UNIVERSITAS INDONESIA

KARAKTERISTIK ALJABAR LIE BERDIMENSI KURANG DARI 4

SKRIPSI

ANDREW
0906629845

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

KARAKTERISTIK ALJABAR LIE BERDIMENSI KURANG DARI 4

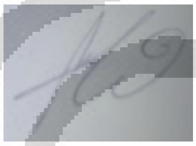
SKRIPSI
Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana

ANDREW
0906629845

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Andrew
NPM	:	0906629845
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	10 Desember 2012

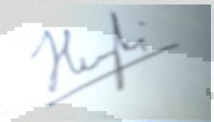
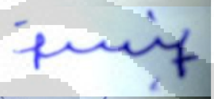
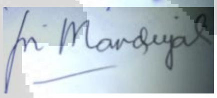
HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama	:	Andrew
NPM	:	0906629845
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Karakteristik Aljabar Lie Berdimensi Kurang Dari 4

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dr. Hengki Tasman, M.Si.	()
Penguji	:	Dra. Siti Aminah, M.Kom.	()
Penguji	:	Dr. Sri Mardiyati, M.Kom.	()

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	17 Desember 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Selama penulisan skripsi ini, penulis telah mendapat banyak motivasi, semangat, doa, bantuan, inspirasi dari berbagai pihak. Penulis ingin berterima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Hengki Tasman, M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi yang banyak menginspirasi dan memotivasi penulis serta telah bersedia meluangkan dan mengorbankan banyak waktu dan pikiran untuk membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih juga atas kesabaran, canda tawa serta arahan selama bimbingan.

2. Bapak Dr. Al Haji Akbar Bachtiar M.Sc., S.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang selama ini telah bersedia membimbing penulis untuk dapat menjalani proses perkuliahan dengan baik.

3. Semua dosen Departemen Matematika atas ilmu pengetahuan yang telah diberikan kepada penulis selama masa kuliah.

4. Seluruh staf karyawan Departemen matematika.

5. Kedua orang tua penulis, Indra dan Saleha, adik penulis, Eric Jessen, beserta seluruh anggota keluarga yang terus memberikan doa, semangat, inspirasi, dan motivasi.

6. Professor Adam Bower, Professor Mark Wildon, Professor James Humpreys dan Professor Julian K*ü*lshammer yang telah bersedia membalas email dan membantu dan menginspirasi penulis dalam kesulitan yang diperoleh ketika pembuatan skripsi ini.

7. Eric dan Hauke Strasdat pada forum stackexchange yang memberi inspirasi penulis pada proses pembuatan skripsi ini.

8. Eja yang telah banyak membantu dalam kesulitan yang diperoleh ketika pembuatan skripsi ini.

9. Daniel teman satu bimbingan dan membantu dalam proses pembuatan skripsi ini, Azki dan Sofwah teman yang sering direpotkan dan ditanyai oleh penulis, Dian, Emyl, Maifiana, Rani, Soleman, Wilsan, dan Yanti sebagai teman yang sama sama berjuang dalam penulisan skripsi ini.

10. Kak Ajat yang bersedia ditanya dan diganggu selama penulisan skripsi ini.
11. Ardiansyah teman bermain dari SMA yang banyak memberikan dukungan, Andrian teman bermain dari SMP yang banyak memberikan dukungan, Fadhil Muhammad dan Pomto Jaya yang telah banyak membantu dalam penulisan skripsi ini.
12. Seluruh teman-teman angkatan 2009 yaitu Alfian, Alis, Ana Z, Icha, Anton, Ai, Danang, Tika, Dwi, Eva, Everien, Budhi, Fitri, Fitta, Nina, Noko, Hendy, Sani, Lutfir, Michael, Upi, Icol, Ojan, Kemal, Sitha, Nia, Noe, Okta, Agnes, Revi, Dinda, Sandi, Cepi, Mamen, Sigap, Putri, Anin, Sondra, Handa, Agung, Wiwit, Dede, dan Yuan. atas semangat, dukungan, canda tawa dan banyak hal penting selama masa kuliah.
13. Andreas Febrian dan Lia Sadita yang telah membuat kerangka awal penulisan skripsi di Latex.
14. Teman-teman penulis di Matematika UI dari berbagai angkatan.
15. Teman-teman dari Entrepreneur Corner Kaskus, VGBM Kaskus, VGMM Kaskus yang telah memberi inspirasi dan motivasi bagi penulis dan berbagai teman lainnya dari Kaskus yang tidak dapat disebutkan satu per satu.
16. Teman-teman dari EXE NSR Community yang banyak mendoakan dan memberi semangat kepada penulis agar proses pembuatan skripsi ini berjalan lancar.
17. Seluruh pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan secara langsung maupun tidak langsung, yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis meminta maaf apabila ada kekurangan pada skripsi ini. Penulis juga berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Depok, 10 Desember 2012

Andrew

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Andrew
NPM	:	0906629845
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Skripsi

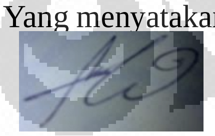
demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (Non-exclusive Royalty Free Right) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Karakteristik Aljabar Lie Berdimensi Kurang Dari 4

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.
Demikian pernyatan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di	:	Depok
Pada tanggal	:	10 Desember 2012

Yang menyatakan



(Andrew)

ABSTRAK

Nama	:	Andrew
Program Studi	:	Matematika
Judul	:	Karakteristik Aljabar Lie Berdimensi Kurang Dari 4

Aljabar Lie adalah ruang vektor atas suatu lapangan yang memenuhi beberapa aksioma tertentu. Salah satu dari aksioma aljabar Lie ini dikenal dengan identitas Jacobi. Dalam skripsi ini, dibahas karakteristik dari aljabar Lie seperti ideal, homomorfisma dan struktur konstan. Selain itu juga dibahas aljabar yang terturunkan dari suatu aljabar Lie. Untuk aljabar Lie berdimensi 2 dan 3 yang dibahas adalah aljabar Lie yang non-abelian. Khusus untuk aljabar Lie berdimensi 3 yang dibahas hanya sampai aljabar yang terturunkan berdimensi 2 dan pada lapangan kompleks.

Kata Kunci : aljabar Lie, homomorfisma, struktur konstan, aljabar yang terturunkan.
x+42 halaman ; 0 gambar; 0 tabel
Daftar Pustaka : 10 (1984-2006)

ABSTRACT

Name : Andrew
Program : Mathematic
Title : Charateristic of Lie Algebra with Dimension Less Than 4

Lie algebra is a vector space over a field that satisfy some axioms. One of the axioms is known as the Jacobi identity. In this thesis, it is discussed the characteristics of Lie algebra such as ideal, homomorphism and constant structure. Here, it is also discussed the derived algebra of Lie algebra. For the Lie algebra with dimension 2 and 3 to be discussed is a non-abelian Lie algebra. Especially for a 3-dimensional Lie algebra is discussed only to the derived algebra of dimension 2 on complex field.

Keywords : Lie algebra, homomorphism, constant structure, derived algebra.
x+42 pages ; 0 picture; 0 table
Bibliography : 10 (1984-2006)

DAFTAR ISI

BAB 1
Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Ruang vektor atas lapangan F adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi 2 operasi, yaitu penjumlahan antar vektor dan perkalian skalar dan memenuhi 10 aksioma. Aljabar telah dikenal sebagai salah satu bidang dalam matematika. Suatu aljabar adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan operasi bilinier dan memenuhi aksioma tertentu. Salah satu contoh aljabar adalah aljabar Lie.
Kerangka dari aljabar Lie diperkenalkan oleh matematikawan Norwegia yang bernama Sophus Lie di akhir abad ke-19. Pada tahun 1873 Sophus Lie melakukan penelitian yang kemudian hasil penelitian itu dikenal dengan Grup Lie. Setelah memperkenalkan tentang Grup Lie kemudian ia memperluasnya menjadi aljabar Lie.
Grup Lie ini sendiri banyak digunakan di bidang fisika sebelum ditemukannya teori kuantum. Aljabar Lie ini sendiri berperan penting dalam pengembangan teori Fisika pada abad ke 19, salah satunya yaitu *Spectroscopy*. Aplikasi pada aljabar Lie ini sendiri cukup banyak seperti pada molekul yaitu *vibron model*, dan pada atom yaitu *atomic shell model*, pada nuklir yaitu *interacting boson model*.
Aljabar Lie atas suatu lapangan adalah ruang vektor dengan pemetaan bilinear yang disebut *bracket* Lie (dinotasikan dengan [-,-]) dan memenuhi 2 aksioma. Secara umum, *bracket* Lie belum tentu komutatif dan asosiatif. Dalam skripsi ini, dibahas karakteristik dari aljabar Lie seperti ideal, homomorfisma dan isomorfisma. Untuk aljabar Lie berdimensi 2 dan 3 yang dibahas adalah aljabar Lie yang non abelian. Khusus untuk aljabar Lie berdimensi 3 yang dibahas hanya sampai aljabar yang terturunkan berdimensi 2 dan aljabar Lie yang ditinjau lebih lanjut pada lapangan kompleks.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup Penelitian

Perumusan masalah pada skripsi ini adalah sebagai berikut:
Bagaimana karakteristik dari aljabar Lie berdimensi kurang dari 4?
Ruang lingkup penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk aljabar Lie berdimensi 2 dan 3 yang dibahas adalah aljabar Lie yang non abelian.

2. Untuk aljabar Lie berdimensi 3 yang dibahas adalah aljabar yang terturunkan berdimensi 1 dan 2. Selain itu, yang ditinjau hanya aljabar Lie pada lapangan kompleks.

1.3 Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada pembahasan skripsi ini adalah studi literatur tentang aljabar Lie.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah memahami karakteristik aljabar Lie berdimensi kurang dari 4.

BAB 2
Landasan Teori

Dalam skripsi ini dibahas mengenai beberapa teorema dan lema yang berkaitan dengan aljabar Lie. Oleh karena itu, diperlukan pembahasan mengenai teori-teori yang melatarbelakanginya dalam bab ini. Pertama-tama dibahas terlebih dahulu definisi ruang vektor dan definisi yang berkaitan dengan ruang vektor, serta definisi pemetaan linear dan pemetaan bilinear yang banyak digunakan dalam skripsi ini. Setelah itu dibahas teori mengenai matriks dan aljabar.

2.1 Ruang Vektor

Pada subbab ini dibahas mengenai ruang vektor beserta sifat-sifat dari ruang vektor itu sendiri seperti bebas linear, basis, dimensi.

Definisi 2.1. *Misalkan F merupakan suatu lapangan, anggotanya disebut skalar. Suatu ruang vektor V atas lapangan F adalah himpunan tidak kosong V yang anggotanya disebut vektor dan dilengkapi dengan dua buah operasi. Operasi pertama, disebut penjumlahan dan dinotasikan dengan +, mengoperasikan setiap pasang vektor (u,v) pada V ke suatu vektor u+v pada V. Operasi kedua, disebut sebagai perkalian skalar, mengoperasikan setiap pasang (r,u)* $\in F \times V$ *ke suatu vektor ru di V. Lebih lanjut, beberapa sifat berikut harus dipenuhi :*
1. (Sifat asosiatif penjumlahan) Untuk semua $u, v, w \in V$,

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

2. (Sifat komutatif penjumlahan) Untuk semua $u, v \in V$,

$$u + v = v + u.$$

3. (Keberadaan vektor nol) terdapat suatu $0 \in V$ *dengan sifat*

$$0 + u = u + 0 = u, \forall u \in V.$$

4. (Keberadaan invers terhadap penjumlahan) Untuk semua $u \in V$, *terdapat suatu vektor di V, dinotasikan dengan -u , dengan sifat*

$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

5. (Sifat perkalian skalar) Untuk semua $a, b \in F$ *dan semua* $u, v \in V$,

$$\begin{aligned} a(u+v) &= au+av \\ (a+b)u &= au+bu \\ (ab)u &= a(bu) \\ 1u &= u. \end{aligned}$$

(S. Roman, 2007, hal. 35-36)

Definisi 2.2. *Subruang dari ruang vektor V adalah himpunan bagian tak kosong U* $\subseteq$ *V dengan U merupakan ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang sama dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang dimiliki oleh V.*
(B. Jacob, 1990, hal. 100)

Definisi 2.3. *Misalkan V adalah ruang vektor atas F, maka vektor* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *dikatakan bebas linear jika* $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$*, dengan* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$*, mengakibatkan* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
(B. Jacob, 1990, hal. 185)

Definisi 2.4. *Misalkan* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *adalah vektor dan* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *merupakan skalar. Vektor* $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ *disebut kombinasi linear dari* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*. Himpunan seluruh kombinasi linear dari* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *disebut rentangan dari* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *dan dinotasikan sebagai* $span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
(B. Jacob, 1990, hal. 86)

Definisi 2.5. *Himpunan vektor* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *pada suatu ruang vektor V disebut basis untuk V jika*
1. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *bebas linear.*
2. $span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$.
(B. Jacob, 1990, hal. 114)

Teorema 2.6. *(Teorema Perluasan Basis / Basis Extension Theorem) Misalkan* $v_1, v_2, \ldots, v_s$ *merupakan vektor-vektor yang saling bebas linear pada ruang vektor V yang berdimensi n. Maka terdapat* $w_{s+1}, w_{s+2}, \ldots, w_n \in V$ *sedemikian sehingga himpunan* $\{v_1, v_2, , v_s, w_{s+1}, w_{s+2}, \ldots, w_n\}$ *merupakan basis untuk V.*
(B. Jacob, 1990, hal. 121)

Definisi 2.7. *Misalkan V merupakan ruang vektor dan memiliki basis dengan n anggota maka V dikatakan mempunyai dimensi n.*
(B. Jacob, 1990, hal. 115)

Definisi 2.8. *Himpunan rentangan minimal untuk ruang vektor V adalah himpunan dari vektor yang merentang ruang vektor V, tetapi untuk setiap subhimpunan tidak merentang V. Himpunan bebas linear maksimal untuk ruang vektor V adalah himpunan yang merupakan subhimpunan dari V dimana setiap subhimpunan yang lebih besar tidak bebas linear.*
(B. Jacob, 1990, hal. 120)

Hubungan antara himpunan rentangan minimal, himpunan bebas linear maksimal dengan basis ada pada lema berikut ini.

Lema 2.9. *Misalkan $v_1, v_2, ..., v_n$ adalah elemen dari ruang vektor V.*

(i) Jika $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah himpunan rentangan minimal untuk V jika dan hanya jika $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah basis untuk V.

(ii) Jika $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah himpunan bebas linear maksimal dari V, maka $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah basis untuk V.

(B. Jacob, 1990, hal. 120)

2.2 Pemetaan Linear dan Pemetaan Bilinear

Sebelum mengenal pemetaan bilinear, dikenal pemetaan linear. Selanjutnya dibahas tentang sifat-sifat pemetaan linear. Pada subbab ini juga dibahas mengenai matriks representasi dari pemetaan linear, kemudian mengenai matriks dibahas pada subbab selanjutnya.

Definisi 2.10. *Misalkan V, V' adalah ruang vektor atas lapangan K. Pemetaan linear*

$$F : V \to V'$$

adalah pemetaan yang memenuhi dua sifat berikut :
1. Untuk setiap vektor $u, v \in V$

$$F(u+v) = F(u) + F(v).$$

2. Untuk setiap $c \in K$ dan $v \in V$,

$$F(cv) = cF(v).$$

(S. Lang, 1987, hal. 51-52)

Definisi 2.11. *Misalkan* $T : V \to W$ *adalah pemetaan linear, dengan* $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *adalah basis terurut dari ruang vektor* V *dan* $C = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ *adalah basis terurut dari ruang vektor* W*. Didefinisikan matriks* $m \times n$ $T_{BC} = (a_{ij})$ *dengan elemen* a_{ij} *ditentukan secara unik dengan persamaan*

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m.$$

Matriks T_{BC} *disebut matriks representasi dari pemetaan linear* T*.*
(B. Jacob, 1990, hal. 194)

Matriks representasi dari komposisi dari 2 pemetaan adalah hasil kali matriks representasi dari masing-masing pemetaan, hal ini ada pada teorema berikut ini.

Teorema 2.12. *Misalkan* $S : V \to W$ *dan* $T : U \to V$ *adalah pemetaan linear (sehingga* $S \circ T : U \to W$ *adalah pemetaan linear). Misalkan* B, C, D *adalah basis terurut untuk* U, V, W*. Maka*

$$(S \circ T)_{BD} = S_{CD}T_{BC}$$

(B. Jacob, 1990, hal. 200)

Definisi 2.13. *Misalkan* $T : V \to W$ *merupakan pemetaan linear.*
(i) Kernel dari T, dinotasikan sebagai ker(T), didefinisikan sebagai

$$ker(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}.$$

(ii) Image dari T, dinotasikan sebagai im(T), didefinisikan sebagai

$$im(T) = \{T(v) | v \in V\}.$$

(B. Jacob, 1990, hal. 181)

Definisi 2.14. *Misalkan* $T : V \to W$ *adalah pemetaan linear. Dimensi* $ker(T)$ *dikatakan nullitas dari* T *dan dinotasikan* $null(T)$*. Dimensi dari* $im(T)$ *dikatakan* rank *dari* T *dan dinotasikan* $rk(T)$*.*
(B. Jacob, 1990, hal. 182)

Berikut ini, adalah teorema tentang rank dan nullitas.

Teorema 2.15. *Misalkan* $T : V \to W$ *adalah pemetaan linear, dengan* V *adalah ruang vektor berdimensi hingga. Maka* $rk(T) + null(T) = dim(V)$*.*
(B. Jacob, 1990, hal. 184)

Jika basis pada suatu ruang vektor dipetakan dan hasil pemetaannya ada pada daerah hasil, maka pemetaan yang dibentuk adalah pemetaan linear, hal ini ada pada teorema berikut ini.

Teorema 2.16. *Diasumsikan V dan W adalah ruang vektor. Misalkan $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah basis dari V dan $w_1, w_2, ..., w_n \in W$. Maka ada pemetaan linear yang unik $T : V \to W$ sedemikian sehingga $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, ... , $T(v_n) = w_n$.*
(B. Jacob, 1990, hal. 173)

Definisi 2.17. *Pemetaan linear $T : V \to W$ dikatakan satu-satu jika $u, v \in V$ dan $T(u) = T(v)$ maka $u = v$. Pemetaan linear T dikatakan pada jika $im(T) = W$.*
(B. Jacob, 1990, hal. 185)

Teorema berikut ini adalah teorema tentang isomorfisma di ruang vektor.

Teorema 2.18. *Misalkan V dan W ruang vektor berdimensi-hingga dan $T : V \to W$ adalah pemetaan linear. Maka*

1. *(i) T satu-satu jika dan hanya jika $ker(T) = \{\vec{0}\}$.*
2. *(ii) T satu-satu jika dan hanya jika ketika $v_1, v_2, ...v_n$ bebas linear di V, $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ bebas linear di W.*
3. *(iii) T pada jika dan hanya jika $rk(T) = dim(W)$.*
4. *(iv) T isomorfisma jika dan hanya jika saat $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah basis untuk V, $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ adalah basis untuk W.*
5. *(v) Jika T isomorfisma maka $dim(V) = dim(W)$.*
6. *(vi) Jika T isomorfisma maka T^{-1} ada sebagai sebuah fungsi dan $T^{-1} : W \to V$ adalah sebuah isomorfisma.*

(B. Jacob, 1990, hal. 187)

Definisi 2.19. *Misalkan W_1 dan W_2 subruang dari ruang vektor V. Maka $V = W_1 \bigoplus W_2$ jika*

1. *(i) $W_1 \cap W_2 = 0$.*

2. *(ii)* $V = W_1 + W_2$, *yaitu setiap* $v \in V$ *dapat dinyatakan sebagai* $v = w_1 + w_2$, *dengan* $w_1 \in W_1$ *dan* $w_2 \in W_2$.
   V *disebut sebagai hasil tambah langsung dari* W_1 *dan* W_2.

(B. Jacob, 1990, hal. 268)

Definisi 2.20. *Misalkan* U, V, W *adalah ruang vektor atas* F *, dan*

$$g : U \times V \to W$$

adalah pemetaan. Pemetaan g adalah pemetaan bilinear jika untuk suatu $u \in U$ *yang tetap, pemetaan*

$$v \mapsto g(u, v)$$

adalah linear dan untuk suatu $v \in V$ *yang tetap, pemetaan*

$$u \mapsto g(u, v)$$

adalah linear. Atau dapat disimpulkan dari kondisi pertama

$$\begin{aligned} g(u, v_1 + v_2) &= g(u, v_1) + g(u, v_2) \\ g(u, cv) &= cg(u, v) \end{aligned}$$

dan serupa untuk kondisi kedua.
(S. Lang, 1987, hal. 118-119)

2.3 Matriks

Pada subbab ini dibahas berbagai hal mengenai matriks seperti trace, keserupaan matriks, matriks yang dapat didiagonalkan, nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi 2.21. *Diberikan matriks persegi A. Didefinisikan trace dari matriks A sebagai*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

(B. Jacob, 1990, hal. 180)

Pemetaan dari matriks ke tracenya adalah pemetaan linear.

Lema 2.22. $tr : M_{n \times n}(F) \to F$ *adalah pemetaan linear.*
(B. Jacob, 1990, hal. 180)

Bukti.

$$\begin{aligned} tr(A+B) &= a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+...+a_{nn}+b_{nn} \\ &= a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}+b_{11}+b_{22}+...+b_{nn} \\ &= tr(A)+tr(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tr(\alpha A) &= \alpha a_{11}+\alpha a_{22}+...+\alpha a_{nn} \\ &= \alpha(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}) \\ &= \alpha(tr(A)). \end{aligned}$$

Jadi terbukti tr adalah pemetaan linear. □

Teorema 2.23. *Jika A,B adalah matriks persegi maka $tr(AB) = tr(BA)$.*
(S. Roman, 2007, hal. 188)

Bukti. Misalkan $AB = C$, maka $c_{11} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}$, $c_{22} = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2}$, ... , $c_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in}$. Didapatkan $tr(C) = c_{11}+c_{22}+...+c_{nn} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ij}$. Misalkan pula $BA = D$, maka $d_{11} = \sum_{i=1}^{n} b_{1i}a_{i1}$, $d_{22} = \sum_{i=1}^{n} b_{2i}a_{i2}$, ... , $b_{nn} = \sum_{i=1}^{n} b_{ni}a_{in}$. Didapatkan $tr(D) = d_{11}+d_{22}+...+d_{nn} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$. Jadi $tr(AB) = tr(BA)$. □

Definisi 2.24. *Misalkan $T : V \to V$ adalah pemetaan linear. Jika $v \in V$ bukan vektor nol dan ada skalar k sedemikian sehingga $T(v) = kv$, kita katakan v adalah vektor eigen dari T. Skalar k disebut nilai eigen dari v yang bersesuaian dengan vektor eigen v.*
(B. Jacob, 1990, hal. 270)

Definisi 2.25. *Diberikan matriks persegi A. Matriks A dikatakan diagonal jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.*
(B. Jacob, 1990, hal. 30)

Definisi 2.26. *Diberikan matriks persegi A dan B. Jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sedemikian sehingga $A = PBP^{-1}$, maka dikatakan matriks A dan B serupa.*
(B. Jacob, 1990, hal. 201)

Definisi 2.27. *Diberikan matriks persegi A. Matriks A dikatakan dapat didiagonalkan atas F jika A serupa ke suatu matriks diagonal.*
(B. Jacob, 1990, hal. 218)

Teorema 2.28. *Matriks persegi A dapat dibalik jika dan hanya jika* $\lambda = 0$ *bukan merupakan nilai eigen dari A.*
(H. Anton, 2005, hal. 366)

Teorema 2.29. *Jika matriks persegi A mempunyai n nilai eigen yang berbeda maka A dapat didiagonalkan.*
(H. Anton, 2005, hal. 374)

2.4 Aljabar

Definisi 2.30. *Sebuah aljabar atas lapangan F adalah ruang vektor A di F dengan pemetaan yang bilinear*

$$A \times A \to A,$$
$$(x, y) \mapsto xy.$$

Kita katakan xy adalah hasil kali antara x dan y.
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 5)

BAB 3
Aljabar Lie

3.1 Definisi Aljabar Lie

Pada sub bab ini dibahas mengenai definisi aljabar Lie dan beberapa lema dasar yang dihasilkan dengan menjalankan definisi dari aljabar Lie.

Definisi 3.1. *Misalkan F adalah lapangan. Aljabar Lie atas F adalah ruang vektor L atas F dengan pemetaan bilinear (disebut Bracket Lie)*

$$\begin{aligned} [-,-] &: L \times L \to L, \\ & (x,y) \mapsto [x,y], \end{aligned}$$

yang memenuhi 2 aksioma, yaitu:

(L1) $[x,x] = 0,\ \forall\, x \in L.$

(L2) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0,\ \forall\, x,y,z \in L.$

(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 1)

Bracket Lie $[x,y]$ biasa disebut *commutator* dari x dan y. Aksioma ke 2 dari *Bracket* Lie disebut juga Identitas Jacobi. Karena *Bracket* Lie merupakan pemetaan bilinear dan aksioma (L1), maka

$$\begin{aligned} 0 &= [x+y, x+y] \\ &= [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] \\ &= 0 + [x,y] + [y,x] + 0 \\ &= [x,y] + [y,x], \end{aligned}$$

(L1') $[x,y] = -[y,x].$

Aljabar Lie L dikatakan abelian jika $[x,y] = [y,x],\ \forall x,y \in L.$
Salah satu kondisi yang menyebabkan aljabar Lie L abelian terdapat pada lema berikut ini.

Lema 3.2. *Aljabar Lie L abelian jika dan hanya jika* $[x,y] = 0,\ \forall x,y \in L.$
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 2)

Bukti. Misal L adalah aljabar Lie yang abelian maka $[x,y] = [y,x]$. Dari akibat (L1') didapat $[y,x] = [x,y] = -[y,x]$.
$[y,x] = -[y,x]$ dipenuhi jika $[y,x] = 0$, sehingga didapat $[x,y] = [y,x] = 0$, $\forall x,y \in L$.
Jika $[x,y] = 0$, $\forall x,y \in L$ maka $[x,y] = 0 = -0 = [y,x]$, $\forall x,y \in L$. Jadi L abelian. □

Sifat dari *bracket* Lie dengan 0 terdapat pada lema berikut ini.

Lema 3.3. *Misalkan L adalah aljabar Lie.* $[v,0] = 0 = [0,v]$, $\forall\, v \in L$.
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 2)

Bukti. Berdasarkan aksioma (L1) dari aljabar Lie,

$$0 = [v,v] = [v,v+0] = [v,v] + [v,0] = 0 + [v,0] = [v,0] = -[0,v].$$

Jadi didapat $[v,0] = 0 = [0,v]$. □

Syarat agar 2 vektor di aljabar Lie bebas linear dibahas pada lema berikut ini.

Lema 3.4. *Misalkan L adalah aljabar Lie atas F. Jika* $x,y \in L$ *dan memenuhi* $[x,y] \neq 0$, *maka x dan y bebas linear.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 2)

Bukti. Perhatikan $\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$, dengan $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,
Berdasarkan Lema 3.3, maka

$$\begin{aligned} 0 &= [x, \alpha_1 x + \alpha_2 y] \\ &= [x, \alpha_1 x] + [x, \alpha_2 y] \\ &= \alpha_1 [x,x] + \alpha_2 [x,y] \\ &= 0 + \alpha_2 [x,y] \\ &= \alpha_2 [x,y]. \\ 0 &= [\alpha_1 x + \alpha_2 y, y] \\ &= [\alpha_1 x, y] + [\alpha_2 y, y] \\ &= \alpha_1 [x,y] + \alpha_2 [y,y] \\ &= \alpha_1 [x,y] + 0 \\ &= \alpha_1 [x,y]. \end{aligned}$$

Karena $[x,y] \neq 0$ maka $\alpha_2 = 0$ dan $\alpha_1 = 0$.
Akibatnya, didapat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ jika $\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$. Jadi x dan y bebas linear. □

3.2 Contoh Aljabar Lie

Pada bagian ini dibahas beberapa contoh dari aljabar Lie dari berbagai ruang vektor dengan definisi *bracket* Lie tertentu.

Contoh 3.5. *Ruang vektor riil $\mathbb{R}^3$ bersama bracket*

$$[x,y] = x \times y,$$

dengan $x \times y$ adalah hasil kali silang (cross product) biasa antara vektor x dan y, merupakan aljabar Lie.

Selanjutnya, ditunjukkan operator [-,-] bilinear yaitu :

1. $[x_a + x_b, y] = [x_a, y] + [x_b, y]$, $\forall\, x_a, x_b, y \in \mathbb{R}^3$.
2. $[\alpha_1 x_a, y] = \alpha_1\ [x_a, y]$, $\forall\, \alpha_1 \in \mathbb{R}, x_a, y \in \mathbb{R}^3$.
3. $[x, y_a + y_b] = [x, y_a] + [x, y_b]$, $\forall\, y_a, y_b, x \in \mathbb{R}^3$.
4. $[x, \alpha_2 y_a] = \alpha_2\ [x, y_a]$ $\forall$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}, x, y_a \in \mathbb{R}^3$.

Misal $x_a = (x_{1,1},\ x_{2,1},\ x_{3,1})$, $x_b = (x_{1,2},\ x_{2,2},\ x_{3,2})$ dan $y = (y_1, y_2, y_3)$.
$x_a + x_b = (x_{1,1} + x_{1,2},\ x_{2,1} + x_{2,2},\ x_{3,1} + x_{3,2})$.

$$\begin{aligned}
[x_a + x_b, y] &= ((x_{2,1} + x_{2,2})y_3 - (x_{3,1} + x_{3,2})y_2, (x_{3,1} + x_{3,2})y_1 - (x_{1,1} + x_{1,2})y_3, \\
&\quad + (x_{1,1} + x_{1,2})y_2 - (x_{2,1} + x_{2,2})y_1) \\
&= (x_{2,1}y_3 - x_{3,1}y_2, x_{3,1}y_1 - x_{1,1}y_3, x_{1,1}y_2 - x_{2,1}y_1) + (x_{2,2}y_3 - x_{3,2}y_2, \\
&\quad + x_{3,2}y_1 - x_{1,2}y_3, x_{1,2}y_2 - x_{2,2}y_1) \\
&= [x_a, y] + [x_b, y].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_1 x_a, y] &= (\alpha_1 x_{2,1}y_3 - \alpha_1 x_{3,1}y_2, \alpha_1 x_{3,1}y_1 - \alpha_1 x_{1,1}y_3, \alpha_1 x_{1,1}y_2 - \alpha_1 x_{2,1}y_1) \\
&= \alpha_1 (x_{2,1}y_3 - x_{3,1}y_2, x_{3,1}y_1 - x_{1,1}y_3, \alpha_1 x_{1,1}y_2 - x_{2,1}y_1) \\
&= \alpha_1 [x_a, y].
\end{aligned}$$

Dengan cara serupa dapat dibuktikan juga butir 3 dan 4.
Selanjutnya, ditunjukkan $[x,x] = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^3$.
$[x,x] = (x_2 x_3 - x_3 x_2, x_3 x_1 - x_1 x_3, x_1 x_2 - x_2 x_1) = (0,0,0)$.
Untuk menunjukkan [-,-] memenuhi Identitas Jacobi, digunakan persamaan yang berlaku di $\mathbb{R}^3$ berikut

$$[x,[y,z]] = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z, \tag{3.1}$$

dengan operator $\cdot$ adalah hasil kali titik di $\mathbb{R}^3$. Terlebih dahulu ditunjukkan persamaan (3.1) berlaku. Misalkan $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ $[x, [y, z]] = [(x_1, x_2, x_3), (y_2z_3 - y_3z_2,\ y_3z_1 - y_1z_3,\ y_1z_2 - y_2z_1)]$.

$$\begin{aligned}
& [x, [y, z]] \\
= \; & (x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3), x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1) \\
& , x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2)) \\
= \; & (x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1, x_3y_2z_3 + x_1y_2z_1 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 \\
& , x_1y_3z_1 + x_1y_3z_1 + x_2y_3z_2 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3) \\
= \; & (x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 + x_1y_1z_1 - x_1y_1z_1 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1, x_2y_2z_2 - x_2y_2z_2 \\
& - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2, x_3y_2z_3 + x_1y_2z_1 + x_1y_3z_1 + x_1y_3z_1 + x_2y_3z_2 \\
& + x_3y_3z_3 - x_3y_3z_3 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3) \\
= \; & (x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 + x_1y_1z_1, x_3y_2z_3 + x_1y_2z_1 + x_2y_2z_2, x_1y_3z_1 + x_1y_3z_1 \\
& + x_2y_3z_2 + x_3y_3z_3) - (x_1y_1z_1 + x_2y_2z_1 + x_3y_3z_1, x_2y_2z_2 + x_3y_3z_2 + x_1y_1z_2 \\
& , x_3y_3z_3 + x_1y_1z_3 + x_2y_2z_3) \\
= \; & (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)(y_1, y_2, y_3) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1, z_2, z_3) \\
= \; & (x \cdot z)y - (x \cdot y)z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= (x \cdot z)y - (x \cdot y)z + (y \cdot x)z - (y \cdot z)x + (z \cdot y)x - (z \cdot x)y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Contoh 3.6. *Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi hingga atas F. Diberikan ruang vektor gl(V) = $\{f : V \to V$, f pemetaan linear$\}$. Ruang vektor gl(V) atas F adalah sebuah aljabar Lie jika didefinisikan* Bracket *Lie [-,-]*

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x | \forall x, y \in gl(V),$$

dengan simbol $\circ$ menotasikan komposisi fungsi.

Dapat ditunjukkan $[x, y]$ bilinear, yaitu :

1. $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$, $\forall\ x_1, x_2, y \in gl(V)$.
2. $[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2]$, $\forall\ x, y_1, y_2 \in gl(V)$.
3. $[\alpha_1 x_1, y] = \alpha_1 [x_1, y]$, $\forall\ \alpha_1 \in F$.
4. $[x, \alpha_2 y_1] = \alpha_2 [x, y_1]$, $\forall\ \alpha_2 \in F$.

$$
\begin{aligned}
[x_1+x_2,y] &= (x_1+x_2)\circ y - y\circ(x_1+x_2)\\
&= x_1\circ y + x_2\circ y - y\circ x_1 - y\circ x_2\\
&= x_1\circ y - y\circ x_1 + x_2\circ y - y\circ x_2\\
&= [x_1,y]+[x_2,y].\\
[x,y_1+y_2] &= x\circ(y_1+y_2)-(y_1+y_2)\circ x\\
&= x\circ y_1 + x\circ y_2 - y_1\circ x - y_2\circ x\\
&= x\circ y_1 - y_1\circ x + x\circ y_2 - y_2\circ x\\
&= [x,y_1]+[x,y_2].\\
[\alpha_1 x_1,y] &= \alpha_1 x_1\circ y - y\circ\alpha_1 x_1\\
&= \alpha_1(x_1\circ y)-\alpha_1(y\circ x_1)\\
&= \alpha_1(x_1\circ y - y\circ x_1)\\
&= \alpha_1[x_1,y].\\
[x,\alpha_2 y_1] &= x\circ\alpha_2 y_1 - \alpha_2 y_1\circ x\\
&= \alpha_2(x\circ y_1)-\alpha_2(y_1\circ x)\\
&= \alpha_2(x\circ y_1 - y_1\circ x)\\
&= \alpha_2[x,y_1].
\end{aligned}
$$

Jelas $[x,x]=0$, $\forall x\in gl(V)$.
Dapat ditunjukan $[-,-]$ memenuhi identitas Jacobi, yaitu :
$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$, $\forall\, x,y,z\in gl(V)$.

$$
\begin{aligned}
& [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]\\
= \;& x\circ[y,z]-[y,z]\circ x + y\circ[z,x]-[z,x]\circ y + z\circ[x,y]-[x,y]\circ z\\
= \;& x\circ(y\circ z - z\circ y)-(y\circ z - z\circ y)\circ x + y\circ(z\circ x - x\circ z)-(z\circ x - x\circ z)\circ y\\
& +z\circ(x\circ y - y\circ x)-(x\circ y - y\circ x)\circ z\\
= \;& x\circ y\circ z - x\circ z\circ y - y\circ z\circ x + z\circ y\circ x + y\circ z\circ x - y\circ x\circ z - z\circ x\circ y + x\circ z\circ y\\
& +z\circ x\circ y - z\circ y\circ x - x\circ y\circ z + y\circ x\circ z\\
= \;& 0.
\end{aligned}
$$

Contoh 3.7. *Ruang vektor $gl(n,F)$ yang terdiri dari matriks berukuran $n \times n$ atas lapangan F adalah aljabar Lie dengan* bracket *Lie yang didefinisikan sebagai berikut*

$$[x,y] = xy - yx,$$

dengan xy adalah perkalian standar antara matriks x dan matriks y.

Perhatikan, Contoh 3.7 adalah bentuk matriks dari Contoh 3.6.
Himpunan $sl(n,F) = \{A \in gl(n,F) : tr(A) = 0\}$ adalah subruang dari $gl(n,F)$, sehingga dengan mendefinisikan *bracket* Lie $[x,y] = xy - yx$ pada $sl(n,F)$ didapat $sl(n,F)$ membentuk aljabar Lie. Aksioma (L1) dan (L2) jelas terturunkan dari $gl(n,F)$.

3.3 Struktur Konstan

Misalkan L adalah aljabar Lie atas lapangan F dengan basis $\{x_1, x_2, \ldots.., x_n\}$. Didefinisikan skalar $a_{ij}^k \in F$ sehingga

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k.$$

Skalar a_{ij}^k adalah struktur konstan dari L yang berhubungan dengan basis. Ditekankan di sini a_{ij}^k tergantung pada pemilihan basis dari L. Pemilihan basis yang berbeda secara umum memberikan struktur konstan yang berbeda. Karena aksioma L1 dan akibat (L1'), $[x_i, x_i] = 0$, $\forall\, i$ dan $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$, $\forall\, i, j$ maka bisa didapatkan $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = a_{ji}$. Jadi di sini, cukup mengetahui struktur konstan a_{ij}^k dengan $1 \leq i < j \leq n$.
Berikut adalah contoh dari struktur konstan pada aljabar Lie. Misal e_1, e_2, e_3 basis pada $sl(2,\mathbb{C})$ dengan

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bisa didapatkan $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -2e_1$, $[e_2, e_3] = 2e_2$, maka struktur konstan dari $sl(2,\mathbb{C})$ dengan pemilihan basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ adalah
$a_{12}^1 = 0, a_{12}^2 = 0, a_{12}^3 = 1, a_{13}^1 = -2, a_{13}^2 = 0, a_{13}^3 = 0, a_{23}^1 = 0, a_{23}^2 = 2, a_{23}^1 = 0,$
sisanya bisa didapatkan dari sifat struktur konstan.

3.4 Subaljabar dan Ideal

Pada subbab ini dibahas tentang subaljabar, ideal, dan pusat.

Definisi 3.8. *K adalah subaljabar Lie dari aljabar Lie L jika K subruang dari L dan memenuhi*

$$[x,y] \in K, \ \forall x,y \in K.$$

(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 3)

Definisi 3.9. *I adalah ideal dari aljabar Lie L jika I subruang dari L dan memenuhi*

$$[x,y] \in I, \ \forall x \in L, y \in I.$$

(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 4)

Di dalam aljabar Lie tidak perlu dibedakan antara ideal kiri dan kanan karena $[x,y]$ = $-[y,x]$. Jika $[x,y] \in I$ maka $-[y,x] \in I$, sehingga $-(-[y,x]) \in I$ atau $[y,x] \in I$. Oleh karena itu, jika $[x,y] \in$ I $\forall$ $x \in L$, $y \in I$ maka $[y,x] \in I$. Salah satu contoh ideal yaitu pada $b(n,F)$ (ruang vektor yang berisi matriks segitiga atas) yang merupakan subaljabar Lie dari $sl(n,F)$) adalah himpunan matriks

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ternyata ideal dari aljabar Lie adalah sebuah subaljabar Lie juga, hal ini ada pada lema berikut ini.

Lema 3.10. *Sebuah ideal dari aljabar Lie adalah sebuah subaljabar Lie.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 4)

Bukti. Misalkan $a,b \in I$. Karena I subruang dari L maka $b \in L$. Karena I ideal maka $[a,b] \in$. Jadi, jika I sebuah dideal dari L maka I adalah subaljabar dari L. □

Catatan Subaljabar belum tentu ideal.

Definisi 3.11. *Pusat dari aljabar Lie L adalah*

$$Z(L) = \{x \in L : [x,y] = 0, \ \forall y \in L\}.$$

(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 4)

Syarat agar suatu aljabar Lie sama dengan pusat dari aljabar Lie ada pada lema berikut ini.

Lema 3.12. *$L = Z(L)$ jika dan hanya jika L abelian.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 4)

Bukti. Misalkan $L = Z(L)$. Ambil sembarang $x, y \in L$ maka $x, y \in Z(L)$. Didapat $[x, y] = [y, x] = 0$. Jadi jika $L = Z(L)$ maka L abelian.
Misalkan L abelian, maka $[x, y] = [y, x]\ \forall\ x, y \in L$. Karena $[x, y] = -[y, x]$ dan $[x, y] = [y, x]$, didapat $[y, x] = -[y, x]$ sehingga $[y, x] = 0$ dan $[x, y] = 0$. Karena $[x, y] = [y, x] = 0, \forall\ x, y \in L$ maka $x, y \in Z(L)$. Jelas bahwa di sini $x \in Z(L)$ maka $x \in L$. Jadi jika L abelian maka $L = Z(L)$. □

3.5 Homomorfisma

Definisi 3.13. *Misalkan L_1 dan L_2 adalah aljabar Lie atas lapangan F. Fungsi $\varphi : L_1 \to L_2$ adalah sebuah homomorfisma jika φ adalah pemetaan linear dan*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)],\ \forall x, y \in L_1. \tag{3.2}$$

(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 4)

Yang perlu diperhatikan dalam Definisi 3.13 adalah *Bracket* Lie pertama adalah *Bracket* Lie di L_1 sedangkan *Bracket* Lie kedua adalah *Bracket* Lie di L_2.
Homomorfisma φ dikatakan isomorfisma jika φ bijektif.
Misalkan L adalah aljabar Lie, definisikan pemetaan

$$ad : L \to gl(L),$$

dengan $(ad\,x)(y) = [x, y]\ \forall\ x, y \in L$. Pemetaaan ad adalah pemetaan linear. Untuk menunjukkan ad adalah sebuah homomorfisma, cukup diperiksa apakah $(ad[x, y]) = [ad(x), ad(y)]\ \forall\ x, y \in L$. Pada Contoh 3.6 telah dibahas *Bracket* Lie di $gl(L)$ adalah $[x, y] = x \circ y - y \circ x$. Akibatnya untuk menunjukkan ad adalah sebuah homomorfisma maka perlu ditunjukkan $ad([x, y]) = ad\,x \circ ad\,y - ad\,y \circ ad\,x$. Ambil sembarang $z \in L$ maka

$$\begin{aligned}(ad[x,y])(z) &= [[x,y],z] \\ &= [x,[y,z]]+[y,[z,x]] \\ &= (ad\,x)([y,z])+(ad\,y)([z,x]) \\ &= (ad\,x)(ad\,y)(z)-(ad\,y)([x,z]) \\ &= (ad\,x)(ad\,y)(z)-(ad\,y)(ad\,x)(z),\end{aligned}$$

sehingga didapatkan $(ad[x,y]) = ad\,x \circ ad\,y - ad\,y \circ ad\,x$.
Homomorfisma ini dikatakan homomorfisma *adjoint*.

Lema 3.14. *Misalkan L_1, L_2 adalah aljabar Lie atas F. Jika $\varphi : L_1 \to L_2$ adalah sebuah homomorfisma, maka ker (φ) adalah ideal dari L_1.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 5)

Bukti. Ambil $y \in ker\ (\varphi)$ dan $x \in L_1$. $y \in ker\ (\varphi)$ berarti $y \in L_1, \varphi(y) = 0 \in L_2$.
Karena $x,y \in L_1$ maka $[x,y] \in L_1$. Karena φ homomorfisma,

$$\begin{aligned}\varphi([x,y]) &= [\varphi(x),\varphi(y)] \\ &= [\varphi(x),0] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Didapat $[x,y] \in L_1$ dan $\varphi\ [x,y] = 0$ maka $[x,y] \in ker\ (\varphi)$
Karena $y \in ker\ (\varphi)$ dan $x \in L_1$ menyebabkan $[x,y] \in ker\ (\varphi)$, maka $ker\ (\varphi)$ adalah ideal dari L_1. □

Lema 3.15. *Misalkan L_1, L_2 adalah aljabar Lie atas F. Jika $\varphi : L_1 \to L_2$ adalah sebuah homomorfisma, maka image φ (im (φ)) adalah subaljabar dari L_2.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 6)

Bukti. Ambil $x,y \in im\ (\varphi)$. Karena $x \in im\ (\varphi)$ maka $\exists\, x^{'} \in L_1 \ni \varphi\ (x^{'}) = x$. Karena $y \in im\ (\varphi)$ maka $\exists\, y^{'} \in L_1 \ni \varphi\ (y^{'}) = y$.
Pilih $z = [x^{'},y^{'}]$, perhatikan $\varphi(z) = \varphi([x',y']) = [\varphi(x'),\varphi(y')] = [x,y]$.
Dapat disimpulkan $[x,y] \in L_2$. □

2 aljabar Lie yang isomorfik pasti mempunyai dimensi yang sama dan 2 aljabar Lie abelian mempunya dimensi yang sama isomorfik hal ini ditunjukkan pada lema selanjutnya.

Lema 3.16. *Misalkan L_1, L_2 adalah aljabar Lie yang berdimensi hingga dan abelian. L_1, L_2 isomorfik jika dan hanya jika dimensi L_1 dan L_2 sama.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 8)

Bukti. Misalkan T adalah isomorfisma dari L_1 ke L_2. Misalkan L_1 memiliki n vektor basis. Berdasarkan Teorema 2.18 (iv), T adalah isomorfisma maka basis L_1 dipetakan menjadi basis di L_2, sehingga basis di L_2 terdiri atas n vektor juga. Jadi L_1 dan L_2 memiliki dimensi yang sama.
Jika L_1 dan L_2 memiliki dimensi yang sama yaitu n, maka berdasarkan Teorema 2.16 dapat dibuat pemetaan linear f yang memetakan vektor basis L_1 ke vektor basis di L_2. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.18 (iv) f pemetaan bijektif. Untuk $x_1, x_2 \in L_1$, berdasarkan Lema 3.2

$$f([x_1, x_2]) = 0 = [f(x_1), f(x_2)],$$

sehingga f adalah isomorfisma dari L_1 ke L_2. Jadi L_1 dan L_2 isomorfik. □

2 aljabar Lie yang berdimensi hingga dengan pemilihan basis tertentu sehingga struktur konstannya sama maka 2 aljabar Lie tersebut isomorfik, hal ini terdapat pada lema berikut ini.

Lema 3.17. *Misalkan L_1 dan L_2 adalah aljabar Lie yang berdimensi hingga. Misalkan L_1 dan L_2 mempunyai basis sedemikian hingga struktur konstannya sama maka L_1 dan L_2 isomorfik.*
(Adam Bower, 2005, hal. 1)

Bukti. Misalkan L_1 mempunyai basis $\{x_1, x_2, ... x_n\}$ dan L_2 mempunyai basis $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ sedemikian sehingga struktur konstan terhadap basis L_1 dan L_2 yang dipilih sama, untuk $i, j = 1, 2, ..., n$

$$[x_i, x_j] = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^k x_k, k = 1, 2, ..., n,$$

dan

$$[y_i, y_j] = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}^k y_k, k = 1, 2, ..., n,$$

dan

$$c_{ij}^k = d_{ij}^k, \forall k = 1, 2, ..., n.$$

Berdasarkan Teorema 2.16, dapat didefinisikan pemetaan linear $\phi : L_1 \to L_2$ dengan

$$\phi(x_i) = y_i, i = 1, 2, ..., n.$$

Berdasarkan Teorema 2.18 (iv) maka ϕ bijektif. Dari sifat kelinearan, maka cukup diperiksa persamaan (3.2) pada vektor basis saja. Misalkan $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Maka

$$\phi([x_i, x_j]) = \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}^k\, x_k\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^k\, \phi(x_k) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^k y_k.$$

Karena struktur konstan dari basis yang telah dipilih sama, didapat

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}^k\, y_k = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}^k\, y_k = [y_i, y_j] = \phi([x_i, x_j]).$$

Kesimpulannya ϕ adalah homomorfisma dan lebih lanjut karena ϕ bijektif maka ϕ adalah isomorfisma. □

3.6 Derivasi

Definisi 3.18. *Misalkan A adalah aljabar atas lapangan F. Derivasi dari A adalah pemetaan linear di F, $D : A \to A$ yang memenuhi*

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \;\; \forall\, a, b \in A.$$

(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 6)

Misal $DerA$ adalah himpunan dari semua derivasi A. Himpunan ini tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar serta mengandung pemetaan nol. Dapat dikatakan, $DerA$ adalah subruang dari $gl(A)$. Lebih lanjut, $DerA$ adalah subaljabar Lie dari $gl(A)$.

Lema 3.19. *Jika D dan E adalah derivasi maka [D,E] juga derivasi.*
$[D, E] = D \circ E - E \circ D.$
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 6)

Bukti. Misalkan D dan E adalah derivasi dari A Dapat ditunjukkan $[D, E] = D \circ E - E \circ D$ adalah pemetaan linear dari A ke A. Dengan kata lain, ditunjukkan sebagai berikut :

1. $[D, E](x_1 + x_2) = [D, E](x_1) + [D, E](x_2)\ \forall x_1, x_2 \in A.$
2. $[D, E](\alpha x) = \alpha[D, E](x), \forall \alpha \in F.$

Ambil $x_1, x_2 \in A, \alpha \in F$,

$$\begin{aligned}
[D,E](x_1+x_2) &= (D\circ E)(x_1+x_2)-(E\circ D)(x_1+x_2)\\
&= D(E(x_1)+E(x_2))-E(D(x_1)+(D(x_2))\\
&= D(E(x_1))+D(E(x_2))-E(D(x_1))-E(D(x_2))\\
&= [D,E](x_1)+[D,E](x_2).\\
[D,E](\alpha x) &= (D\circ E)(\alpha x)-(E\circ D)(\alpha x)\\
&= D(\alpha E(x))-E(\alpha D(x))\\
&= \alpha D(E(x))-\alpha D(E(x))\\
&= \alpha[D,E](x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[D,E](ab) &= (D\circ E)(ab)-(E\circ D)(ab)\\
&= D(aE(b)+E(a)b)-E(aD(b)+D(a)b)\\
&= D(aE(b))+D(E(a)b)-E(aD(b))-E(D(a)b)\\
&= aD(E(b))+D(a)E(b)+E(a)D(b)+D(E(a))b\\
&\quad -aE(D(b))-E(a)D(b)-D(a)E(b)-E(D(a))b\\
&= aD(E(b))+D(E(a))b-aE(D(b))-E(D(a))b\\
&= a[D,E](b)+[D,E](a)b.
\end{aligned}$$

Jadi $[D,E](ab) = a[D,E](b)+[D,E](a)b$. □

3.7 Mengkonstruksi Ideal

Pada bagian ini dieksplorasi beberapa konstruksi dari beberapa ideal. Misalkan I dan J adalah ideal dari aljabar Lie L. Ada beberapa cara agar didapat ideal baru dari I dan J.

Lema 3.20. *Misalkan I dan J adalah ideal dari aljabar Lie L maka $I\cap J$ ideal dari L.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 11)

Bukti. Karena I dan J masing masing subruang dari L maka $I\cap J$ subruang dari L. Misalkan $x\in L$ dan $y\in I\cap J$. Jika $y\in I\cap J$ maka $y\in I$ dan $y\in J$. I dan J masing-masing ideal dari L, maka $[x,y]\in I$ dan $[x,y]\in J$. Karena $[x,y]\in I$ dan $[x,y]\in J$ maka $[x,y]\in I\cap J$. Jadi $I\cap J$ ideal dari L. □

Lema 3.21. *Misalkan I dan J adalah ideal dari aljabar Lie L maka* $I+J=\{x+y\ :\ x\in I, y\in J\}$ *adalah ideal dari L.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 11)

Bukti. I dan J ideal maka I dan J tidak kosong sehingga $I+J$ tidak kosong. Misalkan $a\in I+J$ dan $b\in I+J$. Tulis $a=x_1+y_1$ dengan $x_1\in I, y_1\in J$ dan $b=x_2+y_2$ dengan $x_2\in I, y_2\in J$. Perhatikan $a+b=x_1+y_1+x_2+y_2$ dengan $x_1+x_2\in I, y_1+y_2\in J$. Misalkan pula $\alpha\in F$. $\alpha a=\alpha x_1+\alpha y_1$, jelas di sini $\alpha a\in I+J$. Jadi $I+J$ subruang dari L.
Misalkan $c\in L$ dan $d\in I+J$. Tulis $d=x_3+y_3$ dengan $x_3\in I,\ y_3\in J$. Perhatikan $[c,d]=[c,x_3+y_3]=[c,x_3]+[c,y_3]$. I dan J ideal serta $x_3\in I,\ y_3\in J$ maka $[c,x_3]\in I$ dan $[c,y_3]\in J$, sehingga $[c,d]\in I+J$. Jadi $I+J$ adalah ideal dari L □

Lema 3.22. *Misalkan I dan J adalah ideal dari aljabar Lie L maka* $[I,J]=span\{[x,y]:x\in I, y\in J\}$ *adalah ideal dari L.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 11)

Bukti. I dan J ideal maka I dan J tidak kosong sehingga $I+J$ tidak kosong. Ambil sembarang $a\in[I,J]$ akan ditunjukkan $a\in L$. $a\in[I,J]$ maka dapat dinyatakan $a=c_i[x_i,y_i]+...+c_n[x_n,y_n]$ dengan $x_i\in I, y_i\in J, i=1,...,n$. I dan J ideal dari L maka $a\in L$. Didapat $a\in L$ maka $[I,J]\subseteq L$. Misalkan $b\in[I,J]$ dan $c\in[I,J]$. $b\in[I,J]$ maka b dapat dinyatakan $b=k_i[x_i,y_i]+...+k_n[x_n,y_n]$ dengan $x_i\in I, y_i\in J, i=1,...,n$ dan $c\in[I,J]$ maka c dapat dinyatakan $c=l_j[x_j,y_j]+...+l_m[x_m,y_m]$ dengan $x_i\in I, y_i\in J, j=1,...,m$. Perhatikan $b+c=k_i[x_i,y_i]+...+k_n[x_n,y_n]+l_i[x_i,y_i]+...+l_n[x_m,y_m]$ dengan $x_i\in I, y_i\in J, i=1,...,n, j=1,...,m$ sehingga $b+c\in[I,J]$. Misalkan $\alpha b\in[I,J]$ dengan $\alpha\in F$. Perhatikan $\alpha b=\alpha k_i[x_i,y_i]+...+\alpha k_n[x_n,y_n]$, jelas di sini $\alpha b\in[I,J]$. Jadi $[I,J]$ subruang dari L. Misalkan $x\in I$, $y\in J$ dan $u\in L$, maka berdasarkan identitas Jacobi $[u,[x,y]]=[x,[u,y]]+[[u,x],y]$. I dan J ideal dari L dan $x\in I$, $y\in J$, maka $[u,y]\in J$ dan $[u,x]\in I$. $[u,y]\in J$ dan $[u,x]\in I$ menyebabkan $[x,[u,y]]$ dan $[[u,x],y]\in[I,J]$ sehingga pejumlahan keduanya elemen $[I,J]$. Misalkan $t\in[I,J]$, t dapat dinyatakan sebagai $t=\sum c_i[x_i,y_i]$ dengan c_i skalar, $x_i\in I$ dan $y_i\in J$. Perhatikan $[u,t]=[u,\sum c_i[x_i,y_i]]=\sum c_i[u,[x_i,y_i]]$, dengan $[u,[x_i,y_i]]\in[I,J]$, didapat $[u,t]\in[I,J]$. Jadi $[I,J]$ ideal dari L. □

Hal penting yang bisa dilihat dari Lema 3.22 adalah ketika diambil $I=J=L$. Dinotasikan L' untuk $[L,L]$. Dari Lema 3.22 L' adalah ideal dari L. L' biasa dikenal dengan **aljabar yang terturunkan** dari L.

Pada lema selanjutnya, jika z merupakan vektor pada aljabar yang terturunkan, maka *trace* matriks representasinya bernilai 0.

Lema 3.23. *Jika* $z \in L'$ *maka* $tr(ad\ z) = 0$.
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 15)

Bukti. $z \in L'$ maka z merupakan kombinasi linear dari $[x,y]$, dengan $x,y \in L$. Cukup dibuktikan $tr(ad([x,y])) = 0$. Dengan Teorema 2.12 dan Lema 2.23 bisa didapatkan $tr(adx \circ ady) = tr(ady \circ adx)$. Berdasarkan Teorema 2.22, homomorfisma, dan Bracket *Lie* pada Contoh 3.6 maka

$$tr(ad([x,y])) = tr([adx, ady]) = tr(adx \circ ady - ady \circ adx) = 0.$$

□

Jika pemetaan dari suatu aljabar Lie ke aljabar Lie lainnya isomorfisma, maka pemetaan dari aljabar Lie yang terturunkan keduanya berlaku sama, hal ini ada pada lema berikut ini.

Lema 3.24. *Misalkan* L_1 *dan* L_2 *adalah aljabar Lie, dan misal* $\varphi : L_1 \to L_2$ *adalah isomorfisma. Maka* $\varphi(L_1^{'}) = L_2^{'}$.
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 15-16)

Bukti. Ambil $x_1, x_2 \in L_1$. Perhatikan $\varphi([x_1,x_2]) = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$. Dapat disimpulkan $\varphi(L_1^{'}) \subseteq L_2^{'}$. $L_2^{'}$ direntang oleh $[y_1,y_2]$, dengan $y_1,y_2 \in L_2$. Misalkan $\varphi(x_1) = y_1$ dan $\varphi(x_2) = y_2$ maka $[y_1,y_2] = \varphi([x_1,x_2])$. Dapat disimpulkan $L_2^{'} \subseteq \varphi(L_1^{'})$. Jadi $\varphi(L_1^{'}) = L_2^{'}$. □

3.8 Aljabar Hasil Bagi

Jika I adalah ideal dari aljabar Lie L, maka I adalah subruang dari L. Tinjau *coset* $z + I = \{z + x : x \in I\}, \forall z \in L$ dan ruang vektor hasil bagi

$$L/I = \{z + I : z \in L\}.$$

Lema 3.25. *Ruang vektor hasil bagi merupakan aljabar Lie dengan mendefinisikan* Bracket *Lie di* L/I

$$[w+I, z+I] = [w,z] + I,\ \forall w,z \in L.$$

(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 12)

Bukti. Pertama diperiksa *Bracket* Lie di L/I terdefinisi dengan baik yaitu jika $w+I = w'+I$ dan $z+I = z'+I$ maka $[w+I, z+I] = [w'+I, z'+I]$ atau dengan kata lain buktikan $[w,z]+I = [w',z']+I$.
Dapat dibuktikan $[w,z]+I \subseteq [w',z']+I$.
Karena $w \in w+I \subseteq w'+I$ maka $\exists\, i_1 \in I \ni w = w'+i_1$ dan karena $z \in z+I \subseteq z'+I$ maka $\exists\, i_2 \in I \ni z = z'+i_2$
Jadi $[w,z] = [w'+i_1, z'+i_2] = [w',z'] + [w',i_1] + [i_1,z'] + [i_1,i_2]$ (ketiga suku penjumlahan terakhir anggota I).
Sehingga didapat $[w,z] \in [w',z']+I$, jadi
$\forall x \in [w,z]+I,\ \exists\, i_4 \in I \ni x = [w,z]+i_3 = [w',z']+i_3+i_4 \in [w',z']+I$. Didapat $[w,z]+I \subseteq [w',z']+I$.
Dapat dibuktikan $[w',z']+I \subseteq [w,z]+I$.
Karena $w' \in w'+I \subseteq w+I$ maka $\exists\, i_1 \in I \ni w' = w+i_1$ dan karena $z' \in z'+I \subseteq z+I$ maka $\exists\, i_2 \in I \ni z' = z+i_2$. Jadi
$[w',z'] = [w+i_1, z+i_2] = [w,z] + [w,i_1] + [i_1,z] + [i_1,i_2]$ (ketiga suku penjumlahan terakhir anggota I).
Sehingga didapat $[w',z'] \in [w,z]+I$. Jadi
$\forall x \in [w',z']+I,\ \exists\, i_4 \in I \ni x = [w',z']+i_3 = [w,z]+i_3+i_4 \in [w,z]+I$. Didapat $[w',z']+I \subseteq [w,z]+I$.
Kemudian diperiksa apakah *Bracket* Lie di L/I bilinear.
Yang dibuktikan sebagai berikut :

1. $[(w_1+I)+(w_2+I), z+I] = [w_1+I, z+I] + [w_2+I, z+I]$, dengan $w_1+I, w_2+I, z+I \in L/I$.

2. $[w+I, (z_1+I)+(z_2+I)] = [w+I, z_1+I] + [w+I, z_2+I]$, dengan $w+I, z_1+I, z_2+I \in L/I$.

3. $[\alpha_1(w_1+I), z+I] = \alpha_1[w_1+I, z+I]$, dengan $\alpha_1 \in F$.

4. $[w+I, \alpha_2(z_1+I)] = \alpha_2[w+I, z_1+I]$, dengan $\alpha_2 \in F$.

$$
\begin{aligned}
[(w_1+I)+(w_2+I), z+I] &= [w_1+w_2+I, z+I] \\
&= [w_1+w_2, z]+I \\
&= [w_1,z]+[w_2,z]+I \\
&= [w_1,z]+I+[w_2,z]+I \\
&= [w_1+I, z+I]+[w_2+I, z+I].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[w+I,(z_1+I)+(z_2+I)] &= [w+I,z_1+z_2+I] \\
&= [w,z_1+z_2]+I \\
&= [w,z_1]+[w,z_2]+I \\
&= [w,z_1]+I+[w,z_2]+I \\
&= [w+I,z_1+I]+[w+I,z_2+I]. \\
[\alpha_1(w_1+I),z+I] &= [\alpha_1 w_1+\alpha_1 I,z+I] \\
&= [\alpha_1 w_1+I,z+I] \\
&= [\alpha_1 w_1,z]+I \\
&= \alpha_1[w_1,z]+I \\
&= \alpha_1[w_1+I,z+I]. \\
[w+I,\alpha_2(z_1+I)] &= [w+I,\alpha_2 z_1+\alpha_2 I] \\
&= [w+I,\alpha_2 z_1+I] \\
&= [w,\alpha_2 z_1]+I \\
&= \alpha_2[w,z_1]+I \\
&= \alpha_2[w+I,z_1+I].
\end{aligned}
$$

Selanjutnya diperiksa apakah *Bracket* Lie di L/I memenuhi aksioma (L1) dan (L2).
Dapat dibuktikan *Bracket* Lie memenuhi aksioma (L1)
$[w+I,w+I]=I\ ,\forall w+I\in L/I.$
$[w+I,w+I]=[w,w]+I=0+I=I.$
Dapat dibuktikan *Bracket* Lie memenuhi identitas Jacobi yaitu:
$[w+I,[y+I,z+I]+[y+I,[z+I,w+I]+[z+I,[w+I,y+I]=$
$I,\ \forall w+I,y+I,z+I\in L/I$
$[w+I,[y+I,z+I]+[y+I,[z+I,w+I]+[z+I,[w+I,y+I]$
$=[w+I,[y,z]+I]+[y+I,[z,w]+I]+[z+I,[w,y]+I]$
$=[w,[y,z]]+I+[y,[z,w]]+I+[z,[w,y]]+I$
$=I$ □

Teorema selanjutnya yaitu tentang isomorfisma pada aljabar Lie, yang secara umum mencakup pada teorema isomorfisma pada struktur aljabar yang telah dipelajari.

Teorema 3.26. *Teorema isomorfisma yaitu*
(a) Misalkan $\varphi : L_1 \to L_2$ *homorfisma aljabar Lie.* $ker(\varphi)$ *adalah ideal dari* L_1 *dan* $im(\varphi)$ *adalah subaljabar dari* L_2 *dan* $L_1/ker(\varphi)\cong im(\varphi)$.

(b) Jika I dan J adalah ideal dari sebuah aljabar Lie maka $(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$.
(c) Misalkan I dan J adalah ideal dari aljabar Lie L dengan $I \subseteq J$. J/I *adalah ideal dari* L/I *dan* $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 13)

Bukti. (a) $ker(\varphi)$ adalah ideal dari L_1 dan $im(\varphi)$ adalah subaljabar dari L_2 telah dibuktikan pada Lema 3.14 dan 3.15.
Dapat dibuktikan $L_1/ker(\varphi) \cong im(\varphi)$.
Didefinisikan $\psi : L_1/ker(\varphi) \to im(\varphi)$.
$\psi(x + Ker(\varphi)) = \varphi(x)$.
Yang dibuktikan sebagai berikut :
1. ψ terdefinisi dengan baik.
2. ψ pemetaan linear.
3. ψ homomorfisma.
4. ψ fungsi pada.
5. ψ fungsi satu-satu.
1. Pembuktian ψ terdefinisi dengan baik atau dengan kata lain jika $x + Ker(\varphi) = y + Ker(\varphi)$ maka $\varphi(x) = \varphi(y)$.
Karena $x = x + 0 \in x + Ker(\varphi) \subseteq y + Ker(\varphi)$ maka $x = y + ker(\varphi)$ dengan $ker(\varphi) \in Ker(\varphi)$ sehingga
$\varphi(x) = \varphi(y + ker(\varphi)) = \varphi(y) + \varphi(ker(\varphi)) = \varphi(y) + 0 = \varphi(y)$.
Terbukti ψ terdefinisi dengan baik.
2. Pembuktian dibuktikan ψ pemetaan linear.

$$\begin{aligned}
\psi((x + ker(\varphi) + y + ker(\varphi))) &= \psi((x+y) + ker(\varphi)) \\
&= \varphi(x+y) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y) \\
&= \psi((x + ker(\varphi)) + \psi((y + ker(\varphi)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha(x + ker(\varphi))) &= \psi(\alpha x + ker(\varphi)) \\
&= \varphi(\alpha x) \\
&= \alpha\varphi(x) \\
&= \alpha\psi(x + ker(\varphi)).
\end{aligned}$$

3. Pembuktian ψ homomorfisma.
Pada bukti ke-2 sebelumnya telah dibuktikan ψ pemetaan linear selanjutnya

dibuktikan $\psi([x+ker(\varphi), y+ker(\varphi)]) = [\psi(x+ker(\varphi)), \psi(y+ker(\varphi))]$

$$\begin{aligned}
\psi([x+ker(\varphi), y+ker(\varphi)]) &= \psi([x,y]+ker(\varphi)) \\
&= \varphi([x,y]) \\
&= [\varphi(x), \varphi(y)] \\
&= [\psi(x+ker(\varphi)), \psi(y+ker(\varphi))].
\end{aligned}$$

4. Pembuktian ψ fungsi pada.
Ambil sembarang $y \in im(\varphi)$ maka $\exists\, x \in L_1 \ni \varphi(x) = y$. Pilih $z = x+ker(\varphi)$ maka $\psi(z) = \psi(x+ker(\varphi)) = \varphi(x) = y$.
Terbukti ψ fungsi pada.
5. Pembuktian ψ fungsi satu-satu.
Ambil sembarang
$x+ker(\varphi), y+ker(\varphi) \in L_1/ker(\varphi) \ni \psi(x+ker(\varphi)) = \psi(y+ker(\varphi))$. Selanjutnya, dibuktikan $x+ker(\varphi) = y+ker(\varphi)$.
Karena $\psi(x+ker(\varphi)) = \psi(y+ker(\varphi))$ maka $\varphi(x) = \varphi(y)$.
$\varphi(x) - \varphi(y) = 0$
$\varphi(x-y) = 0$,
sehingga didapat $x-y \in ker(\varphi)$ jadi $x = y+c$ untuk suatu $c \in ker(\varphi)$, dengan kata lain $x \in y+ker(\varphi)$.
jika $z_1 \in x+ker(\varphi)$ maka $z_1 = x+d_1 = x+d_1+c \in y+ker(\varphi)$ dengan $d_1 \in ker(\varphi)$. Dapat disimpulkan $x+ker(\varphi) \subseteq y+ker(\varphi)$.
$y = x-c \in x+ker(\varphi)$, jika $z_2 \in y+ker(\varphi)$ maka $z_2 = y+d_2 = x-c+d_2 \in x+ker(\varphi)$ dengan $d_2 \in ker(\varphi)$.
Dapat disimpukan $y+ker(\varphi) \subseteq x+ker(\varphi)$.
Karena $x+ker(\varphi) \subseteq y+ker(\varphi)$ dan $y+ker(\varphi) \subseteq x+ker(\varphi)$ maka $y+ker(\varphi) = x+ker(\varphi)$.
(b) Pertama dibuktikan $(I+J)/J \cong I/(I\cap J)$ jika I dan J adalah ideal dari L
Didefinisikan $\varphi : I \to I+J/J$.
$\varphi(i) = i+J$.
Yang dibuktikan sebagai berikut :
1. J ideal dari $I+J$.
2. φ terdefinisi dengan baik.
3. φ pemetaan linear.
4. φ homomorfisma.
5. φ fungsi pada.
6. $I\cap J$ ideal dari I.

7. $ker(\varphi) = I \cap J$.

1. Pembuktian J ideal dari $I + J$.

Karena J ideal dari L maka J tidak kosong, minimal ada $0 \in J$. Ambil sembarang $x \in J$ maka $x = 0 + x \in I + J$ sehingga dapat disimpulkan $J \subseteq I + J$. Setelah itu ditunjukkan jika $x, y \in J$ maka $x + y \in J$ dan $\alpha x \in J$ dengan $\alpha \in F$. Karena J adalah ideal maka J tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian sekalar sehingga didapat $x + y \in J$ jika $x, y \in J$ dan $\alpha x \in J$. Berdasarkan yang telah dibuktikan maka J adalah subruang dari $I + J$.

Selanjutnya dibuktikan jika $x \in I + J$ dan $y \in J$ maka $[x, y] \in J$. Karena $x \in I + J$ maka dapat dinyatakan $x = i + j, i \in I$ dan $j \in J$.

$[x, y] = [i + j, y] = [i, y] + [j, y] \in J$ ($[i, y] \in J$ karena J ideal dari L dan $[j, y] \in J$).

Terbukti bahwa J merupakan ideal dari $I + J$.

2. Pembuktian φ terdefinisi dengan baik.

Ambil $i_1, i_2 \in I$.

$\varphi(i_1) = i_1 + J = i_2 + J = \varphi(i_2)$.

Terbukti φ terdefinisi dengan baik.

3. Pembuktian φ pemetaan linear.

$$\begin{aligned}
\varphi(i_1 + i_2) &= (i_1 + i_2) + J \\
&= i_1 + J + i_2 + J \\
&= \varphi(i_1) + \varphi(i_2). \\
\varphi(\alpha i_1) &= \alpha(i_1) + J \\
&= \alpha(i_1 + J) \\
&= \alpha\varphi(i_1).
\end{aligned}$$

4. Pembuktian dibuktikan φ homomorfisma.

Pada bukti ke-3 sebelumnya telah dibuktikan φ pemetaan linear selanjutnya dibuktikan $[\varphi(i_1), \varphi(i_2)] = \varphi([i_1, i_2])$.

$$\begin{aligned}
[\varphi(i_1), \varphi(i_2)] &= [i_1 + J, i_2 + J] \\
&= [i_1, i_2] + [i_1, J] + [J, i_2] + [J, J] \\
&= [i_1, i_2] + J \\
&= \varphi([i_1, i_2]).
\end{aligned}$$

5. Pembuktian φ fungsi pada.

Ambil sembarang $y \in I + J/J$ maka $y = x + J, x \in I$. Pilih $z = x$, perhatikan $\varphi(z) = y$.

Terbukti bahwa φ fungsi pada, sehingga $im(\varphi) = I + J/J$.

6. Pembuktian $I \cap J$ ideal dari I.

Karena telah dibuktikan sebelumnya pada konstruksi ideal bahwa $I \cap J$ membentuk ideal bagi L, maka $I \cap J$ tidak kosong. Ambil sembarang $x \in I \cap J$ maka $x \in I$ sehingga dapat disimpulkan $I \cap J \subseteq I$. Setelah itu, ditunjukkan jika $x, y \in I \cap J$ maka $x + y \in I \cap J$. $x, y \in I \cap J$ maka $x, y \in I$ dan $x, y \in J$, sehingga karena I dan J ideal maka tertutup terhadap penjumlahan, didapat $x + y \in I$ dan $x + y \in J$ atau dengan kata lain $x + y \in I \cap J$. Yang terakhir ditunjukkan jika $\alpha x \in I \cap J$ dengan $\alpha \in F$. Karena I dan J ideal maka tertutup terhadap perkalian skalar, didapat $\alpha x \in I$ dan $\alpha x \in J$ atau dengan kata lain $\alpha x \in I \cap J$. Jadi $I \cap J$ subruang dari L. Selanjutnya akan dibuktikan jika $x \in I$ dan $y \in I \cap J$ maka $[x, y] \in I \cap J$. Karena $y \in I \cap J$ maka $y \in I$ dan $y \in J$ dan I dan J ideal dari L maka $y \in L$. $y \in L$ maka $[x, y] \in I$ karena I adalah ideal dari I dan $[x, y] \in J$ karena J ideal dari Ldan $x \in L$, sehingga $[x, y] \in I \cap J$.

Terbukti $I \cap J$ merupakan ideal dari I.

7. Pembuktian $ker(\varphi) = I \cap J$.

Ambil sembarang $x \in ker(\varphi)$, selanjutnya dibuktikan $x \in I \cap J$. Karena $x \in ker(\varphi)$ maka $\varphi(x) = J$ dan $\varphi(x) = x + J$, sehingga $x \in J$. Karena $ker(\varphi) \subseteq I$, $x \in ker(\varphi)$ maka $x \in I$. Didapat $ker(\varphi) \subseteq I \cap J$.

Ambil sembarang $y \in I \cap J$, akan dibuktikan $y \in ker(\varphi)$. Karena $y \in I \cap J$ maka $y \in J$ sehingga $\varphi(y) = y + J = J$. Didapat $I \cap J \subseteq ker(\varphi)$.

Karena $ker(\varphi)$ dan $I \cap J$ saling subhimpunan maka terbukti $ker(\varphi) = I \cap J$.

Maka dari Teorema 3.26 (a) dapat disimpulkan bahwa $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$.

(c) Pembuktian $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

Didefinisikan $\varphi : L/I \to L/J$.

$\varphi(x + i) = x + j$.

Yang dibuktikan sebagai berikut :

1. φ terdefinisi dengan baik.
2. φ pemetaan linear.
3. φ homomorfisma.
4. φ fungsi pada.
5. J/I ideal dari L/I.
6. $ker(\varphi) = J/I$.

1. Pembuktian φ terdefinisi dengan baik.

Pertama dibuktikan jika $x + I, y + I \in L/I$ dan $x + I = y + I$ maka

$\varphi(x + I) = \varphi(y + I)$

Karena $x + I = y + I$ maka dapat dinyatakan $x = y + c, c \in I$. Karena $I \subseteq J$ maka

didapat $c \in J$, sehingga $\varphi(x+I) = x+J = y+c+J = y+J = \varphi(y+I)$.
Terbukti bahwa φ terdefinisi dengan baik.
2. Pembutkian φ pemetaan linear.

$$\begin{aligned}
\varphi(x+I+y+I) &= \varphi(x+y+I)\\
&= x+y+J\\
&= x+J+y+J\\
&= \varphi(x+I)+\varphi(y+I).\\
\varphi(\alpha(x+I)) &= \varphi(\alpha x+I)\\
&= \alpha x+J\\
&= \alpha(x+J)\\
&= \alpha\varphi(x+I).
\end{aligned}$$

3. Pembuktian φ homomorfisma.
Pada bukti ke-3 sebelumnya telah dibuktikan φ pemetaan linear selanjutnya dibuktikan $\varphi([x+I,y+I]) = [\varphi(x+I),\varphi(y+I)]$.

$$\begin{aligned}
\varphi([x+I,y+I]) &= \varphi([x,y]+I)\\
&= [x,y]+J\\
&= [x+J,y+J]\\
&= [\varphi(x+I),\varphi(y+I)].
\end{aligned}$$

4. Pembuktian φ fungsi pada.
Ambil sembarang $y \in L/J$ maka dapat dinyatakan $y = x+J$. Pilih $z = x+I$, perhatikan $\varphi(z) = x+J = y$.
Terbukti bahwa φ fungsi pada, sehingga $im(\varphi) = L/J$.
5. Pembuktian J/I ideal dari L/I.
Karena J dan I adalah ideal dari L maka J dan I tidak kosong, yaitu ada $0 \in I$ dan $0 \in J$. J/I tidak kosong karena $0+0=0 \in J/I$. Ambil sembarang $x \in J/I$ maka dapat dinyatakan $x = j+I$ dengan $j \in J$. Karena J adalah ideal dari L , $j \in J$ maka $j \in L$. Dapat disimpulkan $x = j+I \in L/I$ atau dengan kata lain $J/I \subseteq L/I$. Setelah itu, ditunjukkan jika $x,y \in J/I$ maka $x+y \in J/I$. Karena $x,y \in J/I$ maka dapat dinyatakan $x = j_1+I$ dan $y = j_2+I$. $x+y = j_1+I+j_2+I = j_1+j_2+I \in J/I$.
Yang terakhir, ditunjukkan jika $\alpha x \in J/I$. $\alpha x = \alpha j_1 + \alpha I$, jelas di sini $\alpha x \in J/I$.
Berdasarkan yang telah dibuktikan, maka J/I subruang dari L/I.
Selanjutnya dibuktikan jika $x \in L/I$ dan $y \in J/I$ maka $[x,y] \in J/I$. Karena $x \in L/I$

dan $y \in J/I$ maka dapat dinyatakan $x = l + I, l \in L$ dan $y = j + I, j \in J$.
$[x,y] = [l+I, j+I] = [l, j] + [l,I] + [I, j] + [I,I] = [l, j] + [l,I] + [I, j]([l, j] \in J, [l,I] \in I, [I, j] \in I)$.
Terbukti J/I merupakan ideal dari L/I.
6. Pembuktian $ker(\varphi) = J/I$.
Ambil $x \in J/I$ maka dapat dinyatakan $x = j + I, j \in J.\varphi(x) = \varphi(j+I) = j+J = J$ sehingga $x \in ker(\varphi)$. Didapat $ker(\varphi) \subseteq J/I$.
Ambil $y \in ker(\varphi) \subseteq L/I$ maka $\exists\, x \in L \ni y = x+I$. $J = \varphi(y) = \varphi(x+I) = x+J$, hal ini berlaku jika $x \in J$. Didapat $J/I \subseteq ker(\varphi)$.
Karena $ker(\varphi)$ dan J/I saling subhimpunan maka terbukti $ker(\varphi) = J/I$.
Maka dari Teorema 3.26 (a) dapat disimpulkan bahwa $(L/I)/(J/I) \cong L/J$. □

3.9 Aljabar Lie berdimensi 1, 2 dan 3

Pada subbab ini, dibahas mengenai karakteristik dari aljabar Lie berdimensi 1, 2 dan 3 yang ada pada Teorema 3.27 sampai Teorema 3.31.

Teorema 3.27. *Aljabar Lie berdimensi 1 bersifat abelian.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 20)

Bukti. Misalkan L adalah aljabar Lie berdimensi 1, dengan basis di $L : \{a\}$. Ambil sembarang $x, y \in L$ maka bisa dinyatakan $x = \alpha\, a$ dan $y = \beta\, a$, dengan $\alpha, \beta \in F$.

$$\begin{aligned}[x,y] &= [\alpha a, \beta a] \\ &= \alpha[a, \beta a] \\ &= \alpha\beta[a,a] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dengan cara serupa didapatkan $[y,x] = 0$, sehingga $[x,y] = 0 = [y,x]$.
Terbukti bahwa aljabar Lie berdimensi 1 bersifat komutatif. □

Teorema 3.28. *Jika F adalah lapangan, maka terhadap isomorfisma ada aljabar Lie non abelian berdimensi 2 yang unik atas F. Aljabar Lie ini memiliki basis $\{x,y\}$ sedemikian sehingga* bracket *Lie dari vektor basis $[x,y] = x$.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 20)

Bukti. Misalkan L adalah aljabar Lie non abelian berdimensi 2 atas F. Aljabar yang terturunkan dari L yaitu L' tidak mungkin mempunyai dimensi lebih dari 1, dikarenakan $\{x,y\}$ adalah basis dari L, maka L' dispan oleh $[x,y]$. L' tidak boleh 0,

karena jika $L' = 0$ maka L akan menjadi aljabar Lie yang abelian. Dapat disimpulkan L' berdimensi 1.
Ambil $x \in L'$, $x \neq 0$ dan dengan Teorema 2.6 dapat ditemukan $x, \tilde{y}$ sehingga $\{x, \tilde{y}\}$ basis dari L. Karena $x, \tilde{y} \in L$ dan L' ideal dari L, maka $[x, \tilde{y}] \in L'$. $[x, \tilde{y}]$ haruslah tidak 0, jika tidak maka L akan menjadi aljabar Lie yang abelian. Oleh karena itu, $\exists\, \alpha \in F, \alpha \neq 0 \ni [x, \tilde{y}] = \alpha x$, jika diganti $\tilde{y}$ dengan $y = \alpha^{-1}\tilde{y}$, didapat $[x, y] = x$.
Misalkan G adalah aljabar Lie non abelian berdimensi 2 atas F, dengan basis dari $G = \{a, b\}$. Maka dari struktur konstan, $[a, b] = \lambda b + \mu a$, dengan $\lambda, \mu \in F$. Jika $\lambda = \mu = 0$ maka G menjadi aljabar Lie yang abelian. Maka diasumsikan $\mu \neq 0$.
Didefinisikan $f : G \to L$, dengan $f(a) = -\lambda y + \frac{1}{\mu}x$ dan $f(b) = \mu y$.
Dengan mendefinisikan pemetaan basisnya, maka berdasarkan Teorema 2.16 maka f pemetaan linear.
Selanjutnya, dibuktikan sebagai berikut :
1. f fungsi satu-satu.
2. f fungsi pada.
3. f homomorfisma.
1. Pembuktian f fungsi satu-satu.
Jika $p \in ker(f) \subseteq G$ maka $f(p) = 0$. Tulis $p = \alpha\, a + \beta\, b$, dengan $\alpha, \beta \in F$.

$$\begin{aligned} f(p) &= \alpha\Big(-\lambda y + \frac{1}{\mu}x\Big) + \beta\mu y \\ &= \alpha(-\lambda)y + \frac{\alpha}{\mu}x + \beta\mu y \\ &= (-\lambda\alpha + \beta\mu)y + \frac{\alpha}{\mu}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\{x, y\}$ bebas linear maka bisa didapatkan $\lambda = 0$ dan $\beta = 0$.
Sehingga $p = 0$. Berdasarkan Teorema 2.18 (i), terbukti bahwa f adalah fungsi satu-satu.
2. Pembuktian f fungsi pada.
Ambil sembarang $q \in L$, dapat dinyatakan $q = \alpha x + \beta y$, dengan $\alpha, \beta \in F$.
Perhatikan $f\Big(\alpha\mu a + \Big(\frac{\beta}{\mu} + \lambda\alpha\Big)b\Big) = \alpha x + \beta y$. Pilih $z = \Big(\alpha\mu a + \Big(\frac{\beta}{\mu} + \lambda\alpha\Big)\Big)b$, $f(z) = q$.
Jadi f fungsi pada.

3. Pembuktian f homomorfisma.

$$\begin{aligned}
f([p,q]) &= f([\alpha_1 a+\beta_1 b, \alpha_2 a+\beta_2 b]) \\
&= f(\alpha_1\alpha_2 [a,a]+\alpha_1\beta_2 [a,b]+\beta_1\alpha_2 [b,a]+\beta_1\beta_2 [b,b]) \\
&= f((\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)[a,b]) \\
&= (\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)f([a,b]) \\
&= \alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2 f(\lambda b+\mu a) \\
&= \alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2\left(\lambda\mu y+\mu\left(-\lambda y+\frac{1}{\mu}x\right)\right) \\
&= (\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)x \\
&= (\mu)\left((\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)\frac{x}{\mu}+\left(\frac{x\lambda\alpha_1\alpha_2-x\lambda\alpha_1\alpha_2}{\mu}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\alpha_2}{\mu}(-\lambda\alpha_1+\beta_1\mu)\right)(-x)+\left(\frac{\alpha_1}{\mu}(-\lambda\alpha_2+\beta_2\mu)\right)x \\
&= (-\lambda\alpha_1+\beta_1\mu)(-\lambda\alpha_2+\beta_2\mu)[y,y]+\left(\frac{\alpha_2}{\mu}(-\lambda\alpha_1+\beta_1\mu)\right)[-y,x] \\
&\quad +\left(\frac{\alpha_1}{\mu}(-\lambda\alpha_2+\beta_2\mu)\right)[x,y]+\left(\frac{\alpha_2}{\mu}\frac{\alpha_1}{\mu}\right)[x,x] \\
&= [(-\lambda\alpha_1+\beta_1\mu)y+\frac{\alpha_1}{\mu}x,(-\lambda\alpha_2+\beta_2\mu)y+\frac{\alpha_2}{\mu}x] \\
&= [\alpha_1\left(-\lambda y+\frac{1}{\mu}x\right)+\beta_1\mu y, \alpha_2\left(-\lambda y+\frac{1}{\mu}x\right)+\beta_2\mu y] \\
&= [f(\alpha_1 a+\beta_1 b), f(\alpha_2 a+\beta_2 b)] \\
&= [f(p),f(q)].
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa f adalah isomorfisma dari G ke L, sehingga dapat disimpulkan jika sembarang aljabar Lie berdimensi 2 akan isomorfik dengan aljabar Lie berdimensi dua dengan basis $\{x,y\}$ dan $[x,y]=x$ atau dengan kata lain aljabar Lie non abelian berdimensi 2 unik terhadap isomorfisma. □

Teorema 3.29. *Misalkan F adalah lapangan. Aljabar Lie L berdimensi 3 atas F sedemikian sehingga L' berdimensi 1 dan L' terkandung di pusat dari L, maka L mempunyai basis $\{f,g,z\}$, dengan $[f,g]=z$ dan z merupakan elemen pusat dari L.* (M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 21)

Bukti. Ambil sembarang $f,g\in L$ sedemikian sehingga $[f,g]$ tak nol. Karena L' berdimensi 1, $[f,g]$ merentang L'. L' terkandung di pusat dari L menyebabkan $[f,g]$ komutatif dengan sembarang elemen dari L. Dimisalkan

$$z=[f,g].$$

Pertama dibuktikan f,g,z membentuk basis untuk L. Pertama dibuktikan f,g bebas linear. Jika f,g tidak bebas linear maka bisa dinyatakan $f=\alpha g$, didapat $[f,g]=0$. Hal ini kontradiksi dengan $[f,g]$ tak nol, sehingga f dan g bebas linear. Selanjutnya, dibuktikan f,g,z bebas linear. Jika f,g,z tidak bebas linear maka bisa Dinyatakan $z=\beta f+\gamma g$.

$$\begin{aligned}[f,z] &= [f,\beta f+\gamma g]=\gamma[f,g]=0\\ [z,g] &= [\beta f+\gamma g,g]=\beta[f,g]=0\end{aligned}$$

karena $[f,g]$ tak nol maka $\gamma=\beta=0$. Sehingga didapat $z=0$, hal ini kontradiksi dengan $[f,g]=z\neq 0$. Maka f,g,z bebas linear. Karena L berdimensi 3 maka f,g,z adalah bebas linear maksimal untuk L sehingga berdasarkan Teorema 2.9 (ii), f,g,z membentuk basis untuk L. □

Teorema 3.30. *Misalkan F adalah lapangan. Aljabar Lie L berdimensi 3 atas F sedemikian sehingga L' berdimensi 1 dan L' tidak terkandung di $Z(L)$, maka aljabar Lie ini merupakan hasil tambah langsung dari aljabar Lie non abelian berdimensi 2 dengan aljabar Lie berdimensi 1.*
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 21)

Bukti. Ambil sembarang $x\in L'$ dengan $x\neq 0$. Karena $x\notin L'$ maka $\exists y\in L\ni[x,y]\neq 0$. Berdasarkan Lema 3.4, x dan y bebas linear. Karena L' direntang oleh x, maka $[x,\tilde{y}]=\alpha x$, dengan $\alpha\in F$. Dengan mengganti $y=\alpha^{-1}\tilde{y}$, maka bisa didapat $[x,y]=x$. Dapat disimpulkan subaljabar dari L yang dibangun oleh $\{x,y\}$ adalah aljabar Lie non abelian berdimensi 2.
dapat diperluas $\{x,y\}$ menjadi basis di L dengan menambahkan w, sehingga $\{x,y,w\}$ menjadi basis di L. Karena L' direntang oleh x, maka ada $a,b\in F$ sedemikian sehingga $[x,w]=ax$ dan $[y,w]=bx$.
Diklaim bahwa $z\in L$, $z\neq 0$ dan $z\notin span\{x,y\}$. Misalkan $z=\lambda x+\mu y+vw\in L$, dengan $\lambda,\mu,v\in F$. Perhatikan,

$$\begin{aligned}[x,z] &= [x,\lambda x+\mu y+vw]\\ &= \mu x+vax,\\ [y,w] &= [y,\lambda x+\mu y+vw]\\ &= -\lambda x+vbx.\end{aligned}$$

Jika dimisalkan $\lambda=b,\mu=-a$ dan $v=1$ maka $[x,z]=[y,z]=0$ dan $z\notin span\{x,y\}$. Dapat disimpulkan $L=span\{x,y\}\bigoplus span\{w\}$.

Jadi aljabar Lie ini merupakan hasil tambah langsung dari aljabar Lie non abelian berdimensi 2 dengan aljabar Lie berdimensi 1. □

Teorema 3.31. *Misalkan L adalah aljabar Lie berdimensi 3 dengan aljabar yang terturunkan L' berdimensi 2. Maka*
(a) L' abelian.
(b) $ad\, x : L' \to L'$ isomorfisma.
(M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 22)

Bukti. Misalkan $\{y,z\}$ adalah basis untuk L', dengan teorema perluasan basis bisa didapatkan x sedemikian sehingga x basis untuk L. Untuk membuktikan bagian (a), cukup dengan membuktikan $[y,z] = 0$. $[y,z] \in L'$, sehingga terdapat skalar $\alpha, \beta \in F$ yang tak nol sedemikian sehingga

$$[y,z] = \alpha y + \beta z.$$

Bisa didapatkan matriks $ad\ y : L \to L$ terhadap basis x,y,z yaitu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & \alpha \\ \star & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

$\star$ adalah koefisien yang tidak perlu diketahui secara rinci. Bisa dilihat bahwa $tr(ad\ y) = \beta$. Berdasarkan Lema 3.23, $y \in L'$ maka $tr(ad\ y) = 0$ atau dengan kata lain $\beta = 0$.
Dengan cara serupa bisa didapatkan juga $\alpha = 0$ sehingga $[y,z] = 0$.
Jadi terbukti L' abelian.
Untuk bagian (b), L' dispan oleh $[x,y], [x,z]$, dan $[y,z]$. Telah didapatkan $[y,z] = 0$ dan L' berdimensi 2, berdasarkan Teorema 2.9 (i) dapat disimpulkan $\{[x,y],[x,z]\}$ adalah basis untuk L'. Dengan demikian dimensi $im(ad\ x)$ adalah 2, dan berdasarkan Teorema 2.15 dan Teorema 2.18 (iii) $adx : L' \to L'$ adalah isomorfisma. □

Di sini diklasifikasi aljabar Lie kompleks dengan dari bentuk ini.
Kasus 1 : Ada $x \notin L'$ sedemikian sehingga $ad\ x : L' \to L'$ dapat didiagonalkan. Pada kasus ini, asumsikan y,z adalah eigen vektor dari $ad\ x$. Berdasarkan Teorema 3.31(b), Teorema 2.18 (vi) dan Teorema 2.28 $ad\ x : L' \to L'$ isomorfisma maka nilai eigen yang bersesuaian tak nol.
Misalkan $[x,y] = \lambda y$. Asumsikan $\lambda = 1$. Skalakan x oleh λ^{-1}, sehingga $[\lambda^{-1}x, y] = y$. Sehubungan dengan basis $\{y,z\}$ dari L', pemetaan linear

$ad\, x : L' \to L'$ mempunyai matriks representasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

untuk $\mu \in \mathbb{C}$ yang tak nol.

Kasus 2 : Untuk semua $x \notin L'$ sedemikian sehingga $ad\, x : L' \to L'$ tidak dapat didiagonalisasi.

Ambil $x \notin L'$. Karena lapangan yang digunakan kompleks maka $ad\, x : L' \to L'$ pasti mempunyai vektor eigen, misalkan $y \in L'$. Dengan mengskalakan x seperti yang telah dilakukan pada kasus 1 maka bisa diasumsikan $[x,y] = y$. Dengan teorema perluasan basis , diperluas x sedemikian sehingga $\{y,z\}$ basis untuk L'. $[y,z] = \lambda y + \mu z$. dengan $\lambda \neq 0$. Dengan mengskalakan z, maka bisa diasumsikan $\lambda = 1$. Pemetaan linear $ad\, x : L' \to L'$ mempunyai matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan premis, A tidak dapat didiagonalkan. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.28 A tidak dapat mempunyai 2 nilai eigen yang berbeda. Bisa didapat $\mu = 1$ jika A tidak dapat mempunyai 2 nilai eigen yang berbeda. Terhadap isomorfisma, dapat diperoleh 1 jenis aljabar dengan sifat seperti ini

Aljabar Lie yang mempunyai sifat pada kasus 1, ditulis sebagai L_μ. Yang menarik di sini adalah syarat apa agar dua aljabar Lie yang mempunyai sifat pada kasus 1 isomorfik.

Teorema 3.32. *L_μ isomorfik dengan L_ν jika dan hanya jika $\mu = \nu$ atau $\mu = \nu^{-1}$.* (M. J. Wildon & K. Erdmann, 2006, hal. 25)

Bukti. Untuk bukti ke kanan, perlu dibuktikan L_μ isomorfik dengan $L_{\mu^{-1}}$. Misalkan $\{y_1, z_1\}$ basis untuk L'_μ. Dengan Teorema 2.6, ada $x_1 \in L_\mu$ sedemikian sehingga $\{x_1, y_1, z_1\}$ adalah basis untuk L_μ dan $ad\, x_1 : L'_\mu \to L'_\mu$ mempunyai matriks reprensentasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Misalkan $\{y_2, z_2\}$ basis untuk $L'_{\mu^{-1}}$ dan dengan Teorema 2.6, bisa didapatkan $x_2 \in L_{\mu^{-1}}$ sedemikian sehingga $\{x_2, y_2, z_2\}$ adalah basis untuk $L_{\mu^{-1}}$. Perhatikan di sini bahwa $\mu^{-1} ad\, x_1$ mempunyai matriks

$$A = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jika kolom dan baris pada matriks A ditukar maka didapat matriks $ad\, x_2$. Dilihat dari matriks A, dapat didefinisikan homorfisma dari vektor basis oleh

$$\varphi(\mu^{-1}x_1) = x_2, \;\; \varphi(y_1) = z_2, \;\; \varphi(z_1) = y_2.$$

Berdasarkan Teorema 2.16 maka φ adalah pemetaan linear dan berdasarkan Teorema 2.18 (iv) maka φ adalah pemetaan linear yang bijektif.
Untuk membuktikan φ merupakan homomorfisma maka cukup diperiksa persamaan (3.13) berlaku pada vektor basis.

$$\begin{aligned}
\varphi([x_1, y_1]) &= \varphi(ad\, x_1(y_1)) \\
&= \varphi(y_1) \\
&= z_2 \\
[\varphi(x_1), \varphi(y_1)] &= [\mu x_2, z_2] \\
&= \mu[x_2, z_2] \\
&= \mu\mu^{-1} z_2 \\
&= z_2 \\
\varphi([x_1, z_1]) &= \varphi(ad\, x_1(z_1)) \\
&= \varphi(\mu z_1) \\
&= \mu y_2 \\
[\varphi(x_1), \varphi(z_1)] &= [\mu x_2, y_2] \\
&= \mu[x_2, y_2] \\
&= \mu y_2
\end{aligned}$$

$$\varphi([y_1, z_1]) = 0 = [z_2, y_2] = [\varphi(y_1), \varphi(z_1)]$$

Karena φ adalah homomorfisma bijektif maka φ adalah suatu isomorfisma.
Untuk bukti ke kiri, misalkan $\phi : L_\mu \to L_\nu$ adalah isomorfisma. Berdasarkan Lema 3.24, $\phi : L_\mu^{'} \to L_\nu^{'}$ juga suatu isomorfisma.
Karena ϕ pada, $\phi(a_1) = \alpha a_2 + w$ dengan $a_1 \in L_\mu$, $a_2 \in L_\nu - L_\nu{}'$, $\alpha \in F$, dan

$w \in L'_{\nu}$. ϕ homormofisma menyebabkan

$$[\psi(a_1), \psi(v)] = \psi[(a_1), v] = (\psi \circ ad\, a_1)(v). \tag{3.3}$$

dan

$$[\psi(a_1), \psi(v)] = [\psi(\alpha a_2 + w), \psi(v)] = \alpha(ad\, a_2 \circ \psi)(v). \tag{3.4}$$

Dari persamaan (3.3) dan persamaan (3.4),
$(\psi \circ ad\, a_1) = \alpha(ad\, a_2 \circ \psi) = ad\,(\alpha a_2) \circ \psi$. Karena ψ isomorfisma maka pemetaan $ad\, a_1 : L'_{\mu} \to L'_{\mu}$ dan $ad\, \alpha a_2 : L'_{\nu} \to L'_{\nu}$ serupa. Matriks $ad\, a_1$ dan $ad\, \alpha a_2$ serupa maka kedua matriks tersebut mempunyai nilai eigen yg sama yaitu $\{1, \mu\} = \{\alpha, \alpha\mu\}$. Hanya ada 2 kemungkinan yaitu $\alpha = 1$ dan $\mu = \nu$ atau $\alpha = \mu$ dan $\mu = \nu^{-1}$. $\square$

BAB 4
Penutup

4.1 Kesimpulan

Di dalam skripsi ini didapatkan

- Tidak ada ideal kiri dan ideal kanan pada aljabar Lie.
- Homomorfisma dalam aljabar Lie mencakup homomorfisma yang telah dipelajari pada struktur aljabar.
- Pada aljabar Lie struktur konstan tidak unik, bergantung pada basis dari aljabar Lie .

Beberapa hal yang penting pada skripsi ini adalah karakteristik aljabar Lie yang berdimensi kurang dari 4, yaitu :

- Aljabar Lie berdimensi 1 adalah aljabar Lie yang abelian.
- Aljabar Lie non abelian berdimensi 2 unik terhadap isomorfisma dengan *bracket* Lie antar vektor basis yaitu $[x,y] = x$.
- Diberikan aljabar Lie L berdimensi 3 dengan aljabar Lie yang terturunkannya berdimensi 1 sedemikian sehingga aljabar Lie yang terturunkannya terkandung pada pusat L. Maka aljabar L Lie ini memiliki basis $\{f,g,z\}$ sedemikian sehingga $[f,g] = z$ dan z merupakan elemen dari pusat L.
- Diberikan aljabar Lie L dengan aljabar Lie yang terturunkan berdimensi 1 sedemikian sehingga aljabar Lie yang terturunkannya tidak terkandung pada pusat L. Maka aljabar Lie ini merupakan hasil tambah langsung dari aljabar Lie non abelian berdimensi 2 dengan aljabar Lie berdimensi 1.
- Diberikan aljabar Lie L berdimensi 3 atas lapangan kompleks dengan aljabar Lie yang terturunkannya berdimensi 2, didapat aljabar Lie yang terturunkannya abelian dan $ad\,x : L' \to L'$ adalah isomorfisma. Terdapat tak hingga banyaknya aljabar Lie yang non-isomorfik dengan sifat seperti ini.

4.2 Saran

Aljabar Lie yang dibahas dalam skripsi ini hanya sebagian kecil dari keseluruhan aljabar Lie.Bagi penulis selanjutnya yang tertarik untuk melanjutkan skripsi dari penulis, ada beberapa topik yang disarankan seperti :

- Aljabar Lie yang *solvable*.
- Aljabar Lie yang *simple* dan *semi-simple*.
- Aljabar Lie berdimensi 3 dengan aljabar yang terturunkan berdimensi 3 dan aljabar Lie yang berdimensi lebih dari 3.
- Teorema Engel dan teorema Lie.
- Kriteria Cartan pada aljabar Lie.
- Aplikasi dari Aljabar Lie.

dan masih banyak lagi yang tidak dapat disebutkan satu per satu di sini.

DAFTAR REFERENSI

[1] Erdmann, K., & Wildon, M. J. (2006). *Introduction to Lie Algebras*. New York : Springer.

[2] Humpreys, J. E. (1999). *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York : Springer.

[3] Iachello, F. (2006). *Lie Algebras and Applications*. New York : Springer.

[4] Varadarajan, V. S. (1984). *Lie Group, Lie Algebra and Their Representations*. USA : Pretince Hall.

[5] Jacob, B. (1990). *Linear Algebra*. USA : W. H. Freeman and Company.

[6] Anton, H. (2005). *Elementary Linear Algebra*. New York : John Wiley & Sons.

[7] Roman, S. (2007). *Advanced Linear Algebra*. New York : Springer.

[8] Lang, S. (1987). *Linear Algebra*. New York : Springer.

[9] Bowers, A. (29 April 2005). *Classification of Three Dimensional Lie Algebra*. pp. 1-19.

[10] Wildon, M. J. (17 Oktober 2006) . *Lie Algebras*. pp. 1-25.