UNIVERSITAS INDONESIA

SIMULASI ARUS LALU LINTAS DENGAN MENGGUNAKAN KECEPATAN MODEL KERNER KONHÄUSER

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

YESSY YUSNITA
0806420272

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar

Nama : Yessy Yusnita

NPM : 0806420272

Tanda Tangan :

Tanggal : 16 Juli 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh	:	
Nama	:	Yessy Yusnita
NPM	:	0806420272
Program Studi	:	Matematika
Judul Tesis	:	Simulasi Arus Lalu Lintas dengan Menggunakan Kecepatan Model Kerner Konhäuser

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom.	(Sri Mardiyati)
Penguji	: Prof. Dr. Djati Kerami.	(....................)
Penguji	: Dr. Al Haji Akbar B., M.Sc.	(....................)

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 16 Juli 2010

"Nun. Demi pena dan apa yang mereka tuliskan"

(QS Al Qalam, 68 : 1)

" Sesungguhnya disamping kesulitan
ada kemudahan"

(QS Al Insyraah: 5-6)

" Barangsiapa yang bersungguh-sungguh, pasti ia akan berhasil "

(Al- hadits)

"... apabila engkau telah membulatkan tekad, maka bertawakallah kepada Allah..."

(QS Ali Imran, 3 : 159)

Ketika niat, komitmen, dan usaha sudah dituaikan dengan sepenuh hati, biarkan Allah yang mengerjakan sisanya, itulah tawakal.
Berbahagialah orang-orang yang senantiasa memiliki tekad yang kuat dan kerja keras untuk meraih sukses.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin. Puji syukur kehadirat ALLAH SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Sience Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Sri Mardiyati, M.Kom, selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan tesis ini.
2. Seluruh dosen Departemen Matematika FMIPA-UI yang tidak dapat disebutkan satu persatu terutama Bu Bevina, Bu Kiki, Bu Bella, Bu Dian,Bu Nora, Bu Helen, Pak DJati, Pak Gatot, Pak Alhaji atas doa dan dukungan moril yang telah diberikan kepada penulis.
3. Ketua Departemen Matematika UI, Bapak Yudhi Satria.
4. Keluarga tercinta, terutama buat mama Yulmiar yang selalu mendampingi dan mendoakan penulis, buat papa (Alm) Afrizal K semoga beliau bangga disana, adikku M. Gary shafer, S.T makasih atas support, doa, dan motivasinya dan Roza Mendes, S.Sos makasih atas bantuan,doa, motivasi yg tiada henti serta seluruh keluarga yang tak hentinya mendukung penulis.
5. Teman-teman S2 Math UI angkatan 2008; Mas Susatyo, Uni frida, Mba betty, Mba Sari, Mba Endah, Mas Ketut dan Mas DiZul yang selalu hadir memberikan dukungan moril, materi dan motivasi kepada penulis selama perkuliahan berlangsung dan selama pengerjaan tesis ini.
6. Seluruh karyawan Departemen Matematika FMIPA-UI, Mba Santi, Mas Irwan, Mas Ratmin, Mba Rusmi, Da Salman, Pak Turino, Pak Saliman, Pak

Anshori dan Mas Tatang, yang telah membantu penulis dalam pengurusan administrasi selama perkuliahan maupun selama proses pembuatan tesis ini.

7. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu.

Akhir kata, saya berharap ALLAH SWT berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Penulis

Juli 2010

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Yessy Yusnita
NPM	:	0806420272
Program Studi	:	Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu dan Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Simulasi Arus Lalu Lintas dengan Menggunakan
Kecepatan Model Kerner Konhäuser

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan,mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal :16 Juli 2010
Yang menyatakan

(Yessy Yusnita)

ABSTRAK

Nama : Yessy Yusnita
Program Studi : Matematika
Judul : Simulasi Arus Lalu Lintas dengan Menggunakan Kecepatan Model Kerner Konhäuser

Dalam situasi nyata di suatu ruas jalan, kecepatan arus kendaraan tidak selalu dalam kondisi ekuilibrium. Model Kerner Konhäuser menyatakan bahwa kecepatan arus kendaraan merupakan aplikasi dari persamaan *Navier Stokes*. Kecepatan arus kendaraan model Kerner Konhäuser dicari dengan menggunakan pendekatan *finite difference*. Hasil perhitungan kecepatan ini akan digunakan pada penyelesaian persamaan konservasi untuk mendapatkan nilai kepadatan arus lalu lintas. Kepadatan arus lalu lintas ini dihitung dengan menggunakan metode MacCormack. Tesis ini juga akan menganalisa pengaruh kecepatan arus kendaraan model Kerner Konhäuser terhadap kepadatan arus lalu lintas pada persamaan konservasi. Simulasi kecepatan arus kendaraan model Kerner Konhäuser dan kepadatan arus lalu lintas dilakukan pada suatu ruas jalan dengan jalur tunggal. Hasil simulasi menunjukkan bahwa kecepatan arus kendaraan akan meningkat jika kepadatan arus lalu lintas menurun dan kecepatan arus kendaraan akan menurun jika kepadatan arus lalu lintas meningkat.

Kata Kunci : model Kerner-Konhäuser, persamaan *Navier Stokes*, persamaan konservasi, jalur tunggal, metode aproksimasi *finite difference*, metode MacCormack.

vii + 40 halaman ; 7 gambar, 4 tabel
Daftar Pustaka : 12 (1955-2008)

ABSTRACT

Name : Yessy Yusnita
Study Program : Mathematic
Title : Traffic Flow Simulation with Using Velocity Kerner Konhäuser Model.

In the real situation, the vehicle flow velocity on a road are not always in an equilibrium situation. The Kerner Konhäuser model illustrate that the vehicle flow velocity is an application of the Navier Stokes equation. The model is solved numerically by using the finite difference approach to calculate the flow velocity. The result will be used in solve the conservation equations in order to the density of traffic flow. The traffic density is calculated by using the MacCormack method. The aim of this thesis is to analyze the effect of the vehicle flow velocity Kerner Konhäuser model is on the density of traffic flow which satisfy the conservation equation. The Simulation is carried on a single-lane road section. The results show that the vehicle flow velocity will increase if the density of the traffic flow decreases and the vehicle flow velocity will decrease if the density of traffic flow increases.

Key Words : Kerner-Konhäuser model, Navier Stokes equation, conservation equation, single-lane, approximate finite difference method, MacCormack method.
viii + 40 pages ; 7 pictures; 4 table
Bibliography : 12 (1955-2008)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Arus lalu lintas terbentuk dari kendaraan-kendaraan yang melakukan interaksi antara satu dengan lainnya pada suatu jalan raya. Interaksi antar kendaraan tersebut mempengaruhi pergerakan arus lalu lintas di jalan raya, akibatnya arus lalu lintas terkadang lancar dan bisa saja tidak lancar. Akibat tidak lancarnya arus lalu lintas dapat menimbulkan masalah di jalan raya. Masalah arus lalu lintas yang sering terjadi di jalan raya adalah kemacetan.

Kemacetan adalah situasi tersendatnya atau terhentinya arus lalu lintas yang disebabkan terhambatnya mobilitas kendaraan oleh faktor-faktor seperti; perbandingan jumlah kendaraan dengan ruas jalan yang tersedia tidak seimbang, umur dan jenis kendaraan yang melintasi jalan raya pada jalur dan waktu yang sama, tidak tersedianya transportasi publik yang baik, dan adanya kecelakaan lalu lintas. Akibat dari kemacetan arus lalu lintas tersebut, timbul banyak dampak negatif di jalan raya.

Dampak negatif akibat kemacetan diantaranya adalah; ketidakstabilan arus lalu lintas, kerugian waktu, pemborosan energi, peningkatan polusi udara, peningkatan stres pengguna jalan, gangguan kelancaran kendaraan darurat seperti ambulans dan pemadam kebakaran. Oleh karena banyaknya dampak negatif yang disebabkan oleh kemacetan arus lalu lintas tersebut, maka pembahasan masalah arus lalu lintas menjadi suatu topik yang penting untuk dikaji lebih lanjut.

Masalah arus lalu lintas di jalan raya dapat dipengaruhi oleh kecepatan arus lalu lintas, kepadatan arus lalu lintas, arus lalu lintas, posisi kendaraan dan waktu, yang dinyatakan sebagai variabel-variabel yang ada di jalan raya. Arus lalu lintas di suatu ruas jalan raya dapat dimodelkan berdasarkan variabel-variabel yang ada di jalan raya tersebut dan arus lalu lintas juga memenuhi suatu persamaan konservasi. Pada persamaan konservasi ini terdapat hubungan antara kecepatan, kepadatan dan arus yang dikenal sebagai prinsip dasar pada arus lalu lintas.

Terdapat tiga jenis model yang dapat digunakan sebagai pendekatan fenomena arus lalu lintas [4], yaitu :

a. **Model Mikroskopik**

Model ini memodelkan respon aktual dari kecepatan suatu kendaraan terhadap kecepatan kendaraan di depannya. Variabel pada model ini dinyatakan berdasarkan posisi kendaraan dan waktu.

b. **Model Makroskopik**

Model ini dicari berdasarkan persamaan dinamika arus lalu lintas. Arus lalu lintas pada model makroskopik ini dinyatakan berdasarkan hubungan tiga variabel, yaitu kecepatan arus lalu lintas, kepadatan arus lalu lintas, dan arus lalu lintas.

c. **Model Kinetik**

Model ini merupakan level menengah antara model mikroskopik dan model makroskopik. Model kinetik dapat dicari melalui model mikroskopik.

Model mikroskopik dapat dibagi menjadi beberapa jenis model, diantaranya adalah model *car-following*, model *microscopic simulations*, model *submicroscopic simulation*, dan model *cellular automato*. Sedangkan pada model makroskopik beberapa model yang dapat digunakan adalah model Lighthill-Whitham-Richard, model Payne, model Kerner Konhäuser, dan model Helbing [4].

Pada penulisan ini dilakukan simulasi model makroskopik dengan model kecepatan arus lalu lintas yang digunakan adalah model Kerner Konhäuser. Karena terdapat kendala dalam mencari solusi eksak untuk kecepatan arus lalu lintas pada model Kerner Konhäuser, maka digunakan metode numerik. Metode yang digunakan adalah metode aproksimasi *finite difference*. Sedangkan untuk menghitung kepadatan arus lalu lintas dari persamaan konservasi dihitung menggunakan metode MacCormack.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada penulisan ini adalah bagaimana mengetahui pengaruh kecepatan arus lalu lintas pada model Kerner Konhäuser terhadap kepadatan arus lalu lintas pada persamaan konservasi dengan menggunakan metode MacCormack.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tesis ini adalah menganalisa pengaruh kecepatan arus lalu lintas pada model Kerner Konhäuser terhadap kepadatan arus lalu lintas pada persamaan konservasi dengan menggunakan metode MacCormack.

1.4 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan tesis ini adalah :

a. Ruas jalan raya diasumsikan hanya jalur tunggal.
b. Model makroskopik yang dibahas adalah model dengan kecepatan arus lalu lintas memenuhi model Kerner Konhäuser.
c. Metode numerik yang digunakan untuk menghitung kecepatan arus lalu lintas pada model Kerner Konhäuser adalah metode aproksimasi *finite difference*.
d. Metode MacCormack digunakan untuk menghitung kepadatan arus lalu lintas sesuai dengan persamaan konservasi pada suatu ruas jalan berdasarkan kecepatan yang memenuhi model Kerner Konhäuser.

1.5 Sistematika Penulisan

Tesis ini akan disusun dalam lima bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut :

BAB 1 : PENDAHULUAN

Menjelaskan latar belakang dilakukannya penelitian, perumusan masalah, tujuan penelitian, pembatasan masalah dan sistematika penulisan.

BAB 2 : TEORI ARUS LALU LINTAS

Membahas mengenai variabel-variabel dasar arus lalu lintas yang digunakan pada model makroskopik, yaitu variabel kecepatan arus lalu lintas, variabel arus lalu lintas dan variabel kepadatan arus lalu lintas. Pada bagian ini juga ditunjukkan bahwa variabel-variabel dasar ini memenuhi persamaan konservasi dan kecepatan arus lalu lintas diaplikasikan sesuai dengan persamaan *Navier Stokes*. Pada bab ini juga dibahas metode aproksimasi *finite difference*, metode MacCormack yang akan digunakan untuk melakukan simulasi arus lalu lintas di suatu ruas jalan.

BAB 3 : MODEL KECEPATAN KERNER KONHÄUSER

Bab ini membahas kecepatan arus lalu lintas yang merupakan aplikasi dari persamaan *Navier Stokes* yang dikenal sebagai model Kerner Konhäuser dan penyelesaian model Kerner Konhäuser menggunakan metode *finite difference*. Pada bab ini juga dibahas penyelesaian persamaan konservasi dengan menggunakan metode MacCormack.

BAB 4 : SIMULASI ARUS LALU LINTAS

Bab ini memaparkan hasil simulasi dari kecepatan berdasarkan model Kerner Konhäuser untuk menyelesaikan persamaan konservasi pada suatu ruas jalan.

BAB 5 : PENUTUP

Berisi kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian yang telah dilakukan serta saran yang dapat diberikan atas hasil penelitian.

BAB 2
TEORI ARUS LALU LINTAS

Pada bab ini akan dibahas tentang definisi variabel-variabel yang mempengaruhi arus lalu lintas, hubungan dasar antara kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas, persamaan konservasi serta teori-teori yang dibutuhkan terkait dengan penyelesaian model kecepatan Kerner Konhäuser.

2.1 Definisi Variabel-Variabel Pada Arus Lalu Lintas

Pada subbab ini dijelaskan tentang definisi dari variabel-variabel pada arus lalu lintas yaitu definisi kecepatan arus lalu lintas, definisi arus lalu lintas, dan definisi kepadatan arus lalu lintas. Variabel-variabel ini merupakan variabel dasar, karena pergerakan arus lalu lintas sangat ditentukan oleh variabel-variabel tersebut. Definisi pertama dimulai dengan mendefinisikan kecepatan.

Definisi 2.1.1

- Kecepatan kendaraan, yang dinotasikan dengan V, adalah perubahan posisi kendaraan per satuan waktu, dengan satuan km/jam [2].
- Kecepatan arus lalu lintas adalah kecepatan rata-rata dari semua kendaraan pada suatu aliran di suatu ruas jalan, dengan satuan km/jam [2].

Pada penulisan tesis ini, kecepatan yang digunakan adalah kecepatan arus lalu lintas. Pada umumnya kecepatan arus lalu lintas yang diukur adalah kecepatan rata-rata dari semua kendaraan selama menempuh jalan tertentu. Kecepatan rata-rata ini dihitung dengan membagi panjang ruas jalan dengan waktu tempuh rata-rata dari semua kendaraan yang melintasi ruas jalan tersebut. Jika t_i adalah waktu tempuh kendaraan ke-i, dengan $i = 1,2,\dots,n$ maka untuk n kendaraan didapat waktu tempuh rata-rata adalah :

$$t_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$

Jika waktu tempuh untuk n kendaraan yang melintasi suatu ruas jalan dengan panjang L adalah $t_1, t_2, \dots, t_n$ maka kecepatan rata-rata kendaraan atau kecepatan arus dapat dihitung dengan,

$$\bar{V} = \frac{L}{t_a}.$$

Setelah dijelaskan definisi dari kecepatan arus lalu lintas, berikut ini akan dijelaskan definisi dari arus lalu lintas.

Definisi 2.1.2

Arus lalu lintas, yang dinotasikan dengan q, adalah banyaknya kendaraan yang melintasi bagian ruas jalan raya selama satu interval waktu dengan satuan banyak kendaraan/jam [2].

Arus lalu lintas diperoleh berdasarkan banyaknya kendaraan yang diamati pada suatu ruas jalan raya per satuan waktu. Untuk memperjelas hal ini dapat melihat contoh berikut : misalkan pada suatu ruas jalan raya terdapat 100 kendaraan yang diamati dalam periode 15 menit. Jadi arus lalu lintasnya adalah $q = 100$ kendaraan/15 menit atau $q = 400$ kendaraan/jam.

Selanjutnya akan dijelaskan definisi dari kepadatan arus lalu lintas.

Definisi 2.1.3

Kepadatan arus lalu lintas, yang dinotasikan dengan ρ, adalah banyaknya kendaraan yang terdapat di sepanjang ruas jalan tertentu dengan satuan banyak kendaraan/km [2].

Jika kepadatan arus lalu lintas padat, maka jarak antar kendaraan sangat dekat. Sebaliknya, jika kepadatan arus lalu lintas jarang, maka jarak antar kendaraan cukup jauh.

Kepadatan arus lalu lintas pada suatu jalan raya dapat dihitung berdasarkan rumus berikut:

$$\rho = \frac{q}{V} \qquad (2.1.1)$$

dengan q menyatakan arus lalu lintas (banyak kendaraan/jam), V menyatakan kecepatan arus lalu lintas (km/jam), dan ρ menyatakan kepadatan arus lalu lintas (banyak kendaraan/km).

Menurut Hoogendoorn, P.S dan Bovy, Piet H.L [4], hubungan antara arus lalu lintas, kepadatan arus lalu lintas dan kecepatan arus lalu lintas pada suatu ruas jalan raya adalah

$$q = \rho V. \tag{2.1.2}$$

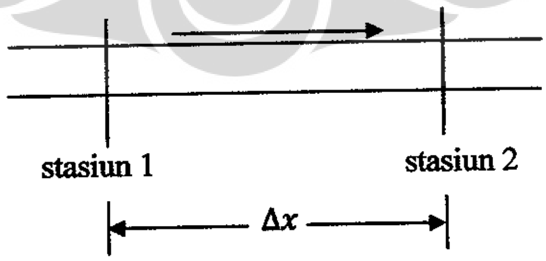
Persamaan (2.1.2) dikenal sebagai prinsip dasar pada arus lalu lintas.

Sebagai contoh, jika pada suatu ruas jalan raya terdapat arus sebesar 1000 kendaraan/jam dan kecepatan kendaraan 50 km/jam maka kepadatan arus lalu lintas pada jalan raya tersebut adalah $\rho = \frac{1000}{50} = 20$ kendaraan/km.

Setelah membahas definisi dari variabel-variabel yang ada pada arus lalu lintas, berikut ini akan ditunjukkan bahwa arus lalu lintas memenuhi persamaan konservasi. Pada persamaan tersebut terdapat hubungan antara variabel kepadatan arus lalu lintas, variabel arus lalu lintas dan variabel kecepatan arus lalu lintas.

2.2 Persamaan Konservasi

Misalkan pada suatu ruas jalan raya satu jalur terdapat 2 stasiun yaitu stasiun 1 sebagai tempat masuknya aliran kendaraan dan stasiun 2 sebagai tempat keluarnya aliran kendaraan. Pada ruas jalan tersebut tidak ada tempat aliran masuk dan aliran keluar yang lain, seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut :



Gambar 2.1 Konservasi Kendaraan [sumber : Kunhe dan Michalopoulus,1997]

dimana Δx menyatakan jarak antara dua stasiun dan Δt menyatakan durasi waktu tempuh kendaraan dari stasiun 1 ke stasiun 2.

Misalkan : N_1 menyatakan banyaknya kendaraan yang masuk melewati stasiun 1 selama waktu Δt.

N_2 menyatakan banyaknya kendaraan yang keluar melewati stasiun 2 selama waktu Δt.

q_1 menyatakan arus kendaraan yang masuk melewati stasiun 1.

q_2 menyatakan arus kendaraan yang keluar melewati stasiun 2.

Asumsikan $N_1 > N_2$, yaitu banyaknya kendaraan yang masuk melewati stasiun 1 lebih banyak dibandingkan kendaraan yang keluar melewati stasiun 2. Keadaan ini dapat diterima karena tidak terdapatnya tempat lain untuk penambahan dan pengurangan kendaraan masuk atau kendaraan keluar. Pada asumsi ini berarti ada penumpukan kendaraan antara stasiun 1 dan stasiun 2, sehingga dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut :

$$\Delta N = (N_2 - N_1) \qquad (2.2.1)$$

maka ΔN dengan asumsi diatas bernilai negatif.

Berdasarkan penjelasan diatas, arus kendaraan di stasiun 1 selama waktu Δt adalah :

$$q_1 = \frac{N_1}{\Delta t}.$$

Sedangkan arus kendaraan di stasiun 2 selama waktu Δt adalah :

$$q_2 = \frac{N_2}{\Delta t}.$$

Jika $q_2 - q_1 = \Delta q$, maka,

$$\Delta q = \frac{N_2 - N_1}{\Delta t}$$

atau dapat ditulis menjadi,

$$\Delta q = \frac{\Delta N}{\Delta t} \qquad (2.2.2)$$

dimana Δq menyatakan perubahan arus kendaraan pada jarak Δx pada waktu Δt.

Perhatikan gambar 2.1, jika Δx adalah panjang ruas jalan yang cukup pendek sehingga kepadatan arus lalu lintas pada ruas jalan tersebut bersifat *uniform*, maka peningkatan kepadatan arus lalu lintas antara stasiun 1 dan stasiun 2 selama interval waktu Δt adalah :

$$\Delta\rho = -\frac{(N_2 - N_1)}{\Delta x} = -\frac{\Delta N}{\Delta x}$$

atau dapat dituliskan kembali menjadi :

$$\Delta \mathrm{N} = -\Delta\rho\,\Delta x \qquad (2.2.3)$$

Jika persamaan (2.2.3) disubstitusi ke persamaan (2.2.2) maka diperoleh :

$$\Delta q = \frac{-\Delta\rho\,\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2.4)$$

atau persamaan (2.2.4) dapat ditulis kembali menjadi :

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} + \frac{\Delta q}{\Delta x} = 0 \qquad (2.2.5)$$

Jika $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$, maka persamaan (2.2.5) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \qquad (2.2.6)$$

Dengan menggunakan prinsip dasar arus lalu lintas yaitu persamaan (2.1.2) maka persamaan (2.2.6) diperoleh :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0 \qquad (2.2.7)$$

Persamaan (2.2.7) diatas disebut persamaan konservasi yaitu suatu persamaan yang menyatakan bahwa arus kendaraan pada ruas jalan satu arah dipertahankan untuk semua kendaraan di posisi x dan pada waktu t [6].

Sesuai dengan prinsip dasar arus lalu lintas yang ditunjukkan oleh persamaan (2.1.2), subbab berikut ini akan menjelaskan hubungan antara kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas pada arus lalu lintas disuatu ruas jalan.

2.3 Hubungan Kecepatan Arus Lalu Lintas dan Kepadatan Arus Lalu Lintas

Prinsip dasar arus lalu lintas adalah $q = \rho V$, sehingga untuk suatu arus lalu lintas pada ruas jalan raya tertentu, kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas saling berhubungan.

Pada saat mengemudi kendaraan di jalan raya, pengemudi kendaraan akan menaikkan kecepatan saat kepadatan arus lalu lintas menurun dan pengemudi kendaraan akan mengurangi kecepatan pada saat kepadatan arus lalu lintas mulai meningkat. Sehingga kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas dapat dinyatakan dengan persamaan $V = V(\rho)$ yang menyatakan bahwa kecepatan arus lalu lintas adalah fungsi dari kepadatan arus lalu lintas. Sesuai dengan kondisi diatas, maka fungsi $V(\rho)$ akan memenuhi [5] :

(i) Jika tidak ada kendaraan lain yang melintasi suatu jalan raya maka kecepatan arus lalu lintas akan menjadi maksimum, yang dapat dinyatakan dengan :

$$V(0) = V_{max}$$

V_{max} dapat ditetapkan sesuai dengan aturan yang ada di jalan raya tersebut.

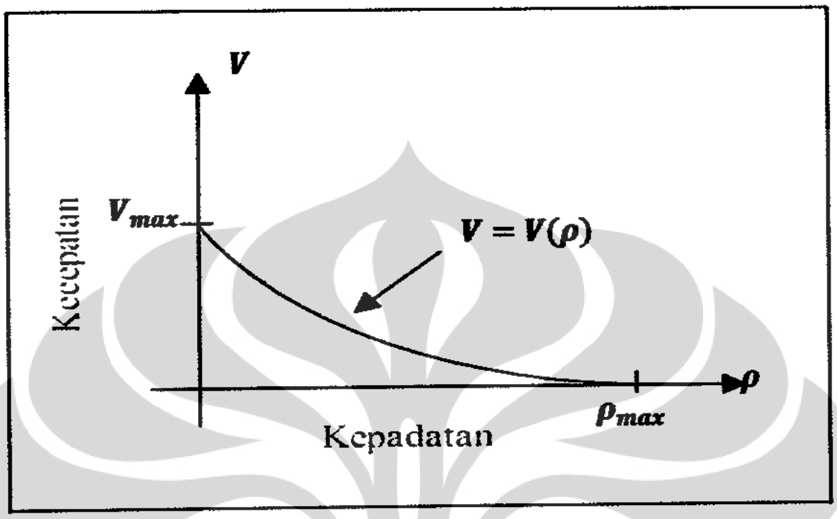
(ii) Jika kepadatan arus lalu lintas pada suatu jalan raya adalah maksimum maka pengemudi kendaraan tidak dapat menjalankan kendaraannya, yang dapat dinyatakan dengan :

$$V(\rho_{max}) = 0.$$

(iii) Kecepatan arus lalu lintas terus menerus akan berkurang dengan bertambahnya kepadatan arus lalu lintas, yang dapat dinyatakan dengan :

$$\frac{dV}{d\rho} \leq 0.$$

Berdasarkan kondisi lalu lintas tersebut, hubungan antara kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas dapat digambarkan seperti kurva pada gambar 2.2 dibawah ini.



Gambar 2.2 Kurva Hubungan Kecepatan Arus Lalu Lintas dan Kepadatan arus lalu lintas [Sumber : Elbes, 2005].

Untuk arus lalu lintas dengan kecepatan semua kendaraan sama maka kecepatan arus lalu lintas dapat dinyatakan dengan $V = V_e(\rho)$ atau disebut sebagai kecepatan ekuilibrium [3]. Pada kenyataannya kecepatan ekuilibrium ini tidak menggambarkan kondisi nyata yang ada di jalan raya. Perubahan-perubahan kecepatan arus lalu lintas yang terjadi pada lalu lintas bisa disebabkan oleh banyak hal. Perubahan-perubahan kecepatan arus lalu lintas yang terjadi dapat diambil berdasarkan persamaan *Navier Stokes*. Pada subbab berikut akan dijelaskan tentang persamaan *Navier Stokes.*

2.4 Persamaan *Navier Stokes*

Persamaan *Navier Stokes* adalah suatu persamaan yang menjelaskan tentang pergerakan suatu fluida [12]. Aliran pada fluida dibagi menjadi dua yaitu aliran kompresibel dan aliran inkompresibel. Suatu aliran dikatakan kompresibel jika aliran tersebut mengalami perubahan volume bila diberi tekanan. Sebaliknya, jika tidak mengalami perubahan volume dikatakan aliran tersebut inkompresibel [12].

Persamaan *Navier Stokes* dinyatakan dalam persamaan differensial berikut dalam arah-arah x, y, z [12] :

- $\rho(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$
- $\rho(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$
- $\rho(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$

dimana : ρ menyatakan kepadatan fluida (kg/m^3),
v menyatakan kecepatan fluida (m/detik),
x, y, z menyatakan arah-arah aliran fluida,
t menyatakan waktu (detik),
g menyatakan gaya gravitasi (m/detik^2),
μ menyatakan kekentalan fluida (viskositas) (kg/m.detik),
P menyatakan tekanan fluida (kg.m/detik^2).

Persamaan – persamaan *Navier Stokes* diatas dapat dinyatakan di dalam bentuk yang lebih ringkas didalam persamaan vektor tunggal yaitu :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 v \tag{2.4.1}$$

dimana ∇ menyatakan operator untuk vektor.

Persamaan (2.4.1) ini merupakan persamaan *Navier Stokes* untuk aliran inkompresibel.

Jika aliran invisid atau aliran tidak kental ($\mu = 0$), maka persamaan (2.4.1) akan menjadi [12] :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g - \nabla P \tag{2.4.2}$$

Karena arus lalu lintas kendaraan di jalan raya dinyatakan sebagai hubungan tiga variabel kecepatan, kepadatan, dan arus, maka arus lalu lintas kendaraan dapat digambarkan sebagai sebuah aliran fluida. Sehingga arus lalu lintas dapat diperlakukan sama dengan aliran fluida. Secara analog, arus lalu lintas dinyatakan sebagai fluida satu dimensi, dimana aliran arus lalu lintas hanya satu arah. Pada arus lalu lintas, jika gaya gravitasi dan viskositas diabaikan maka

$g = 0$ dan $\mu = 0$. Viskositas pada arus lalu lintas menyatakan berat dan jenis kendaraan.

Sehingga berdasarkan persamaan *Navier Stokes* (2.4.2) dan ditambah gaya yang ada pada aliran lalu lintas, maka arus lalu lintas kendaraan pada suatu ruas jalan satu arah dan satu dimensi dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + X \qquad (2.4.3)$$

dimana : ρ menyatakan kepadatan arus lalu lintas (banyak kendaraan/km),

V menyatakan kecepatan arus lalu lintas (km/jam),

x menyatakan posisi kendaraan (km),

t menyatakan waktu (jam),

τ menyatakan waktu relaksasi kendaraan (jam),

P menyatakan tekanan arus lalu lintas (banyak kendaraan.km/jam).

dengan X merupakan jumlah gaya dari interaksi antar kendaraan yang ada pada aliran arus lalu lintas. Menurut Hoogendoorn, P.S and Bovy, Piet H.L [4], X pada persamaan (2.4.3) dinyatakan sebagai berikut :

$$X = \frac{\rho(V_e(\rho) - V)}{\tau} \qquad (2.4.4)$$

dimana $V_e(\rho)$ menyatakan kecepatan yang ekuilibrium.

Dengan mensubstitusi persamaan (2.4.4) pada persamaan (2.4.3) maka diperoleh persamaan berikut :

$$\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho(V_e(\rho) - V)}{\tau} \qquad (2.4.5)$$

Menurut Miyashita, K dan Kawamura, T [8], tekanan arus lalu lintas pada persamaan (2.4.5) dinyatakan sebagai berikut :

$$P(x,t) = \rho\Theta - \eta_0\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (2.4.6)$$

dengan Θ menyatakan variansi kecepatan $(\text{km/jam})^2$,

η_0 menyatakan koefisien viskositas (km/jam).

Jika nilai kecepatan arus lalu lintas di suatu ruas jalan memenuhi persamaan *Navier Stokes,* maka kecepatan arus lalu lintas di ruas jalan tersebut akan memenuhi persamaan (2.4.5) yang dikenal sebagai model Kerner Konhäuser [8]. Model ini akan digunakan pada penulisan tesis ini untuk mencari nilai kecepatan arus lalu lintas yang tidak dalam keadaan ekuilibrium.

Karena nilai kecepatan arus lalu lintas pada model Kerner Konhäuser memenuhi persamaan diferensial parsial (2.4.5) maka untuk menghitung nilai kecepatan arus lalu lintas digunakan metode aproksimasi *finite difference* pada turunan pertama. Pada subbab berikut akan dibahas mengenai penyelesaian numerik untuk turunan pertama.

2.5 Penyelesaian Numerik untuk Turunan Suatu Fungsi

Untuk mendapatkan solusi numerik dari suatu persamaan diferensial parsial dapat digunakan beberapa metode numerik, salah satunya metode aproksimasi *finite difference*.

Metode aproksimasi *finite difference* adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk mengaproksimasi persamaan diferensial orde pertama dan orde kedua [1].

Misalkan f terdefinisi di $[a,b]$, dan $x+h, x, x-h \in [a,b]$ dengan h merupakan jarak antara dua titik, maka ekspansi deret Taylor untuk $f(x+h)$ dan $f(x-h)$ dinyatakan sebagai berikut :

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \qquad (2.5.1)$$

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \qquad (2.5.2)$$

Kemudian dari persamaan (2.5.1) dan (2.5.2), dengan mengabaikan semua suku selain suku pertama maka diperoleh persamaan berikut :

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x)$$

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x)$$

dimana suku yang diabaikan dianggap sebagai eror sehingga dari persamaan ini aproksimasi numerik untuk turunan pertama dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.5.3}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2.5.4}$$

Persamaan (2.5.3) dikenal sebagai *forward difference formula*, sedangkan persamaan (2.5.4) dikenal sebagai *backward difference formula.*

Jika persamaan (2.5.1) dan (2.5.2) dikurangi maka diperoleh :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

Dari persamaan ini dengan mengabaikan semua suku (dianggap sebagai eror) selain suku pertama maka diperoleh :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x)$$

sehingga dari persamaan ini aproksimasi numerik untuk turunan pertama adalah :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{2.5.5}$$

Persamaan (2.5.5) dikenal sebagai *center difference formula.*

Berdasarkan penjelasan diatas, berikut ini akan ditentukan aproksimasi *finite difference* untuk turunan pertama dan turunan kedua pada persamaan diferensial parsial.

Jika dua titik dipisahkan oleh *finite difference* $h = \Delta t$ dan $k = \Delta x$, maka hubungan yang dapat digunakan untuk fungsi V adalah deret Taylor berikut :

$$V(x,t+h) = V(x,t) + h\,V_t(x,t) + V_{tt}(x,t)\frac{h^2}{2!} + V_{ttt}(x,t)\frac{h^3}{3!} + \cdots \tag{2.5.6}$$

$$V(x,t-h) = V(x,t) - h\,V_t(x,t) + V_{tt}(x,t)\frac{h^2}{2!} - V_{ttt}(x,t)\frac{h^3}{3!} + \cdots \tag{2.5.7}$$

$$V(x+k,t) = V(x,t) + k\,V_x(x,t) + V_{xx}(x,t)\frac{k^2}{2!} + V_{xxx}(x,t)\frac{k^3}{3!} + \cdots \tag{2.5.8}$$

$$V(x-k,t) = V(x,t) - k\,V_x(x,t) + V_{xx}(x,t)\frac{k^2}{2!} - V_{xxx}(x,t)\frac{k^3}{3!} + \cdots \tag{2.5.9}$$

aproksimasi *finite difference* yang analog dengan turunan pertama dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.5.6),(2.5.7),(2.5.8),(2.5.9) diatas.

Dari persamaan (2.5.6) diperoleh :

$$V_t(x,t) = \frac{V(x,t+h) - V(x,t)}{h} - V_{tt}(x,t)\frac{h^2}{2} - V_{ttt}(x,t)\frac{h^3}{3!} - \cdots$$

Dari persamaan (2.5.7) diperoleh :

$$V_t(x,t) = \frac{V(x,t) - V(x,t-h)}{h} - V_{tt}(x,t)\frac{h^2}{2} + V_{ttt}(x,t)\frac{h^3}{3!} - \cdots$$

Dari persamaan (2.5.8) diperoleh :

$$V_x(x,t) = \frac{V(x+k,t) - V(x,t)}{k} - V_{xx}(x,t)\frac{k^2}{2} - V_{xxx}(x,t)\frac{k^3}{3!} - \cdots$$

Dari persamaan (2.5.9) diperoleh :

$$V_x(x,t) = \frac{V(x,t) - V(x-k,t)}{k} - V_{xx}(x,t)\frac{k^2}{2} + V_{xxx}(x,t)\frac{k^3}{3!} - \cdots$$

Jika persamaan (2.5.6) dan (2.5.7) dikurangi maka diperoleh :

$$V(x,t+h) - V(x,t-h) = 2h\, V_t(x,t) + V_{ttt}(x,t)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

dan jika persamaan (2.5.8) dan (2.5.9) dikurangi maka diperoleh :

$$V(x+k,t) - V(x-k,t) = 2h\, V_x(x,t) + V_{xxx}(x,t)\frac{k^3}{3!} + \cdots$$

Dari persamaan-persamaan ini diperoleh beberapa jenis metode aproksimasi *finite difference* pada turunan parsial dengan mengabaikan semua suku selain suku pertama sehingga diperoleh [10] :

- *forward difference*

$$V_x(x,t) = \frac{V(x+k,t) - V(x,t)}{k}$$

$$V_t(x,t) = \frac{V(x,t+h) - V(x,t)}{h}$$

- *backward diference*

$$V_x(x,t) = \frac{V(x,t) - V(x-k,t)}{k}$$

$$V_t(x,t) = \frac{V(x,t) - V(x,t-h)}{h}$$

- *cental diference*

$$V_x(x,t) = \frac{V(x+k,t) - V(x-k,t)}{2k}$$

$$V_t(x,t) = \frac{V(x,t+h) - V(x,t-h)}{2h}$$

Kecepatan arus lalu lintas pada persamaan (2.4.5) akan didekati dengan menggunakan metode aproksimasi *finite difference* yaitu dengan *center difference.*

Sehingga untuk turunan kedua *central diference* yang digunakan adalah :

$$V_{xx}(x,t) = \frac{V(x+h,t) - 2V(x,t) + V(x-h,t)}{h^2}$$

$$V_{tt}(x,t) = \frac{V(x,t+h) - 2V(x,t) + V(x,t-h)}{h^2}$$

Hasil perhitungan kecepatan dengan metode *center diference* ini akan digunakan pada perhitungan persamaan konservasi untuk mendapatkan kepadatan arus lalu lintas. Kepadatan arus lalu lintas ini dihitung dengan menggunakan metode MacCormack . Pada subbab berikut akan dijelaskan lebih lanjut tentang metode ini.

2.6 Metode MacCormack

Metode MacCormack adalah suatu metode perluasan *finite difference* untuk solusi numerik dari persamaan differensial parsial hiperbolik.

Metode ini digunakan untuk untuk mencari solusi numerik dari persamaan konservasi yaitu persamaan (2.2.7). Bentuk umum persamaan diferensial parsial hiperbolik dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{2.6.1}$$

dimana ρ menyatakan kepadatan arus lalu lintas, x menyatakan posisi kendaraan, t menyatakan waktu, dan a menyatakan kecepatan arus lalu lintas.

Persamaan (2.6.1) analog dengan persamaan konservasi jika kecepatan arus lalu lintas (V) pada persamaan (2.2.7) merupakan konstanta. Maka untuk penyelesaian persamaan konservasi digunakan metode MacCormack berdasarkan persamaan (2.6.1) dengan a merupakan kecepatan arus lalu lintas model Kerner Konhäuser.

Metode MacCormack yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan (2.6.1) terdiri dari dua langkah yaitu Langkah Prediktor dan Langkah Korektor [10].

Langkah Prediktor :

Dalam langkah prediktor ini, nilai ρ diposisi ke-x pada waktu $t+1$ ditunjukkan dengan $\rho_x^{\overline{t+1}}$ yang dihitung berdasarkan persamaan berikut :

$$\rho_x^{\overline{t+1}} = \rho_x^{\,t} - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(\rho_{x+1}^{\,t} - \rho_x^{\,t}) \tag{2.6.2}$$

Langkah Korektor :

Dalam langkah korektor, nilai prediksi $\rho_x^{\overline{t+1}}$ digunakan untuk menghitung $\rho_x^{\,t+1}$ berdasarkan persamaan berikut:

$$\rho_x^{\,t+1} = \rho_x^{\,t+1/2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\rho_x^{\overline{t+1}} - \rho_{x-1}^{\overline{t+1}}\right)$$

dengan $\rho_x^{\,t+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_x^{\,t} + \rho_x^{\overline{t+1}}}{2}$

sehingga langkah korektor dapat dinyatakan kembali sebagai berikut :

$$\rho_x^{\,t+1} = \frac{\rho_x^{\,t} + \rho_x^{\overline{t+1}}}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\rho_x^{\overline{t+1}} - \rho_{x-1}^{\overline{t+1}}\right) \tag{2.6.3}$$

Persamaan (2.6.2) dan (2.6.3) inilah yang akan digunakan untuk menghitung nilai kepadatan arus lalu lintas pada persamaan konservasi.

Untuk melakukan perhitungan kecepatan dan kepadatan disuatu posisi pada waktu tertentu, maka akan dilakukan diskritisasi posisi x dan waktu t.

- Jika ruas jalan sepanjang L dibagi menjadi N buah titik maka,

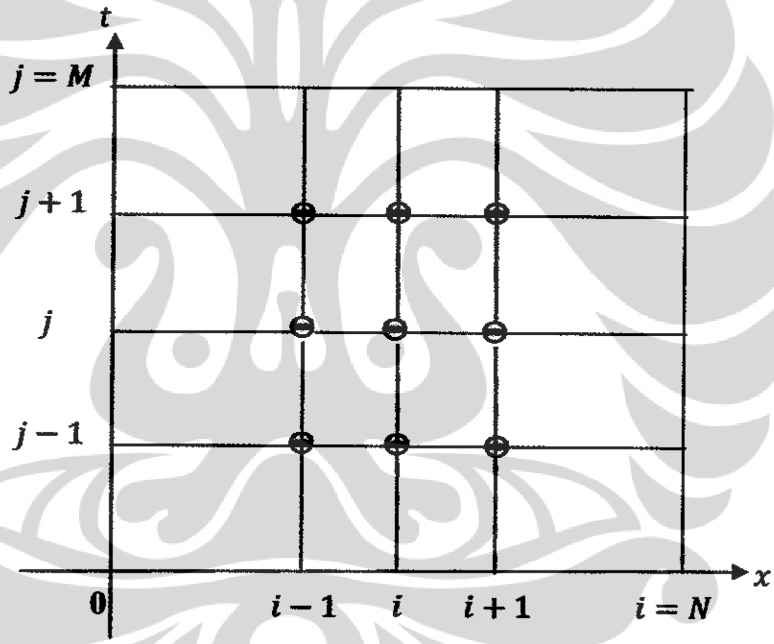
$$\Delta x = \frac{L}{N}$$

- Jika dilakukan pengamatan selama T satuan waktu maka akan dibagi waktu pengamatan sebanyak M kali sehingga,

  $$\Delta t = \frac{T}{M}$$

- Jika setiap *node* dinotasikan dengan (x_i, t_j), maka kecepatan arus lalu lintas pada *node* (x_i, t_j) ditulis dengan V_i^j, dan kepadatan arus lalu lintas pada pada *node* (x_i, t_j) ditulis dengan ρ_i^j.

Jika dua variabel bebas x, t yang kontinu diganti dengan variabel diskrit dengan nama yang sama x, t, maka variabel-variabel baru ini didefinisikan pada titik diskritisasi seperti pada gambar 2.3 berikut.



Gambar 2.3 Titik-titik Diskritisasi

Pada gambar 2.3, domain pada x dibagi menjadi N segment yang sama besar yaitu Δx dan nilai dari variabel diskrit x pada sebuah titik adalah :

$$x_i = i(\Delta x), \text{ dengan } i = 0,1,2,\dots,N.$$

Hubungan antara variabel diskrit x adalah :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \text{ dan } x_{i-1} = x_i - \Delta x$$

Sedangkan untuk variabel diskrit t, dibagi menjadi M segment yang sama besar yaitu Δt dan nilai dari variabel diskrit t pada sebuah titik adalah :

$$t_j = j(\Delta t), \text{ dengan } j = 0,1,2,\ldots,M.$$

Hubungan antara variabel diskrit t adalah :

$$t_{j+1} = t_j + \Delta t \quad \text{dan } t_{j-1} = t_j - \Delta t$$

Node (x_i, t_j) disebut *grid point* atau *mesh point*, dan pada titik-titik inilah akan dicari solusi numerik dari kecepatan dan kepadatan [10].

Pada bab ini telah dibahas teori dan metode yang akan digunakan untuk menyelesaikan model kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas. Pada Bab III berikut akan dijelaskan mengenai model kecepatan Kerner Konhäuser.

BAB 3
MODEL KECEPATAN KERNER KONHÄUSER

Pada bab II telah dijelaskan teori-teori yang berkaitan dengan model Kerner Konhäuser, sedangkan pada bab ini akan dibahas mengenai model Kerner Konhäuser. Penyelesaian untuk model Kerner Konhäuser menggunakan metode aproksimasi *finite difference* sedangkan hasil perhitungan kecepatan yang diperoleh dari model Kerner Konhäuser akan digunakan pada proses penyelesaian persamaan konservasi.

Subbab berikut ini akan dibahas mengenai model Kerner Konhäuser.

3.1 Model Kerner Konhäuser

Model Kerner Konhäuser merupakan model kecepatan arus lalu lintas. Pada subbab 2.4 sebelumnya, telah dijelaskan bahwa model Kerner Konhäuser diperoleh dengan mengaplikasikan persamaan *Navier Stokes*. Sehingga Model Kerner Konhäuser dinyatakan dengan persamaan (2.4.5) berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\tau}(V_e(\rho) - V)$$

dimana tekanan arus lalu lintas (P) dinyatakan sebagai persamaan (2.4.6) berikut :

$$P(x,t) = \rho\Theta - \eta_0 \frac{\partial v}{\partial x}$$

dengan Θ dan η_0 diasumsikan sebagai konstanta.

Dalam perhitungan, model Kerner Konhäuser ini tidak dapat dicari secara analitik, sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk menyelesaikan model ini. Metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan model Kerner Konhäuser adalah metode aproksimasi *finite difference*. Melalui metode ini, kecepatan arus arus lalu lintas di posisi ke-x pada waktu t dapat dicari dan akan dibahas lebih lanjut pada subbab 3.2 berikut.

3.2 Penyelesaian Model Kerner Konhäuser Menggunakan Metode *Finite Difference*

Pada subbab ini akan dilakukan perhitungan kecepatan arus lalu lintas dari model Kerner Konhäuser dengan menggunakan metode aproksimasi *finite difference*. Metode aproksimasi *finite diference* telah dijelaskan pada subbab 2.5 sebelumnya dan dalam menyelesaikan model Kerner Konhäuser jenis metode aproksimasi *finite difference* yang digunakan adalah *center difference*.

Pada persamaan (2.4.5) terdapat turunan parsial $P(x,t)$ yaitu $\frac{\partial P}{\partial x}$, maka jika persamaan (2.4.6) diturunkan terhadap x, diperoleh :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\Theta - \eta_0 \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \Theta\frac{\partial \rho}{\partial x} - \eta_0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{3.2.1}$$

Pada persamaan (2.4.5) dan (3.2.1) terdapat turunan-turunan parsial, dimana persamaan pada *center difference* akan disubstitusi ke turunan-turunan parsial tersebut untuk menghitung kecepatan arus lalu lintas. Rumus *center difference* untuk turunan-turunan parsial pada persamaan (2.4.5) dan (3.2.1) adalah sebagai berikut :

- Perubahan kecepatan arus lalu lintas terhadap waktu

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V_t(x,t) = \frac{V(x,t+k) - V(x,t-k)}{2k} \tag{3.2.2}$$

- Perubahan kecepatan arus lalu lintas terhadap jarak

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_x(x,t) = \frac{V(x+h,t) - V(x-h,t)}{2h} \tag{3.2.3}$$

- Perubahan kepadatan arus lalu lintas terhadap jarak

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_x(x,t) = \frac{\rho(x+h,t) - \rho(x-h,t)}{2h} \tag{3.2.4}$$

- Perubahan (turunan kedua) kecepatan arus lalu lintas terhadap jarak

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx}(x,t) = \frac{V(x+h,t) - V(x,t) + V(x-h,t)}{h^2} \tag{3.2.5}$$

Jika $x = x_i$ dan $t = t_j$ dan variabel diskrit x dan t adalah:

$$x_{i+1} = x_i + h \text{ dan } x_{i-1} = x_i - h$$

$$t_{j+1} = t_j + k \text{ dan } t_{j-1} = t_j - k$$

dinotasikan $V(x_i, t_j) = V_i^j$.

Maka persamaan (3.2.2),(3.2.3),(3.2.4), dan (3.2.5) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

- Perubahan kecepatan arus lalu lintas terhadap waktu pada persamaan (3.2.2) menjadi :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V_t(x_i, t_j) = \frac{V(x_i, t_j + k) - V(x_i, t_j - k)}{2k}$$

$$= \frac{V(x_i, t_{j+1}) - V(x_i, t_{j-1})}{2k}$$

$$= \frac{V_i^{j+1} - V_i^{j-1}}{2k}$$

- Perubahan kecepatan arus lalu lintas terhadap jarak pada persamaan (3.2.3) menjadi :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_x(x_i, t_j) = \frac{V(x_i + h, t_j) - V(x_i - h, t_j)}{2h}$$

$$= \frac{V(x_{i+1}, t_j) - V(x_{i-1}, t_j)}{2h}$$

$$= \frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2h}$$

- Perubahan kepadatan arus lalu lintas terhadap jarak pada persamaan (3.2.4) menjadi :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_x(x_i, t_j) = \frac{\rho(x_i + h, t_j) - \rho(x_i - h, t_j)}{2h}$$

$$= \frac{\rho(x_{i+1}, t_j) - \rho(x_{i-1}, t_j)}{2h}$$

$$= \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j}{2h}$$

- Perubahan (turunan kedua) kecepatan arus lalu lintas terhadap jarak pada persamaan (3.2.5) menjadi :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx}(x_i, t_j) = \frac{V(x_i + h, t_j) - V(x_i, t_j) + V(x_i - h, t_j)}{h^2}$$

$$= \frac{V(x_{i+1}, t_j) - V(x_i, t_j) + V(x_{i-1}, t_j)}{h^2}$$

$$= \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h^2}$$

Hasil turunan parsial dengan menggunakan persamaan *center difference* ini akan disubstitusikan kembali ke persamaan (2.4.5) berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\tau}(V_e(\rho) - V)$$

dimana substitusi dilakukan sesuai dengan turunan yang ada pada persamaan (2.4.5) tersebut. Sehingga persamaan (2.4.5) diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^{j-1}}{2k} + V_i^j \frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2h}$$

$$= -\frac{1}{\rho_i^j}\left(\Theta \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j}{2h} - \eta_0 \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h^2}\right) + \frac{1}{\tau}\left(V_e(\rho_i^j) - V_i^j\right)$$

yang jika disederhanakan diperoleh

$$V_i^{j+1} = 2\mathrm{k}\left[-\frac{1}{\rho_i^j}\left(\Theta \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j}{2\mathrm{h}} - \eta_0 \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\tau}\left(V_e(\rho_i^j) - V_i^j\right) - V_i^j \frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2\mathrm{h}}\right] + V_i^{j-1} \qquad (3.2.6)$$

Menurut Kerner, B.S and Konhauser, P [5], untuk menghitung kecepatan ekuilibrium yaitu $V_e(\rho_i^j)$ pada persamaan (3.2.6) digunakan rumus berikut :

$$V_e(\rho_i^j) = V_0\left[\frac{1}{1+exp\left(\frac{\frac{\rho_i^j}{\rho_{maks}}-0.25}{0.06}\right)} - 3.72 \times 10^{-6}\right]$$

untuk $i = 1,2,\dots,N$ dan $j = 1,2,\dots,M$.

Persamaan (3.2.6) inilah yang akan digunakan untuk menghitung nilai kecepatan arus lalu lintas.

Nilai kecepatan yang diperoleh dari model Kerner Konhäuser akan digunakan dalam perhitungan kepadatan arus lalu lintas dengan menggunakan metode MacCormack. Pada subbab berikut akan dijelaskan lebih lanjut penggunaan metode MacCormack .

3.3 Penyelesaian Persamaan Konservasi dengan Menggunakan Metode MacCormack

Pada subbab ini akan dilakukan perhitungan kepadatan arus lalu lintas pada persamaan konservasi dengan menggunakan metode MacCormack.

Pada subbab 2.2 sebelumnya, telah dijelaskan mengenai persamaan konservasi. Dengan menggunakan prinsip dasar arus lalu lintas pada persamaan (2.1.2), maka persamaan konservasi dinyatakan dengan persamaan (2.2.7) berikut :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0$$

Pada persamaan (2.2.7), kecepatan arus lalu lintas (V) tidak diketahui. Oleh karena itu, pada tesis ini perhitungan kepadatan arus lalu lintas pada persamaan konservasi (2.2.7) mengunakan nilai kecepatan arus lalu lintas model

Kerner Konhäuser dan metode yang digunakan dalam perhitungan kepadatan tersebut adalah metode MacCormack.

Dalam penyelesaiannya, persamaan konservasi ditulis kembali sebagai persamaan (2.6.1) berikut :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

dimana a menyatakan kecepatan arus lalu lintas yang sesuai dengan model Kerner Konhäuser.

Sehingga untuk menyelesaikan persamaan (2.6.1), digunakan metode MacCormack yang terdiri dari dua langkah yaitu Langkah Prediktor dan Langkah Korektor. Jika posisi $x = x_i$ dimana x_i dinyatakan dengan i dan waktu $t = t_j$ dimana t_j dinyatakan dengan j, maka Langkah Prediktor dan Langkah Korektor pada subbab 2.6 dapat dinyatakan kembali sebagai berikut :

- **Langkah Prediktor :**

  Pada langkah prediktor, nilai ρ diposisi i pada waktu $j + 1$ ditunjukkan dengan $\rho_i^{\overline{j+1}}$ dinyatakan dengan :

$$\rho_i^{\overline{j+1}} = \rho_i^{\,j} - V_i^{j+1}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\rho_{i+1}^{\,j} - \rho_i^{\,j}\right) \tag{3.3.1}$$

- **Langkah Korektor :**

  Dalam langkah korektor, nilai prediksi $\rho_i^{\overline{j+1}}$ digunakan untuk menghitung ρ_i^{j+1} dan dinyatakan dengan :

$$\rho_i^{j+1} = \frac{\rho_i^{\,j} + \rho_i^{\overline{j+1}}}{2} - V_i^{j+1}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\rho_i^{\overline{j+1}} - \rho_{i-1}^{\overline{j+1}}\right) \tag{3.3.2}$$

dimana $i = 0,1,2,\dots,N$ dan $j = 0,1,2,\dots,M$.

Persamaan (3.3.1) dan (3.3.2) inilah yang akan digunakan untuk simulasi perhitungan nilai kepadatan arus lalu lintas. Simulasi perhitungan kepadatan arus lalu lintas dan kecepatan arus kendaraan ini akan ditunjukkan pada bab IV berikut ini.

BAB 4
SIMULASI ARUS LALU LINTAS

Pada bab 3 telah dijelaskan mengenai model kecepatan Kerner Konhäuser dimana nilai kecepatan arus lalu lintas kendaraan di suatu ruas jalan yang diperoleh pada model ini digunakan untuk menghitung kepadatan arus lalu lintas pada ruas jalan tersebut. Pada bab ini akan ditampilkan hasil simulasi dari perhitungan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas di suatu ruas jalan. Dari hasil simulasi tersebut akan dianalisa pengaruh kecepatan arus lalu lintas terhadap kepadatan arus lalu lintas atau sebaliknya.

Berikut ini akan dibahas langkah-langkah simulasi yang akan digunakan untuk menghitung kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas yang terjadi pada suatu ruas jalan.

Notasi :

- V_i^j menyatakan kecepatan arus kendaraan diposisi $x = i$ pada waktu $t = j$.
- ρ_i^j menyatakan kepadatan arus lalu lintas diposisi $x = i$ pada waktu $t = j$.

Langkah-Langkah Simulasi

INPUT : L = panjang jalan;

N = bilangan bulat sebagai nilai batas untuk i;

M = bilangan bulat sebagai nilai batas j;

T = waktu akhir tempuh arus kendaraan;

V_0 = kecepatan maksimum arus kendaraan;

ρ_{maks} = kepadatan maksimum;

τ = waktu relaksasi arus kendaraan;

Θ = variansi kecepatan arus kendaraan;

η_0 = koefisien viskositas;

ρ_e = kepadatan ekuilibrium;

initial awal : $V_0^0 = 36; V_{i+1}^0 = V_0^0 + 9; \rho_{-1}^0 = 30;$

$\rho_0^0 = \rho_0^1 = \cdots = \rho_0^M = 60; V_i^{-1} = V_i^0$

OUTPUT : V_i^{j+1}, ρ_i^{j+1} untuk setiap $i = 0,1,2, \dots, N$ dan $j = 0,1,2, \dots, M$

Langkah 1 : Hitung $\Delta x = \frac{L}{N}$;

$\Delta t = \frac{T}{M}$;

Langkah 2 : Untuk setiap $j = 0,1,2, \dots, M$;

Untuk setiap $i = 0,1,2, \dots, N$;

Lakukan langkah 3.

Langkah 3 :

Hitung $$V_e(\rho_i^j) = V_0 \left[\frac{1}{1+exp\left(\frac{\frac{\rho_i^j}{\rho_{maks}} - 0.25}{0.06} \right)} - 3.72 \text{ x } 10^{-6} \right]$$

$$V_i^{j+1} = 2\text{k} \left[-\frac{1}{\rho_i^j} \left(\Theta \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j}{2\text{h}} - \eta_0 \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{2h^2} \right) + \frac{1}{\tau} \left(V_e(\rho_i^j) - V_i^j \right) - V_i^j \frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2\text{h}} \right] + V_i^{j-1}$$

$$\rho_i^{\overline{j+1}} = \rho_i^{\,j} - V_i^{j+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\rho_{i+1}^{\,j} - \rho_i^{\,j} \right)$$

$$\rho_i^{\,j+1} = \frac{\rho_i^{\,j} + \rho_i^{\overline{j+1}}}{2} - V_i^{j+1} \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\rho_i^{\overline{j+1}} - \rho_{i-1}^{\overline{j+1}} \right)$$

Langkah 2 : Print;

Berhenti.

Langkah-langkah simulasi diatas dimulai dengan meminta *user* memasukan nilai-nilai dan initial awal yang dibutuhkan dalam perhitungan kecepatan dan kepadatan. Langkah pertama tentukan jarak dan waktu antara dua titik diskritisasi. Kemudian langkah 2, tentukan banyak titik diskritisasi untuk posisi i dan waktu j, lalu untuk langkah 3, lakukan perhitungan pada waktu j pertama dengan posisi i bergerak sampai N yaitu hitung kecepatan arus lalu lintas yang ekuilibrium yang bergantung pada nilai kepadatan arus lalu lintas pada posisi

i dan waktu j, kemudian hitung kecepatan arus lalu lintas pada posisi i pada waktu $j+1$. Lalu hitung kepadatan arus lalu lintas untuk langkah prediktor pada posisi i dengan waktu $j+1$ dengan menggunakan nilai kecepatan yang telah dihitung sebelumnya. Kemudian hitung nilai kepadatan arus lalu lintas untuk langkah korektor dengan menggunakan nilai kepadatan pada langkah preditor dan nilai kecepatan yang sama pada langkah prediktor pada posisi i dengan waktu $j+1$. Langkah terakhir simpan nilai kecepatan dan nilai kepadatan yang telah dihitung.Kemudian kembali lakukan langkah 2 untuk proses iterasi selanjutnya sampai $j = M$ untuk $i = 0,1,2,\ldots,N$.

Simulasi perhitungan kecepatan dan kepadatan dilakukan untuk L,Δx, Δt, dan T yang berbeda yaitu :

1. Untuk L = 90 km.
   N = 10.
   M = 12.
   T = 60/60 jam

   Maka titik diskritisasi pada posisi x adalah :

   $$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{90}{10} = 9$$

   dan titik diskritisasi pada waktu t adalah :

   $$\Delta t = \frac{T}{M} = \frac{60/60}{12} = \frac{5}{60}$$

2. Untuk L = 12 km.
   N = 6.
   M = 6.
   T = 30/60 jam

   Maka titik diskritisasi pada posisi x adalah :

   $$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{12}{6} = 2$$

   dan titik diskritisasi pada waktu t adalah :

   $$\Delta t = \frac{T}{M} = \frac{30/60}{6} = \frac{5}{60}$$

Berikut ini akan ditampilkan hasil simulasi dari perhitungan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas.

Hasil Simulasi

Simulasi pertama dilakukan untuk nilai pada input sebagai berikut :

L = 90 km.

N = 10.

M = 12.

T = 60/60 jam

V_0 = 120 km/jam

ρ_{maks} = 200 kendaraan/km

τ = 0.5/60 jam

Θ = 45^2 (km/jam)^2

η_0 = 600 km/jam

ρ_e = 60 kendaraan/km

V_e = 36 km/jam.

Hasil perhitungan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas untuk simulasi 1 dapat dilihat pada tabel berikut ini :

Tabel 4.1 Kecepatan Arus Lalu Lintas pada Simulasi 1

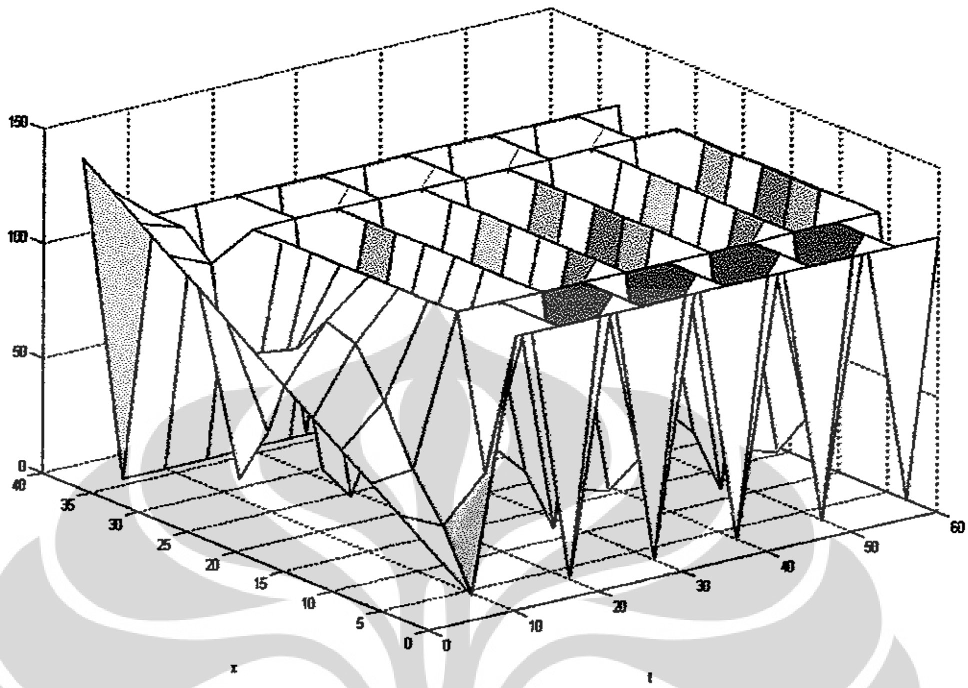
x_i \ t_j	0	1	2
0	36	32	110
1	45	46	62
2	54	68	120
3	63	95	120
4	72	117	120
5	81	120	120

6	90	120	120
7	99	120	120
8	108	120	120
9	117	120	120
10	126	120	120

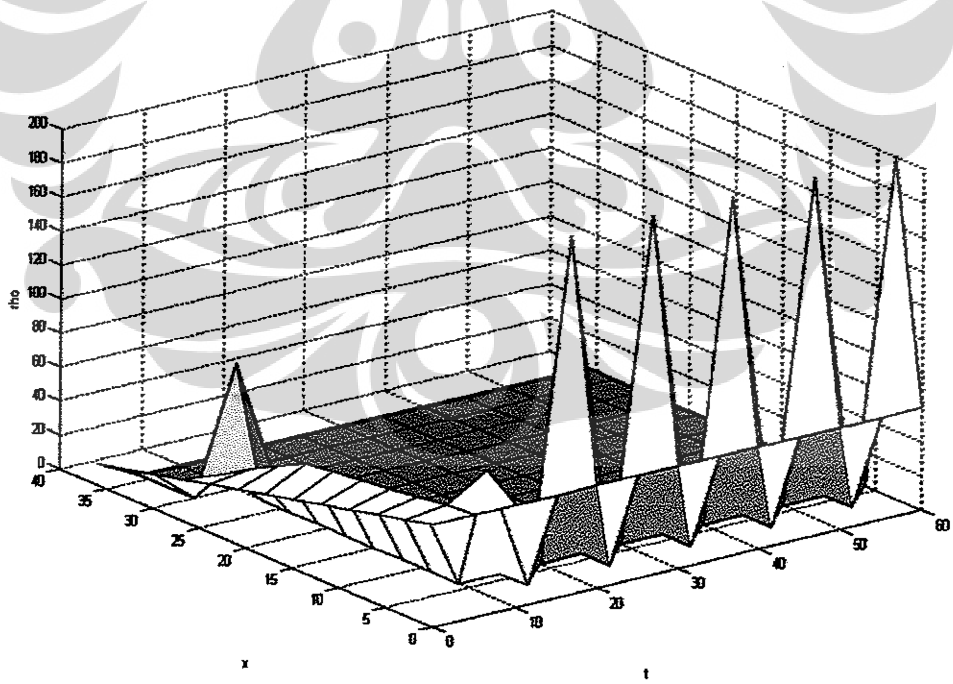
Tabel 4.2 Kepadatan Arus Lalu Lintas untuk Simulasi 1

x_i \ t_j	0	1	2
0	60	60	60
1	56	58	59
2	52	54	0
3	48	51	0
4	44	48	0
5	40	0	0
6	36	0	0
7	32	0	0
8	28	0	0
9	24	0	0
10	20	0	0

Berdasarkan hasil perhitungan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas pada simulasi 1 ini, akan dibuat simulasi numerik berupa plot 3D yang mengambarkan pergerakan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas yang ditunjukkan oleh gambar berikut :



Gambar 2.4 Grafik Kecepatan Arus Lalu Lintas untuk Simulasi 1



Gambar 2.5 Grafik Kepadatan Arus Lalu Lintas untuk Simulasi 1

Berikut ini akan dilakukan simulasi kedua dengan nilai input sebagai berikut :

L = 12 km.

N = 6.

M = 6.

T = 30/60 jam

V_0 = 120 km/jam

ρ_{maks} = 200 kendaraan/km

τ = 0.5/60 jam

Θ = 45^2 (km/jam)^2

η_0 = 600 km

ρ_e = 60 kendaraan/km

V_e = 36 km/jam.

Hasil perhitungan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas diperoleh berdasarkan tabel berikut :

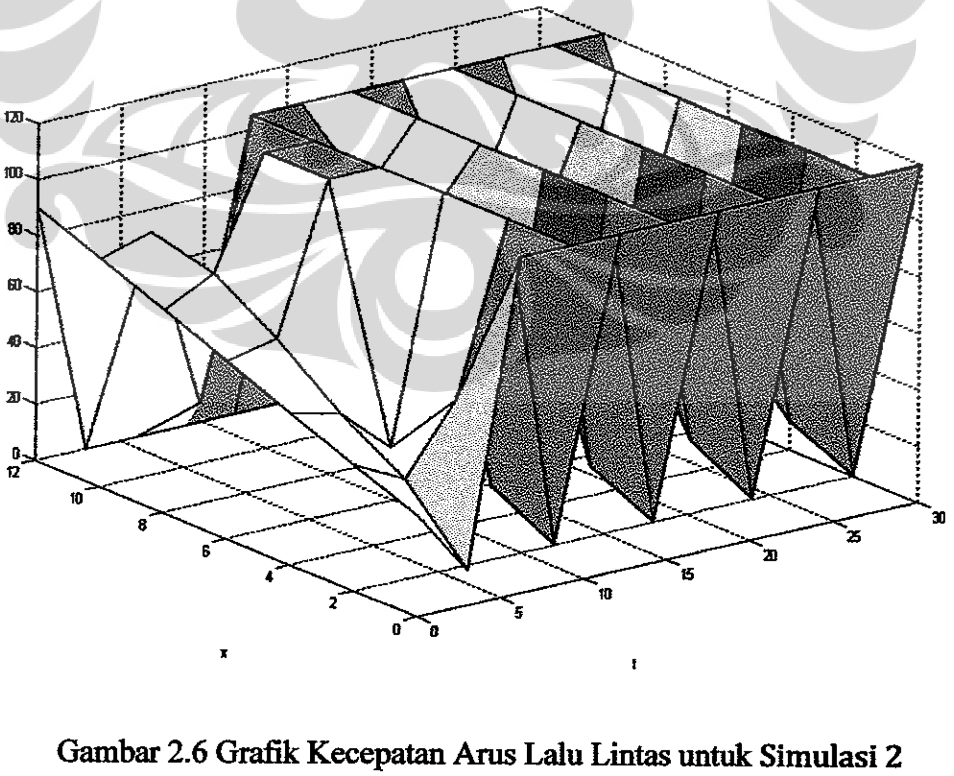
Tabel 4.3 Kecepatan Arus Lalu Lintas untuk simulasi 2

x_i \ t_j	0	1	2
0	36	3	120
1	45	29	120
2	54	47	89
3	63	69	120
4	72	87	120
5	81	90	120
6	90	120	120

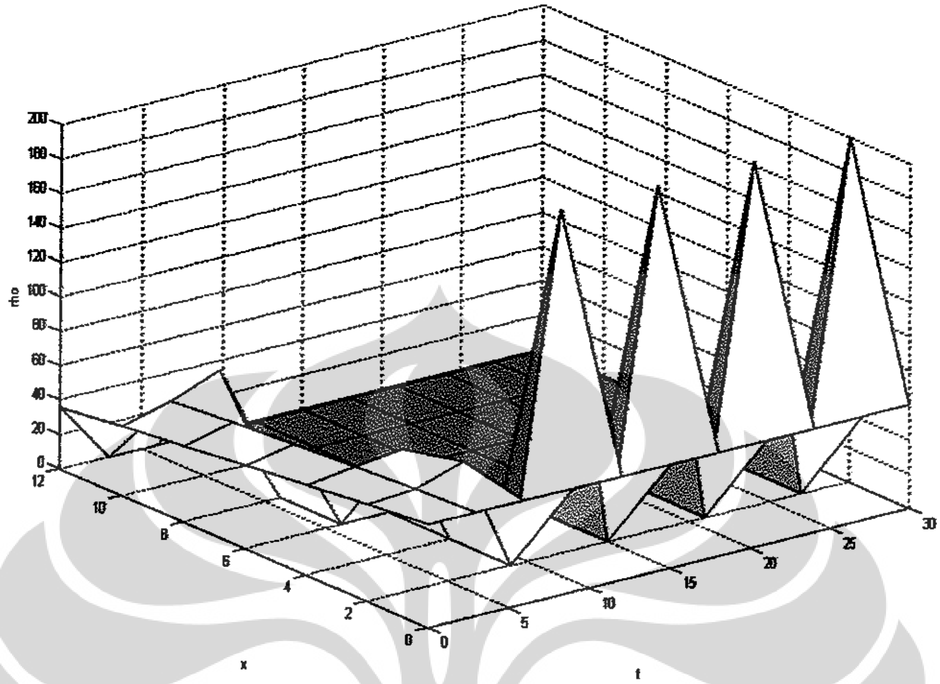
Tabel 4.4 Kepadatan Arus Lalu Lintas untuk Simulasi 2

x_i \ t_j	0	1	2
0	60	60	60
1	56	58	0
2	52	57	65
3	48	54	0
4	44	53	0
5	40	52	0
6	36	0	0

Berdasarkan hasil perhitungan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas pada simulasi 2, akan dibuat simulasi numerik berupa plot 3D yang mengambarkan pergerakan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas yang ditunjukkan oleh gambar berikut :



Gambar 2.6 Grafik Kecepatan Arus Lalu Lintas untuk Simulasi 2



Gambar 2.7 Grafik Kepadatan Arus Lalu Lintas untuk Simulasi 2

Dari hasil kedua simulasi baik berupa tabel perhitungan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas maupun grafik, dapat disimpulkan bahwa :

- Terdapat pengaruh kecepatan arus lalu lintas terhadap kepadatan arus lalu lintas dan sebaliknya. Jika kecepatan arus lalu lintas meningkat maka kepadatan arus lalu lintas akan menurun dan sebaliknya, jika kepadatan arus lalu lintas meningkat maka kecepatan arus lalu lintas akan menurun.
- Pada saat kecepatan arus lalu lintas mencapai nilai maksimum maka kepadatan arus lalu lintas tidak ada atau nol, dan sebaliknya jika kepadatan arus lalu lintas mencapai nilai maksimum maka kecepatan arus lalu lintas berhenti atau nol. Oleh karena itu pada kedua simulasi, perhitungan dan kecepatan arus lalu lintas dan kepadatan arus lalu lintas hanya sampai waktu $j = 2$.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari simulasi yang dilakukan pada Bab IV terlihat bahwa dengan menggunakan kecepatan model Kerner Konhäuser hasil yang diperoleh telah sesuai dengan prinsip dasar arus lalu lintas.

Pengaruh kecepatan arus lalu lintas pada model Kerner Konhäuser terhadap kepadatan arus lalu lintas memenuhi kondisi arus lalu lintas di jalan raya yaitu jika kecepatan arus lalu lintas meningkat maka kepadatan arus lalu lintas akan berkurang dan sebaliknya, jika kepadatan arus lalu lintas meningkat maka kecepatan arus lalu lintas akan menurun.

5.2 Saran

Untuk riset selanjutnya mungkin dapat digunakan kecepatan dengan model lain seperti model Helbing.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Burden , R.L and Faires, J,D. (2001). *Numerical Analysis*. Youngstown State University.

[2] Elbes, J.A.C.M. (2005). *Development of An Indicator for Traffic flow Stability with Aplication to Ramp Metering*. Beuningen.

[3] Helbing, D. (1995). *Improved Fluid-Dynamic Model for Vehicular Traffic Flow*. Phys. Rev. E., 51(4):pp.3164-pp.3169.

[4] Hoogendoorn, P.S and Bovy Piet H.L. (2001). *State of The Art of Vehicular Traffic Flow Modelling*. J. Syst. Control. Eng.215,pp. 283–303.

[5] Kerner, B.S and Konhauser, P. (1993). *Cluster Effect in Initially Homogeneous Traffic Flow*. Phys. Rev. E., 48(4) : pp.2335-pp.2338.

[6] Kunhe, R dan Michalopoulus, P. (1997). *Continum flow Model.* Germany

[7] Lighthill, M.B and Whitham, G.B. (1955). *A theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads, on Kinematic Waves. II.* Proc.Roy. Soc. London. Ser. A., 229:pp.317-pp.345.

[8] Miyashita, K and Kawamura, T. (2006). *Numerical Simulation of Vehicular Traffic With A Junction On a Circular Road.* Natural Science Report, Ochanemizu University. Vol. 57. No. 2.

[9] Munir, R. (2008). *Metode Numerik.* Penerbit : Informatika Bandung.

[10] Ponidi, Alhaji, dan Wibowo, Ari. (2002). *Persamaan Diferensial Parsial dan Syarat Batas serta aplikasinya.* FMIPA UI.

[11] Schlichting. (1979). *Boundary-Layer Theory* (McGraw-Hill). New York.

[12] Welty, James R., et al. (2002). *Dasar-Dasar Fenomena Transport.* Penerbit : Erlangga.

LAMPIRAN 1

Source Code Simulasi Model Kerner Konhauser

```
clear all;

% Input
L = 12;             % L adalah panjang jalan
ttk_t = 6;          % Δt
ttk_x = 6;          % Δx
T = 30/60;          % Waktu Akhir
rho_e = 60;         % Kepadatan ekuilibrium
V0 = 120;           % Kecepatan Maksimum
rho_max = 200;      % Kepadatan maksimum
tau = 0.5/60;       % waktu relaksasi
eta = 600;          % Koefisien viskositas
Theta = 45^2;       % Variansi kecepatan

% Initial awal
rho_cap(1,1) = 0;
rho(1,1:ttk_t) = rho_e;
for a =1:ttk_x+1
    V(a,1)= 36 + 9*(a-1);
    rho(a,1)=60 - 4*(a-1);
end
V(1,1)=36;
rho(1,1) = rho_e;
V
pause

% Hitung
for j = 1:ttk_t
    for i = 1:ttk_x

        if rho(i,j) == 0
            rho_0 = inf;
        else
            rho_0=rho(i,j);
        end
        k = T/ttk_t;
        h = L/ttk_x;
        Ve          =   V0*(1/(1 +
                        exp((rho(i,j)/rho_max -
                        0.25)/0.06)) - 3.72e-6)
```

```
        [Vj_1,Vi_1,rhoi_1,rhocapi_1] = cek_min_1(i, j,
                                V, rho, rho_cap); %cek
                                x atau t bernilai 0
        V(i,j+1)      = abs( 2*k*(-Theta*(rho(i+1,j)-
                        rhoi_1)/(2*h*rho_0) +
                        eta*(V(i+1,j)-2*V(i,j) +
                        Vi_1)/(rho_0*h^2)+...
                        (Ve-V(i,j))/tau-
                        V(i,j)*(V(i+1,j)-Vi_1)/(2*h)) +
                        Vj_1)

        rho_cap(i,j+1) = (rho(i,j)-
                          V(i,j+1)*(rho(i+1,j)-
                          rho(i,j))*k/h);
        rho(i,j+1)     = ((rho(i,j) +
                         rho_cap(i,j+1))/2-
                         V(i,j+1)*(rho_cap(i,j+1)-
                         rhocapi_1)*k/(2*h))
        rho(1,j+1)     = rho_e;

        if V(i,j+1)>=120
            V(i,j+1)=120;
            rho(i,j+1)=0;
        end

        if rho(i,j+1)>=200
           rho(i,j+1)=200;
           V(i,j+1)=0;
           %break;
        end

        i
        rho_cap
        rho
        V
    end
end
V
rho
x,y]=meshgrid(0:60*k:60*T,0:h:L);
surf(x,y,rho)
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('rho')
figure;
surf(x,y,V)
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('V')
```

LAMPIRAN 2

Source Code Simulasi Cek Min 1

```
function [nilai_Vj, nilai_Vi, nilai_rho, nilai_rho_cap]
= cek_min_1(i,j,V,rho,rho_cap)
i
j
if i-1==0
    nilai_Vi = 36;
    nilai_rho = 30;
    nilai_rho_cap = 30;
else
    nilai_Vi  = V(i-1,j);
    nilai_rho = rho(i-1,j);
    nilai_rho_cap = rho_cap(i-1,j+1)
end
if j-1==0
    nilai_Vj = V(i,j);
else
    nilai_Vj = V(i,j-1);
end
end
```