UNIVERSITAS INDONESIA

OPTIMASI PENYUSUNAN *TIMETABLE* ANGKUTAN UMUM MENGGUNAKAN METODE *BRANCH AND BOUND* DAN IMPLEMENTASINYA PADA BUS TRANSJAKARTA

SKRIPSI

EMYLIA PRATIWI WIYANTO
0906511416

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

OPTIMASI PENYUSUNAN *TIMETABLE* ANGKUTAN UMUM MENGGUNAKAN METODE *BRANCH AND BOUND* DAN IMPLEMENTASINYA PADA BUS TRANSJAKARTA

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

EMYLIA PRATIWI WIYANTO
0906511416

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Emylia Pratiwi Wiyanto
NPM	: 0906511416
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 13 Desember 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Emylia Pratiwi Wiyanto

NPM : 0906511416

Program Studi : Matematika

Judul Skripsi : Optimasi Penyusunan *Timetable* Angkutan Umum Menggunakan Metode *Branch and Bound* dan Implementasinya pada Bus TransJakarta

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	:	Dr. Yudi Satria, M.T.	( )
Pembimbing II	:	Helen Burhan, M.Si.	( )
Penguji	:	Bevina D. Handari, PhD.	( )
Penguji	:	Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	:	Dhian Widya, M.Kom.	( )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 13 Desember 2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, Tuhan Semesta Alam yang telah mencurahkan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Departemen Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia. Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan hingga penulisan skripsi ini selesai, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak antara lain:

1. Bapak Dr. Yudi Satria, M.T. dan Ibu Helen Burhan, M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah bersedia memberikan waktu, pikiran, dan tenaga untuk membimbing penulis dalam penyusunan dan penulisan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Rianti Setiadi, M.Si. selaku pembimbing akademik yang telah bersedia membimbing penulis untuk dapat menjalankan aktivitas akademisi selama studi di Departemen Matematika FMIPA UI.
3. Ibu Suarsih, Ibu Rahmi, Ibu Dhian Widya, Bapak Arie, Bapak Djati, Bapak Zuherman, Ibu Denny, Ibu Nora, Ibu Kiki, Bapak Suryadi M.T., Bapak Suryadi S., Ibu Nur, Ibu Ida, Ibu Dian Lestari, Bapak Alhaji, Bapak Hengki, Bapak Hendri, Bapak Gatot, Ibu Bevina, Ibu Bela, Ibu Harini, Ibu Yahma, Ibu Mila, Ibu Sarini, dan seluruh dosen Departemen Matematika FMIPA UI yang telah mengajarkan banyak ilmu yang sangat berharga bagi penulis.
4. Ibu Ganijanti, Ibu Upi, Ibu Tuti, dan seluruh dosen yang telah mengajarkan ilmu-ilmu yang juga sangat berharga diluar Departemen Matematika.
5. Seluruh kayawan Departemen Matematika FMIPA UI yang telah memberikan bantuan kepada penulis dalam berbagai keperluan administratif.
6. Kedua orangtua penulis, Eko Wiyanto dan Siti Kumaidah, serta adik penulis Eny Dwi Wahyu Lestari Wiyanto atas segala dukungan, doa, perhatian, kasih sayang, nasihat, dan motivasi yang telah diberikan kepada penulis.
7. Eko Sulistiyono dan keluarga yang telah memberikan perhatian, dukungan, nasihat, dan doa kepada penulis.
8. Mbak Bibah dan keluarga cililitan, terima kasih atas bantuannya selama ini.

9. Mas Andre, Mas Dwi, dan Mbak Marlia yang telah memberikan informasi, wawasan, dan pengetahuan tentang seluk-beluk transportasi di DKI Jakarta. Terima kasih juga karena telah bersedia menceritakan pengalamannya.
10. Kak Qiqi, Sofwah, Cepi, dan Sandy yang telah bersedia memberikan saran-saran tentang penulisan, pemilihan bahasa, dan struktur kalimat.
11. Azki dan Rani yang telah bersedia mengajari dan membantu penulis dalam pengetikan persamaan-persamaan matematika.
12. Fitta yang telah memberikan pulpen laser dan Nia yang meminjamkan laptopnya, sangat membantu penulis saat mempresentasikan skripsi ini.
13. Alfian, Dwi, Yanti, Sandy, dan Rani yang telah membantu penulis dalam survei lapangan demi kelancaran penyusunan skripsi ini.
14. Wiwit, Kak Andy, dan Kak Ayat yang telah bersedia mengajarkan sintaks-sintaks yang belum penulis ketahui dalam perangkat lunak MATLAB.
15. Kak Luthfa yang telah memberikan semangat dan panduan-panduan penulisan skripsi sejak awal penulis berniat menulis skripsi ini.
16. Wilsan, Ds, Andrew, Maifiana, Dian, Soleman, Azki, Sofwah, Yanti, dan Rani sebagai teman seangkatan dan seperjuangan skripsi semester ini. Terima kasih atas semangat, bantuan, dan dukungannya.
17. Teman-teman angkatan 2009 lainnya: Ai, Putri, Eja, Handa, Sondra, Shita, Budi, Noe, Danang, Sigap, Dinda, Everien, Alis, Tika, Revi, Dede, Ana Z, Ana Mamen, Fitria, Sani, Eva, Agung, Okta, Luthfir, Ninna, Faisal, Anton, Fauzan, Harnoko, Anin, Kemal, Vero, Upi, Icha, Michael, Agnes, Yuan, dan Hendy yang telah mewarnai hari-hari penulis sejak Agustus 2009.
18. Kakak-kakak angkatan 2008, 2007, dan 2006 yang telah bersedia memberi saran, dan nasihat tentang perkuliahan dan organisasi di FMIPA UI.
19. Adik-adik angkatan 2010, dan 2011 yang telah turut memberi semangat.
20. Seluruh pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan, yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan, semoga skripsi ini bermanfaat.

Penulis

2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Emylia Pratiwi Wiyanto
NPM	:	0906511416
Program Studi	:	Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Optimasi Penyusunan *Timetable* Angkutan Umum Menggunakan Metode *Branch and Bound* dan Implementasinya pada Bus TransJakarta

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 13 Desember 2012
Yang menyatakan

(Emylia Pratiwi Wiyanto)

ABSTRAK

Nama : Emylia Pratiwi Wiyanto
Program Studi : Matematika
Judul : Optimasi Penyusunan *Timetable* Angkutan Umum Menggunakan Metode *Branch and Bound* dan Implementasinya pada Bus TransJakarta

Penyusunan *timetable* merupakan salah satu tahap dalam perencanaan pengoperasian sistem angkutan umum. *Timetable* untuk angkutan umum adalah suatu tabel yang berisi daftar waktu keberangkatan kendaraan angkutan umum pada lokasi-lokasi pengangkutan penumpang pada suatu rute selama periode operasional. Pada skripsi ini dibahas tentang penyusunan *timetable* yang bertujuan untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan kendala banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan terbatas. Penyusunan *timetable* dengan tujuan tersebut dapat dimodelkan ke dalam masalah pemrograman bilangan bulat dan diselesaikan dengan menggunakan metode *branch and bound*. Selanjutnya, masalah penyusunan *timetable* tersebut diimplementasikan pada penyusunan *timetable* bus TransJakarta.

Kata kunci : *timetable*, metode *branch and bound*, pemrograman bilangan bulat, *timetable* bus TransJakarta
xiii + 71 halaman: 2 gambar; 18 tabel
Daftar Pustaka : 17 (1981 – 2012)

ABSTRACT

Name : Emylia Pratiwi Wiyanto
Study Program : Mathematics
Title : Public Transit Timetable Development Optimization Using Branch and Bound Method and its Implementation for TransJakarta Bus

The timetable development is one of public transit operation planning stages. The timetable for public transit is a table that contains list of vehicle departures time at each stops at a route during operational period. This *skripsi* will discuss timetable development to minimize the density of passengers at vehicle with the number of available vehicles are restricted. This timetable development with those purpose can be formulated into integer programming problem and can be solved using branch and bound method. Moreover, this development can be carried out for TransJakarta bus timetable development.

Keywords : timetable, branch and bound method, integer programming, TransJakarta bus timetable
xiii + 71 pages : 2 pictures; 18 tables
Bibliography : 17 (1981-2012)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

$(\cdot)$	: Pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2.
$BA(k)$	: Banyaknya kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari terminal k.
$c^F(\cdot)$	: *Crowding* (banyaknya penumpang yang berdesakan) pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2 ketika frekuensi F dipilih.
$d(k,t)$	: Jumlah total dari banyaknya keberangkatan dikurangi banyaknya kedatangan pada terminal k pada waktu t.
$D(k)$	: Jumlah minimum kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari terminal k.
$d_o(\cdot)$	: Okupansi yang diinginkan pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2.
F	: Frekuensi.
$P_m(\cdot)$	: Maksimum dari rata-rata banyaknya penumpang pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2.
$L(\cdot)$	: Minimum nilai frekuensi F yang diperbolehkan.
N	: Banyaknya kendaraan angkutan umum minimum yang dibutuhkan untuk melayani himpunan terminal T selama periode operasional.
N_0	: Banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan untuk melayani himpunan terminal T selama periode operasional.
T	: Himpunan terminal.
T_k	: Himpunan waktu keberangkatan kendaraan angkutan umum dari terminal k selama periode operasional.
$U(\cdot)$	: Maksimum nilai frekuensi F yang mungkin.
$x^F(\cdot)$	: Variabel yang menyatakan nilai frekuensi adalah F pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2.

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Angkutan umum berperan penting dalam sektor pelayanan masyarakat, terutama di wilayah DKI Jakarta sebagai pusat pemerintahan dan perekonomian Indonesia. Rendahnya tingkat pelayanan angkutan umum yang dikeluhkan sebagian masyarakat DKI Jakarta mendorong peningkatan jumlah kendaraan pribadi. Peningkatan jumlah kendaraan pribadi di DKI Jakarta rata-rata mencapai 9% per tahun atau sebesar 1.172 unit kendaraan per hari dengan 186 kendaraan roda empat dan 986 kendaraan roda dua. Peningkatan jumlah kendaraan pribadi inilah yang dianggap sebagai salah satu penyebab kemacetan di DKI Jakarta terutama pada jam-jam keberangkatan dan pulang kerja (Masyarakat Transportasi Indonesia, 2012). Oleh karena itu, untuk menanggulangi kemacetan dan memenuhi kebutuhan masyarakat DKI Jakarta, maka berdasarkan Keputusan Gubernur Nomor 94 Tahun 2004, sejak 15 Januari 2004 dioperasikan sarana angkutan umum baru, yaitu bus TransJakarta yang mengadaptasi sistem TransMilenio yang telah sukses di Bogota, Kolombia (Institute for Transportation & Development Policy, 2003).

Untuk mengoperasikan suatu angkutan umum, termasuk bus TransJakarta, dibutuhkan empat tahap perencanaan yang dilakukan secara berurutan, yaitu 1) desain rute, 2) penyusunan *timetable* atau daftar waktu keberangkatan kendaraan, 3) penjadwalan kendaraan, dan 4) penjadwalan pengemudi (Ceder, 2007, hal. 4). Tahap perencanaan pertama, yaitu desain rute. Rute adalah lintasan yang harus dilalui kendaraan angkutan umum untuk menurunkan dan menaikkan penumpang. Namun, desain rute tidak hanya untuk menentukan lintasan-lintasan tersebut tetapi juga untuk menentukan lokasi-lokasi tempat pemberhentian kendaraan. Selanjutnya, apabila rute telah terbentuk, barulah *timetable* yang merupakan tabel daftar keberangkatan kendaraan dapat disusun untuk masing-masing rute. Setelah diperoleh *timetable*, kemudian dijadwalkan seluruh kendaraan yang dapat dioperasikan sehingga daftar keberangkatan pada *timetable* dapat terpenuhi semua. Terakhir, apabila kendaraan telah dijadwalkan, kemudian pengemudi-pengemudi yang bertugas juga harus dijadwalkan. Pada skripsi ini akan dibahas tahap penyusunan *timetable* untuk angkutan umum.

Tahap perencanaan pengoperasian angkutan umum pada dasarnya disusun dengan memertimbangkan kepentingan penumpang maupun penyedia jasa angkutan, akan tetapi kepentingan-kepentingan tersebut saling bertolak belakang. Seperti halnya dalam tahap penyusunan *timetable*, dari pandangan penumpang, *timetable* perlu disusun untuk memaksimumkan kepuasan penumpang, misalnya tidak perlu menunggu lama, tidak berdesak-desakan, dan cepat sampai tujuan. Sedangkan dari pandangan penyedia jasa, *timetable* perlu disusun sedemikian rupa agar biaya operasional rendah. Kedua pandangan tersebut tentu sangat bertolak belakang, karena keinginan penumpang untuk tidak berdesakan dapat terpenuhi apabila kendaraan yang digunakan sebanyak mungkin. Oleh karena itu, dibutuhkan optimasi untuk mengatasi hal tersebut, yaitu meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan banyaknya kendaraan yang dapat digunakan terbatas.

Sebelumnya, telah banyak karya-karya ilmiah yang membahas tentang penyusunan *timetable*. Ceder (1987, 2001, 2007) mengenalkan tiga *timetable* yang masing-masing disusun dengan tujuan, yaitu 1) untuk memberikan rata-rata waktu antar keberangkatan pada transisi dua periode (*average headway for smoothing transition*), 2) untuk menyeimbangkan jumlah penumpang dalam angkutan pada halte dengan jumlah penumpang terbanyak pada masing-masing periode (*balancing load*), dan 3) untuk mendapatkan waktu keberangkatan yang mudah diingat (*clock headway*). Palma (2000) menjelaskan tentang penyusunan *timetable* yang dapat meminimumkan biaya jadwal yang tertunda (*delay*). Ceder, Golany, & Tal (2001) dan Eranki (2004) menyusun *timetable* dengan tujuan untuk memaksimumkan banyaknya kendaraan yang datang secara simultan pada suatu halte transfer. Namun, semua karya-karya tersebut mengasumsikan banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan tidak terbatas. Padahal kenyataan di lapangan, banyak kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan pasti terbatas, karena terbatasnya sumber daya atau modal usaha yang ada. Ceder (2007) juga telah menjelaskan tentang penyusunan *timetable* yang memertimbangkan keterbatasan kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan. Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan lebih banyak merujuk pada Ceder (2007) tentang penyusunan *timetable* tersebut.

Dalam skripsi ini, akan dijelaskan lebih lanjut mengenai masalah penyusunan *timetable* untuk angkutan umum dengan tujuan untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan kendala banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan terbatas. Masalah tersebut kemudian dimodelkan ke dalam masalah pemrograman bilangan bulat yang selanjutnya diselesaikan menggunakan metode *branch and bound*.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana menyusun *timetable* angkutan umum yang optimal. Optimal dalam hal ini adalah dapat meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan kendala banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan terbatas. Ruang lingkup permasalahan ini adalah terdapat suatu himpunan terminal dengan rute-rute yang dilalui telah ditentukan, waktu operasional dibatasi dalam suatu selang waktu, hanya digunakan satu jenis kendaraan angkutan umum, dan waktu yang dibutuhkan kendaraan untuk menempuh suatu rute yang sama adalah tetap untuk setiap keberangkatan kendaraan angkutan umum.

Dalam implementasi dipilih dua rute lintas koridor bus TransJakarta yang menghubungkan dua lokasi, yaitu Pusat Grosir Cililitan (PGC) dan Harmoni. Kedua rute tersebut adalah rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC. Periode operasional yang ditinjau dibatasi dalam selang waktu pukul 07.00 – 09.00 WIB. Dalam permasalahan ini, yang disebut sebagai terminal adalah halte pemberangkatan pertama atau halte tujuan terakhir, yaitu halte PGC dan halte Harmoni. Serta diasumsikan sejumlah armada bus yang dapat digunakan tidak mengalami gangguan saat pengoperasian dan waktu yang dibutuhkan untuk menempuh suatu rute yang sama adalah tetap untuk setiap keberangkatan kendaraan armada bus.

1.3 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah studi literatur, yaitu dengan mempelajari buku-buku dan karya-karya ilmiah lain yang berhubungan dengan skripsi ini. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penyusunan skripsi ini adalah dengan menyusun model optimasi dari permasalahan yang telah dirumuskan pada Subbab 1.2, kemudian menyelesaikan model tersebut dengan metode *branch and bound*. Selanjutnya, untuk implementasi pada bus TransJakarta disimulasikan dengan bantuan perangkat lunak MATLAB.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan skripsi ini adalah untuk mendapatkan *timetable* angkutan umum yang optimal. Optimal dalam hal ini, yaitu dapat meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan kendala banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan terbatas. Selanjutnya, masalah penyusunan *timetable* tersebut akan diimplementasikan pada bus TransJakarta.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas teori-teori yang digunakan dalam skripsi ini, yaitu teori tentang pemrograman linier, pemrograman bilangan bulat, solusi basis, metode simpleks, metode *branch and bound*, perencanaan sistem angkutan umum, dan metode penyusunan *timetable* yang telah umum digunakan.

2.1 Pemrograman Linier

Pemrograman linier (PL) adalah teknik matematika untuk memilih *program* (serangkaian kegiatan) terbaik dari sehimpunan alternatif yang mungkin dengan menggunakan fungsi linier. Masalah-masalah yang dapat diselesaikan dengan PL disebut masalah PL. Umumnya, masalah PL didefinisikan sebagai masalah optimasi (memaksimumkan atau meminimumkan) fungsi linier dari variabel-variabel bebas, terhadap serangkaian kendala linier yang menyangkut variabel-variabel bebas tersebut (Wu & Coppins, 1981, hal. 35).

Fungsi linier yang dioptimalkan (dimaksimumkan atau diminimumkan) disebut *fungsi tujuan*. Variabel-variabel bebas yang ada pada fungsi tujuan dan kendala linier disebut *variabel keputusan* karena nilai variabel inilah yang harus ditentukan (diputuskan) untuk dapat mengoptimalkan fungsi tujuan yang dibatasi oleh kendala linier. Kendala linier dapat berupa persamaan linier atau pertidaksamaan linier. Selanjutnya, kendala linier disebut *kendala*.

Bentuk umum untuk masalah PL dengan tujuan meminimumkan dapat ditulis sebagai berikut:

$$Minimum \qquad f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

$$\text{dengan syarat (ds.)} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.3}$$

Untuk kendala yang berupa pertidaksamaan $\leq$, maka kedua ruas kendala dikalikan dengan -1 sehingga diperoleh kendala pertidaksamaan $\geq$ seperti kendala (2.2). Untuk selanjutnya, kendala (2.3) disebut kendala nonnegatif. Nilai-nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang dapat memenuhi kendala (2.2) dan (2.3) disebut *solusi* *layak* dan suatu solusi layak yang dapat meminimumkan fungsi tujuan (2.1) disebut *solusi optimal*.

Untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier, bentuk umum masalah tersebut harus diubah ke dalam bentuk baku, yaitu apabila semua kendala berupa persamaan dan semua variabel bernilai nonnegatif. Secara matematis, bentuk baku masalah pemrograman linier untuk tujuan meminimumkan dapat ditulis sebagai berikut:

$$Minimum \qquad f = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \tag{2.4}$$

$$\text{ds.} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{2.6}$$

dengan $\mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{0}$ adalah matriks $n \times 1$, $\mathbf{A}$ adalah matriks $m \times n$, dan $\mathbf{b}$ adalah matriks $m \times 1$.

Berikut langkah-langkah yang harus dilakukan agar diperoleh bentuk baku (2.4) – (2.6):

1. Apabila kendala ke-i selain kendala nonnegatif, berupa pertidaksamaan $\leq$ maka dilakukan penambahan *slack variable* u_i pada ruas kiri kendala tersebut dan pada fungsi tujuan ditambahkan $0u_i$, dengan $u_i \geq 0$.
2. Apabila kendala ke-i selain kendala nonnegatif, berupa pertidaksamaan $\geq$ maka dilakukan penambahan *surplus variable* v_i pada ruas kanan kendala tersebut, kemudian kurangkan kedua ruas dengan v_i dan pada fungsi tujuan ditambahkan $0v_i$, dengan $v_i \geq 0$.

2.2 Pemrograman Bilangan Bulat

Dalam masalah PL, apabila terdapat kendala bahwa nilai variabel keputusan harus berupa bilangan bulat maka masalah tersebut disebut masalah pemrograman linier bilangan bulat yang seringkali cukup disebut pemrograman bilangan bulat. Secara matematis, bentuk umum masalah pemrograman bilangan bulat untuk tujuan meminimukan adalah sebagai berikut:

$$Minimum \qquad f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.7}$$

$$\text{ds.} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{2.8}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n, \tag{2.9}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \qquad j = 1, 2, \dots, n \qquad (2.10)$$

dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Untuk selanjutnya, kendala (2.10) disebut kendala bilangan bulat.

Dalam suatu masalah pemrograman bilangan bulat, apabila terdapat tambahan kendala yang menyatakan bahwa nilai variabel keputusan yang diperbolehkan hanya 0 atau 1 maka masalah pemrograman bilangan bulat tersebut disebut masalah pemrograman bilangan bulat biner. Secara matematis, bentuk umum masalah pemrograman bilangan bulat biner untuk tujuan meminimumkan adalah sebagai berikut:

$$Minimum \qquad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.11)$$

$$\text{ds.} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \qquad (2.12)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \qquad j = 1, 2, \dots, n. \qquad (2.13)$$

Suatu masalah pemrograman bilangan bulat memiliki korespondensi dengan suatu masalah pemrograman linier, yang disebut masalah pemrograman linier relaksasi (PL relaksasi). Masalah PL relaksasi adalah masalah PL yang diperoleh dengan menghilangkan kendala bilangan bulat. Jika solusi optimal dari masalah PL relaksasi juga memenuhi kendala bilangan bulat maka untuk menyelesaikan masalah pemrograman bilangan bulat cukup dengan menyelesaikan masalah PL relaksasinya. Solusi optimal untuk masalah PL relaksasi tersebut juga merupakan solusi optimal untuk masalah pemrograman bilangan bulat yang berkorespondensi karena solusi tersebut adalah solusi terbaik dari seluruh solusi layak untuk masalah PL relaksasi, dimana didalamnya terkandung solusi layak untuk masalah pemrograman bilangan bulat (Hillier & Lieberman, 1995, hal. 512).

Biasanya metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman bilangan bulat dimulai dengan menerapkan suatu metode untuk menyelesaikan masalah PL relaksasi yang berkorespondensi dengan masalah pemrograman bilangan bulat tersebut. Oleh karena itu, selanjutnya akan dibahas tentang solusi basis sebagai konsep awal untuk menyelesaikan masalah PL.

2.3 Solusi Basis

Perhatikan sistem persamaan linier $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dengan m persamaan linier dan n variabel (asumsikan $m < n$). Solusi basis untuk $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ adalah solusi yang diperoleh dengan memberikan nilai nol pada $n - m$ variabel, dan memberikan nilai pada m variabel yang lain yang memenuhi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Cameron (1985) menyatakan bahwa sebanyak m variabel tersebut disebut variabel basis, sedangkan $n - m$ variabel yang benilai nol semua disebut variabel nonbasis (Burhan, 2005).

Burhan (2005) menjelaskan langkah-langkah untuk mendapatkan solusi basis dari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ adalah sebagai berikut:

1. Partisi matriks **A** menjadi $\mathbf{A} = [\mathbf{B}|\mathbf{N}]$, **B** adalah matriks $m \times m$ dan **N** adalah matriks $m \times (n - m)$. Matriks **B** adalah matriks persegi yang berisi kolom-kolom yang saling bebas linier di **A** sehingga **B** memiliki invers.
2. Bersamaan dengan mempartisi matriks **A**, vektor **x** juga dipartisi menjadi $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix}$ dimana $\mathbf{x_B}$ adalah vektor variabel basis dan $\mathbf{x_N}$ adalah vektor variabel nonbasis.
3. Nyatakan $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sebagai

$$[\mathbf{B}|\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b} - \mathbf{Nx_N}. \quad (2.14)$$

4. Kalikan kedua ruas persamaan (2.14) dengan $\mathbf{B}^{-1}$, sehingga diperoleh

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Bx_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N}$$

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N}. \quad (2.15)$$

5. Buat $\mathbf{x}_\mathrm{N} = \mathbf{0}$, maka berdasarkan persamaan (2.15) diperoleh solusi basis $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Apabila solusi basis dari persamaan (2.5) disubtitusikan pada persamaan (2.4) maka diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c_B^T x_B} + \mathbf{c_N^T x_N} \\ &= \mathbf{c_B^T B^{-1} b} - \mathbf{c_B^T B^{-1} N x_N} + \mathbf{c_N^T x_N} \\ &= \mathbf{c_B^T B^{-1} b} + (\mathbf{c_N^T} - \mathbf{c_B^T B^{-1} N})\mathbf{x_N} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Koefisien $\mathbf{r}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ disebut *reduced cost vector* dari variabel nonbasis $\mathbf{x}_{\mathbf{N}}$ maka solusi basis layak dari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dikatakan optimal jika $\mathbf{r}_{\mathbf{N}} \geq 0$.

Salah satu metode untuk menyelesaikan pemrograman linier berdasarkan konsep solusi basis adalah metode simpleks. Oleh karena itu, selanjutnya akan dibahas metode simpleks.

2.4 Metode Simpleks

Metode simpleks adalah metode yang paling sering digunakan untuk menyelesaikan masalah PL. Metode simpleks merupakan metode iteratif dengan menggunakan prosedur aljabar, yang dikembangkan oleh George B. Dantzig pada tahun 1947 (Wu & Coppins, 1981). Setiap iterasi pada metode simpleks adalah serangkaian proses untuk mendapatkan sehimpunan variabel yang memenuhi solusi basis sehingga dapat memperbaiki nilai fungsi tujuan. Sedangkan prosedur aljabar yang digunakan dalam metode simpleks adalah proses operasi baris dasar yang selanjutnya disebut *pivoting*.

Dalam sistem persamaan linier $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, a_{ij} adalah entri baris ke-i, kolom ke-j dari matriks $\mathbf{A}$ yang berukuran $m \times n$, dimana a_{ij} merupakan koefisien variabel x_j pada kendala ke-i. *Pivoting* terhadap $a_{rs}x_{rs}$, dimana $a_{rs} \neq 0$ dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Ubah persamaan ke-r dengan mengalikan $\frac{1}{a_{rs}}$ ke persamaan ke-r.
2. Ubah persamaan ke-i dengan hasil penjumlahan persamaan ke-i dan persamaan ke-r yang telah dikalikan dengan $(-a_{is})$, lakukan untuk semua $i = 1, 2, \ldots, m$ kecuali $i = r$.

Selanjutnya, langkah-langkah pada setiap iterasi metode simpleks untuk mendapatkan solusi optimal dari suatu masalah PL untuk tujuan meminimumkan adalah sebagai berikut:

1. Ubah masalah PL dalam bentuk baku.
2. Pilih sehimpunan m variabel (dimana m = banyaknya kendala selain kendala nonnegatif) yang membentuk variabel basis awal yang layak dan semua

variabel selain variabel basis yang disebut variabel nonbasis diberikan nilai nol seperti yang telah dijelaskan pada Subbab 2.3.

3. Hitung *reduced cost vector,* $\mathbf{r_N}$ untuk masing-masing variabel nonbasis. Apabila seluruh variabel nonbasis telah memiliki $\mathbf{r_N} \geq \mathbf{0}$ maka solusi basis yang diperoleh telah optimal. Jika tidak maka variabel nonbasis yang memberikan *reduced cost vector* terkecil dipilih untuk masuk basis, variabel tersebut biasa disebut variabel masuk.
4. Pilih satu variabel basis yang telah ada untuk meninggalkan basis tanpa melanggar kendala nonnegatif. Variabel tersebut disebut variabel keluar.
5. Lakukan perubahan basis dengan *pivoting.* Variabel basis baru adalah variabel masuk yang telah dipilih pada Langkah 3 menggantikan variabel keluar yang telah dipilih pada Langkah 4. Solusi basis terbaru adalah solusi basis saat ini. Kembali ke Langkah 3 hingga diperoleh solusi optimal.

Solusi yang dihasilkan dengan menggunakan metode simpleks tidak selalu berupa bilangan bulat, sehingga untuk menghasilkan solusi berupa bilangan bulat dari masalah pemrograman bilangan bulat maka metode simpleks tersebut perlu dikombinasikan dengan metode *branch and bound*, yang akan dibahas pada subbab berikut ini.

2.5 Metode *Branch and Bound*

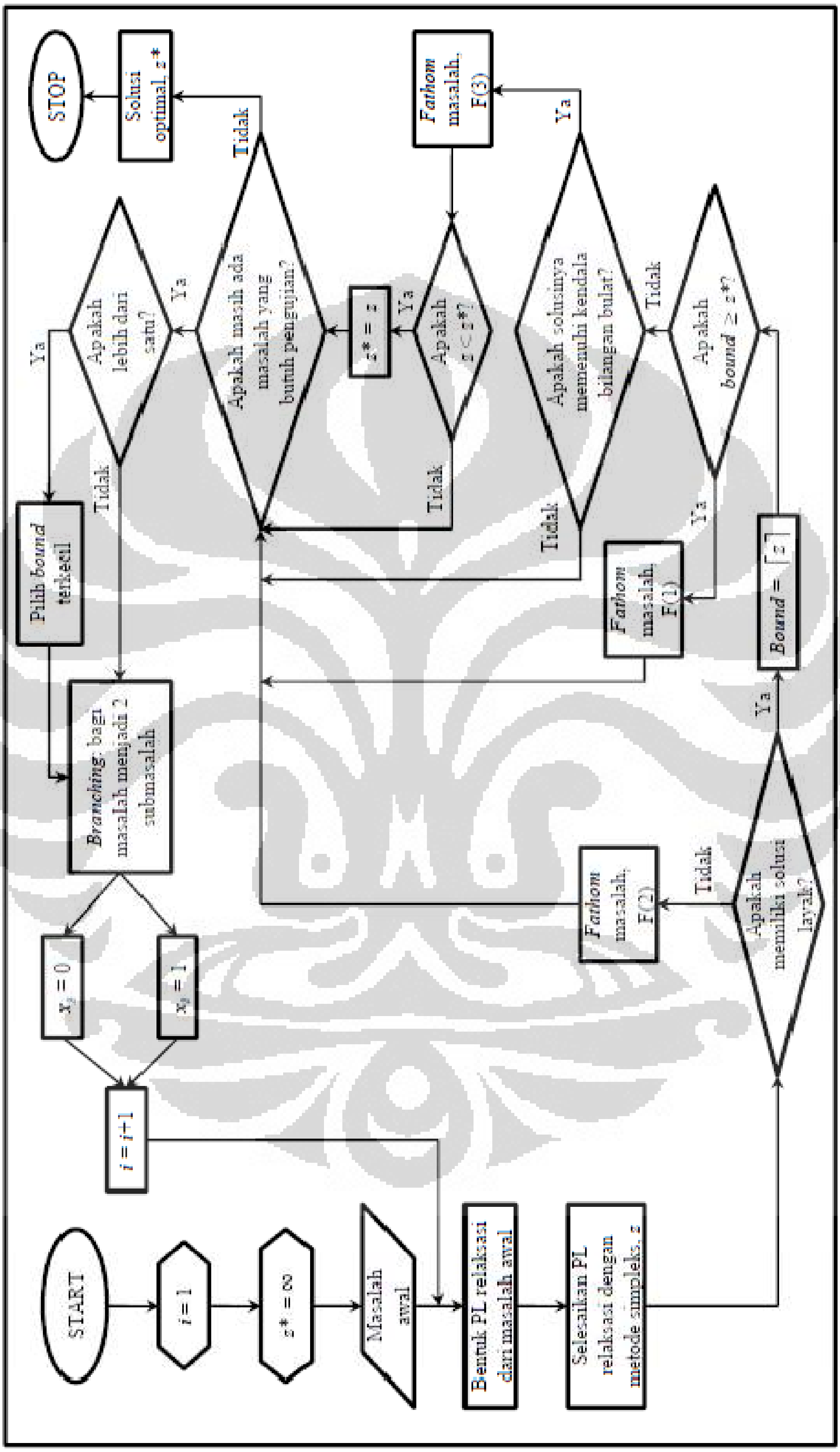
Metode *branch and bound* adalah salah satu metode untuk menyelesaikan masalah pemrograman bilangan bulat. Metode ini menggunakan prosedur enumerasi untuk mendapatkan solusi optimal dari masalah pemrograman bilangan bulat, yaitu dengan cara memertimbangkan satu per satu solusi layak untuk masalah tersebut (Hillier & Lieberman, 1995). Untuk selanjutnya masalah pemrograman bilangan bulat yang akan diselesaikan dengan menggunakan metode *branch and bound* disebut masalah awal.

Metode *branch and bound* merupakan metode iteratif yang menggunakan teknik *divide and conquer* dengan tiga tahap kegiatan pada setiap iterasi, yaitu *branching, bounding,* dan *fathoming* (Hillier & Lieberman, 1995). Untuk mendapatkan solusi optimal dari masalah awal, dilakukan pembagian (*branching*) masalah awal menjadi submasalah-submasalah yang lebih kecil. Kemudian, dilakukan pembatasan (*bounding*) pada submasalah-submasalah tersebut hingga ada beberapa submasalah yang dapat diabaikan (*fathomed*). Pada skripsi ini, metode *branch and bound* yang digunakan adalah metode *branch and bound* yang menerapkan metode simpleks pada saat melakukan *bounding.*

Secara umum, untuk semua masalah pemrograman bilangan bulat yang dapat diselesaikan dengan mengunakan metode *branch and bound*, dapat dilakukan proses yang sama pada setiap iterasinya. Tetapi ada sedikit perbedaan pada tahap *branching*, yaitu ketika menentukan bagaimana cara membagi (*divide*) suatu masalah awal atau submasalah. Berikut ini perbedaan pada tahap *branching*.

1. Untuk masalah awal (2.7) – (2.10), pada tahap *branching*, dilakukan dengan menambahkan kendala yang menyatakan kisaran nilai yang mungkin pada salah satu variabelnya. Apabila solusi optimal masalah PL relaksasi dari suatu submasalah memberikan nilai variabel x_i bukan berupa bilangan bulat maka *branching* dilakukan dengan membagi submasalah tersebut menjadi dua submasalah baru dengan cara menambahkan kendala $x_i \leq \lfloor x_i \rfloor$ untuk submasalah baru yang pertama dan menambahkan kendala $x_i \geq \lceil x_i \rceil$ untuk submasalah baru yang kedua, dengan $\lfloor x_i \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x_i dan $\lceil x_i \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x_i.
2. Untuk masalah awal (2.11) – (2.13), pada tahap *branching* dilakukan dengan menentukan salah satu nilai variabelnya adalah 0 atau 1.

Oleh karena untuk menyelesaikan masalah awal (2.7) – (2.10) dan masalah awal (2.11) – (2.13) hanya terdapat perbedaan pada tahap *branching*, maka selanjutnya cukup dijelaskan untuk langkah-langkah metode *branch and bound* untuk menyelesaikan masalah masalah awal (2.11) – (2.13). Untuk mempermudah pemahaman, maka terlebih dahulu diberikan *flowchart* untuk langkah-langkah tersebut pada gambar berikut ini.



Gambar 2.1 *Flowchart* metode *branch and bound*

Metode *branch and bound* yang digunakan untuk menyelesaikan masalah awal (2.11) – (2.13) dimulai dengan *tahap inisialisasi*, kemudian dilanjutkan *tahap iterasi*. Pada setiap iterasi dilakukan tiga tahap secara berurutan, yaitu *branching, bounding,* dan *fathoming*. Selanjutnya, dilakukan *uji keoptimalan* pada akhir setiap iterasi.

Pada tahap *inisialisasi*, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan nilai optimal sementara untuk fungsi tujuan, yaitu $z^* = \infty$.
2. Bentuk masalah PL relaksasi untuk masalah awal.
3. Selesaikan masalah PL relaksasi yang diperoleh pada Langkah 2 dengan metode simpleks.
4. Jika masalah PL relaksasi yang telah diselesaikan pada Langkah 3 tidak memiliki solusi layak maka metode ini berhenti dan diperoleh kesimpulan bahwa masalah awal tidak memiliki solusi layak. Jika tidak, tentukan $z =$ nilai fungsi tujuan masalah PL relaksasi.
5. Jika solusi optimal masalah PL relaksasi yang diperoleh juga memenuhi kendala bilangan bulat dari masalah awal maka metode ini berhenti dan disimpulkan bahwa solusi optimal PL relaksasi ini, juga merupakan solusi optimal untuk masalah awal. Jika tidak, hitung batas nilai optimal fungsi tujuan untuk masalah awal, yaitu *bound* = $\lceil z \rceil$, dengan $\lceil z \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan z. Lanjutkan pada *tahap iterasi*.

Tahap selanjutnya adalah *tahap iterasi*. Tahap ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh solusi optimal untuk masalah awal. Pada setiap iterasi dilakukan tiga tahap secara berurutan, yaitu *branching, bounding,* dan *fathoming*, yaitu sebagai berikut:

1. *Branching*: bagi masalah awal (untuk iterasi pertama) atau suatu submasalah yang ditinjau (untuk iterasi berikutnya) menjadi dua submasalah baru dengan cara memberikan nilai yang tetap, yaitu 0 atau 1 ke salah satu variabel, misalkan variabel x_i. Sehingga submasalah baru yang pertama memiliki batasan x_i = 0 dan submasalah baru yang kedua memiliki batasan x_i = 1.
2. *Bounding*: pembatasan dilakukan pada submasalah-submasalah yang telah diperoleh pada tahap *branching* dengan cara menyelesaikan PL relaksasi dari

submasalah-submasalah tersebut dengan menggunakan metode simpleks. Apabila diperoleh solusi layak untuk PL relaksasi tersebut, maka tentukan $z =$ nilai optimal fungsi tujuan PL relaksasi tersebut dan hitung *bound* $= \lceil z \rceil$.

3. *Fathoming*: dari submasalah-submasalah yang telah dibatasi tersebut dapat dianggap tidak memerlukan pengujian lebih lanjut (*fathomed*) apabila memenuhi salah satu dari tiga kondisi dibawah ini:
   (1) *Bound* $\geq z^*$.
   (2) PL relaksasi dari submasalah tidak memiliki solusi layak.
   (3) Semua nilai solusi optimal yang diperoleh dari PL relaksasi submasalah telah memenuhi kendala bilangan bulat dan apabila $z < z^*$ maka ubah nilai z^*, yaitu $z^* = z$.

Selanjutnya dilakukan *uji keoptimalan*, yaitu apabila masih ada submasalah yang tidak memenuhi salah satu dari ketiga kondisi *fathoming*, maka artinya submasalah tersebut masih membutuhkan pengujian lebih lanjut pada iterasi berikutnya. Apabila telah tidak ada submasalah yang dapat diuji lebih lanjut maka metode ini berhenti dan solusi optimal diperoleh berdasarkan nilai variabel yang menghasilkan nilai z^* yang terakhir.

Salah satu aplikasi dari metode *branch and bound* pada masalah pemrograman bilangan bulat yaitu masalah optimasi penyusunan *timetable* untuk angkutan umum. Sebelum membahas aplikasi tersebut, berikut ini akan dibahas teori tentang perencanaan sistem angkutan umum.

2.6 Perencanaan Sistem Angkutan Umum

Sebelum dimulai pembahasan mengenai perencanaan sistem angkutan umum, terlebih dahulu akan diberikan definisi istilah-istilah pada angkutan umum yang akan digunakan, yaitu sebagai berikut:

Kapasitas, yaitu batas maksimum banyaknya penumpang yang dapat diangkut oleh suatu kendaraan angkutan umum baik penumpang yang duduk maupun penumpang yang berdiri.

Rute, yaitu lintasan yang harus dilalui kendaraan angkutan umum untuk menurunkan dan menaikkan penumpang.

Terminal, yaitu tempat berkumpulnya kendaraan angkutan umum yang akan dioperasikan dan sekaligus sebagai pangkal atau ujung dari suatu rute.

Periode operasional, yaitu lamanya suatu sistem angkutan umum beroperasi dalam sehari.

Periode, yaitu selang waktu yang merupakan partisi dari periode operasional (biasanya selama satu jam).

Timetable, yaitu tabel yang berisi daftar waktu keberangkatan kendaraan angkutan umum pada lokasi-lokasi pengangkutan penumpang pada suatu rute selama periode operasional.

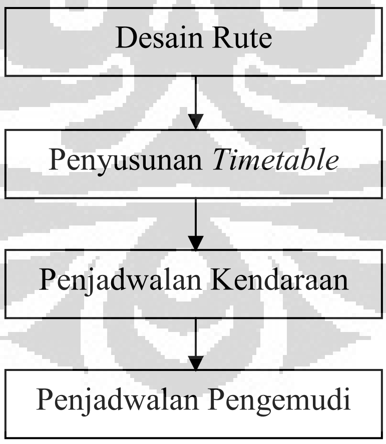
Okupansi, yaitu tingkat keterpakaian suatu kendaraan angkutan umum.

Load factor, yaitu prosentase total kapasitas kendaraan angkutan umum yang terpakai (Arias, dkk., 2007, hal. 248).

Frekuensi, yaitu banyaknya kendaraan angkutan umum yang harus diberangkatkan pada suatu periode.

Headway, yaitu lamanya waktu antar keberangkatan pada suatu periode.

Dalam perencanaan suatu sistem angkutan umum terdapat empat tahap perencanaan yang saling berurutan, yaitu (1) desain rute, (2) penyusunan *timetable*, (3) penjadwalan kendaraan, dan (4) penjadwalan pengemudi (Ceder, 2007, hal. 4). Alur keempat tahap tersebut dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 2.2 Alur tahap perencanaan sistem angkutan umum

Desain rute merupakan tahap untuk merencanakan lintasan-lintasan yang harus dilalui kendaraan angkutan umum untuk menaikkan dan menurunkan penumpang. Tetapi ketika perencanaan dilakukan untuk mengevaluasi suatu sistem angkutan umum yang telah berjalan, maka perencanaan yang dilakukan pada tahap ini adalah untuk menambah atau mengurangi lintasan-lintasan yang telah ada sehingga dapat memenuhi kebutuhan penumpang dan meningkatkan produktivitas suatu sistem angkutan umum.

Selanjutnya, apabila rute telah terbentuk, barulah tahap perencanaan kedua dapat dilakukan, yaitu penyusunan *timetable* untuk masing-masing rute selama periode operasional. *Timetable* yang disusun harus disesuaikan dengan variasi kedatangan penumpang karena tujuan utama penyusunan *timetable* adalah untuk memenuhi kebutuhan penumpang terhadap angkutan umum. Variasi tersebut dipengaruhi oleh kebutuhan transportasi komunitas-komunitas yang terdapat dalam kawasan rute yang dilalui, seperti komunitas pendidikan, komunitas bisnis, komunitas pegawai, komunitas tempat hiburan, dsb. *Timetable* ditentukan berdasarkan perhitungan rata-rata banyaknya penumpang, sehingga kebutuhan penumpang akan angkutan umum dapat terpenuhi. Selain itu, *timetable* juga harus dapat memenuhi standar pelayanan minimum, biasanya berupa kebijakan *headway* maksimum atau frekuensi minimum pada setiap periode.

Setelah penyusunan *timetable*, tahap selanjutnya adalah penjadwalan kendaraan. Penjadwalan kendaran dilakukan dengan tujuan untuk mendapatkan daftar kendaraan yang beroperasi untuk memenuhi *timetable* yang telah dibuat disesuaikan dengan banyaknya kendaraan yang tersedia dan lamanya perjalanan dalam satu rute. Selanjutnya tahap terakhir, yaitu penjadwalan pengemudi. Penjadwalan pengemudi bertujuan untuk mengalokasikan pengemudi kendaraan sesuai dengan jadwal kendaraan yang diberikan dan sesuai dengan kontrak kerja yang telah disepakati.

Dalam skripsi ini akan dibahas lebih lanjut tentang tahap kedua, yaitu penyusunan *timetable*, dengan tujuan untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum. Pada subbab 2.7 akan dibahas tentang metode penyusunan *timetable* yang umum digunakan.

2.7 Metode Penyusunan *Timetable* yang Telah Umum Digunakan

Dalam penyusunan *timetable*, frekuensi dan *headway* harus ditentukan terlebih dahulu. *Headway* (menit) dapat diperoleh dengan membagi lamanya satu periode (menit) dengan frekuensi. Sebagai contoh, diberikan Tabel 2.1 berikut ini yang menunjukkan frekuensi dan *headway* keberangkatan kendaraan pada periode operasional 07.00 – 09.00 WIB. Terdapat empat metode yang umum digunakan untuk menentukan frekuensi keberangkatan kendaraan angkutan umum (Ceder, 2007).

Tabel 2.1 Frekuensi dan *headway*

Periode	**Frekuensi**	***Headway*** (menit)
07.00 – 08.00	6	10
08.00 – 09.00	12	5

Selanjutnya, akan dibahas salah satu metode penyusunan *timetable* yang telah umum digunakan yaitu metode *clock headway*. Metode *clock headway* adalah metode yang sangat mudah untuk diaplikasikan karena prinsip dasar metode ini adalah penyusunan *headway* berdasarkan menit yang mudah diingat oleh penumpang, yaitu salah satu dari: 5, 6, 7.5,10, 12, 15, 20, 30, 40, 45, atau 60 menit (Ceder, 2007). Sebagai contoh, *headway* yang telah diperoleh diberikan pada Tabel 2.2 berikut ini, dan dengan mendaftarkan waktu keberangkatan pada masing-masing periode berdasarkan *headway* tersebut, maka diperoleh *timetable* pada Tabel 2.3.

Tabel 2.2 *Clock headway*

Periode	***Headway*** (menit)	***Clock Headway*** (menit)
07.00 – 08.00	7.5	7.5
08.00 – 09.00	5.8	5

Tabel 2.3 *Timetable* dengan *clock headway*

Keberangkatan ke-	**Pukul**	**Keberangkatan**	**Pukul**
1	07:07:30	11	08:15:00
2	07:15:00	12	08:20:00
3	07:22:30	13	08:25:00
4	07:30:00	14	08:30:00
5	07:37:30	15	08:35:00
6	07:45:00	16	08:40:00
7	07:52:30	17	08:45:00
8	08:00:00	18	08:50:00
9	08:05:00	19	08:55:00
10	08:10:00	20	09:00:00

Metode *clock headway* ini memang dapat menghasilkan daftar waktu keberangkatan angkutan umum yang mudah diingat oleh penumpang. Tetapi, pada penyusunan *timetable* dengan metode tersebut tidak memertimbangkan banyak penumpang dan banyak kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan, sehingga metode ini perlu dikombinasikan dengan suatu metode penyusunan *timetable* lain untuk dapat menghasilkan *headway* yang dapat meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum. Oleh karena itu, pada Bab 3 berikut ini akan dijelaskan mengenai optimasi penyusunan *timetable* angkutan umum dengan kedua pertimbangan tersebut.

BAB 3
MASALAH PENYUSUNAN *TIMETABLE* ANGKUTAN UMUM UNTUK MEMINIMUMKAN KEPADATAN PENUMPANG DI DALAM KENDARAAN ANGKUTAN UMUM DAN PENYELESAIANNYA MENGGUNAKAN METODE *BRANCH AND BOUND*

Dalam bidang transportasi, khususnya dalam hal perencanaan sistem angkutan umum banyak permasalahan yang harus diselesaikan untuk dapat mengoperasikan suatu sistem angkutan umum dengan baik. Salah satu permasalahannya adalah terjadinya penumpukan penumpang saat jam-jam sibuk tanpa diimbangi dengan jumlah keberangkatan kendaraan angkutan umum yang sesuai. Sehingga, tak jarang penumpang terpaksa harus berdesak-desakan dengan penumpang lain di dalam kendaraan angkutan umum.

Permasalahan penumpang terpaksa berdesak-desakan di dalam kendaraan angkutan umum, bukan semata-mata karena banyaknya kendaraan angkutan umum yang dioperasikan tidak mencukupi kebutuhan. Permasalahan tersebut dapat juga disebabkan oleh *timetable* yang telah dibuat belum optimal sehingga jumlah keberangkatan kendaraan angkutan umum tidak sesuai dengan kebutuhan. Oleh karena itu, pada bab ini akan disusun model optimasi masalah penyusunan *timetable* untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan memertimbangkan banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan, agar jumlah keberangkatan kendaraan angkutan umum sesuai dengan kebutuhan, sehingga penumpang tidak harus berdesak-desakan di dalam kendaraan angkutan umum. Penyusunan model tersebut mengacu pada Ceder (2007). Kemudian dibahas penyelesaian model tersebut dengan menggunakan metode *branch and bound* yang telah dijelaskan pada Subbab 2.5. Sebelum dimulai pembahasan tersebut, pada subbab berikut ini akan dipaparkan terlebih dahulu asumsi-asumsi yang akan digunakan dan data yang dibutuhkan untuk penyusunan model optimasi *timetable*.

3.1 Asumsi yang Digunakan dan Data yang Dibutuhkan

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk menyusun model optimasi masalah penyusunan *timetable* angkutan umum untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan memerhatikan juga banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan adalah sebagai berikut:

(a) Terdapat suatu himpunan terminal T.

(b) Rute yang harus dilalui telah ditentukan dan rute tersebut berada pada jalur khusus sehingga waktu perjalanan untuk menempuh suatu rute adalah tetap untuk setiap keberangkatan kendaraan angkutan umum.

(c) Selama pengoperasian angkutan umum, tidak terjadi gangguan baik pada kendaraan angkutan umum yang digunakan maupun pada jalur rute yang dilalui.

(d) Waktu operasional dibatasi dalam selang waktu $[t_1, t_2]$.

(e) Hanya satu jenis kendaraan angkutan umum yang digunakan.

Selain asumsi-asumsi tersebut, penyusunan *timetable* angkutan umum tidak dapat dilakukan tanpa adanya data yang mendukung. Data tersebut antara lain:

(a) Lama perjalanan dari lokasi pemberangkatan pertama sampai lokasi tujuan terakhir untuk masing-masing rute.

(b) Maksimum dari rata-rata banyaknya penumpang pada setiap periode.

(c) Frekuensi minimum yang diperbolehkan.

(d) Banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan.

3.2 Model Optimasi Penyusunan *Timetable*

Untuk menyusun model optimasi untuk masalah penyusunan *timetable* dengan asumsi-asumsi dan data seperti yang telah disebutkan pada Subbab 3.1, dapat dilakukan dengan 3 langkah, yaitu 1) pendefinisian variabel keputusan, 2) pendefinisian fungsi tujuan, dan 3) pendefinisian kendala.

3.2.1 Pendefinisian Variabel Keputusan

Masalah penyusunan *timetable* untuk angkutan umum yang dibahas pada skripsi ini, memertimbangkan keterbatasan banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan. Ceder (2007) menyatakan bahwa banyaknya kendaraan angkutan umum minimum yang dibutuhkan untuk melayani himpunan terminal T telah diformulasikan oleh Bartlett (1957), Gertsbach dan Gurevich (1977), dan Salzborn (1972) secara matematis, yaitu:

$$N = \sum_{k \in T} D(k) = \sum_{k \in T} \underset{t \in [t_1, t_2]}{maksimum}\, d(k,t) \tag{3.1}$$

dimana N adalah banyaknya kendaraan angkutan umum minimum yang dibutuhkan untuk melayani himpunan terminal T selama periode operasional $[t_1, t_2]$, dimana $N \in \mathbb{Z},\ N \geq 0,\ D(k)$ adalah jumlah minimum kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari terminal k, dengan $D(k) \in \mathbb{Z},\ D(k) \geq 0$, dan $d(k,t)$ adalah jumlah total dari banyaknya keberangkatan dikurangi banyaknya kedatangan kendaraan angkutan umum di terminal k pada waktu $t \in [t_1, t_2]$, dengan $d(k,t) \in \mathbb{Z}$ dan $d(k,t) \geq 0$. Sebagai contoh, misalkan suatu angkutan umum yang beroperasi mulai dari pukul 05.00 – 22.00 WIB, kemudian misalnya pada pukul 08.10 WIB, telah ada 14 keberangkatan dan 3 kedatangan kendaraan angkutan umum pada suatu terminal k, maka diperoleh $d(k, 08.10) = 14 - 3 = 11.$

Berdasarkan definisi $D(k)$, maka perlu didefinisikan variabel keputusan: $BA(k)$, yaitu banyaknya kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari terminal $k \in T$ dalam periode operasional $[t_1, t_2]$ dengan $BA(k) \in \mathbb{Z}$, $BA(k) \geq 0$. Selanjutnya karena dalam penyusunan *timetable*, frekuensi harus ditentukan terlebih dahulu, maka didefinisikan variabel biner sebagai variabel keputusan berikutnya, yaitu:

$$x^{\mathrm{F}}(\cdot) = \begin{cases} 1, \text{jika F keberangkatan dipilih pada periode ke-}j \text{ dari terminal } k_1 \text{ ke } k_2 \\ 0, \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan $(\cdot) \equiv (j, k_1, k_2)$ dan F adalah indeks yang dimulai dari $L(\cdot)$ sampai $U(\cdot)$, yaitu $\mathrm{F} = L(\cdot), L(\cdot)+1, L(\cdot)+2, \ldots., U(\cdot)-1, U(\cdot)$, dimana $L(\cdot)$ adalah frekuensi minimum yang diperbolehkan, dan $U(\cdot)$ adalah frekuensi maksimum yang ditentukan berdasarkan perhitungan koefisien fungsi tujuan yang akan dijelaskan pada subbab berikut ini.

3.2.2 Pendefinisian Fungsi Tujuan

Tujuan penyusunan *timetable* pada skripsi ini adalah untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum, maka perlu didefinisikan *crowding*, yaitu banyaknya penumpang yang berdesakan yang dihitung berdasarkan jumlah total penumpang yang melebihi okupansi di dalam kendaraan angkutan umum. *Crowding* yang berasosiasi dengan $x^{\mathrm{F}}(\cdot)$ dinotasikan dengan $\mathrm{c}^{\mathrm{F}}(\cdot)$ dan secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathrm{c}^{\mathrm{F}}(\cdot) = maksimum\{P_m(\cdot) - \mathrm{F}.d_o(\cdot), 0\} \tag{3.2}$$

dimana $P_m(\cdot)$ adalah maksimum dari rata-rata banyaknya penumpang pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2, F adalah frekuensi yang telah ditentukan pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2, dan $d_o(\cdot)$ adalah okupansi yang diinginkan pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2. Sebagai contoh, misalkan untuk suatu angkutan umum, pada periode ke-j untuk rute dari terminal k_1 ke terminal k_2 dengan maksimum rata-rata banyaknya penumpang adalah 410 penumpang dengan okupansi 50 penumpang, dan misalnya ditentukan frekuensi, $\mathrm{F} = 8$ maka diperoleh $\mathrm{c}^8(j, k_1, k_2) = maksimum\{410 - 8.50, 0\} = 10$.

Berdasarkan pendefinisian *crowding*, maka untuk mencapai tujuan meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum, sama halnya dengan meminimumkan total *crowding* yang ada, yang diakibatkan oleh penentuan nilai $x^{\mathrm{F}}(\cdot)$. Sehingga, dapat didefinisikan fungsi tujuan:

$$Minimum\ z = \sum_{\forall(\cdot)} \sum_{\mathrm{F}=L(\cdot)}^{U(\cdot)} c^{\mathrm{F}}(\cdot) x^{\mathrm{F}}(\cdot). \tag{3.3}$$

3.2.3 Pendefinisian Kendala

Selama periode operasional $[t_1, t_2]$ pada himpunan terminal T harus ditentukan frekuensi pada setiap periode untuk setiap rute yang berkaitan dengan himpunan terminal T. Sebelumnya telah didefinisikan variabel biner, $x^{\mathrm{F}}(\cdot)$

dengan $\text{F} = L(\cdot), L(\cdot) + 1, L(\cdot) + 2, \dots, U(\cdot) - 1, U(\cdot)$. Dengan pendefinisian tersebut, artinya terdapat beberapa nilai yang mungkin untuk F, yaitu terurut mulai dari $L(\cdot)$ hingga $U(\cdot)$. Oleh karena untuk suatu rute pada setiap periode hanya ditentukan satu nilai frekuensi untuk menyusun *timetable*, dan berdasarkan pendefinisian variabel $x^{\text{F}}(\cdot)$ yang berarti suatu nilai F dipilih apabila $x^{\text{F}}(\cdot) = 1$, maka untuk suatu periode pada suatu rute hanya diperbolehkan satu variabel $x^{\text{F}}(\cdot)$ yang bernilai 1. Sehingga diperoleh kendala:

$$\sum_{\text{F}=L(\cdot)}^{U(\cdot)} x^{\text{F}}(\cdot) = 1, \qquad \forall(\cdot). \tag{3.4}$$

Apabila terdapat N_0 kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan untuk melayani himpunan terminal T selama periode operasional $[t_1, t_2]$, maka berdasarkan persamaan (3.1) terdapat kendala:

$$\{d(k, \text{t}) \text{ yang ditentukan oleh } x^{\text{F}}(\cdot)\} \leq BA(k), t \in T_k, k \in T, \tag{3.5}$$

dimana T_k adalah himpunan waktu keberangkatan kendaraan angkutan umum dari terminak k selama periode operasional $[t_1, t_2]$, dengan $T_k \subseteq [t_1, t_2]$,
dan diperoleh kendala total banyaknya kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan untuk seluruh terminal di himpunan terminal T, yaitu:

$$\sum_{k \in \text{T}} BA(k) \leq \text{N}_0. \tag{3.6}$$

Terakhir, kendala nilai variabel yang memenuhi, yaitu:

$$x^{\text{F}}(\cdot) \in \{0, 1\}, \quad \forall \text{F}, (\cdot), \tag{3.7}$$

$$BA(k) \geq 0, \;\; BA(k) \in \mathbb{Z}, \quad \forall k \in T. \tag{3.8}$$

3.2.4 Formulasi Lengkap

Berdasarkan pendefinisian pada Subbab 3.2.1 – Subbab 3.2.3, maka dapat diperoleh formulasi lengkap untuk model optimasi masalah penyusunan *timetable*, yaitu:

$$Minimum\ z = \sum_{\forall(\cdot)} \sum_{\text{F}= L(\cdot)}^{U(\cdot)} \text{c}^{\text{F}}(\cdot). x^{\text{F}}(\cdot) \tag{3.9}$$

ds.

$$\sum_{F=L(\cdot)}^{U(\cdot)} x^{F}(\cdot) = 1, \quad \forall(\cdot) \tag{3.10}$$

$$\{d(k,\text{t}) \text{ yang ditentukan oleh } x^{F}(\cdot)\} \leq \text{BA}(k), t \in T_k, k \in T \tag{3.11}$$

$$\sum_{k \in T} BA(k) \leq \text{N}_0 \tag{3.12}$$

$$x^{F}(\cdot) \in \{0,1\}, \quad \forall \text{F}, (\cdot) \tag{3.13}$$

$$BA(k) \geq 0, \quad BA(k) \in \mathbb{Z}, \ \ \forall k \in T. \tag{3.14}$$

Berdasarkan model optimasi yang telah diperoleh tersebut, masalah penyusunan *timetable* ini merupakan suatu masalah pemrograman bilangan bulat. Pada Subbab 2.5 telah dijelaskan salah satu metode untuk menyelesaikan masalah pemrograman bilangan bulat, yaitu metode *branch and bound.* Oleh karena itu, selanjutnya akan dibahas langkah-langkah penyelesaian masalah (3.9) – (3.14) dengan metode *branch and bound.*

3.3 Penerapan Metode *Branch and Bound*

Metode *branch and bound* merupakan metode iteratif untuk menyelesaikan masalah pemrograman bilangan bulat seperti yang telah dijelaskan pada Subbab 2.5. Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penyusunan *timetable* (3.9) – (3.14) dengan sebelumnya perlu dilakukan pendefinisian ulang pada variabel-variabel keputusan dari masalah tersebut. Pendefinisian ulang tersebut, yaitu sebagai berikut:

Misalkan, m = banyaknya variabel $x^{F}(\cdot), \forall(\cdot)$ maka didefinisikan variabel $x_j,\ j = 1, 2, \cdots, m$ yang menggantikan $x^{F}(\cdot)$, dengan cara mengurutkan $x^{F}(\cdot)$ sesuai dengan periode dan frekuensi yang menentukan keberadaan $x^{F}(\cdot)$. Untuk variabel $BA(k)$, misalkan terdapat n terminal pada himpunan T, maka didefinisikan variabel $x_j,\ j = m+1, m+2, \dots, m+(n-1), m+n$ untuk menggantikan variabel $BA(k), \forall k \in T$. Sehingga, kendala (3.13) dan (3.14) berturut-turut menjadi

$$x_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1, 2, \dots, m, \tag{3.15}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j = m+1, m+2, \dots, m+(n-1),\ m + n. \tag{3.16}$$

Untuk fungsi tujuan dan kendala juga harus disesuaikan dengan perubahan variabel tersebut.

Agar lebih jelas, bagaimana metode *branch and bound* dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penyusunan *timetable* angkutan umum yang terlebih dahulu dimodelkan ke dalam masalah pemrograman bilangan bulat, maka selanjutnya akan diberikan contoh masalah dan penyelesaiaanya pada subbab berikut.

3.4 Contoh Masalah dan Penyelesaiannya

Pada subbab ini akan disusun *timetable* suatu angkutan umum yang melayani dua terminal a dan b pada rute $a - b$ dan $b - a$ dengan 7 kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam penyusunan *timetable* ini, yaitu sebagai berikut:

(a) Hanya terdapat dua terminal a dan b.

(b) Rute yang dilalui telah ditentukan, yaitu rute $a - b$ dan $b - a$ dengan rute $a - b$ adalah rute yang dimulai dari terminal a dan berakhir di terminal b, dan sebaliknya untuk rute $b - a$. Kedua rute tersebut berada pada jalur khusus, sehingga untuk menempuh suatu rute yang sama adalah tetap untuk setiap keberangkatan kendaraan angkutan umum.

(c) Selama perjalanan tidak ada gangguan baik pada kendaraan angkutan umum yang digunakan maupun pada jalur rute yang dilalui.

(d) Periode operasional yang ditinjau dibatasi untuk pukul 07.00 – 09.00 WIB.

(e) Hanya digunakan satu jenis kendaraan angkutan umum.

Data pendukung yang dibutuhkan dalam penyusunan *timetable* ini diberikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Data yang dibutuhkan untuk contoh masalah

Rute	**Lama Perjalanan** (menit)	**Periode**	**Waktu**	**Maksimum Rata-rata Banyaknya Penumpang**	**Okupansi** (penumpang)	**Frekuensi Minimum**
$a - b$	60	1	07.00 – 08.00	290	65	3
		2	08.00 – 09.00	150	47	2
$b - a$	45	1	07.00 – 08.00	360	65	3
		2	08.00 – 09.00	140	47	2

Selanjutnya berdasarkan asumsi-asumsi dan data tersebut akan disusun model optimasi untuk masalah penyusunan *timetable* contoh masalah pada Subbab 3.4.1. Kemudian model tersebut diselesaikan dengan metode *branch and bound* pada Subbab 3.4.2.

3.4.1 Model Optimasi Masalah Penyusunan *Timetable* untuk Contoh Masalah

Berdasarkan Tabel 3.1 didefinisikan variabel $\mathrm{x}^{\mathrm{F}}(\cdot)$ dan $\mathrm{c}^{\mathrm{F}}(\cdot)$ secara bersamaan dengan cara menghitung banyaknya penumpang yang berdesakan menggunakan persamaan (3.2) dengan nilai F terkecil atau $L(\cdot)$ sesuai dengan kolom terakhir pada Tabel 3.1. Langkah tersebut dapat diringkas dalam Tabel 3.2 berikut ini.

Tabel 3.2 Variabel keputusan $\mathrm{x}^{\mathrm{F}}(\cdot)$ dan koefisien fungsi tujuan $\mathrm{c}^{\mathrm{F}}(\cdot)$

Rute	***a – b***				***b – a***			
Periode	**1**		**2**		**1**		**2**	
	$\mathrm{c}^{\mathrm{F}}(\cdot)$	$\mathrm{x}^{\mathrm{F}}(\cdot)$	$\mathrm{c}^{\mathrm{F}}(\cdot)$	$\mathrm{x}^{\mathrm{F}}(\cdot)$	$\mathrm{c}^{\mathrm{F}}(\cdot)$	$\mathrm{x}^{\mathrm{F}}(\cdot)$	$\mathrm{c}^{\mathrm{F}}(\cdot)$	$\mathrm{x}^{\mathrm{F}}(\cdot)$
F = 2	-	-	56	x_4	-	-	46	x_{11}
F = 3	95	x_1	9	x_5	165	x_7	0	x_{12}
F = 4	30	x_2	0	x_6	100	x_8		
F = 5	0	x_3		x_{15}	35	x_9		
F = 6					0	x_{10}		

Tabel 3.2 diperoleh dengan cara menghitung banyaknya penumpang yang berdesakan untuk masing-masing rute pada setiap periode, apabila dipilih suatu nilai frekuensi. Misalnya untuk rute *a – b* pada periode 1 dipilih frekuensinya adalah 3 atau bisa ditulis pada $(1, a, b)$ dipilih $\mathrm{F} = 3$, maka banyak penumpang yang berdesakan adalah maksimum rata-rata banyaknya penumpang pada $(1, a, b)$ dikurangi 3 kali dari okupansi, yaitu $290 - 3.65 = 95$ penumpang atau dapat ditulis:

$$\mathrm{c}^2(1, a, b) = P_m(1, a, b) - \mathrm{F}.d_o(1, a, b) = 290 - 3.65 = 95.$$

Nilai $\mathrm{F} = 3$ untuk $(1, a, b)$ ini akan benar-benar dipilih atau tidak, ditentukan oleh nilai variabel $x^3(1, a, b)$, yaitu 0 atau 1. Jika $x^3(1, a, b) = 1$ adalah solusi optimal, artinya $\mathrm{F} = 3$ untuk $(1, a, b)$ akan benar-benar dipilih sebagai solusi optimal. Untuk mempermudah penyelesaian dengan metode *branch and bound*, maka variabel $x^3(1, a, b)$ digantikan oleh variabel x_1.

Setelah didefinisikan variabel yang menyatakan frekuensi, selanjutnya didefinisikan variabel yang menyatakan banyaknya kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan pada setiap terminal, yaitu:

$x_{13} = BA(a)$ = banyaknya kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari terminal *a* menuju terminal *b*,

$x_{14} = BA(b)$ = banyaknya kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari terminal *b* menuju terminal *a*.

Akibat pendefinisian tersebut, maka kedua variabel ini memiliki koefisien 0 pada fungsi tujuan.

Berdasarkan persamaan (3.3) dan pendefinisian variabel keputusan maka diperoleh fungsi tujuan:

$$\begin{aligned} Minimum\ z\ =\ & 95x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 56x_4 + 9x_5 + 0x_6 + 165x_7 + 100x_8 \\ & + 35x_9 + 0x_{10} + 46x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} \end{aligned}$$

Kemudian didefinisikan kendala-kendala yang diakibatkan oleh penentuan frekuensi keberangkatan kendaraan angkutan umum, F untuk setiap periode untuk masing-masing rute, yaitu sebagai berikut:

(a) Karena untuk rute *a* – *b* pada periode 1 hanya diambil satu nilai untuk F maka diperoleh kendala $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

(b) Karena untuk rute *a* – *b* pada periode 2 hanya diambil satu nilai untuk F maka diperoleh kendala $x_4 + x_5 + x_6 = 1$.

(c) Karena untuk rute *b* – *a* pada periode 1 hanya diambil satu nilai untuk F maka diperoleh kendala $x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1$.

(d) Karena untuk rute *b* – *a* pada periode 2 hanya diambil satu nilai untuk F maka diperoleh kendala $x_{11} + x_{12} = 1$.

Kemudian, didefinisikan kendala yang diakibatkan oleh keterbatasan sejumlah kendaraan angkutan umum yang digunakan pada masing-masing terminal. Pada Tabel 3.2 terlihat bahwa nilai F maksimum atau $U(\cdot)$, yaitu $U(\cdot) = 6$. Artinya frekuensi maksimum yang mungkin ada adalah 6, sehingga *headway* minimum yang diakibatkan oleh frekuensi maksimum tersebut adalah $\frac{60}{6} = 10$ menit. Oleh karena itu, perlu dilakukan perhitungan jumlah total kendaraan yang berangkat dan tiba di masing-masing terminal untuk setiap 10 menit mulai dari jam pertama periode operasional hingga jam terakhir periode operasional. Berdasarkan persamaan (3.5) maka diperoleh kendala-kendala pada Tabel 3.3 berikut ini:

Tabel 3.3 Kendala-kendala banyaknya kendaraan yang digunakan

Menit ke-	Terminal	Kendala
10	a	- (belum ada kendaraan angkutan umum yang berangkat ataupun tiba)
	b	$x_{10} \leq x_{14}$
20	a	$x_1 + x_2 + x_3 \leq x_{13}$
	b	$x_7 + x_8 + x_9 + 2x_{10} \leq x_{14}$
30	a	$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq x_{13}$
	b	$x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 3x_{10} \leq x_{14}$
40	a	$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq x_{13}$
	b	$2x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 4x_{10} \leq x_{14}$
50	a	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq x_{13}$
	b	$2x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 5x_{10} \leq x_{14}$
60	a	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_{10} \leq x_{13}$
	b	$3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} \leq x_{14}$
70	a	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_7 - x_8 - 2x_9 - 2x_{10} \leq x_{13}$
	b	$3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} \leq x_{14}$
80	a	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 + x_6 - x_7 - 2x_8 - 2x_9 - 3x_{10} \leq x_{13}$
	b	$3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + x_{12} - x_1 - x_2 - x_3 \leq x_{14}$
90	a	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 - 2x_7 - 3x_8 - 3x_9 - 4x_{10} \leq x_{13}$
	b	$3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + x_{11} + x_{12} - x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq x_{14}$
100	a	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 - 3x_8 - 4x_9 - 5x_{10} \leq x_{13}$
	b	$3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + x_{11} + 2x_{12} - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq x_{14}$
110	a	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 - 3x_7 - 4x_8 - 5x_9 - 6x_{10} \leq x_{13}$
	b	$3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + x_{11} + 2x_{12} - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq x_{14}$
120	a	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 - 3x_7 - 4x_8 - 5x_9 - 6x_{10} \leq x_{13}$
	b	$3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} - 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \leq x_{14}$

Kendala selanjutnya adalah keterbatasan banyaknya kendaraan umum secara keseluruhan yang dapat digunakan untuk melayani kedua rute $a - b$ dan $b - a$, yaitu 7 kendaraan. Sehingga diperoleh kendala:

$$x_{13} + x_{14} \leq 7$$

Kemudian, karena keterbatasan nilai variabel yang diperbolehkan maka diperoleh kendala:

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, 12$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j = 13, 14.$$

Selanjutnya, berdasarkan pendefinisian variabel keputusan, fungsi tujuan, dan kendala-kendala tersebut maka dapat diperoleh formulasi lengkap untuk model optimasi masalah penyusunan *timetable* untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan memertimbangkan banyaknya kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan, yaitu sebagai berikut:

$$Minimum\ z = 95x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 56x_4 + 9x_5 + 0x_6 + 165x_7 + 100x_8 + 35x_9 + 0x_{10} + 46x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14}$$

ds.

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

(2) $x_4 + x_5 + x_6 = 1$

(3) $x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1$

(4) $x_{11} + x_{12} = 1$

(5) $x_{10} \leq x_{14}$

(6) $x_1 + x_2 + x_3 \leq x_{13}$

(7) $x_7 + x_8 + x_9 + 2x_{10} \leq x_{14}$

(8) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq x_{13}$

(9) $x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 3x_{10} \leq x_{14}$

(10) $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq x_{13}$

(11) $2x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 4x_{10} \leq x_{14}$

(12) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq x_{13}$

(13) $2x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 5x_{10} \leq x_{14}$

(14) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_{10} \leq x_{13}$

(15) $3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} \leq x_{14}$

(16) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_7 - x_8 - 2x_9 - 2x_{10} \leq x_{13}$

(17) $3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} \leq x_{14}$

(18) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 + x_6 - x_7 - 2x_8 - 2x_9 - 3x_{10} \leq x_{13}$

(19) $3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + x_{12} - x_1 - x_2 - x_3 \leq x_{14}$

(20) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 - 2x_7 - 3x_8 - 3x_9 - 4x_{10} \leq x_{13}$

(21) $3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + x_{11} + x_{12} - x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq x_{14}$

(22) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 - 3x_8 - 4x_9 - 5x_{10} \leq x_{13}$

(23) $3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + x_{11} + 2x_{12} - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq x_{14}$

(24) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 - 3x_7 - 4x_8 - 5x_9 - 6x_{10} \leq x_{13}$

(25) $3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + x_{11} + 2x_{12} - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq x_{14}$

(26) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 - 3x_7 - 4x_8 - 5x_9 - 6x_{10} \leq x_{13}$

(27) $3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} - 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \leq x_{14}$

(28) $x_{13} + x_{14} \leq 7$

(29) $x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, 12$

(30) $x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j = 13, 14.$ (3.17)

3.4.2 Penyelesaian Model Optimasi Masalah Penyusunan *Timetable* Contoh Masalah dengan Metode *Branch and Bound*

Setelah diperoleh model optimasi masalah penyusunan *timetable* untuk contoh masalah, selanjutnya model tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode *branch and bound* seperti yang telah dipaparkan pada Subbab 3.3.

Tahap inisialisasi: $z^* = \infty$, setelah dibentuk PL relakasasi dari masalah awal (3.17) kemudian diselesaikan dengan metode simpleks, disimpulkan bahwa masalah PL relaksasi tersebut memiliki solusi layak, dengan $z = 177.5$. Sehingga diperoleh *bound* untuk masalah awal adalah 178 dan dilanjutkan ke *tahap iterasi*.

Tahap Iterasi:

Iterasi 1: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada masalah awal.

Branching: masalah awal dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_1. Submasalah 1 adalah masalah awal dengan telah diberikan $x_1 = 0$, dan submasalah 2 adalah masalah awal dengan telah diberikan $x_1 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode simpleks dan dihitung *bound* untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 1: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 4, x_{14} = 2$, dan diperoleh $z = 204$, maka didapatkan $bound\ = 204$.
- Submasalah 2: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 177.5$, maka didapatkan $bound\ = 178$.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 1 memenuhi kondisi *fathoming* yang ketiga, dan karena $z < z^*$ maka z^* perlu diberbarui, yaitu $z^* = z$.
- Submasalah 2 tidak memenuhi satupun kondisi *fathoming*.

Uji Keoptimalan: submasalah 2 masih membutuhkan pengujian lebih lanjut pada iterasi berikutnya.

Iterasi 2: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada submasalah 2 karena satu-satunya submasalah yang masih membutuhkan pengujian lebih lanjut adalah submasalah ini.

Branching: submasalah 2 dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_2. Submasalah 3 adalah submasalah 2 dengan telah diberikan $x_2 = 0$, dan submasalah 4 adalah submasalah 2 dengan telah diberikan $x_2 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode simpleks dan dihitung $bound$ untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 3: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 177.5$, maka didapatkan $bound\ = 178$.
- Submasalah 2: tidak ada solusi layak untuk PL relaksasi submasalah ini.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 3 tidak memenuhi satupun kondisi *fathoming*.
- Submasalah 4 memenuhi kondisi *fathoming* yang kedua.

Uji Keoptimalan: submasalah 3 masih membutuhkan pengujian lebih lanjut pada iterasi berikutnya.

Iterasi 3: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada submasalah 3 karena satu-satunya submasalah yang masih membutuhkan pengujian lebih lanjut adalah submasalah ini.

Branching: submasalah 3 dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_3. Submasalah 5 adalah submasalah 3 dengan telah diberikan $x_3 = 0$, dan submasalah 6 adalah submasalah 3 dengan telah diberikan $x_3 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode simpleks dan dihitung $bound$ untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 5: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 177.5$, maka didapatkan $bound\ = 178$.
- Submasalah 6: tidak ada solusi layak untuk PL relaksasi submasalah ini.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 5 tidak memenuhi satupun kondisi *fathoming*.
- Submasalah 6 memenuhi kondisi *fathoming* yang kedua.

Uji Keoptimalan: submasalah 5 masih membutuhkan pengujian lebih lanjut pada iterasi berikutnya.

Iterasi 4: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada submasalah 5 karena satu-satunya submasalah yang masih membutuhkan pengujian lebih lanjut adalah submasalah ini.

Branching: submasalah 5 dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_4. Submasalah 7 adalah submasalah 5 dengan telah diberikan $x_4 = 0$, dan submasalah 8 adalah submasalah 5 dengan telah diberikan $x_4 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode simpleks dan dihitung $bound$ untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 7: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 177.5$, maka didapatkan $bound\ = 178$.
- Submasalah 8: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 233.5$, maka didapatkan $bound\ = 234$.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 7 tidak memenuhi satupun kondisi *fathoming*.
- Submasalah 8 memenuhi kondisi *fathoming* yang pertama.

Uji Keoptimalan: submasalah 7 masih membutuhkan pengujian lebih lanjut pada iterasi berikutnya.

Iterasi 5: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada submasalah 7 karena satu-satunya submasalah yang masih membutuhkan pengujian lebih lanjut adalah submasalah ini.

Branching: submasalah 7 dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_5. Submasalah 9 adalah submasalah 7 dengan telah diberikan $x_5 = 0$, dan submasalah 10 adalah submasalah 7 dengan telah diberikan $x_5 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode simpleks dan dihitung $bound$ untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 9: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 177.5$, maka didapatkan $bound\ = 178$.
- Submasalah 10: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 186.5$, maka didapatkan $bound\ = 187$.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 9 tidak memenuhi satupun kondisi *fathoming*.
- Submasalah 10 tidak memenuhi satupun kondisi *fathoming*.

Uji Keoptimalan: submasalah 9 dan submasalah 10 masih membutuhkan pengujian lebih lanjut pada iterasi berikutnya.

Iterasi 6: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada submasalah 9 karena $bound$ untuk submasalah ini $<$ $bound$ untuk submasalah 10.

Branching: submasalah 9 dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_6. Submasalah 11 adalah submasalah 9 dengan telah diberikan $x_6 = 0$, dan submasalah 12 adalah submasalah 9 dengan telah diberikan $x_6 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode simpleks dan dihitung $bound$ untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 11: tidak ada solusi layak untuk PL relaksasi submasalah ini.
- Submasalah 12: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 177.5$, maka didapatkan $bound\ = 178$.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 11 memenuhi kondisi *fathoming* yang kedua.

- Submasalah 12 tidak memenuhi satupun kondisi *fathoming*.

Uji Keoptimalan: submasalah 12 dan submasalah 10 masih membutuhkan pengujian lebih lanjut pada iterasi berikutnya.

Iterasi 7: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada submasalah 12 karena $bound$ terkecil diantara submasalah 10 dan submasalah 12 dimiliki oleh submasalah 12.

Branching: submasalah 12 dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_7. Submasalah 13 adalah submasalah 12 dengan telah diberikan $x_7 = 0$, dan submasalah 14 adalah submasalah 12 dengan telah diberikan $x_7 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode simpleks dan dihitung $bound$ untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 13: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 1, x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 3, x_{14} = 4$, dan diperoleh $z = 195$, maka didapatkan $bound\ = 195$.
- Submasalah 14: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 1,\ x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 260$, maka didapatkan $bound\ = 260$.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 13 memenuhi kondisi *fathoming* yang ketiga, dan karena $z < z^*$ maka z^* perlu diberbarui, yaitu $z^* = z$.
- Submasalah 14 memenuhi kondisi *fathoming* yang pertama.

Uji Keoptimalan: baik submasalah 13 maupun submasalah 14 sudah tidak membutuhkan pengujian lebih lanjut, tetapi masih ada submasalah 10 yang masih membutuhkan pengujian pada iterasi berikutnya.

Iterasi 8: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada submasalah 10 karena satu-satunya submasalah yang masih membutuhkan pengujian lebih lanjut adalah submasalah ini.

Branching: submasalah 10 dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_6. Submasalah 15 adalah submasalah 10 dengan telah diberikan $x_6 = 0$, dan submasalah 16 adalah submasalah 10 dengan telah diberikan $x_6 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode simpleks dan dihitung $bound$ untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 15: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0.5, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 2.5, x_{14} = 4.5$, dan diperoleh $z = 186.5$, maka didapatkan $bound\ = 187$.
- Submasalah 16: tidak ada solusi layak untuk PL relaksasi dari submasalah ini.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 15 tidak memenuhi satupun kondisi *fathoming*.
- Submasalah 16 memenuhi kondisi *fathoming* yang kedua.

Uji Keoptimalan: submasalah 15 masih membutuhkan pengujian lebih lanjut pada iterasi berikutnya.

Iterasi 9: pada iterasi ini dilakukan pengujian pada submasalah 15 karena satu-satunya submasalah yang masih membutuhkan pengujian lebih lanjut adalah submasalah ini.

Branching: submasalah 15 dibagi menjadi dua submasalah dengan cara memberikan nilai tertentu pada x_7. Submasalah 17 adalah submasalah 15 dengan telah diberikan $x_7 = 0$, dan submasalah 18 adalah submasalah 15 dengan telah diberikan $x_7 = 1$.

Bounding: dengan membentuk PL relaksasi dari masing-masing submasalah kemudian PL relaksasi tersebut diselesaikan dengan metode Simpleks dan dihitung $bound$ untuk masing-masing submasalah tersebut.

- Submasalah 17: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 1, x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} =$

$0, x_{12} = 1, x_{13} = 3, x_{14} = 4$, dan diperoleh $z = 204$, maka didapatkan $bound\ = 204$.

- Submasalah 18: diperoleh solusi optimal PL relaksasi, yaitu $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 3, x_{14} = 3$, dan diperoleh $z = 269$, maka didapatkan $bound\ = 269$.

Fathoming: dilakukan pengecekan pada kedua submasalah yang diperoleh pada tahap *branching*. Berdasarkan hasil pada tahap *bounding*, dapat disimpulkan bahwa:

- Submasalah 17 memenuhi kondisi *fathoming* yang pertama.
- Submasalah 18 memenuhi kondisi *fathoming* yang pertama.

Uji Keoptimalan: sudak tidak ada submasalah yang membutuhkan pengujian lebih lanjut, maka metode ini berhenti dan diperoleh solusi optimal, yatu solusi yang mengakibatkan nilai z^* terakhir yang diperbarui. Sehingga diperoleh solusi optimal : $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 1, x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 3, x_{14} = 4$ dan diperoleh nilai optimal fungsi tujuan masalah awal, yaitu $z = 195$.

Berdasarkan solusi optimal tersebut dan merujuk pada Tabel 3.2, dapat disimpulkan nilai frekuensi untuk masing-masing periode pada setiap rute seperti pada kolom keempat Tabel 3.4 berikut ini, dan dapat diperoleh banyaknya kendaraan angkutan umum yang dibutuhkan pada masing-masing terminal, diberikan pada kolom keenam Tabel 3.4. Dari hasil penentuan frekuensi tersebut, dapat dihitung *headway* yang ditunjukkan pada kolom kelima Tabel 3.4.

Tabel 3.4. Frekuensi, *headway*, dan banyak kendaraan yang dibutuhkan

Terminal Keberangkatan	**Terminal Tujuan**	**Periode**	**Frekuensi**	***Headway*** (menit)	**Banyak Kendaraan**
a	*b*	1	3	20	3
		2	4	15	
b	*a*	1	4	15	4
		2	3	20	

Berdasarkan hasil perhitungan *headway* yang ditunjukkan pada Tabel 3.4, maka dapat dilakukan penyusunan daftar keberangkatan kendaraan angkutan umum untuk contoh masalah ini, dengan kata lain telah dapat diperoleh *timetable* yang ditunjukkan pada Tabel 3.5 berikut ini.

Tabel 3.5 *Timetable* untuk contoh masalah

Keberangkatan dari terminal *a*	**Pukul**	**Keberangkatan dari terminal *b***	**Pukul**
1	07.20	1	07.15
2	07.40	2	07.30
3	08.00	3	07.45
4	08.15	4	08.00
5	08.30	5	08.20
6	08.45	6	08.40
7	09.00	7	09.00

BAB 4
PENYUSUNAN *TIMETABLE* BUS TRANSJAKARTA UNTUK MEMINIMUMKAN KEPADATAN PENUMPANG DI DALAM ARMADA BUS MENGGUNAKAN METODE *BRANCH AND BOUND*

Pada Bab 3 telah dijelaskan tentang masalah penyusunan *timetable* angkutan umum dengan tujuan untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dan penyelesaian masalah tersebut dengan menggunakan metode *branch and bound*. Selanjutnya, pada bab ini akan dijelaskan implementasi dari metode *branch and bound* dalam penyusunan *timetable* untuk salah satu angkutan umum yang ada di DKI Jakarta, yaitu bus TransJakarta untuk rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC. Sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu sekilas tentang bus TransJakarta.

4.1 Sekilas Tentang Bus TransJakarta

Bus TransJakarta atau yang lebih dikenal dengan sebutan *busway* adalah suatu angkutan umum dengan kendaraan yang digunakan berupa bus dan menggunakan jalur khusus yang hanya boleh dilewati oleh bus TransJakarta saja, dengan kata lain bus TransJakarta menerapkan sistem bus cepat, atau yang sering disebut dengan *bus rapid transit* (BRT). Sistem bus TransJakarta yang mengadaptasi sistem bus TransMilenio di Bogota, dibangun untuk menyediakan angkutan umum lebih baik sehingga mengurangi jumlah penggunaan kendaraan pribadi di DKI Jakarta (*Transjakarta Busway Pilihan yang Tepat*, 2010).

Perencanaan, pembangunan, dan pengelolaan sistem bus TransJakarta disediakan oleh pemerintah DKI Jakarta, sementara kegiatan operasional armada bus, operasional tiket, dan kegiatan penunjang lainnya dilaksanakan oleh pihak operator (*Sistem Transjakarta Busway*, n.d.). Pihak operator tersebut, antara lain:

1. PT. Jakarta Express Trans.
2. PT. Trans Batavia.
3. PT. Jakarta Trans Metropolitan.
4. PT. Jakarta Mega Trans.
5. PT. Primajasa Perdanaraya Utama.

6. PT. Eka Sari Lorena Transport.
7. PT. Bianglala Metropolitan.
8. PT. Trans Mayapada Busway.
9. Perum Damri.

Bus TransJakarta dikelola oleh suatu badan bentukan pemerintah, yaitu Badan Layanan Umum TransJakarta (BLU TransJakarta). Badan ini awalnya bernama Badan Pengelola TransJakarta (BP TransJakarta) yang dibentuk pada tahun 2003 berdasarkan SK Gubernur DKI Jakarta Nomor 110 Tahun 2003. Kemudian pada tahun 2006 nama BP TransJakarta diganti menjadi BLU TransJakarta berdasarkan Peraturan Gubernur DKI Jakarta Nomor 48 Tahun 2006 (*Gambaran Umum*, n.d.).

Sejak dioperasikan pada 15 Januari 2004, saat ini bus TransJakarta telah melayani 11 rute koridor utama dan 10 rute lintas koridor (*Peta Jaringan Transjakarta*, n.d.). Rute-rute tersebut dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4.1 Rute-rute bus TransJakarta

No.	**Rute Koridor Utama**		**Rute Lintas Koridor**
	Koridor	**Rute**	**Rute**
1	I	Blok M – Kota	Pulogadung – Bundaran Senayan
2	II	Pulogadung – Harmoni	Pulogadung – Kalideres
3	III	Kalideres – Harmoni	Kalideres – Bundaran Senayan
4	IV	Pulogadung – Dukuh Atas	Ancol – Harmoni
5	V	Ancol – Kp. Melayu	Ragunan – Monas
6	VI	Ragunan – Dukuh Atas	Ragunan – Pulogadung
7	VII	Kp. Rambutan – Kp. Melayu	PGC – Harmoni
8	VIII	Lebak Bulus – Harmoni	PGC – Ancol
9	IX	Pinang Ranti – Pluit	Grogol – Harmoni
10	X	Tanjung Priok – Cililitan	Cililitan – Grogol
11	XI	Pulogebang – Kp. Melayu	

Dalam skripsi ini akan ditinjau lebih jauh untuk rute lintas koridor yang ke-7, yaitu rute PGC – Harmoni dan rute balikannya, Harmoni – PGC. Pada tabel berikut ini dipaparkan halte-halte pemberhentian untuk rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC.

Tabel 4.2 Halte-halte pemberhentian bus TransJakarta untuk rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC

No.	PGC – Harmoni	Harmoni – PGC
1	PGC	Harmoni
2	BKN	Pecenongan
3	BNN	Juanda
4	Cawang Otista	Pasar Baru
5	Gelanggang Remaja	Pal Putih
6	Bidara Cina	Kramat Sentiong NU
7	Kp. Melayu	Salemba UI
8	Kebon Pala	Salemba Carolus
9	Slamet Riyadi	Matraman I
10	Tegalan	Tegalan
11	Matraman I	Slamet Riyadi
12	Salemba Carolus	Kebon Pala
13	Salemba UI	Pasar Jatinegara
14	Kramat Sentiong NU	RS. Premier Jatinegara
15	Pal Putih	Bidara Cina
16	Juanda	Gelanggang Remaja
17	Pecenongan	Cawang Otista
18	Harmoni	BNN
19		Cawang UKI
20		BKN
21		PGC

Pada skripsi ini dipilih implementasi pada bus TransJakarta karena satu-satunya angkutan umum di DKI Jakarta yang memiliki jalur khusus di jalan raya adalah bus TransJakarta. Jalur khusus tersebut hanya boleh dilewati oleh bus TransJakarta saja, sehingga dalam perjalanannya bus TransJakarta lebih cepat daripada angkutan umum lain dan waktu yang dibutuhkan relatif tetap untuk menempuh suatu rute yang sama. Sifat inilah yang membuat masalah penyusunan *timetable* yang telah dijelaskan pada Bab 3 dapat diimplementasikan pada bus TransJakarta. Selanjutnya pada subbab berikut akan dipaparkan asumsi-asumsi yang digunakan dalam penyusunan *timetable* bus TransJakarta untuk rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC.

4.2 Asumsi-asumsi yang Digunakan dan Data yang Dibutuhkan dalam Penyusunan *Timetable* Bus TransJakarta

Sebelum dijelaskan tentang penyusunan *timetable* bus TransJakarta rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC, terlebih dahulu akan dipaparkan mengenai asumsi-asumsi yang digunakan dalam penyusunan *timetable* tersebut, yaitu sebagai berikut:

(a) Terdapat dua terminal, yaitu halte PGC dan halte Harmoni.
(b) Rute yang ditinjau adalah rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC melalui jalur *busway* yang telah disediakan.
(c) Selama perjalanan dari halte PGC ke halte Harmoni dan sebaliknya, tidak ada gangguan, baik pada armada bus yang digunakan maupun pada jalur yang dilewati oleh bus TransJakarta (dianggap jalur *busway* steril atau tidak digunakan oleh kendaraan selain bus TransJakarta), sehingga waktu yang dibutuhkan untuk menempuh rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC adalah tetap untuk setiap keberangkatan armada bus.
(d) Periode operasional yang ditinjau adalah pukul 07.00 WIB sampai dengan pukul 09.00 WIB dengan pertimbangan bahwa periode 07.00 – 08.00 WIB mewakili jam-jam sibuk dan periode 08.00 – 09.00 WIB mewakili jam-jam tidak sibuk.
(e) Hanya digunakan satu jenis armada bus yang berkapasitas 85 penumpang.
(f) *Timetable* yang akan disusun hanya diberlakukan pada hari kerja (Senin – Jumat).

Selain asumsi-asumsi tersebut, penyusunan *timetable* tidak dapat dilakukan tanpa adanya data yang mendukung. Untuk menyusun *timetable* bus TransJakarta dengan tujuan untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam armada bus, dibutuhkan data antara lain:

(a) Lama perjalanan dari lokasi pemberangkatan pertama sampai lokasi tujuan terakhir.
(b) Maksimum dari rata-rata banyaknya penumpang pada setiap periode.
(c) Okupansi yang diinginkan pada pada setiap periode.
(d) Frekuensi minimum yang diperbolehkan.
(e) Banyaknya armada bus yang dapat digunakan.

Untuk mendapatkan data lama perjalanan dan rata-rata banyak penumpang dilakukan survei pada hari kerja (Senin – Jumat) selama bulan Oktober 2012. Untuk data yang lain dilakukan pencarian data pada sumber-sumber resmi yang turut mengelola dan mengembangkan bus TransJakarta, seperti BLU TransJakarta dan ITDP (Institute for Transportation & Development Policy). Data banyaknya armada bus yang dapat digunakan diperoleh dari *website* resmi BLU TransJakarta, yaitu disediakan 26 armada bus untuk rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC pada hari kerja (*Rute Langsung*, 2010). Data okupansi dan frekuensi minimum diperoleh dari salah satu buku yang diterbitkan oleh ITDP yang berjudul *Bus Rapid Transit Planning Guide* pada tahun 2007 (Arias, dkk., 2007). Berikut ringkasan data tersebut.

Tabel 4.3 Data yang dibutuhkan dalam penyusunan *timetable* bus TransJakarta

Rute	**Lama Perjalanan** (menit)	**Periode**	**Waktu**	**Maksimum Rata-rata Banyaknya Penumpang**	**Okupansi** (penumpang)	**Frekuensi Minimum**
PGC – Harmoni	60	1	07.00 – 08.00	903	68	3
		2	08.00 – 09.00	639	60	3
Harmoni – PGC	45	1	07.00 – 08.00	503	68	3
		2	08.00 – 09.00	474	60	3

[Sumber: survei selama bulan Oktober 2012]

Sebenarnya data pada Tabel 4.3 belum bisa dikatakan sebagai data yang *valid* untuk menggambarkan kondisi TransJakarta yang sesungguhnya karena data tersebut hanya merupakan olahan data yang dilakukan selama satu bulan survei. Tetapi, data ini telah cukup untuk digunakan sebagai masukan dalam penyusunan *timetable* bus TransJakarta dalam pembahasan bab ini.

Berdasarkan asumsi-asumsi dan data tersebut, pada subbab selanjutnya akan disusun model optimasi untuk masalah penyusunan *timetable* bus TransJakarta untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam armada bus dengan terdapat 26 armada bus yang dapat digunakan.

4.3 Model Optimasi Masalah Penyusunan *Timetable* Bus TransJakarta

Berdasarkan Tabel 4.3 didefinisikan variabel $x^F(\cdot)$ dan $c^F(\cdot)$ secara bersamaan dengan cara menghitung banyaknya penumpang yang berdesakan menggunakan persamaan (3.2) dengan nilai F minimum adalah 3. Langkah ini dapat diringkas dalam Tabel 4.4 berikut ini.

Tabel 4.4 Variabel keputusan $x^F(\cdot)$ dan koefisien fungsi tujuan $c^F(\cdot)$ untuk penyusunan *timetable* bus TransJakarta

Rute	**PGC – Harmoni**				**Harmoni – PGC**			
Periode	**1**		**2**		**1**		**2**	
Frekuensi	$c^F(\cdot)$	$x^F(\cdot)$	$c^F(\cdot)$	$x^F(\cdot)$	$c^F(\cdot)$	$x^F(\cdot)$	$c^F(\cdot)$	$x^F(\cdot)$
F = 3	699	x_1	459	x_{13}	299	x_{22}	294	x_{28}
F = 4	631	x_2	399	x_{14}	231	x_{23}	234	x_{29}
F = 5	563	x_3	339	x_{15}	163	x_{24}	174	x_{30}
F = 6	495	x_4	279	x_{16}	95	x_{25}	114	x_{31}
F = 7	427	x_5	219	x_{17}	27	x_{26}	54	x_{32}
F = 8	359	x_6	159	x_{18}	0	x_{27}	0	x_{33}
F = 9	291	x_7	99	x_{19}				
F = 10	223	x_8	39	x_{20}				
F = 11	155	x_9	0	x_{21}				
F = 12	87	x_{10}						
F = 13	19	x_{11}						
F = 14	0	x_{12}						

Selanjutnya didefinisikan variabel yang menyatakan banyaknya armada bus yang dibutuhkan pada setiap terminal, yaitu:

$x_{34} = BA(PGC) =$ banyaknya armada bus yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari halte PGC menuju halte Harmoni,

$x_{35} = BA(Harmoni) =$ banyaknya armada bus yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari halte Harmoni menuju halte PGC.

Akibat pendefinisian tersebut, maka kedua variabel ini memiliki koefisien 0 pada fungsi tujuan.

Berdasarkan persamaan (3.3) dan pendefinisian variabel keputusan maka diperoleh fungsi tujuan:

$$Minimum\ z = 699x_1 + 631x_2 + 563x_3 + 495x_4 + 427x_5 + 359x_6 + 291x_7 + 223x_8 + 155x_9 + 87x_{10} + 19x_{11} + 0x_{12} + 459x_{13} + 399x_{14} + 339x_{15} + 279x_{16} + 219x_{17} + 159x_{18} + 99x_{19} + 39x_{20} + 0x_{21} + 299x_{22} + 231x_{23} + 163x_{24} + 95x_{25} + 27x_{26} + 0x_{27} + 294x_{28} + 234x_{29} + 174x_{30} + 114x_{31} + 54x_{32} + 0x_{33} + 0x_{34} + 0x_{35}$$

Selanjutnya, didefinisikan kendala-kendala yang diakibatkan oleh penentuan frekuensi keberangkatan armada bus, F untuk setiap $(\cdot)$ sebagai berikut:

(a) Karena untuk rute PGC – Harmoni pada periode 1 hanya diambil satu nilai untuk F maka diperoleh kendala $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1$.

(b) Karena untuk rute PGC – Harmoni pada periode 2 hanya diambil satu nilai untuk F maka diperoleh kendala $x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{20} + x_{21} = 1$.

(c) Karena untuk rute Harmoni – PGC pada periode 1 hanya diambil satu nilai untuk F maka diperoleh kendala $x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 1$.

(d) Karena untuk rute Harmoni – PGC pada periode 2 hanya diambil satu nilai untuk F maka diperoleh kendala $x_{28} + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$.

Kemudian, didefinisikan kendala yang diakibatkan oleh keterbatasan sejumlah armada bus yang digunakan pada masing-masing terminal. Pada Tabel 4.2 terlihat bahwa nilai F maksimum atau $U(\cdot)$, yaitu $U(\cdot) = 14$. Artinya frekuensi maksimum yang mungkin ada adalah 14, sehingga *headway* minimum yang diakibatkan oleh frekuensi maksimum tersebut adalah $\frac{60}{14} = 4.28$ menit. Sehingga perlu dilakukan perhitungan jumlah total kendaraan yang berangkat dan tiba di masing-masing terminal pada setiap waktu yang kurang dari atau sama dengan 4.28 menit. Untuk mempermudah, maka perhitungan tersebut dilakukan setiap 4 menit, mulai dari jam pertama periode operasional hingga jam terakhir periode operasional. Oleh karena ada keterbatasan banyaknya armada yang dapat digunakan dan berdasarkan persamaan (3.5) maka diperoleh kendala-kendala pada Tabel 4.5 berikut ini:

Tabel 4.5 Kendala-kendala banyaknya armada bus yang digunakan

Menit ke-	**Terminal**	**Kendala**
4	PGC	- (belum ada armada bus yang berangkat ataupun tiba)
	Harmoni	- (belum ada armada bus yang berangkat ataupun tiba)
8	PGC	$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$x_{27} \leq x_{35}$
12	PGC	$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 2x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \leq x_{35}$
16	PGC	$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 3x_{10} + 3x_{11} + 3x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + 2x_{27} \leq x_{35}$
20	PGC	$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 4x_{10} + 4x_{11} + 4x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$x_{22} + x_{23} + x_{24} + 2x_{25} + 2x_{26} + 2x_{27} \leq x_{35}$
24	PGC	$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 4x_9 + 4x_{10} + 5x_{11} + 5x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{25} + 2x_{26} + 3x_{27} \leq x_{35}$
28	PGC	$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 5x_{10} + 6x_{11} + 6x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{25} + 3x_{26} + 3x_{27} \leq x_{35}$
32	PGC	$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 5x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + 6x_{11} + 7x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$x_{22} + 2x_{23} + 2x_{24} + 3x_{25} + 3x_{26} + 4x_{27} \leq x_{35}$
36	PGC	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 6x_8 + 6x_9 + 7x_{10} + 7x_{11} + 8x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 3x_{25} + 4x_{26} + 4x_{27} \leq x_{35}$
40	PGC	$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 6x_8 + 7x_9 + 8x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$2x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 4x_{25} + 4x_{26} + 5x_{27} \leq x_{35}$
44	PGC	$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 7x_8 + 8x_9 + 8x_{10} + 9x_{11} + 10x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$2x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 4x_{25} + 5x_{26} + 5x_{27} \leq x_{35}$
48	PGC	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 8x_9 + 9x_{10} + 10x_{11} + 11x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 4x_{25} + 5x_{26} + 6x_{27} \leq x_{35}$
52	PGC	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10} + 11x_{11} + 12x_{12} \leq x_{34}$
	Harmoni	$2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 5x_{25} + 6x_{26} + 6x_{27} \leq x_{35}$
56	PGC	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 8x_7 + 9x_8 + 10x_9 + 11x_{10} + 12x_{11} + 13x_{12} - x_{25} - x_{26} - x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 5x_{25} + 6x_{26} + 7x_{27} \leq x_{35}$
60	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - x_{26} - 2x_{27} \leq x_{34}$

	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} \leq x_{35}$
64	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - 2x_{26} - 2x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} \leq x_{35}$
68	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} - x_{22} - x_{23} - x_{24} - 2x_{25} - 2x_{26} - 2x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{33} - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} \leq x_{35}$
72	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + 2x_{20} + 2x_{21} - x_{22} - x_{23} - 2x_{24} - 2x_{25} - 3x_{26} - 3x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - 2x_8 - 2x_9 - 2x_{10} - 2x_{11} - 2x_{12} \leq x_{35}$
76	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + 2x_{18} + 2x_{19} + 2x_{20} + 2x_{21} - x_{22} - 2x_{23} - 2x_{24} - 3x_{25} - 3x_{26} - 4x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + 2x_{33} - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 2x_6 - 2x_7 - 2x_8 - 2x_9 - 3x_{10} - 3x_{11} - 3x_{12} \leq x_{35}$
80	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + 2x_{16} + 2x_{17} + 2x_{18} + 3x_{19} + 3x_{20} + 3x_{21} - x_{22} - 2x_{23} - 2x_{24} - 3x_{25} - 4x_{26} - 4x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{30} + 2x_{31} + 2x_{32} + 2x_{33} - x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 - 3x_7 - 3x_8 - 3x_9 - 4x_{10} - 4x_{11} - 4x_{12} \leq x_{35}$
84	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + x_{14} + 2x_{15} + 2x_{16} + 2x_{17} + 3x_{18} + 3x_{19} + 4x_{20} + 4x_{21} - x_{22} - 2x_{23} - 3x_{24} - 3x_{25} - 4x_{26} - 5x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + x_{29} + 2x_{30} + 2x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 - 3x_7 - 4x_8 - 4x_9 - 4x_{10} - 4x_{11} - 4x_{12} \leq x_{35}$
88	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + x_{14} + 2x_{15} + 2x_{16} + 3x_{17} + 3x_{18} + 4x_{19} + 4x_{20} + 5x_{21} - 2x_{22} - 2x_{23} - 3x_{24} - 4x_{25} - 5x_{26} - 5x_{27} \leq x_{34}$

	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + x_{29} + 2x_{30} + 2x_{31} + 3x_{32} + 3x_{33} - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 - 3x_6 - 4x_7 - 4x_8 - 5x_9 - 5x_{10} - 6x_{11} - 6x_{12} \leq x_{35}$
92	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 2x_{15} + 3x_{16} + 3x_{17} + 4x_{18} + 4x_{19} + 5x_{20} + 5x_{21} - 2x_{22} - 3x_{23} - 3x_{24} - 4x_{25} - 5x_{26} - 6x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + 2x_{29} + 2x_{30} + 3x_{31} + 3x_{32} + 4x_{33} - x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 - 4x_6 - 4x_7 - 5x_8 - 5x_9 - 6x_{10} - 6x_{11} - 7x_{12} \leq x_{35}$
96	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 3x_{16} + 4x_{17} + 4x_{18} + 5x_{19} + 6x_{20} + 6x_{21} - 2x_{22} - 3x_{23} - 4x_{24} - 5x_{25} - 5x_{26} - 6x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + 2x_{29} + 3x_{30} + 3x_{31} + 4x_{32} + 4x_{33} - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 - 4x_6 - 5x_7 - 6x_8 - 6x_9 - 7x_{10} - 7x_{11} - 8x_{12} \leq x_{35}$
100	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 4x_{16} + 4x_{17} + 5x_{18} + 6x_{19} + 6x_{20} + 7x_{21} - 2x_{22} - 3x_{23} - 4x_{24} - 5x_{25} - 6x_{26} - 7x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 2x_{29} + 3x_{30} + 4x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 - 5x_6 - 6x_7 - 6x_8 - 7x_9 - 8x_{10} - 8x_{11} - 9x_{12} \leq x_{35}$
104	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 4x_{16} + 5x_{17} + 5x_{18} + 6x_{19} + 7x_{20} + 8x_{21} - 2x_{22} - 3x_{23} - 4x_{24} - 5x_{25} - 6x_{26} - 7x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 2x_{29} + 3x_{30} + 4x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33} - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 - 5x_6 - 6x_7 - 7x_8 - 8x_9 - 8x_{10} - 9x_{11} - 10x_{12} \leq x_{35}$
108	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 4x_{16} + 5x_{17} + 5x_{18} + 6x_{19} + 7x_{20} + 8x_{21} - 3x_{22} - 4x_{23} - 5x_{24} - 6x_{25} - 7x_{26} - 8x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 2x_{29} + 3x_{30} + 4x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33} - 2x_1 - 3x_2 -$

		$4x_3 - 4x_4 - 5x_5 - 6x_6 - 7x_7 - 8x_8 - 8x_9 - 9x_{10} - 10x_{11} - 11x_{12} \leq x_{35}$
112	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 4x_{15} + 5x_{16} + 6x_{17} + 6x_{18} + 7x_{19} + 8x_{20} + 9x_{21} - 3x_{22} - 4x_{23} - 5x_{24} - 6x_{25} - 7x_{26} - 8x_{27} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 3x_{29} + 4x_{30} + 5x_{31} + 6x_{32} + 6x_{33} - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 6x_5 - 6x_6 - 7x_7 - 8x_8 - 9x_9 - 10x_{10} - 11x_{11} - 12x_{12} \leq x_{35}$
116	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 4x_{15} + 5x_{16} + 6x_{17} + 7x_{18} + 8x_{19} + 9x_{20} + 10x_{21} - 3x_{22} - 4x_{23} - 5x_{24} - 6x_{25} - 7x_{26} - 8x_{27} - x_{31} - x_{32} - x_{33} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 3x_{29} + 4x_{30} + 5x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33} - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 6x_5 - 7x_6 - 8x_7 - 9x_8 - 10x_9 - 11x_{10} - 12x_{11} - 13x_{12} \leq x_{35}$
120	PGC	$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 5x_{15} + 6x_{16} + 7x_{17} + 8x_{18} + 9x_{19} + 10x_{20} + 11x_{21} - 3x_{22} - 4x_{23} - 5x_{24} - 6x_{25} - 7x_{26} - 8x_{27} - x_{29} - x_{30} - x_{31} - x_{32} - 2x_{33} \leq x_{34}$
	Harmoni	$3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 3x_{28} + 4x_{29} + 5x_{30} + 6x_{31} + 7x_{32} + 8x_{33} - 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 - 8x_6 - 9x_7 - 10x_8 - 11x_9 - 12x_{10} - 13x_{11} - 14x_{12} \leq x_{35}$

Kendala selanjutnya adalah keterbatasan banyaknya armada bus secara keseluruhan yang dapat digunakan untuk melayani kedua rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC, yaitu 26 armada bus untuk hari kerja. Sehingga diperoleh kendala:

$$x_{34} + x_{35} \leq 26.$$

Kemudian, karena keterbatasan nilai variabel yang diperbolehkan maka diperoleh kendala:

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, 33,$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j = 34, 35.$$

Selanjutnya, berdasarkan pendefinisian variabel keputusan, fungsi tujuan, dan kendala-kendala tersebut maka dapat diperoleh formulasi lengkap untuk model optimasi masalah penyusunan *timetable* untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam armada bus TransJakarta, yaitu sebagai berikut:

$Minimum$ z = $699x_1 + 631x_2 + 563x_3 + 495x_4 + 427x_5 + 359x_6 + 291x_7 + 223x_8 + 155x_9 + 87x_{10} + 19x_{11} + 0x_{12} + 459x_{13} + 399x_{14} + 339x_{15} + 279x_{16} + 219x_{17} + 159x_{18} + 99x_{19} + 39x_{20} + 0x_{21} + 299x_{22} + 231x_{23} + 163x_{24} + 95x_{25} + 27x_{26} + 0x_{27} + 294x_{28} + 234x_{29} + 174x_{30} + 114x_{31} + 54x_{32} + 0x_{33} + 0x_{34} + 0x_{35}$

ds.

(1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1$

(2) $x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{20} + x_{21} = 1$

(3) $x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 1$

(4) $x_{28} + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$

(5) $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq x_{34}$

(6) $x_{27} \leq x_{35}$

(7) $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 2x_{12} \leq x_{34}$

(8) $x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \leq x_{35}$

(9) $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 3x_{10} + 3x_{11} + 3x_{12} \leq x_{34}$

(10) $x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + 2x_{27} \leq x_{35}$

(11) $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 4x_{10} + 4x_{11} + 4x_{12} \leq x_{34}$

(12) $x_{22} + x_{23} + x_{24} + 2x_{25} + 2x_{26} + 2x_{27} \leq x_{35}$

(13) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 4x_9 + 4x_{10} + 5x_{11} + 5x_{12} \leq x_{34}$

(14) $x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{25} + 2x_{26} + 3x_{27} \leq x_{35}$

(15) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 5x_{10} + 6x_{11} + 6x_{12} \leq x_{34}$

(16) $x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{25} + 3x_{26} + 3x_{27} \leq x_{35}$

(17) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 5x_8 + 5x_9 + 6x_{10} + 6x_{11} + 7x_{12} \leq x_{34}$

(18) $x_{22} + 2x_{23} + 2x_{24} + 3x_{25} + 3x_{26} + 4x_{27} \leq x_{35}$

(19) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 6x_8 + 6x_9 + 7x_{10} + 7x_{11} + 8x_{12} \leq x_{34}$

(20) $x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 3x_{25} + 4x_{26} + 4x_{27} \leq x_{35}$

(21) $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 6x_8 + 7x_9 + 8x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12} \leq x_{34}$

(22) $2x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 4x_{25} + 4x_{26} + 5x_{27} \leq x_{35}$

(23) $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 7x_8 + 8x_9 + 8x_{10} + 9x_{11} + 10x_{12} \leq x_{34}$

(24) $2x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 4x_{25} + 5x_{26} + 5x_{27} \leq x_{35}$

(25) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 8x_9 + 9x_{10} + 10x_{11} + 11x_{12} \leq x_{34}$

(26) $2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 4x_{25} + 5x_{26} + 6x_{27} \leq x_{35}$

(27) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10} + 11x_{11} + 12x_{12} \leq x_{34}$

(28) $2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 5x_{25} + 6x_{26} + 6x_{27} \leq x_{35}$

(29) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 8x_7 + 9x_8 + 10x_9 + 11x_{10} + 12x_{11} + 13x_{12} - x_{25} - x_{26} - x_{27} \leq x_{34}$

(30) $2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 5x_{25} + 6x_{26} + 7x_{27} \leq x_{35}$

(31) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - x_{26} - 2x_{27} \leq x_{34}$

(32) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} \leq x_{35}$

(33) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} - x_{23} - x_{24} - x_{25} - 2x_{26} - 2x_{27} \leq x_{34}$

(34) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} \leq x_{35}$

(35) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} - x_{22} - x_{23} - x_{24} - 2x_{25} - 2x_{26} - 2x_{27} \leq x_{34}$

(36) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{33} - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} \leq x_{35}$

(37) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + 2x_{20} + 2x_{21} - x_{22} - x_{23} - 2x_{24} - 2x_{25} - 3x_{26} - 3x_{27} \leq x_{34}$

(38) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - 2x_8 - 2x_9 - 2x_{10} - 2x_{11} - 2x_{12} \leq x_{35}$

(39) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + 2x_{18} + 2x_{19} + 2x_{20} + 2x_{21} - x_{22} - 2x_{23} - 2x_{24} - 3x_{25} - 3x_{26} - 4x_{27} \leq x_{34}$

(40) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + 2x_{33} - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 2x_6 - 2x_7 - 2x_8 - 2x_9 - 3x_{10} - 3x_{11} - 3x_{12} \leq x_{35}$

(41) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + 2x_{16} + 2x_{17} + 2x_{18} + 3x_{19} + 3x_{20} + 3x_{21} - x_{22} - 2x_{23} - 2x_{24} - 3x_{25} - 4x_{26} - 4x_{27} \leq x_{34}$

(42) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{30} + 2x_{31} + 2x_{32} + 2x_{33} - x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 - 3x_7 - 3x_8 - 3x_9 - 4x_{10} - 4x_{11} - 4x_{12} \leq x_{35}$

(43) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + x_{14} + 2x_{15} + 2x_{16} + 2x_{17} + 3x_{18} + 3x_{19} + 4x_{20} + 4x_{21} - x_{22} - 2x_{23} - 3x_{24} - 3x_{25} - 4x_{26} - 5x_{27} \leq x_{34}$

(44) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + x_{29} + 2x_{30} + 2x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 - 3x_7 - 4x_8 - 4x_9 - 4x_{10} - 4x_{11} - 4x_{12} \leq x_{35}$

(45) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + x_{14} + 2x_{15} + 2x_{16} + 3x_{17} + 3x_{18} + 4x_{19} + 4x_{20} + 5x_{21} - 2x_{22} - 2x_{23} - 3x_{24} - 4x_{25} - 5x_{26} - 5x_{27} \leq x_{34}$

(46) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + x_{29} + 2x_{30} + 2x_{31} + 3x_{32} + 3x_{33} - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 - 3x_6 - 4x_7 - 4x_8 - 5x_9 - 5x_{10} - 6x_{11} - 6x_{12} \leq x_{35}$

(47) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 2x_{15} + 3x_{16} + 3x_{17} + 4x_{18} + 4x_{19} + 5x_{20} + 5x_{21} - 2x_{22} - 3x_{23} - 3x_{24} - 4x_{25} - 5x_{26} - 6x_{27} \leq x_{34}$

(48) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + 2x_{29} + 2x_{30} + 3x_{31} + 3x_{32} + 4x_{33} - x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 - 4x_6 - 4x_7 - 5x_8 - 5x_9 - 6x_{10} - 6x_{11} - 7x_{12} \leq x_{35}$

(49) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 3x_{16} + 4x_{17} + 4x_{18} + 5x_{19} + 6x_{20} + 6x_{21} - 2x_{22} - 3x_{23} - 4x_{24} - 5x_{25} - 5x_{26} - 6x_{27} \leq x_{34}$

(50) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + x_{28} + 2x_{29} + 3x_{30} + 3x_{31} + 4x_{32} + 4x_{33} - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 - 4x_6 - 5x_7 - 6x_8 - 6x_9 - 7x_{10} - 7x_{11} - 8x_{12} \leq x_{35}$

(51) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 4x_{16} + 4x_{17} + 5x_{18} + 6x_{19} + 6x_{20} + 7x_{21} - 2x_{22} - 3x_{23} - 4x_{24} - 5x_{25} - 6x_{26} - 7x_{27} \leq x_{34}$

(52) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 2x_{29} + 3x_{30} + 4x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 - 5x_6 - 6x_7 - 6x_8 - 7x_9 - 8x_{10} - 8x_{11} - 9x_{12} \leq x_{35}$

(53) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 4x_{16} + 5x_{17} + 5x_{18} + 6x_{19} + 7x_{20} + 8x_{21} - 2x_{22} - 3x_{23} - 4x_{24} - 5x_{25} - 6x_{26} - 7x_{27} \leq x_{34}$

(54) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 2x_{29} + 3x_{30} + 4x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33} - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 - 5x_6 - 6x_7 - 7x_8 - 8x_9 - 8x_{10} - 9x_{11} - 10x_{12} \leq x_{35}$

(55) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 4x_{16} + 5x_{17} + 5x_{18} + 6x_{19} + 7x_{20} + 8x_{21} - 3x_{22} - 4_{23} - 5x_{24} - 6x_{25} - 7x_{26} - 8x_{27} \leq x_{34}$

(56) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 2x_{29} + 3x_{30} + 4x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33} - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 5x_5 - 6x_6 - 7x_7 - 8x_8 - 8x_9 - 9x_{10} - 10x_{11} - 11x_{12} \leq x_{35}$

(57) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 4x_{15} + 5x_{16} + 6x_{17} + 6x_{18} + 7x_{19} + 8x_{20} + 9x_{21} - 3x_{22} - 4x_{23} - 5x_{24} - 6x_{25} - 7x_{26} - 8x_{27} \leq x_{34}$

(58) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 3x_{29} + 4x_{30} + 5x_{31} + 6x_{32} + 6x_{33} - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 6x_5 - 6x_6 - 7x_7 - 8x_8 - 9x_9 - 10x_{10} - 11x_{11} - 12x_{12} \leq x_{35}$

(59) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 4x_{15} + 5x_{16} + 6x_{17} + 7x_{18} + 8x_{19} +$

$9x_{20} + 10x_{21} - 3x_{22} - 4x_{23} - 5x_{24} - 6x_{25} - 7x_{26} - 8x_{27} - x_{31} - x_{32} - x_{33} \leq x_{34}$

(60) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 3x_{29} + 4x_{30} + 5x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33} - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 6x_5 - 7x_6 - 8x_7 - 9x_8 - 10x_9 - 11x_{10} - 12x_{11} - 13x_{12} \leq x_{35}$

(61) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 12x_{10} + 13x_{11} + 14x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 5x_{15} + 6x_{16} + 7x_{17} + 8x_{18} + 9x_{19} + 10x_{20} + 11x_{21} - 3x_{22} - 4x_{23} - 5x_{24} - 6x_{25} - 7x_{26} - 8x_{27} - x_{29} - x_{30} - x_{31} - x_{32} - 2x_{33} \leq x_{34}$

(62) $3x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 3x_{28} + 4x_{29} + 5x_{30} + 6x_{31} + 7x_{32} + 8x_{33} - 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 - 8x_6 - 9x_7 - 10x_8 - 11x_9 - 12x_{10} - 13x_{11} - 14x_{12} \leq x_{35}$

(63) $x_{34} + x_{35} \leq 26$

(64) $x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 33$

(65) $x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 34, 35.$ (4.1)

Setelah diperoleh model optimasi untuk masalah penyusunan *timetable* tersebut maka pada subbab selanjutnya, model tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode *branch and bound* dengan bantuan perangkat lunak MATLAB.

4.4 Penggunaan Metode *Branch and Bound* untuk Menyelesaikan Masalah Penyusunan *Timetable* Bus TransJakarta dengan MATLAB

Source code metode *branch and bound* dengan bantuan perangkat lunak MATLAB untuk menyelesaikan model optimasi masalah penyusunan *timetable* bus TransJakarta ditampilkan pada Lampiran 1. Selanjutnya akan dibahas solusi yang diperoleh dari penyelesaian model tersebut beserta *timetable* yang dihasilkan pada subbab berikut.

4.5 Hasil Penggunaan Metode *Branch and Bound* untuk Menyelesaikan Masalah Penyusunan *Timetable* Bus TransJakarta dengan MATLAB

Solusi optimal untuk masalah (4.1) yang merupakan keluaran dari MATLAB atas model matematika yang diberikan, yaitu sebagai berikut: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0,$ $x_{11} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 0, x_{14} = 0, x_{15} = 0, x_{16} = 0, x_{17} = 0, x_{18} = 0, x_{19} = 0,$ $x_{20} = 0, x_{21} = 1, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 0, x_{25} = 0, x_{26} = 0, x_{27} = 1, x_{28} = 0,$ $x_{29} = 0, x_{30} = 0, x_{31} = 0, x_{32} = 0, x_{33} = 1, x_{34} = 15, x_{35} = 8$ dan diperoleh nilai optimal fungsi tujuan, yaitu $z = 0$.

Dari solusi optimal tersebut maka dapat disimpulkan beberapa hal, antara lain:

1. Untuk rute PGC – Harmoni pada periode 1, frekuensi armada bus yang harus diberangkatkan adalah 14 karena banyaknya frekuensi pada rangkaian perjalanan ini ditentukan oleh nilai $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ dan karena $x_{12} = 1$ dimana sebelumnya pada tahap pemodelan telah dijelaskan bahwa $x_{12} = x^{14}(1, \text{PGC}, \text{Harmoni})$ (dapat dilihat pada Tabel 4.2).
2. Untuk rute PGC – Harmoni pada periode 2, frekuensi armada bus yang harus diberangkatkan adalah 11 karena banyaknya frekuensi pada rangkaian perjalanan ini ditentukan oleh nilai $x_{13}, x_{14}, \dots, x_{21}$ dan karena $x_{21} = 1$ dimana sebelumnya pada tahap pemodelan telah dijelaskan bahwa $x_{21} = x^{11}(2, \text{PGC}, \text{Harmoni})$ (dapat dilihat pada Tabel 4.2).
3. Untuk rute Harmoni – PGC pada periode 1, frekuensi armada bus yang harus diberangkatkan adalah 8 karena banyaknya frekuensi pada rangkaian perjalanan ini ditentukan oleh nilai $x_{22}, x_{23}, \dots, x_{27}$ dan karena $x_{27} = 1$ dimana sebelumnya pada tahap pemodelan telah dijelaskan bahwa $x_{27} = x^{8}(1, \text{Harmoni}, \text{PGC})$ (dapat dilihat pada Tabel 4.2).
4. Untuk rute Harmoni – PGC pada periode 2, frekuensi armada bus yang harus diberangkatkan adalah 8 karena banyaknya frekuensi pada rangkaian perjalanan ini ditentukan oleh nilai $x_{28}, x_{29}, \dots, x_{33}$ dan karena $x_{33} = 1$ dimana sebelumnya pada tahap pemodelan telah dijelaskan bahwa $x_{33} = x^{8}(2, \text{Harmoni}, \text{PGC})$ (dapat dilihat pada Tabel 4.2).

5. Banyaknya armada bus yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari halte PGC menuju halte Harmoni adalah 15 armada bus, karena $x_{34} = 15$.
6. Banyaknya armada bus yang dibutuhkan untuk keberangkatan dari halte Harmoni menuju halte PGC adalah 15 armada bus, karena $x_{35} = 8$.

Selanjutnya untuk masing-masing rute pada setiap periode, berdasarkan frekuensi yang telah diperoleh dari kesimpulan tersebut maka dapat dihitung *headway* masing-masing, yaitu dengan membagi 60 menit dengan frekuensi yang bersesuaian. Frekuensi dan *headway* yang diperoleh diringkas pada tabel berikut.

Tabel 4.6 Frekuensi dan *headway* untuk masing-masing rute pada setiap periode

Rute	Periode	Frekuensi	*Headway*(menit)
PGC – Harmoni	1	14	4.3
	2	11	5.4
Harmoni – PGC	1	8	7.5
	2	8	7.5

Kemudian, dari *headway* yang diperoleh untuk masing-masing rute pada setiap periode, barulah dapat disusun *timetable* untuk masing-masing rute selama periode operasional dari pukul 07.00 WIB sampai dengan pukul 09.00 WIB. *Headway* yang telah diperoleh tersebut sebelumnya perlu dibulatkan ke menit terdekat yang membuat jumlah total seluruh *headway* tersebut tetap 60 menit pada setiap periode. Misalkan *headway* untuk rute PGC – Harmoni pada periode 1, yatu 4.3 menit, maka jumlah seluruh *headway* yang mungkin adalah $14 \times 4.3 = 60.2$, tidak bisa genap 60 menit. Sehingga *headway* ini perlu diganti menjadi 4 menit, dengan 15 keberangkatan maka diperoleh jumlah total keberangkatan adalah $15 \times 4 = 60$, tepat 60 menit. Secara ringkas, hasil perhitungan ulang *headway* ini disimpulakan pada tabel berikut ini.

Tabel 4.7 *Headway* untuk masing-masing rute pada setiap periode

Rute	Periode	*Headway*(menit)
PGC – Harmoni	1	4
	2	5
Harmoni – PGC	1	7.5
	2	7.5

Berdasarkan *headway* pada Tabel 4.7, dapat diperoleh *timetable* dengan cara mendaftarkan setiap keberangkatan armada bus yang diakibatkan oleh *headway* yang telah ditentukan pada setiap periode. *Timetable* yang dihasilkan ditampilkan pada Tabel 4.8 berikut ini.

Tabel 4.8 *Timetable* bus TransJakarta dengan pembulatan *headway*

Rute	**PGC – Harmoni**	**Harmoni – PGC**
Keberangkatan ke-	**Pukul (WIB)**	**Pukul (WIB)**
1	07:04:00	07:07:30
2	07:08:00	07:15:00
3	07:12:00	07:22:30
4	07:16:00	07:30:00
5	07:20:00	07:37:30
6	07:24:00	07:45:00
7	07:28:00	07:52:30
8	07:32:00	08:00:00
9	07:36:00	08:07:30
10	07:40:00	08:15:00
11	07:44:00	08:22:30
12	07:48:00	08:30:00
13	07:52:00	08:37:30
14	07:56:00	08:45:00
15	08:00:00	08:52:30
16	08:05:00	09:00:00
17	08:10:00	
18	08:15:00	
19	08:20:00	
20	08:25:00	
21	08:30:00	
22	08:35:00	
23	08:40:00	
24	08:45:00	
25	08:50:00	
26	08:55:00	
27	09:00:00	

Tetapi karena hasil perhitungan *headway* yang diperoleh pada Tabel 4.7 belum semua *headway* yang diperoleh berupa berupa *clock headway* maka perlu metode khusus untuk dapat menyusun daftar waktu keberangkatan pada masing-masing periode ini, agar *timetable* yang dihasilkan juga mudah diingat oleh penumpang. Dalam hal ini metode penyusunan *timetable* yang digunakan adalah metode *clock headway* yang telah dijelaskan pada Subbab 2.1.3 sehingga diperoleh *headway* yang telah berupa *clock headway* semuanya seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.9 berikut ini.

Tabel 4.9 *Clock headway* untuk masing-masing rute pada setiap periode

Rute	**Periode**	***Headway*(menit)**
PGC – Harmoni	1	5
	2	5
Harmoni – PGC	1	7.5
	2	7.5

Berdasarkan *clock headway* tersebut, dapat diperoleh *timetable* dengan cara mendaftarkan setiap keberangkatan armada bus yang diakibatkan oleh *headway* yang telah ditentukan pada setiap periode. *Timetable* yang dihasilkan ditampilkan pada Tabel 4.10 berikut ini.

Tabel 4.10 *Timetable* bus TransJakarta dengan *clock headway*

Rute	**PGC – Harmoni**	**Harmoni – PGC**
Keberangkatan ke-	**Pukul (WIB)**	**Pukul (WIB)**
1	07:05:00	07:07:30
2	07:10:00	07:15:00
3	07:15:00	07:22:30
4	07:20:00	07:30:00
5	07:25:00	07:37:30
6	07:30:00	07:45:00
7	07:35:00	07:52:30
8	07:40:00	08:00:00
9	07:45:00	08:07:30
10	07:50:00	08:15:00
11	07:55:00	08:22:30
12	08:00:00	08:30:00
13	08:05:00	08:37:30
14	08:10:00	08:45:00
15	08:15:00	08:52:30
16	08:20:00	09:00:00
17	08:25:00	
18	08:30:00	
19	08:35:00	
20	08:40:00	
21	08:45:00	
22	08:50:00	
23	08:55:00	
24	09:00:00	

4.6 Analisis Hasil Penyusunan *Timetable* Bus TransJakarta

Berdasarkan definisi *crowding* pada persamaan (3.2) maka akan dilakukan perhitungan *crowding* yang diakibatkan oleh *timetable* yang dihasilkan, yaitu *timetable* pada Tabel 4.8 dan *timetable* pada Tabel 4.10.

Untuk *timetable* pada Tabel 4.8, diperoleh perhitungan *crowding* yaitu sebagai berikut:

(a) *Crowding* untuk rute PGC – Harmoni pada periode 1 adalah $maksimum\{903 - 15.68, 0\} = 0.$

(b) *Crowding* untuk rute PGC – Harmoni pada periode 2 adalah $maksimum\{639 - 12.60, 0\} = 0.$

(c) *Crowding* untuk rute Harmoni – PGC pada periode 1 adalah $maksimum\{503 - 8.68, 0\} = 0.$

(d) *Crowding* untuk rute Harmoni – PGC pada periode 2 adalah $maksimum\{474 - 8.60, 0\} = 0.$

Berdasarkan hasil perhitungan *crowding* tersebut maka dapat disimpulkan bahwa dengan *timetable* pada Tabel 4.8 untuk banyaknya penumpang seperti pada Tabel 4.3 tidak ada *crowding*, atau tidak ada penumpang yang berdesak-desakan.

Sementara untuk *timetable* pada Tabel 4.10, diperoleh perhitungan *crowding* yaitu sebagai berikut:

(a) *Crowding* untuk rute PGC – Harmoni pada periode 1 adalah $maksimum\{903 - 12.68, 0\} = 87.$

(b) *Crowding* untuk rute PGC – Harmoni pada periode 2 adalah $maksimum\{639 - 12.60, 0\} = 0.$

(c) *Crowding* untuk rute Harmoni – PGC pada periode 1 adalah $maksimum\{503 - 8.68, 0\} = 0.$

(d) *Crowding* untuk rute Harmoni – PGC pada periode 2 adalah $maksimum\{474 - 8.60, 0\} = 0.$

Berdasarkan hasil perhitungan *crowding* tersebut maka dapat disimpulkan bahwa dengan *timetable* pada Tabel 4.8 untuk banyaknya penumpang seperti pada Tabel 4.3 ada *crowding* sebanyak 87 penumpang, atau dengan kata lain ada 87 penumpang yang harus terpaksa berdesak-desakan.

Selanjutnya akan dianalisis banyaknya armada bus yang digunakan, yaitu dengan cara menghitung jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan pada masing-masing terminal, halte PGC dan halte Harmoni. Perhitungan tersebut dilakukan berdasarkan persamaan (3.1) pada setiap waktu keberangkatan armada bus yang terdapat pada masing-masing *timetable.*

Untuk *timetable* pada Tabel 4.8, perhitungan jumlah armada bus yang digunakan dilakukan sebagai berikut:

(a) Jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan untuk keberangkatan di halte PGC

$d(PGC, 07{:}04{:}00) = 1$
$d(PGC, 07{:}08{:}00) = 2$
$d(PGC, 07{:}12{:}00) = 3$
$d(PGC, 07{:}16{:}00) = 4$
$d(PGC, 07{:}20{:}00) = 5$
$d(PGC, 07{:}24{:}00) = 6$
$d(PGC, 07{:}28{:}00) = 7$
$d(PGC, 07{:}32{:}00) = 8$
$d(PGC, 07{:}36{:}00) = 9$
$d(PGC, 07{:}40{:}00) = 10$
$d(PGC, 07{:}44{:}00) = 11$
$d(PGC, 07{:}48{:}00) = 12$
$d(PGC, 07{:}52{:}00) = 13$
$d(PGC, 07{:}56{:}00) = 14 - 1 = 13$
$d(PGC, 08{:}00{:}00) = 15 - 2 = 13$
$d(PGC, 08{:}05{:}00) = 16 - 2 = 14$
$d(PGC, 08{:}10{:}00) = 17 - 3 = 14$
$d(PGC, 08{:}15{:}00) = 18 - 4 = 14$
$d(PGC, 08{:}20{:}00) = 19 - 4 = 15$
$d(PGC, 08{:}25{:}00) = 20 - 5 = 15$
$d(PGC, 08{:}30{:}00) = 21 - 6 = 15$
$d(PGC, 08{:}35{:}00) = 22 - 6 = 16$
$d(PGC, 08{:}40{:}00) = 23 - 7 = 16$
$d(PGC, 08{:}45{:}00) = 24 - 8 = 16$
$d(PGC, 08{:}50{:}00) = 25 - 8 = 17$
$d(PGC, 08{:}55{:}00) = 26 - 9 = 17$
$d(PGC, 09{:}00{:}00) = 27 - 10 = 17$

Sehingga diperoleh $D(PGC) = 17$ atau jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan untuk keberangkatan pada halte PGC menuju halte Harmoni adalah 17 armada bus.

(b) Jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan untuk keberangkatan di halte Harmoni

$d(Harmoni, 07{:}07{:}30) = 1$
$d(Harmoni, 07{:}15{:}00) = 2$
$d(Harmoni, 07{:}22{:}30) = 3$
$d(Harmoni, 07{:}30{:}00) = 4$
$d(Harmoni, 07{:}37{:}30) = 5$
$d(Harmoni, 07{:}45{:}00) = 6$
$d(Harmoni, 07{:}52{:}30) = 7$
$d(Harmoni, 08{:}00{:}00) = 8$
$d(Harmoni, 08{:}07{:}30) = 9 - 1 = 8$
$d(Harmoni, 08{:}15{:}00) = 10 - 3 = 7$
$d(Harmoni, 08{:}22{:}30) = 11 - 5 = 6$
$d(Harmoni, 08{:}30{:}00) = 12 - 7 = 5$
$d(Harmoni, 08{:}37{:}30) = 13 - 9 = 4$
$d(Harmoni, 08{:}45{:}00) = 14 - 11 = 3$
$d(Harmoni, 08{:}52{:}30) = 15 - 13 = 2$
$d(Harmoni, 09{:}00{:}00) = 16 - 15 = 1$

Sehingga diperoleh $D(Harmoni) = 8$ atau jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan untuk keberangkatan pada halte Harmoni menuju halte PGC adalah 8 armada bus.

Oleh karena $D(PGC) = 17$ dan $D(Harmoni) = 8$ maka $N = 17 + 8 = 25$ atau sebanyak 25 armada bus minimum yang dibutuhkan untuk melayani dua rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC selama periode operasional 07.00 – 09.00 WIB untuk *timetable* pada Tabel 4.8. Sementara itu, untuk *timetable* pada Tabel 4.10, perhitungan banyaknya armada bus yang digunakan dilakukan sebagai berikut:

(a) Jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan untuk keberangkatan di halte PGC

$d(PGC, 07:05:00) = 1$

$d(PGC, 07:10:00) = 2$

$d(PGC, 07:15:00) = 3$

$d(PGC, 07:20:00) = 4$

$d(PGC, 07:25:00) = 5$

$d(PGC, 07:30:00) = 6$

$d(PGC, 07:35:00) = 7$

$d(PGC, 07:40:00) = 8$

$d(PGC, 07:45:00) = 9$

$d(PGC, 07:50:00) = 10$

$d(PGC, 07:55:00) = 11 - 1 = 10$

$d(PGC, 08:00:00) = 12 - 2 = 10$

$d(PGC, 08:05:00) = 13 - 2 = 11$

$d(PGC, 08:10:00) = 14 - 3 = 11$

$d(PGC, 08:15:00) = 15 - 4 = 11$

$d(PGC, 08:20:00) = 16 - 4 = 12$

$d(PGC, 08:25:00) = 17 - 5 = 12$

$d(PGC, 08:30:00) = 18 - 6 = 12$

$d(PGC, 08:35:00) = 19 - 6 = 13$

$d(PGC, 08:40:00) = 20 - 7 = 13$

$d(PGC, 08:45:00) = 21 - 8 = 13$

$d(PGC, 08:50:00) = 22 - 8 = 14$

$d(PGC, 08:55:00) = 23 - 9 = 14$

$d(PGC, 09:00:00) = 24 - 10 = 14$

Sehingga diperoleh $D(PGC) = 14$ atau jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan untuk keberangkatan pada halte PGC menuju halte Harmoni adalah 14 armada bus.

(b) Jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan untuk keberangkatan di halte Harmoni

$d(Harmoni, 07:07:30) = 1$

$d(Harmoni, 07:15:00) = 2$

$d(Harmoni, 07:22:30) = 3$

$d(Harmoni, 07:30:00) = 4$

$d(Harmoni, 07:37:30) = 5$

$d(Harmoni, 07:45:00) = 6$

$d(Harmoni, 07:52:30) = 7$

$d(Harmoni, 08:00:00) = 8$

$d(Harmoni, 08:07:30) = 9 - 1 = 8$

$d(Harmoni, 08:15:00) = 10 - 3 = 7$

$d(Harmoni, 08{:}22{:}30) = 11 - 5 = 6$ $d(Harmoni, 08{:}45{:}00) = 14 - 11 = 3$

$d(Harmoni, 08{:}30{:}00) = 12 - 7 = 5$ $d(Harmoni, 08{:}52{:}30) = 15 - 13 = 2$

$d(Harmoni, 08{:}37{:}30) = 13 - 9 = 4$ $d(Harmoni, 09{:}00{:}00) = 16 - 15 = 1$

Sehingga diperoleh $D(Harmoni) = 8$ atau jumlah armada bus minimum yang dibutuhkan untuk keberangkatan pada halte Harmoni menuju halte PGC adalah 8 armada bus.

Oleh karena $D(PGC) = 14$ dan $D(Harmoni) = 8$ maka $N = 14 + 8 = 23$ atau sebanyak 23 armada bus minimum yang dibutuhkan untuk melayani dua rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC selama periode operasional 07.00 – 09.00 WIB untuk *timetable* pada Tabel 4.10.

Berdasarkan perhitungan *crowding* dan banyaknya armada bus yang digunakan, maka dapat disimpulkan bahwa *timetable* pada Tabel 4.8 yang diperoleh dari hasil pembulatan *headway* ke menit terdekat, lebih optimal daripada *timetable* pada Tabel 4.10 yang diperoleh berdasarkan metode *clock headway* karena dengan *timetable* pada Tabel 4.8 membuat total *crowding* yang dihasilkan adalah 0, atau tidak ada penumpang yang berdesakan.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan penyusunan *timetable* angkutan umum dan implementasinya pada bus TransJakarta untuk rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC, diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Penyusunan *timetable* angkutan umum untuk meminimumkan kepadatan penumpang di dalam kendaraan angkutan umum dengan memerhatikan terbatasnya banyak kendaraan angkutan umum yang dapat digunakan, dapat dimodelkan ke dalam masalah pemrograman bilangan bulat dan masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *branch and bound*.
2. *Headway* yang digunakan dalam penyusunan *timetable* bus TransJakarta pada skripsi ini memertimbangkan 2 cara pembulatan, yaitu pembulatan ke menit terdekat dan pembulatan menggunkan metode *clock headway*.

   Berdasarkan *headway* tersebut diperoleh hasil sebagai berikut:

   - *Timetable* dengan pembulatan *headway* ke menit terdekat diperoleh hasil bahwa tidak ada penumpang yang harus berdesak-desakan dengan 25 armada bus yang dibutuhkan.
   - *Timetable* dengan pembulatan *headway* menggunkan metode *clock headway* diperoleh hasil bahwa masih ada sebanyak 87 penumpang yang harus berdesak-desakan dengan hanya 23 armada bus yang dibutuhkan.

   Sehingga dalam kasus ini penyusunan *timetable* dengan pembulatan *headway* menggunakan menit terdekat lebih optimal daripada penyusunan *timetable* dengan pembulatan menggunakan metode *clock headway*.
3. Dalam implementasi penyusunan *timetable* pada bus TransJakarta untuk rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC pada periode operasional 07.00 WIB – 09.00 WIB dengan pertimbangan periode 07.00 – 08.00 WIB mewakili jam-jam sibuk dan periode 08.00 – 09.00 WIB mewakili jam-jam tidak sibuk, maka untuk seluruh periode operasional yang sebenarnya, yaitu pukul 05.00 –

22.00 WIB dapat dilakukan penyusunan *timetable* dengan cara yang sama seperti yang dilakukan pada periode 07.00 – 08.00 WIB untuk jam-jam sibuk dan seperti pada periode 08.00 – 09.00 WIB untuk jam-jam tidak sibuk.

5.2 Saran

Dalam implementasi penyusunan *timetable* untuk bus TransJakarta yang dilakukan dalam skripsi ini hanya terbatas pada dua rute PGC – Harmoni dan Harmoni – PGC, serta terbatas pada hari kerja (Senin – Jumat). Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya disarankan:

1. Dilakukan penyusunan *timetable* bus TransJakarta untuk seluruh rute yang telah dioperasikan oleh BLU TransJakarta.
2. Dilakukan penyusunan *timetable* bus TransJakarta selama satu minggu penuh.

DAFTAR PUSTAKA

Arias, C., dkk. (2007). *Bus Rapid Transit Planning Guide June 2007.* New York: Institute for Transportation & Development Policy.

Burhan, H. (2005). *Pendekatan Column Generation pada Masalah Penjadwalan Awak Bis.* Tesis: Bandung, Matematika FMIPA, Institut Teknologi Bandung.

Ceder, A. (1987). *Methods for Creating Bus Timetables*. Transportation Research Part A. Vol. 21A, No.1 (1986), pp. 59 – 83. Great Britain: Pergamon Journal Ltd.

Ceder, A. (2001). *Efficient Timetabling and Vehicle Scheduling for Public Transport*. S. Voβ et al. (eds.), Computer-Aided Scheduling of Public Transport. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Ceder, A., Golany, B., & Tal, O. (2001). *Creating Bus Timetables with Maximal Synchronization*. Transportation Research Part A, 35, 913 – 928. Elsevier Science Ltd.

Ceder, A. (2007). *Public Transit Planning and Operation: Theory, Modeling, and Practice*.UK: Elsevier.

Eranki, A. (2004). *Tesis*: *A Model to Create Timetables to Attain Maximum Synchronization Considering Waiting Times at Transfer Stops*. University of South Florida.

Gambaran Umum. (n.d.). Desember 3, 2012, pukul 10.07 WIB. http://www.transjakarta.co.id/page.php#tab-2

Hillier, F.S., Lieberman, G. J. (1995). *Introduction to Operations Research* (6th ed.). Singapore: McGraw-Hill.

Institute for Transportation & Development Policy. (2003). *Trans-Jakarta Bus Rapid Transit System: Technical Review.* September 21, 2012, pukul 13.14 WIB. http://www.itdp.org/documents/TransJak%20Tech%20Rev.pdf

Masyarakat Transportasi Indonesia. (2012, Mei 8). *MASALAH KEMACETAN: Kadin DKI Desak Pembenahan Transportasi Massal*. Oktober 31, 2012, pukul 15.04 WIB. http://www.mti-its.or.id/index.php/28-berita/berita-nasional/83-kadin-dki-desak-pembenahan-transportasi-massal

Mekkaoui, O., Palma, A., & Lindsey, R. (2000). *Optimal Bus Timetables and Trip Timing Preferences.* THEMA Working Papers 2000-11. Cergy-Pontoise University.

Peta Jaringan Transjakarta. (n.d.). Desember 3, 2012, pukul 10.38 WIB. http://www.transjakarta.co.id/upload/petajaringan60x60.jpg

Rute Langsung Bus Transjakarta. (2010, Oktober 8). November 1, 2012, pukul 10.57 WIB. http://www.transjakarta.co.id/news.php?id=180

Sistem Transjakarta Busway. (n.d.). September 14, 2012, pukul 10.49 WIB. http://www.transjakarta.co.id/tentangkami.php?page_id=3

Transjakarta Busway Pilihan yang Tepat. (2010, Maret 18). September 14, 2012, pukul 11.40 WIB. http://www.transjakarta.co.id/news.php?id=72

Wu, N., & Coppins, R. (1981). *Linear Programming and Extentions*. USA: McGraw-Hill.

LAMPIRAN

Lampiran 1. *Source Code* Penyelesaian Masalah Penyusunan *Timetable* Bus TransJakarta dengan Metode *Branch and Bound* pada Perangkat Lunak MATLAB

```
clear;clc;
%bbtimetable.m
f0 = textread('f0.txt');
A0 = textread('A0.txt');
Aeq0 = textread('Aeq0.txt');
b0 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;
      0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;
      0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;26];
beq0 = [1;1;1;1];
[m,n] = size(A0);
lb0 = zeros(n,1);
ub0 = [1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
       1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
       1;1;1;26;26];

options = optimset('LargeScale', 'off', 'Simplex', 'on');
[x,fval,exitflag]=linprog(f0,A0,b0,Aeq0,beq0,lb0,ub0,[],options);
if exitflag~=1
    x=[];
    disp('tak ada solusi layak');
    return;
end

lanjut = isequal(x,ceil(x));
if lanjut==1
    disp('telah diperoleh solusi optimal');
    disp(x);
    disp(fval);
    return;
end

selesai = 0; tol = 10^(-13);
z_opt = inf; var = 1; xbb = [];
F = []; X = {}; bound = [];
while selesai == 0
    f = f0(var+1:end);
    A = A0(:,var+1:end);
    Aeq = Aeq0(:,var+1:end);
    lb = zeros(n-var,1);
    ub = ub0(var+1:end,:);

    for i=1:2
        X{end+1} = [xbb;i-1];

        if var < n-2
            b = b0 - A0(:,1:var)*[xbb;i-1];
```

(Lanjutan)

```
beq = beq0 - Aeq0(:,1:var)*[xbb;i-1];
            [x,fval,layak] =
linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
            fx = find(abs(x-floor(x))<tol);
            cx = find(abs(x-ceil(x))<tol);
            x(fx) = floor(x(fx));
            x(cx) = ceil(x(cx));
        elseif var == n-2
            cek = beq0 - Aeq0*[xbb;i-1;0;0];
            if isempty(cek(cek<0))
                layak = 1;
            else
                layak = 0;
            end
        else
            break;
        end

        if var == n-1
            f = f0(var:end);
            A = A0(:,var:end);
            Aeq = Aeq0(:,var:end);
            lb = zeros(n-var+1,1);
            ub = ub0(var:end,:);
            b = b0 - A0(:,1:var-1)*xbb;
            beq = beq0 - Aeq0(:,1:var-1)*xbb;
            [x,fval,layak] =
linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
            batas = f0*[xbb;x];
        end

        if layak ~= 1
            F(end+1) = 2;
            bound(end+1) = NaN;
        else
            if var == n-1
                bound(end+1)= f0*[xbb;x];
            else
                bound(end+1) = ceil(f0*[xbb;i-1;x]);
            end
            if bound(end) >= z_opt
                F(end+1) = 1;
            else
                if isequal(x,ceil(x))
                    F(end+1) = 3;
                    z_opt = bound(end);
                    x_opt = [xbb;i-1;x];
                else
                    F(end+1) = 0;
                end
            end
        end
        disp('x = ');
        disp([xbb;i-1]');
        bound
        F
```

(Lanjutan)

```
        pause
    end
    kand = find(F == 0);
    kand2 = find(bound(kand) >= z_opt);
    F(kand(kand2)) = 1;

    kand = find(F == 0);
    if isempty(kand)
        selesai = 1;
    else
        [nilai i] = min(bound(kand));
        F(kand(i)) = NaN;
        xbb = X{kand(i)};
        var = numel(xbb) + 1;
    end
end
fprintf('-----------------------------------------\n');
fprintf('Solusi optimal: \n');
for i=1:n
    fprintf('x(%d) = %d \n', i,x_opt(i));
end
fprintf('Nilai fungsi tujuan optimal, z* = %d \n',z_opt);
fprintf('-----------------------------------------\n');
```

Lampiran 2. f0.txt, A0.txt, Aeq0.txt

f0.txt

```
699 631 563 495 427 359 291 223 155 87 19 0 459 399 339 279 219 159 99 39 0 299
231 163 95 27 0 294 234 174 114 54 0 0 0
```

A0.txt

```
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1
0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 -1
0 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 2 0 0 0 0 0 0 0 -1
1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 -1
1 1 2 2 2 3 3 4 4 4 5 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 2 2 3 0 0 0 0 0 0 0 -1
1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 2 3 3 0 0 0 0 0 0 0 -1
1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 3 3 4 0 0 0 0 0 0 0 -1
1 2 3 3 4 4 5 6 6 7 7 8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 3 4 4 0 0 0 0 0 0 0 -1
2 2 3 4 4 5 6 6 7 8 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 3 4 4 5 0 0 0 0 0 0 0 -1
2 2 3 4 5 5 6 7 8 8 9 10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 3 4 5 5 0 0 0 0 0 0 0 -1
2 3 4 4 5 6 7 8 8 9 10 11 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 3 4 4 5 6 0 0 0 0 0 0 0 -1
2 3 4 5 6 6 7 8 9 10 11 12 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 3 4 5 6 6 0 0 0 0 0 0 0 -1
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 3 4 5 6 7 0 0 0 0 0 0 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 -1 -1 -1 -2 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 0 0 0 0 0 0 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 -1 -1 -2 -2 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 0 0 0 0 0 0 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 0 0 0 0 0 1 1 1 1 -1 -1 -1 -2 -2 -2 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 0 0 0 0 0 1 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 0 0 1 1 1 1 1 2 2  -1 -1 -2 -2 -3 -3 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 -1 -1 -1 -1 -1 -2 -2 -2 -2 -2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 0 0 1 1 1 1 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 0 1 1 1 1 2 2 2 2 -1 -2 -2 -3 -3 -4 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 -1 -1 -1 -1 -2 -2 -2 -2 -3 -3 -3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 0 1 1 1 1 2 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 1 1 1 2 2 2 3 3 3 -1 -2 -2 -3 -4 -4 0 0 0 0 0 0 -1 0
-1 -1 -1 -2 -2 -2 -3 -3 -3 -4 -4 -4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 1 1 1 2 2 2 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 1 1 2 2 2 3 3 4 4 -1 -2 -3 -3 -4 -5 0 0 0 0 0 0 -1 0
-1 -1 -2 -2 -2 -3 -3 -4 -4 -4 -4 -4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 1 1 2 2 2 3 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 1 1 2 2 3 3 4 4 5 -2 -2 -3 -4 -5 -5 0 0 0 0 0 0 -1 0
```

(Lanjutan)

```
-1 -1 -2 -2 -3 -3 -4 -4 -5 -5 -6 -6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 1 1 2 2 3 3 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 1 2 2 3 3 4 4 5 5 -2 -3 -3 -4 -5 -6 0 0 0 0 0 0 -1 0
-1 -2 -2 -3 -3 -4 -4 -5 -5 -6 -6 -7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 1 2 2 3 3 4 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 1 2 3 3 4 4 5 6 6 -2 -3 -4 -5 -5 -6 0 0 0 0 0 0 -1 0
-1 -2 -3 -3 -4 -4 -5 -6 -6 -7 -7 -8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 1 2 3 3 4 4 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 2 2 3 4 4 5 6 6 7 -2 -3 -4 -5 -6 -7 0 0 0 0 0 0 -1 0
-2 -2 -3 -4 -4 -5 -6 -6 -7 -8 -8 -9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 2 2 3 4 4 5 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 2 2 3 4 5 5 6 7 8 -2 -3 -4 -5 -6 -7 0 0 0 0 0 0 -1 0
-2 -2 -3 -4 -5 -5 -6 -7 -8 -8 -9 -10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 2 2 3 4 5 5 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 2 2 3 4 5 5 6 7 8 -3 -4 -5 -6 -7 -8 0 0 0 0 0 0 -1 0
-2 -3 -4 -4 -5 -6 -7 -8 -8 -9 -10 -11 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 2 2 3 4 5 5 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 2 3 4 5 6 6 7 8 9 -3 -4 -5 -6 -7 -8 0 0 0 0 0 0 -1 0
-2 -3 -4 -5 -6 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 2 3 4 5 6 6 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 2 3 4 5 6 7 8 9 10 -3 -4 -5 -6 -7 -8 0 0 0 -1 -1 -1 -1 0
-2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 2 3 4 5 6 7 0 -1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 3 4 5 6 7 8 9 10 11 -3 -4 -5 -6 -7 -8 0 -1 -1 -1 -1 -2 -1 0
-3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 4 5 6 7 8 3 4 5 6 7 8 0 -1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1
```

Aeq0.txt

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0
```