory*. USA: Prentice-Hall, Inc.