**UNIVERSITAS INDONESIA**

# SYARAT-SYARAT FUNGSI DAN BARISAN DI RUANG METRIK AGAR RUANG METRIKNYA MEMILIKI *ATSUJI COMPLETION*

**SKRIPSI**

**AZKI NURIL ILMIYAH**
**0906488161**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA**
**DEPOK**
**NOVEMBER 2012**

**UNIVERSITAS INDONESIA**

# SYARAT-SYARAT FUNGSI DAN BARISAN DI RUANG METRIK AGAR RUANG METRIKNYA MEMILIKI *ATSUJI COMPLETION*

## SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains**

**AZKI NURIL ILMIYAH**
**0906488161**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA**
**DEPOK**
**NOVEMBER 2012**

**HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS**

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Azki Nuril Ilmiyah |
| NPM | : | 0906488161 |
| Tanda Tangan | : | |
| Tanggal | : | 30 November 2012 |

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Azki Nuril Ilmiyah |
| NPM | : | 0906488161 |
| Program Studi | : | Sarjana Matematika |
| Judul Skripsi | : | Syarat-syarat Fungsi dan Barisan di Ruang Metrik agar Ruang Metriknya Memiliki *Atsuji Completion* |

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pembimbing I | : | Dra. Nora Hariadi, M.Si | (  ) |
| Pembimbing II | : | Dra. Suarsih Utama, M.Si | (  ) |
| Penguji I | : | Dr. Hengki Tasman, M.Si | (  ) |
| Penguji II | : | Arie Wibowo, S.Si, M.Si | (  ) |

| | | |
|---|---|---|
| Ditetapkan di | : | Depok |
| Tanggal | : | 30 November 2012 |

# KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmatNya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Tidak lupa sholawat dan salam penulis panjatkan kepada Nabi Muhammad SAW. Penulis menyadari bahwa tentunya banyak pihak membantu penyelesaian skripsi dan membantu proses perkuliahan selama ini. Sehingga penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Ibu Nora Hariadi dan Ibu Suarsih Utama, selaku dosen pembimbing dan wanita-wanita yang luar biasa menginspirasi, memotivasi, dan telah menyediakan dan mengorbankan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dian Lestari dan Bapak Yudi Satria, Ibu Fevi Novkaniza dan Ibu Rahmi Rusin, Ibu Suarsih Utama dan Ibu Dian Lestari, Ibu Sarini dan Ibu Mila Novita, selaku Ketua Departemen, Sekretaris Departemen, Koordinator Pendidikan, dan Koordinator Mahasiswa Departemen Matematika sebelum dan saat penulis menyelesaikan skripsi, serta Ibu Rianti selaku pembimbing akademis penulis yang telah banyak membimbing proses perkuliahan penulis.
3. Seluruh dosen yang telah memberikan ilmu, Bu Nana, Bu Dhian Widya, Bu Dian, Bu Fevi, Bu Helen, Bu Ida, Bu Kiki, Bu Netty, Bu Rianti, Bu Rustina, Bu Sasky, Bu Nur, Pak Suryadi MT, Pak Yudi, dan Pak Zuherman. Terkhusus untuk Pak Arie, Bu Bela, Pak Djati, Pak Hengki, Bu Nora, Bu Rahmi, Bu Sarini, Bu Harini, Bu Suarsih, dan Bu Netty, terima kasih atas didikannya yang memberi kesan terdalam untuk penulis. Serta terima kasih untuk dosen-dosen lain di Matematika yang saya hormati.
4. Seluruh karyawan yang luar biasa baik hati, selalu membantu, Mas Wawan dan Mas Tatang, Mbak Santi, Mbak Via, Mbak Rusmi, Pak Saliman, Pak Iwan, Pak Anshori, Pak Salman, dan Pak Turino. Maaf selalu merepotkan.
5. Keluarga terbaik di dunia dan amat penulis cintai, Ayahanda Muhammad Hindun, Ibunda Siti Umami, Kakak Aulia Rahman, Adik Kharisma Bintan Muthia, Kakak Ipar Fatmawati, dan Keponakan Jingga Amyra Rahman.

6. Keluarga besar penulis, Mak tercinta, Budhe, Pakde, Tante, Paklek, Mama, sepupu tersayang Mbak Riris, Mbak Dona, Mbak Citra, keponakan terhebat Atha dan Lili, serta Mas Erwin sekeluarga.
7. Ayah dan Ibu kedua penulis, Bapak dan Ibu Syahrazad. Tanpa kebesaran hati beliau, penulis tidak akan menggapai cita-citanya seperti sekarang.
8. Sofwah dan Eja, teman-teman tempat berbagi cerita, kehidupan, kebahagiaan, dan kekuatan. Teman-teman terbaik di dunia yang pernah penulis kenal. Terlalu sederhana sebuah terima kasih untuk kalian.
9. Rani teman paling seperjuangan, yang paling sabar, bepikir positif, dan baik hati, Vero teman trio maria, Soleman teman satu bimbingan, Andrew, DS, teman-teman murni yang terlalu meramaikan suasana saat sedang "diskusi" di 2 7/8, Yanti teman kosan yang pintar tapi lugu sekali, Emyl yang akhirnya terlibat dalam berbagai "*sharing*", Wilsan, Dian, Maifiana, teman-teman yang berjuang bersama. Sayang sekali waktu kita hanya 3,5 tahun teman-teman, sampai jumpa lagi. Kak Ajat yang membantu dengan senang hati direpotkan dengan banyak pertanyaan. Serta Retno, Rika, Ike, teman bermain diluar sana.
10. Teman-teman 2009 yang lain, angkatan terbaik dan ternormal sedunia, Alfian, Alis, Ana Z, Icha, Anton, Ai, Danang, Tika, Dwi, Eva, Everien, Budhi, Fitri, Fitta, Nina, Noko, Hendy, Sani, Lutfir, Michael, Upi, Icol, Ojan, Kemal, Sitha, Nia, Noe, Okta, Agnes, Revi, Dinda, Sandi, Cepi, Mamen, Sigap, Putri, Anin, Sondra, Handa, Agung, Wiwit, Dede, dan Yuan. Semangat skripsisnya.
11. Dheni Triadi Sudewo yang telah banyak mendoakan, membantu menginspirasi ppt, menemani, dan menghibur penulis, serta tak lupa Tante Ning, Om Nyoti, Mbak Ike, dan Mbak ity, atas keramahannya.
12. Semua Asdos yang telah ikut mencerahkan proses perkuliahan. Teman-teman di Matematika UI dari seluruh angkatan, Elvin, Dian, Pino, Kak Yulial, Kak Siwi, Habib, dan lainnya, yang memiliki tempat tersendiri di hati penulis.

Serta terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu. Mohon maaf apabila terdapat kekurangan dan semoga skripsi ini bermanfaat.

Penulis

2012

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI**
**TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Azki Nuril Ilmiyah |
| NPM | : | 0906488161 |
| Program Studi | : | Sarjana Matematika |
| Departemen | : | Matematika |
| Fakultas | : | Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam |
| Jenis karya | : | Skripsi |

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :
Syarat-syarat Fungsi dan Barisan di Ruang Metrik agar Ruang Metriknya Memiliki *Atsuji Completion*
beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 30 November 2012
Yang menyatakan

(Azki Nuril Ilmiyah)

## ABSTRAK


Nama : Azki Nuril Ilmiyah
Program Studi : Matematika
Judul : Syarat-syarat Fungsi dan Barisan di Ruang Metrik agar Ruang Metriknya Memiliki *Atsuji Completion*

Suatu ruang metrik disebut sebagai ruang Atsuji jika untuk setiap fungsi kontinu dan bernilai real di ruang metrik tersebut akan kontinu seragam. Ruang metrik dikatakan memiliki *Atsuji completion* jika *completion* dari ruang metrik tersebut adalah ruang Atsuji. Dalam skripsi ini, dipelajari syarat-syarat fungsi dan barisan di ruang metrik agar ruang metrik tersebut memiliki *Atsuji completion*. Fungsi dan barisan yang ditinjau merupakan fungsi *Cauchy-sequentially regular* dan barisan yang tidak memiliki subbarisan Cauchy.

Kata Kunci : ruang Atsuji, ruang metrik, *completion*, fungsi *Cauchy-sequentially regular*.
xi + 32 halaman : 2 diagram
Daftar Pustaka : 7 (1970 - 2005)

## ABSTRACT

Name : Azki Nuril Ilmiyah
Study Program : Mathematics
Title : Some Conditions of Function and Sequence in Metric Space in order that The Metric Space Has Atsuji Completion

A metric space is called an Atsuji space if every real-valued continuous function on it is uniformly continuous. Metric space is called to have an Atsuji completion if its completion is Atsuji space. In this *skripsi*, some conditions of function and sequence in metric space will be studied in order that the metric space has Atsuji completion. The function and sequence that will be considered are Cauchy-sequentially regular function and sequence that has no Cauchy subsequence.

Keywords : Atsuji space, metric space, completion, Cauchy-sequentially regular function.
xi + 32 pages : 2 charts
Bibliography : 7 (1970 - 2005)

# DAFTAR ISI

## DAFTAR DIAGRAM

# BAB 1
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Analisis Fungsional adalah cabang dari matematika abstrak yang berkembang dari analisis klasik. Kreyzig, 1978, dalam bukunya yang berjudul *Introductory Functional Analysis with Application* mengatakan bahwa analisis fungsional pada dasarnya adalah analisis mengenai fungsional. Namun, bukan hanya fungsional, pembahasan seperti operator linier, ruang Banach, dan ruang Hilbert adalah contoh topik-topik penting di dalamnya. Saat ini hasil-hasil dari pengembangan analisis fungsional berperan penting pada banyak cabang ilmu matematika dan terapannya.

Beberapa konsep yang ada di analisis fungsional adalah hasil dari perumuman konsep yang lain, misalnya adalah abstraksi suatu ruang. Contoh ruang hasil abstraksi adalah ruang metrik. Ruang metrik memiliki konsep jarak yang merupakan abstraksi dari konsep jarak di himpunan bilangan real. Sesuai namanya, konsep jarak di ruang metrik menggunakan fungsi metrik, yaitu fungsi bernilai real yang memenuhi beberapa sifat tertentu. Berdasarkan fungsi metrik inilah kemudian dibangun ide mengenai konvergensi barisan, barisan Cauchy, fungsi kontinu, fungsi kontinu seragam, dan fungsi *Cauchy-sequentially regular*.

Walaupun ide ruang metrik berasal dari himpunan bilangan real, namun sifat-sifat yang ada dalam himpunan bilangan real tidak selalu berlaku di semua ruang metrik. Sifat lengkap di himpunan bilangan real, yaitu bahwa setiap barisan Cauchy-nya pasti konvergen, adalah salah satu contoh yang tidak berlaku di ruang metrik. Meskipun demikian, setiap ruang metrik dapat dilengkapi. Ruang metrik yang telah lengkap disebut dengan *completion*.

Berdasarkan pengetahuan mengenai ruang metrik ini kemudian dapat diperkenalkan ruang Atsuji. Ruang metrik dikatakan ruang Atsuji jika setiap fungsi bernilai real dan kontinu juga kontinu seragam. Nagata di tahun 1950 mungkin menjadi orang pertama yang mempelajari ruang Atsuji. Kemudian di tahun 1951 A.A Monteiro dan M.M Peixoto mengembangkan empat karakteristik ekuivalensi dari ruang tersebut. Namun, Gerald Beer adalah orang pertama yang menyebut ruang tersebut dengan ruang Atsuji dan pada tulisannya yang lain disebut sebagai ruang *UC* (*Uniformly Continuous*). (Jain & Kundu, 2005)

Tidak hanya pengetahuan mengenai ruang metrik, pengetahuan mengenai ruang seragam juga sangat dibutuhkan dalam skripsi ini. Engelking, 1989, dalam bukunya yang berjudul *General Topology* menjelaskan bahwa teori mengenai ruang seragam sebenarnya analog dengan teori dalam ruang metrik. Konsep ruang seragam diambil dari sifat kontinu seragam yang melihat aspek kedekatan titik-titik di ruang metrik. Akibatnya ruang seragam juga memiliki konsep jarak, namun dalam sudut pandang yang lebih luas.

Seperti dijelaskan sebelumnya bahwa setiap ruang metrik memiliki *completion*. Suatu ruang metrik yang *completion*-nya adalah Atsuji disebut memiliki *Atsuji completion* dan merupakan pembahasan utama dalam skripsi ini. Jain dan Kundu, 2005, menyatakan bahwa Gerald Beer telah mempelajari *Atsuji completion* dan menemukan empat kondisi ekuivalensi untuk ruang metrik yang memiliki *Atsuji completion.* Sedangkan Borsik telah memberikan dua ekuivalensi untuk *Atsuji completion* yang berhubungan dengan *Cauchy-sequentially regular function.*

Pengembangan ekuivalensi yang telah ditemukan oleh Gerald Beer sudah mencapai dua puluh sembilan ekuivalensi. Semua ekuivalensi tersebut terbagi atas pendekatan dari sudut pandang karakteristik barisannya, dari karakteristik fungsionalnya, dan dari karakteristik yang ditinjau dari hubungan antara dua fungsional geometrik. (Jain & Kundu, 2005)

Dalam skripsi ini dibahas syarat-syarat fungsi dan barisan di ruang metrik, yang termasuk dalam dua puluh sembilan ekuivalensi untuk *Atsuji completion*.

## 1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup Penelitian

Perumusan masalah dalam skripsi ini adalah sebagai berikut :

Apa syarat-syarat fungsi dan barisan di ruang metrik yang menyebabkan ruang metrik tersebut memiliki *Atsuji completion*?

Ruang lingkup dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Fungsi yang ditinjau hanya fungsi yang *Cauchy-sequentially regular* dari ruang metrik ke ruang seragam, yaitu fungsi yang mengawetkan barisan Cauchy.
2. Barisan yang ditinjau hanya barisan di ruang metrik yang tidak memiliki subbarisan Cauchy.

## 1.3 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Pertama-tama dipelajari mengenai Analisis Fungsional, khususnya mengenai fungsi dan barisan di ruang metrik. Selanjutnya dipelajari ruang Atsuji, ruang metrik yang memiliki *Atsuji completion,* dan teori-teori dalam ruang seragam. Pengetahuan ini digunakan untuk mempelajari syarat-syarat fungsi dan barisan di ruang metrik agar ruang metriknya memiliki *Atsuji completion.*

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah mempelajari dan menjelaskan syarat-syarat fungsi dan barisan di ruang metrik agar ruang metrik tersebut memiliki *Atsuji completion*.

# BAB 2
# LANDASAN TEORI

Pada skripsi ini dibahas mengenai beberapa teorema yang dapat menggolongkan suatu ruang metrik sehingga memiliki *Atsuji completion*. Oleh karena itu, diperlukan pembahasan mengenai teori-teori yang melatarbelakanginya. Pertama-tama dibahas terlebih dahulu definisi ruang metrik dan teori-teori yang berhubungan dengan ruang metrik, yaitu barisan dan fungsi di ruang metrik, *completion*, dan terakhir ruang Atsuji. Setelah itu dibahas teori mengenai ruang seragam, yaitu definisi ruang seragam dan fungsi di ruang seragam.

## 2.1 Ruang Metrik

### 2.1.1 Pendahuluan Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan himpunan yang dilengkapi dengan metrik. Metrik adalah fungsi jarak yang merupakan hasil dari perumuman konsep jarak di himpunan bilangan real. Dengan fungsi jarak ini, dapat diukur kedekatan antar titik dalam himpunan. Selanjutnya diberikan definisi mengenai ruang metrik.

**Definisi 2.1** Ruang metrik adalah pasangan $(X, d)$, dengan $X$ adalah himpunan dan $d$ adalah metrik di $X$, yaitu fungsi yang didefinisikan di $X \times X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

1. $d$ adalah fungsi bernilai real, hingga, dan tak negatif,
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$,
3. $d(x, y) = d(x, y)$, (simetri)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (ketaksamaan segitiga)

(Kreyszig, 1989, hal. 3)

Kedekatan dua titik dalam himpunan adalah relatif terhadap suatu nilai jarak yang biasanya dilambangkan dengan $\epsilon$. Akibatnya, dua titik dikatakan dekat relatif terhadap suatu jarak $\epsilon$ jika jarak antara dua titik tersebut berdasarkan metrik kurang dari $\epsilon$. Selanjutnya, subhimpunan dari ruang metrik yang mewarisi metrik yang sama disebut sebagai subruang. (Kreyszig, 1989)

**Contoh 2.2** Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan metrik standar $d(x,y) = |x - y|$ adalah suatu ruang metrik. Fungsi $d$ jelas merupakan fungsi bernilai real, hingga, dan tak negatif. Kemudian $|x - y| = 0$ berlaku jika dan hanya jika $x = y$. Selanjutnya, sifat simetri dan ketaksamaan segitiga juga berlaku untuk fungsi harga mutlak. Akhirnya dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah suatu ruang metrik.

Setelah definisi ruang metrik, berikut dijelaskan beberapa teori dasar dalam ruang metrik. Pertama-tama dijelaskan mengenai lingkungan suatu titik oleh jarak tertentu.

**Definisi 2.3** Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $x \in X$. Lingkungan-$\epsilon$ dari $x$ adalah himpunan $B(x, \epsilon)$ yang didefinisikan sebagai:

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X; d(x, y) < \epsilon\}.$$

(Kreyszig, 1989, hal. 18)

**Contoh 2.4** Dengan menggunakan metrik standar di himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, interval buka $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ dengan $a \in \mathbb{R}$ adalah lingkungan-$\epsilon$ dari titik $a$.

Kemudian suatu lingkungan dari $x$ didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.5** Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $x \in X$. Lingkungan dari $x$ adalah subhimpunan dari $X$ yang memuat suatu lingkungan-$\epsilon$ dari $x$.
(Kreyszig, 1989, hal. 18)

Dengan menggunakan pengertian lingkungan dari suatu titik, kemudian dapat didefinisikan titik akumulasi dan titik terisolasi.

**Definisi 2.6** Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $A \subset X$. Titik $x \in X$ adalah titik akumulasi dari $A$ jika setiap lingkungan dari $x$ mengandung titik di $A$ yang berbeda dari $x$.
(Kreyszig, 1989, hal. 22)

Himpunan titik akumulasi dari $A$ dinotasikan dengan $A'$. *Closure* dari $A$ dinotasikan sebagai $\bar{A}$, adalah gabungan dari $A$ dan $A'$. (Kreyszig, 1989). Lebih lanjut, titik terisolasi didefinisikan sebagai titik yang bukan merupakan titik akumulasi. (Jain & Kundu, 2005)

Konsep lain yang ada dalam ruang metrik adalah konsep jarak antara titik ke himpunan yang memuatnya, serta konsep kepadatan himpunan.

**Definisi 2.7** Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $x \in X$. Didefinisikan $I(x) = d(x, X - \{x\}) = \inf\{d(x, y): y \in X - \{x\}\}$.
(Jain & Kundu, 2005, hal. 32)

Dalam hal ini, terlihat bahwa $I(x)$ merepresentasikan jarak antara titik dalam himpunan dengan himpunan yang tidak memuat titik tersebut.

**Contoh 2.8** $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ adalah ruang metrik dari himpunan bilangan rasional dan misalkan $p \in \mathbb{Q}$. $I(p) = d(p, \mathbb{Q} - \{p\}) = \inf\{d(p, y): y \in \mathbb{Q} - \{p\}\} = 0$, karena sifat kepadatan himpunan bilangan rasional.

**Contoh 2.9** Dengan menggunakan metrik standar, jarak antara $[0,1] \cup \{2\}$ dengan 2 adalah $I(2) = d(2, \{x|0 \leq x \leq 1\} - \{2\}) = 1$.

**Definisi 2.10** Misalkan $M$ adalah subhimpunan dari ruang metrik $(X, d)$. $M$ dikatakan padat di $X$ jika $\bar{M} = X$.
(Kreyszig, 1989, hal. 21)

### 2.1.2 Barisan di Ruang Metrik

Telah diketahui bahwa ruang metrik memuat konsep jarak. Oleh karena itu dalam ruang metrik dapat didefinisikan konsep konvergensi barisan.

**Definisi 2.11** Barisan $(x_n)$ di ruang metrik $(X, d)$ dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Titik $x$ disebut limit dari $(x_n)$ dan dituliskan sebagai $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau secara sederhana $x_n \to x$.
(Kreyszig, 1989, hal. 25)

Definisi ini jelas menekankan bahwa titik limit barisan di suatu himpunan harus berada di himpunan tersebut. Selanjutnya hal-hal yang berhubungan dengan konvergensi barisan dijelaskan sebagai berikut.

**Lema 2.12** *Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik. Jika $(x_n)$ dan $(y_n)$ adalah barisan di $X$ yang masing-masing secara berurutan konvergen ke $x$ dan $y$, maka $\big(d(x_n, y_n)\big)$ konvergen ke $d(x, y)$.*
(Kreyszig, 1989, hal. 26)

Kemudian teorema berikut menyatakan hubungan antara konvergensi barisan dengan titik dalam himpunan *closure*.

**Teorema 2.13** *Misalkan $A$ adalah subhimpunan dari ruang metrik $(X, d)$. Jika $x \in X$ termasuk dalam $\bar{A}$, maka terdapat barisan $(x_n)$ di $A$ sedemikian sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*
(Kreyszig, 1989, hal. 30)

**Bukti.** Misalkan $x \in \bar{A}$. Kasus pertama adalah $x \in A$. Pilih barisan di $A$ yang berbentuk $(x, x, x, \ldots)$, maka kesimpulan terpenuhi. Kasus selanjutnya jika $x \notin A$, maka $x \in A'$. Akibatnya untuk setiap lingkungan dari $x$ terdapat anggota $A$ yang berbeda dari $x$ dan termasuk di lingkungan $x$. Secara khusus dipilih suatu lingkungan dengan jarak $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Terdapat $x_n \in A$ yang berbeda dari $x$ dan termuat di lingkungan $x$. Kemudian konstruksi $(x_n)$ dan tunjukkan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Dengan *Archimedean property* diperoleh

$$\exists K \in \mathbb{N} \ni d(x, x_n) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \epsilon, n \geq K.$$

Hal ini ekuivalen dengan menyatakan $x_n \to x$. ■

Berikutnya diberikan definisi barisan Cauchy.

**Definisi 2.14** Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik. Barisan $(x_n)$ di $X$ dikatakan barisan Cauchy di $(X, d)$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N$ sedemikian sehingga $d(x_k, x_m) < \epsilon, \forall k, m \geq N$.
(Kreyszig, 1989, hal. 28)

### 2.1.3 Fungsi di Ruang Metrik

Selanjutnya, ditinjau teori mengenai fungsi dalam ruang metrik. Pertama-tama diberikan definisi fungsi kontinu di ruang metrik.

**Definisi 2.15** Misalkan $X = (X, d)$ dan $Y = (Y, \rho)$ adalah ruang metrik. Pemetaan $T: X \to Y$ dikatakan kontinu di titik $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\rho(Tx, Tx_0) < \epsilon$ untuk semua $x \in X$ yang memenuhi $d(x, x_0) < \delta$.
(Kreyszig, 1989, hal. 20)

Lebih jauh, pemetaan $T: X \to Y$ dikatakan kontinu di $X$ atau disingkat kontinu, jika $T$ kontinu di setiap titik di $X$.

**Contoh 2.16** Misalkan $g(x) = \frac{1}{x}, x \in A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. Jika diberikan $\epsilon > 0$, dapat dipilih $\delta(\epsilon, u) = \inf\left\{\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\epsilon\right\}$ untuk setiap $u \in A$ sedemikian sehingga jika $|x - u| < \delta(\epsilon, u)$, maka $|g(x) - g(u)| < \epsilon$. (Bartle & Sherbert, 2000, hal. 136). Dengan kata lain, fungsi g kontinu di $A$.

**Contoh 2.17** Misalkan $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$. Jika diberikan $\epsilon > 0$, pilih $\delta = \epsilon$ untuk setiap $u \in \mathbb{R}$, sehingga jika $|x - u| < \delta$ maka $|f(x) - f(u)| = |x - u| < \delta = \epsilon$.

Pada Contoh 2.16, pemilihan $\delta$ bergantung terhadap $\epsilon$ dan $u$. Berbeda halnya pada Contoh 2.17, pemilihan $\delta$ hanya bergantung terhadap $\epsilon$ dan tidak bergantung terhadap $u$. Cara pemilihan $\delta$ yang berbeda, kemudian memberikan ide tentang konsep kontinu yang lebih kuat, yaitu kontinu seragam.

**Definisi 2.18** Misalkan $(X, d)$ dan $(Y, \rho)$ adalah ruang metrik. Pemetaan $T: X \to Y$ dikatakan kontinu seragam jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga berlaku $\rho(T(x_1), T(x_0)) < \epsilon$ untuk semua $x_0, x_1 \in X$ yang memenuhi $d(x_1, x_0) < \delta$.
(Munkres, 1975, hal. 176)

Berhubungan dengan fungsi kontinu, diberikan teorema yang menghubungkan ketunggalan dari fungsi kontinu di subhimpunan yang padat. Berikut teorema yang menyatakan ketunggalannya.

**Teorema 2.19** *Misalkan* $(X,d)$ *dan* $(Y,\rho)$ *adalah ruang metrik . Misalkan pula* $A$ *adalah subhimpunan* $X$ *yang padat. Jika* $f: X \to Y$ *fungsi kontinu dan terdapat* $g: X \to Y$ *kontinu dengan* $g(a) = f(a), \forall a \in A$ *maka* $g = f$. *Dengan kata lain, nilai dari fungsi kontinu* $f: X \to Y$ *ditentukan oleh nilai dari* $f$ *pada sebuah subhimpunan* $X$ *yang padat, yaitu* $A$.
(Engelking, 1989, hal. 70)

**Bukti.** Pembuktian dilakukan melalui kontradiksi. Andaikan $f \neq g$, yaitu terdapat $p \in X - A$ sedemikian sehingga $f(p) \neq g(p)$. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Karena $f$ kontinu, maka terdapat $\delta_f > 0$ sehingga jika $d(p,y) < \delta_f$ dengan $y \in X$, mengakibatkan $\rho(f(p), f(y)\,) < \epsilon$. Dengan kata lain, jika $y \in B\big(p, \delta_f\big)$ maka $f(y) \in B(f(p), \epsilon)$. Karena $g$ kontinu kemudian dengan cara yang sama didapat pula, jika $y \in B\big(p, \delta_g\big)$ maka $g(y) \in B(g(p), \epsilon)$. Pilih $\epsilon_1 = \frac{\rho(f(p),g(p))}{3}$. Kemudian bentuk $B(f(p), \epsilon_1)$ lingkungan-$\epsilon_1$ dari $f(p)$ dan $B(g(p), \epsilon_1)$ lingkungan-$\epsilon_1$ dari $g(p)$. Jelas bahwa $B(f(p), \epsilon_1) \cap B(g(p), \epsilon_1) = \emptyset$. Di sisi lain $B\big(p, \delta_f\big)$ dan $B\big(p, \delta_g\big)$ adalah lingkungan dari $p$ yang masing-masing terkandung dalam $f^{-1}\big(B(f(p), \epsilon_1)\big)$ dan $f^{-1}\big(B(g(p), \epsilon_1)\big)$. Karena $f^{-1}\big(B(f(p), \epsilon_1)\big)$, $f^{-1}\big(B(g(p), \epsilon_1)\big)$ lingkungan dari $p$, $f^{-1}\big(B(f(p), \epsilon_1)\big) \cap f^{-1}\big(B(g(p), \epsilon_1)\big)$ juga lingkungan dari $p$. Selanjutnya $p \in X - A$ dan $p \in X = \bar{A}$ mengakibatkan $p \in A'$. Karena $p \in A'$ dan $f^{-1}\big(B(f(p), \epsilon_1)\big) \cap f^{-1}\big(B(g(p), \epsilon_1)\big)$ lingkungan dari $p$, terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $a \in f^{-1}\big(B(f(p), \epsilon_1)\big) \cap f^{-1}\big(B(g(p), \epsilon_1)\big)$.

Lebih lanjut berdasarkan hipotesis bahwa nilai fungsi $f, g$ sama untuk setiap nilai di himpunan padatnya, maka $f(a) = g(a), f(a) \in B(f(p), \epsilon_1)$ dan $g(a) \in B(g(p), \epsilon_1)$. Hal tersebut kontradiksi dengan pernyataan bahwa $B(f(p), \epsilon_1) \cap B(g(p), \epsilon_1) = \emptyset$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak ada $p \in X - A \ni f(p) \neq g(p)$. Akibatnya haruslah $g(x) = f(x), \forall x \in X$. ■

Selanjutnya, diberikan Definisi 2.20 mengenai fungsi *Cauchy-sequentially regular*, yaitu fungsi yang mengawetkan barisan Cauchy.

**Definisi 2.20** Misalkan $T: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ adalah fungsi antara dua ruang metrik $X$ dan $Y$. Jika untuk setiap barisan Cauchy $(x_n)$ di $(X, d)$, $\big(T(x_n)\big)$ juga barisan Cauchy di $(Y, \rho)$, maka $T$ disebut *Cauchy-sequentially regular (CS-regular).* (Jain & Kundu, 2005, hal. 31)

Setelah fungsi kontinu dan fungsi *CS-regular*, terdapat pula fungsi isometrik, yaitu fungsi yang mempertahankan jarak antara dua buah titik. Berikut definisinya.

**Definisi 2.21** Misalkan $(X, d)$ dan $(Y, \rho)$ adalah ruang metrik. $T: X \rightarrow Y$ disebut pemetaan isometrik atau isometri jika $T$ mengawetkan jarak, yaitu untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\rho(Tx, Ty) = d(x, y).$$

(Kreyszig, 1989, hal. 41)

Jika terdapat isometri bijektif antara dua ruang metrik, maka kedua ruang tersebut isometrik. Ruang yang isometrik dapat merupakan himpunan yang berbeda, namun dilihat dari sudut pandang jarak sebenarnya kedua himpunan tersebut tidak berbeda. (Kreyszig, 1989)

### 2.1.4 *Completion* di Ruang Metrik

Dalam himpunan bilangan real, telah diketahui bahwa barisan akan konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut adalah barisan Cauchy. Namun, dalam ruang metrik secara umum tidak berlaku demikian. Yang pasti berlaku adalah jika suatu barisan konvergen, maka barisan tersebut Cauchy. Ruang metrik yang memiliki sifat istimewa seperti himpunan bilangan real, yaitu setiap barisan Cauchy-nya konvergen, disebut ruang metrik yang lengkap. Berikut diberikan contoh ruang metrik yang tidak lengkap.

**Contoh 2.22** Interval $(0,1] \subset \mathbb{R}$ dengan metrik standar adalah ruang metrik yang tidak lengkap karena terdapat $\left(\frac{1}{n}\right)$ barisan Cauchy di $(0,1]$ yang tidak konvergen.

Meskipun tidak semua ruang metrik adalah lengkap, setiap ruang metrik dapat dilengkapi. Ruang metrik yang sudah dilengkapi disebut *completion*. Lebih jauh, *completion* ruang metrik adalah tunggal dipandang dari segi isometrinya. Berikut diberikan Definisi 2.23 mengenai *completion* dan Teorema 2.24 yang menjamin bahwa setiap ruang metrik memiliki *completion* yang tunggal secara isometri.

**Definisi 2.23** Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik. $(\hat{X}, \rho)$ disebut *completion* dari $(X, d)$ jika $(\hat{X}, \rho)$ adalah ruang metrik yang lengkap dan terdapat $W$ subruang yang padat dari $\hat{X}$ dan $W$ isometrik dengan $X$.
(Kreyszig, 1989, hal. 41)

**Teorema 2.24** Untuk setiap ruang metrik $(X, d)$, terdapat ruang metrik lengkap $(\hat{X}, \hat{d})$ yang memiliki $W$ sebagai subhimpunan yang padat di $\hat{X}$ dan $W$ isometrik dengan $X$. $\hat{X}$ tunggal secara isometri, yaitu jika $\tilde{X}$ adalah sebarang ruang metrik lengkap yang memiliki $\widetilde{W}$ sebagai subhimpunan yang padat di $\tilde{X}$ dan $\widetilde{W}$ isometrik dengan $X$, maka $\tilde{X}$ dan $\hat{X}$ isometrik.
(Kreyszig, 1989, hal. 41)

Pembuktian Teorema 2.24 dapat dilihat pada Kreyzig(1989).

**Contoh 2.25** Interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ dengan metrik standar adalah *completion* dari interval $(0,1]$. $[0,1]$ adalah ruang metrik lengkap dan terdapat $(0,1] \subset [0,1]$ dengan $\overline{(0,1]} = [0,1]$ dan $(0,1]$ isometrik dengan $(0,1]$.

Setelah semua teori yang berkaitan mengenai ruang metrik dalam penulisan skripsi ini telah dibahas, selanjutnya didefinisikan sebuah ruang baru yaitu ruang Atsuji.

**Definisi 2.26** Misalkan $(X, d)$ ruang metrik. Jika untuk setiap $f: X \to \mathbb{R}$ kontinu mengakibatkan $f$ kontinu seragam, maka $(X, d)$ disebut ruang Atsuji.
(Jain & Kundu, 2005, hal. 33)

Selanjutnya, ruang metrik yang *completion*-nya adalah ruang Atsuji disebut memiliki *Atsuji completion.*

**Contoh 2.27** Misalkan $(X, d) = ([-1,1], |\cdot|)$ dan $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ kontinu. Telah diketahui bahwa fungsi kontinu yang didefinisikan di interval tutup terbatas akan kontinu seragam. Untuk itu $([-1,1], |\cdot|)$ adalah ruang Atsuji.

## 2.2 Ruang Seragam

### 2.2.1 Pendahuluan Ruang Seragam

Ide dari pembentukan ruang seragam berasal dari perumuman konsep ruang metrik. Dengan pembentukan ruang seragam, kedekatan antar titik dalam himpunan tetap dapat diekspresikan. Namun sebelum didefinisikan ruang seragam, diperlukan pengertian mengenai *diagonal uniformity*. Berikut definisinya.

**Definisi 2.28** *Diagonal uniformity* dari himpunan $X$ adalah himpunan $\mathcal{U}$, yaitu koleksi subhimpunan $X \times X$ yang memenuhi sifat berikut:

1. Jika $U_1 \in \mathcal{U}$ dan $U_1 \subset U_2$ maka $U_2 \in \mathcal{U}$,
2. Untuk setiap $U \in \mathcal{U}$, $U$ memuat diagonal dari $X \times X$, yaitu $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$,
3. Untuk setiap $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ berlaku $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$,
4. Jika $U \in \mathcal{U}$ maka $U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\} \in \mathcal{U}$,
5. Untuk setiap $U_1 \in \mathcal{U}$ ada $U_2 \in \mathcal{U}$ sedemikian sehingga $U_2 \circ U_2 \subset U_1$. $U_2 \circ U_2 = \{(x, y) \in X \times X |$ terdapat $z \in X$ dengan $(x, z) \in U_2, (z, y) \in U_2\}$.

(Williard, 1970, hal. 238)

Anggota dari $\mathcal{U}$ disebut *entourage.* Kemudian misalkan $X$ adalah suatu himpunan dan $\mathcal{U}$ adalah *diagonal uniformity*, ruang seragam didefinisikan sebagai pasangan $(X, \mathcal{U})$. (Williard, 1970, hal. 238)

Dalam ruang seragam, kedekatan dua buah titik dinilai relatif terhadap suatu *entourage*, yaitu jika pasangan dua titik tersebut berada dalam satu *entourage*. Seperti yang dijelaskan sebelumnya, ruang seragam pada dasarnya adalah abstraksi dari ruang metrik. Pada teorema berikut, dibuktikan bahwa ruang metrik juga merupakan ruang seragam.

**Teorema 2.29** *Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $\epsilon > 0$. Diberikan*

$$C_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X | d(x, y) < \epsilon\}.$$

*Jika $\mathcal{U}$ merupakan koleksi dari subhimpunan $X \times X$ dengan sifat untuk setiap anggota dari $\mathcal{U}$ terdapat $C_\epsilon$ yang terkandung dalam anggota dari $\mathcal{U}$ tersebut, yaitu*

$$\mathcal{U} = \{U \in X \times X | \ C_\epsilon \subset U, \textit{ untuk suatu } \epsilon\},$$

*maka $(X, \mathcal{U})$ adalah ruang seragam.*

**Bukti**. Untuk menunjukkan $(X, \mathcal{U})$ adalah ruang seragam, maka sifat 1-5 dalam Definisi 2.28 harus dipenuhi.

Pertama-tama dibuktikan bahwa $(X, \mathcal{U})$ memenuhi sifat 1. Misalkan $U_1 \in \mathcal{U}$ dan $U_1 \subset U_2$. $U_1 \in \mathcal{U}$, artinya terdapat $\epsilon$ sedemikian sehingga $C_\epsilon \subset U_1$. Karena $U_1 \subset U_2$, maka $C_\epsilon \subset U_1 \subset U_2$. Kemudian dapat disimpulkan bahwa $U_2$ memuat suatu $C_\epsilon$, akibatnya $U_2 \in \mathcal{U}$.

Langkah selanjutnya, dibuktikan bahwa sifat 2 terpenuhi. Misalkan $U \in \mathcal{U}$ dan misalkan $u \in \Delta = \{(x, x); x \in X\}$ sebarang. $U \in \mathcal{U}$, artinya terdapat $C_\epsilon \ni C_\epsilon \subset U$. Karena $d(x, x) = 0 < \epsilon$, maka $u = (x, x) \in C_\epsilon$. Dengan kata lain didapat bawa $\Delta \subset C_\epsilon \subset U$, yaitu setiap setiap *entourage* memuat diagonal.

Selanjutnya dibuktikan bahwa sifat 3 terpenuhi. Misalkan $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Menurut pendefinisian anggota $\mathcal{U}$, terdapat $\epsilon_1 > 0$ dan $\epsilon_2 > 0$ sedemikian sehingga $C_{\epsilon_1} \subset U_1$ dan $C_{\epsilon_2} \subset U_2$. Pilih $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, maka untuk setiap $(x, y) \in C_\epsilon$ berlaku $(x, y) \in U_1$ dan $(x, y) \in U_2$. Artinya $(x, y) \in U_1 \cap U_2$. Karena berlaku untuk sebarang $(x, y) \in C_\epsilon$ mengakibatkan $(x, y) \in U_1 \cap U_2$, maka $C_\epsilon \subset U_1 \cap U_2$. Sehingga, sesuai dengan pendefinisian anggota $\mathcal{U}$, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

Kemudian dibuktikan bahwa sifat 4 terpenuhi. Misalkan ambil sebarang $U \in \mathcal{U}$. Menurut pendefinisian anggota $\mathcal{U}$, terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $C_\epsilon \subset U$. Selanjutnya, misalkan $(x, y) \in C_\epsilon$. Karena $d(x, y) = d(y, x) < \epsilon$, maka

$(y, x) \in C_\epsilon$. Akibatnya $C_\epsilon \subset U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\}$, dan lebih lanjut mengimplikasikan bahwa $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

Terakhir dibuktikan bahwa sifat 5 terpenuhi. Misalkan $U_1 \in \mathcal{U}$, maka terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian sehingga $C_\epsilon \subset U_1$. Dengan memilih $U_2 = C_{\frac{\epsilon}{2}}$, maka $C_{\frac{\epsilon}{2}} \subset U_2 \in \mathcal{U}$. Misalkan $(x, y) \in C_{\frac{\epsilon}{2}} \circ C_{\frac{\epsilon}{2}}$, maka terdapat $z \in X$ sedemikian sehingga $(x, z), (z, y) \in C_{\frac{\epsilon}{2}}$. Kemudian $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, mengakibatkan $(x, y) \in C_\epsilon \subset U_1$. Karena untuk setiap $U_1 \in \mathcal{U}$ terdapat $U_2 = C_{\frac{\epsilon}{2}}$ sedemikian sehingga $C_{\frac{\epsilon}{2}} \circ C_{\frac{\epsilon}{2}} = U_2 \circ U_2 \subset U_1$, maka sifat 5 terpenuhi. ■

**Contoh 2.30** Ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan pendefinisian metrik $d(a, b) = |a - b|,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$ adalah ruang seragam. Seperti telah dijelaskan pada Teorema 2.29, *entourage* ruang metrik adalah sebarang subhimpunan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yang memuat $C_\epsilon$. Dalam hal ini, $C_\epsilon$ adalah koleksi dari pasangan titik-titik yang terletak dalam interval dengan panjang interval $\epsilon$.

### 2.2.2 Fungsi di Ruang Seragam

Karena ruang seragam adalah abstraksi ruang metrik, maka dapat didefinisikan pula konsep-konsep fungsi dan barisan di ruang seragam. Berikut definisinya.

**Definisi 2.31** Misalkan $(X, \mathcal{U}_X)$ dan $(Y, \mathcal{U}_Y)$ adalah ruang seragam. Fungsi $f: X \to Y$ dikatakan kontinu seragam jika untuk setiap $V \in \mathcal{U}_Y$ terdapat $U \in \mathcal{U}_X$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in X$ dengan $(x, y) \in U$, maka $\big(f(x), f(y)\big) \in V$. (Williard, 1970, hal. 242)

Jika dalam ruang metrik berlaku konsep kontinu seragam terhadap sebarang $\epsilon$, maka di ruang seragam berlaku terhadap sebarang *entourage*. Tidak hanya kontinu seragam, konsep barisan Cauchy di ruang seragam juga diadopsi dari ruang metrik. Namun sebelum mendefinisikan barisan Cauchy dalam ruang seragam, diperlukan definisi *directed set* dan *net*.

**Definisi 2.32** Suatu himpunan $\Lambda$ adalah *directed set* $\Lambda$ jika terdapat relasi $\preccurlyeq$ pada $\Lambda$ yang memenuhi:

1. $\lambda \preccurlyeq \lambda, \forall \lambda \in \Lambda$,
2. Jika $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2$ dan $\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3$ maka $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3$,
3. Jika $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ maka terdapat $\lambda_3$ dengan $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3$ dan $\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3$.

(Williard, 1970, hal. 73)

Relasi $\preccurlyeq$ disebut arah pada $\Lambda$. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan relasi $\leq$ adalah suatu *directed set* karena memenuhi ketiga sifat dalam Definsi 2.32.

**Definisi 2.33** Misalkan $X$ adalah suatu himpunan. Sebuah *net* di $X$ adalah fungsi $f$ dari *directed set* $\Lambda$ ke $X$. Jika $\lambda \in \Lambda$ maka $f(\lambda)$ dinotasikan dengan $x_\lambda$. Untuk menyederhanakan notasi, selanjutnya *net* di $X$ dinotasikan dengan $(x_\lambda)$.
(Williard, 1970, hal. 73)

Barisan merupakan *net* dengan *directed set*-nya merupakan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan arah $\leq$, sehingga *net* kemudian dapat dilihat sebagai abstraksi sebuah barisan.

**Definisi 2.34** *Net* $(x_\lambda)$ dari *directed set* $\Lambda$ ke ruang seragam $(Y, \mathcal{U})$ disebut *Cauchy net* jika untuk setiap $V \in \mathcal{U}$ di $Y$ ada $\lambda_0 \in \Lambda$ sedemikian sehingga untuk setiap $\lambda_1, \lambda_2 \succcurlyeq \lambda_0$ berlaku $\left(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\right) \in V$.
(Williard, 1970, hal. 260)

Dengan menggunakan *directed set* $\mathbb{N}$ dan arah $\leq$, maka *Cauchy net* disebut sebagai barisan Cauchy. Dengan kata lain, misalkan $(x_\lambda)$ adalah *net* dari *directed set* $\mathbb{N}$ dan arah $\leq$, $(x_n)$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $V \in \mathcal{U}$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, l \geq N$ berlaku $(x_k, x_l) \in V$ .
(Williard, 1970)

Selanjutnya diberikan definisi mengenai *Cauchy regular* dan *Cauchy-sequentially regular* di ruang seragam.

**Definisi 2.35** Misalkan $f:(X,\mathcal{U}_X) \rightarrow (Y,\mathcal{U}_Y)$ adalah fungsi antara dua ruang seragam $X$ dan $Y$. Jika untuk setiap *Cauchy net* $(x_\lambda)$ di $(X,\mathcal{U}_X)$, $\left(f(x_\lambda)\right)$ adalah *Cauchy net* di $(Y,\mathcal{U}_Y)$, maka $f$ disebut *Cauchy regular*.
(Jain & Kundu, 2005, hal. 30)

**Definisi 2.36** Misalkan $f:(X,\mathcal{U}_X) \rightarrow (Y,\mathcal{U}_Y)$ adalah fungsi dari dua ruang seragam $X$ dan $Y$. Jika untuk setiap barisan Cauchy $(x_n)$ di $(X,\mathcal{U}_X)$, $\left(f(x_n)\right)$ adalah barisan Cauchy di $(Y,\mathcal{U}_Y)$, maka $f$ disebut *Cauchy-sequentially regular (CS-regular).*
(Jain & Kundu, 2005, hal. 31)

# BAB 3
# SYARAT-SYARAT FUNGSI DAN BARISAN DI RUANG METRIK AGAR RUANG METRIKNYA MEMILIKI *ATSUJI COMPLETION*

Pada bab ini dibahas mengenai syarat-syarat fungsi dan barisan di ruang metrik agar ruang metrik tersebut memiliki *Atsuji completion*. Pernyataan-pernyataan berikut adalah klaim untuk syarat-syarat tersebut dan sebenarnya dapat membentuk suatu rantai ekuivalensi. Namun dalam skripsi ini hanya dipelajari dan dijelaskan secara satu arah. Berikut pernyataan-pernyataannya:

Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ adalah *completion*-nya.

(a) Untuk setiap barisan $(x_n)$ di $X$ yang tidak memiliki subbarisan Cauchy, terdapat bilangan bulat positif $n_0$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$, $x_n$ adalah titik terisolasi di $X$ dan $\inf\{I(x_n): n \geq n_0\} > 0$.

(b) Untuk setiap ruang seragam $(S, \mathcal{U})$, setiap fungsi *Cauchy regular* $f: (X, d) \to (S, \mathcal{U})$ kontinu seragam.

(c) Untuk setiap ruang metrik $(M, \rho)$, setiap fungsi *CS-regular* $f: (X, d) \to (M, \rho)$ adalah kontinu seragam.

(d) Untuk setiap fungsi *CS-regular* bernilai real di $(X, d)$ adalah kontinu seragam.

(Jain & Kundu, 2005, hal. 33)

Selanjutnya, pembuktian klaim dilakukan dengan alur pembuktian, jika pernyataan yang lebih awal terpenuhi maka pernyataan setelahnya berlaku. Pada akhirnya, setiap pernyataan dihubungkan dengan Teorema 3.9 yang menjelaskan bahwa jika pernyataan (d) terpenuhi, maka $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ adalah ruang Atsuji.

Selanjutnya dalam pembahasan skripsi ini, diberikan lema dan teorema yang dapat menjelaskan secara bertahap bahwa setiap pernyataan (a) sampai (d) dapat menyebabkan $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ adalah ruang Atsuji. Teorema dan lema utamanya diberikan dalam Teorema 3.3, 3.5, dan 3.9, dan Lema 3.6. Berikut lema dan teoremanya.

Sebelum membuktikan pernyataan utama dari (a) ke (b), diberikan Lema 3.1 dan Lema 3.2 yang digunakan dalam pembuktian Teorema 3.3.

**Lema 3.1** *Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik. Jika $(x_n)$ dan $(y_n)$ adalah barisan Cauchy di $X$ dengan $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ , $\forall n \in \mathbb{N}$, maka $(z_n)$ yang didefinisikan sebagai $z_{2n-1} = x_n$ dan $z_{2n} = y_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ adalah barisan Cauchy.*

(Jain & Kundu, 2005, hal. 33)

**Bukti.** Akan ditunjukkan bahwa untuk $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N$ sedemikian sehingga $d(z_l, z_k) < \epsilon, \forall l, k \geq N$. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Perhatikan bahwa $(x_n)$ adalah barisan Cauchy, sehingga terdapat bilangan asli $N'$ sedemikian sehingga $d(x_l, x_k) < \frac{\epsilon}{2}$ untuk setiap $l, k \geq N'$. Selain itu perhatikan pula $(y_n)$ adalah barisan Cauchy, sehingga terdapat bilangan asli $N''$ sedemikian sehingga $d(y_l, y_k) < \frac{\epsilon}{2},\ \forall l, k \geq N''$.

Untuk membuktikan bahwa $(z_n)$ juga merupakan barisan Cauchy, akan ditinjau beberapa kasus sebagai berikut. Kasus pertama adalah ketika $z_l, z_k \in \{x_n\}$. Jelas bahwa $d(z_l, z_k) = d\left(x_{\frac{l+1}{2}}, x_{\frac{k+1}{2}}\right) < \epsilon, \forall l, k \geq N'$. Selanjutnya ditinjau jika $z_l, z_k \in \{y_m\}$. Selain itu, jelas bahwa $d(z_l, z_k) = d\left(y_{\frac{l}{2}}, y_{\frac{k}{2}}\right) < \epsilon,\ \forall l, k \geq N''$. Jika $z_l \in \{x_n\}$ dan $z_k \in \{y_m\}$. Kemudian dengan *Archimedean property*, terdapat bilangan asli $K$ dimana $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}$. Dengan sifat ketaksamaan segitiga untuk metrik dan *Archimedean property* didapatkan, untuk $k \geq K$ berlaku,

$$d(z_l, z_k) = d\left(x_{\frac{l+1}{2}}, y_{\frac{k}{2}}\right) \leq d\left(x_{\frac{l+1}{2}}, x_{\frac{k}{2}}\right) + d\left(x_{\frac{k}{2}}, y_{\frac{k}{2}}\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2}{k} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2}{K}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Sehingga dengan memilih $N = \max\{N', N'', K\}$, didapatkan bahwa $d(z_l, z_k) < \epsilon, \forall l, k \geq N$. Hal ini berarti $(z_n)$ adalah barisan Cauchy. ■

**Lema 3.2** *Misalkan* $f: (X, d) \rightarrow (S, \mathcal{U})$ *adalah fungsi Cauchy regular dari ruang metrik* $(X, d)$ *ke ruang seragam* $(S, \mathcal{U})$. *Misalkan pula* $V$ *adalah entourage di S. Jika* $(x_n)$ *dan* $(y_n)$ *adalah barisan di* $X$ *yang memenuhi* $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ *namun* $\big(f(x_n), f(y_n)\big) \notin V$, *maka* $(x_n)$ *tidak memiliki subbarisan Cauchy.*
(Jain & Kundu, 2005, hal. 33)

**Bukti.** Andaikan $(x_n)$ memiliki subbarisan Cauchy, yaitu $(x_{n_k})$. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Sesuai Definisi 2.14, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $k, l \geq N$ maka $d\big(x_{n_k}, x_{n_l}\big) < \frac{\epsilon}{3}$. Selanjutnya dengan *Archimedean property*, terdapat $K, K' \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{K}, \frac{1}{K'} < \frac{\epsilon}{3}$. Selanjutnya, jika $k, l \geq N$ maka $d\big(y_{n_k}, y_{n_l}\big) < d\big(y_{n_k}, x_{n_k}\big) + d\big(x_{n_k}, x_{n_l}\big) + d\big(x_{n_l}, y_{n_l}\big) < \frac{1}{n_k} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{n_l} < \frac{1}{K} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{K'} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Hal ini ekuivalen dengan $(y_n)$ juga memiliki subbarisan Cauchy, yaitu $(y_{n_k})$.

Kemudian definisikan barisan $(z_k)$ sebagai $z_{2k-1} = x_{n_k}$ dan $z_{2k} = y_{n_k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Menurut Lema 3.1, $(z_k)$ adalah barisan Cauchy. Karena $f$ *Cauchy regular* dan $(z_k)$ barisan Cauchy, maka $(f(z_k))$ barisan Cauchy di $S$. Karena $(f(z_k))$ barisan Cauchy, maka untuk setiap *entourage* $V$ terdapat $k_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\big(f(z_k), f(z_l)\big) \in V, \forall k, l \geq k_0$. Pilih $k \geq k_0$, maka $\big(f(z_{2k-1}), f(z_{2k})\big) = \Big(f\big(x_{n_k}\big), f\big(y_{n_k}\big)\Big) \in V$. Hal ini kontradiksi dengan premis $\big(f(x_n), f(y_n)\big) \notin V$. Haruslah $(x_n)$ tidak memiliki subbarisan Cauchy. ■

Selanjutnya teorema berikut menghubungkan pernyataan (a) dan pernyataan (b).

**Teorema 3.3** *Misalkan* $(X, d)$ *adalah ruang metrik dan untuk setiap* $(x_n)$ *barisan di* $X$ *yang tidak memiliki subbarisan Cauchy berlaku ada bilangan bulat positif* $n_0$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $n \geq n_0$, $x_n$ *titik terisolasi di* $X$ *dan* $\inf\big\{I(x_n) = d(x_n, X - \{x_n\}) = \inf\big\{d(x_n, y); y \in X - \{x_n\}\big\} : n \geq n_0\big\} > 0$, *maka untuk setiap ruang seragam* $(S, \mathcal{U})$, *setiap fungsi Cauchy regular* $f: X \rightarrow S$ *kontinu seragam.*
(Jain & Kundu, 2005, hal. 33)

Sebelumnya diberikan diagram alur pembuktian teorema

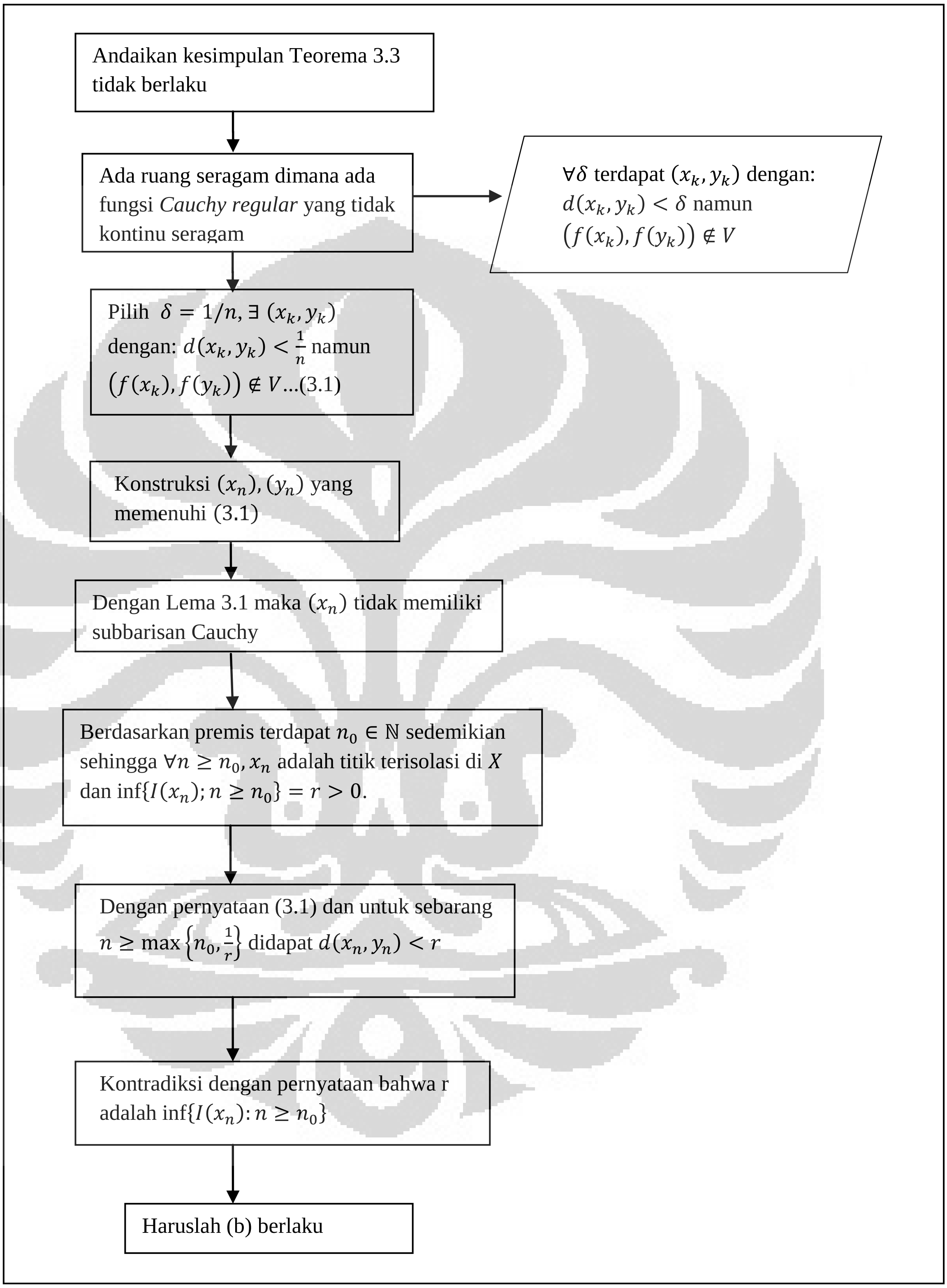


Diagram 3.1 Diagram alur pembuktian Teorema 3.3

Berikut adalah bukti lengkap dari Teorema 3.3.

**Bukti.** Bukti dilakukan dengan kontradiksi, yaitu andaikan terdapat ruang seragam $S$ dimana terdapat fungsi *Cauchy regular* $f: X \to S$ yang tidak kontinu seragam. Berdasarkan Definisi 2.31, terdapat *entourage* $V$ sehingga untuk setiap $\delta$ terdapat $(x_k, y_k)$ dengan $\mathrm{d}(x_k, y_k) < \delta$ namun $\big(f(x_k), f(y_k)\big) \notin V$. Untuk *entourage* $V$ tersebut, pilih $\delta = 1/n$, sehingga untuk setiap bilangan asli $n$ terdapat $(x_n, y_n)$ dengan

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ namun } \big(f(x_n), f(y_n)\big) \notin V \quad \text{... (3.1)}$$

Selanjutnya konstruksi barisan $(x_n)$ dan $(y_n)$, yaitu barisan yang dibentuk dari titik-titik yang memenuhi pernyataan $(3.1)$. Berdasarkan Lema 3.2, maka $(x_n)$ tidak memiliki subbarisan Cauchy. Karena $(x_n)$ tidak memiliki subbarisan Cauchy, berdasarkan premis, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq n_0$, $x_n$ adalah titik terisolasi di $X$ dan $\inf\{I(x_n); n \geq n_0\} = r > 0$.

Dari pernyataan $(3.1)$ didapatkan, $\forall n \in \mathbb{N}$ terdapat $x_n \neq y_n \in X$ dengan $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Lebih khusus, jika $n \geq \max\{n_0, 1/r\} \geq \frac{1}{r}$, maka terdapat $x_n, y_n \in X$ sedemikian sehingga $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\max\{n_0, 1/r\}} \leq \frac{1}{\frac{1}{r}} = r$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $r$ adalah $\inf\{I(x_n); n \geq n_0\}$. Sehingga kesimpulannya, haruslah untuk setiap ruang seragam $S$, setiap fungsi *Cauchy regular* $f: X \to S$ kontinu seragam. ■

Sebelum dibuktikan pernyataan (b) ke (c) dalam Teorema 3.5 dan (c) ke (d) dalam Lema 3.6, akan diberikan terlebih dahulu Teorema 3.4 yang menyatakan hubungan fungsi *Cauchy regular* dan fungsi *CS-regular*.

**Teorema 3.4** *Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $(Y, \mathcal{U})$ adalah ruang seragam. Sebuah fungsi $f: (X, d) \to (Y, \mathcal{U})$ adalah Cauchy-regular jika dan hanya jika $f$ CS-regular.*

(Jain & Kundu, 2005, hal. 31)

**Bukti.** Untuk bukti ke kanan, misalkan $f:(X,d)\to(Y,\mathcal{U})$ adalah *Cauchy-regular*, maka untuk setiap $(x_\lambda)$ *Cauchy-net* di $(X,d)$ mengakibatkan $\big(f(x_\lambda)\big)$ *Cauchy-net* di $(Y,\mathcal{U})$. Secara khusus, untuk setiap *net* dengan *directed set* ℕ dan arah $\leq$, juga akan berlaku untuk setiap $(x_n)$ barisan Cauchy di $(X,d)$ mengakibatkan $\big(f(x_n)\big)$ barisan Cauchy di $(Y,\mathcal{U})$. Dengan kata lain $f$ adalah fungsi *CS-regular*.

Kemudian untuk bukti ke kiri, misalkan $f$ *CS-regular*. Selanjutnya dilakukan dengan kontradiksi. Andaikan $f$ bukan *Cauchy-regular*, yaitu terdapat -*Cauchy net* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di $X$ namun $\big(f(x_\lambda)\big)$ bukan *Cauchy net* di $Y$. Karena $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ adalah *Cauchy net* dan $C_{\frac{1}{n}}$ adalah *entourage* di ruang metrik, maka berdasarkan definisi *Cauchy net*,

$\forall \frac{1}{i} > 0, i \in \mathbb{N}\ \exists \delta_i \in \Lambda$ sedemikian sehingga $d(x_{\lambda'}, x_{\lambda''}) < \frac{1}{i},\ \lambda', \lambda'' \succcurlyeq \delta_i$ ... (3.2)

Selanjutnya karena $\big(f(x_\lambda)\big)$ bukan *Cauchy net* di $Y$ artinya,

$\exists V \in \mathcal{U}\ \ \forall \delta \in \Lambda\ \ni$ terdapat $\delta', \delta'' \succcurlyeq \delta$ namun $\big(f(x_{\delta'}), f(x_{\delta''})\big) \notin V$ ... (3.3)

Langkah berikutnya, konstruksi barisan $(\lambda_n)$ dari Λ sebagai berikut, untuk $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{2n}$ dan $\lambda_{2n-1}$ adalah $\delta'$ dan $\delta''$ yang memenuhi (3.3) dengan $\delta = \delta_i$ yang diperoleh dari (3.2) untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Konstruksi yang demikian akan dijamin eksistensinya dari aksioma ketiga untuk *directed* set. Kemudian konstruksi $(c_n)$ dengan $c_n = x_{\lambda_n}$.

Kemudian ditunjukkan bahwa $(c_n) = \big(x_{\lambda_n}\big)$ adalah barisan Cauchy. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Dengan *Archimedean property*, terdapat $M \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{M} < 2\epsilon$. Kemudian dengan memilih bilangan asli $2M$ tersebut didapatkan, jika $m, n \geq 2M$ maka $\lambda_m \succcurlyeq \delta_i,\ \forall i = 1, 2, \dots M, \dots, \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan $\lambda_n \succcurlyeq \delta_i,\ \forall i = 1,\ 2, \dots, M, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Secara khusus, $i = M$ didapatkan bahwa $\lambda_m, \lambda_n \succcurlyeq \delta_M$. Dengan (3.2) didapatkan bahwa $d\big(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}\big) < \frac{1}{2M} < \epsilon$. Akibatnya, terdapat $2M \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $m, n > 2M$ maka $d(c_m, c_n) = d\left(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}\right) < \frac{1}{2M} < \epsilon$. Dengan kata lain, $\left(x_{\lambda_n}\right)$ adalah barisan Cauchy.

Tahap berikutnya, dibuktikan bahwa $\left(f\left(x_{\lambda_n}\right)\right)$ bukan barisan Cauchy di $Y$. Dengan konstruksi $\left(x_{\lambda_n}\right)$ yang demikian, maka terdapat $V \in \mathcal{U}$ sehingga $\forall n \in \mathbb{N}$ terdapat $\delta_n \in \Lambda$ yang mengakibatkan $\exists 2n = k, 2n - 1 = l \geq n$ sedemikian sehingga $\left(f(c_k), f(c_l)\right) = \left(f\left(x_{\lambda_k}\right), f\left(x_{\lambda_l}\right)\right) = \left(f\left(x_{\lambda_{2n}}\right), f\left(x_{\lambda_{2n-1}}\right)\right) \notin V$. Hal ini ekuivalen dengan mengatakan bahwa barisan $\left(f\left(x_{\lambda_n}\right)\right)$ bukan barisan Cauchy.

Karena terdapat barisan Cauchy $\left(x_{\lambda_n}\right)$ dengan $\left(f\left(x_{\lambda_n}\right)\right)$ bukan merupakan barisan Cauchy, maka terjadi kontradiksi dengan $f$ adalah fungsi *CS-regular*. Kesimpulannya, haruslah untuk setiap $f$ yang *CS-regular*, $f$ juga merupakan *Cauchy-regular*. ■

Selanjutnya, berikut adalah teorema yang menyatakan pernyataan (b) ke pernyataan (c).

**Teorema 3.5** *Misalkan* $(X, d)$ *dan* $(M, \rho)$ *adalah ruang metrik. Jika untuk setiap ruang seragam* $S$, *setiap fungsi Cauchy regular* $f: X \to S$ *kontinu seragam, maka setiap fungsi CS-regular* $g: (X, d) \to (M, \rho)$ *kontinu seragam.*
(Jain & Kundu, 2005, hal. 33)

**Bukti.** Mengacu ke Teorema 3.4, karena $g$ fungsi *CS-regular* maka $g$ adalah fungsi *Cauchy regular*. Perhatikan pula, menurut Teorema 2.31, ruang metrik $(M, \rho)$ adalah ruang seragam. Akibatnya $g$ adalah fungsi *Cauchy regular* dari ruang metrik $(X, d)$ ke ruang seragam $(M, \rho)$. Kemudian menurut premis, $g$ kontinu seragam. ■

Selanjutnya, berikut adalah lema yang menghubungkan pernyataan (c) ke pernyataa (d).

**Lema 3.6** *Misalkan* $(X, d)$ *dan* $(M, \rho)$ *ruang metrik. Jika setiap fungsi CS-regular* $f: (X, d) \to (M, \rho)$ *kontinu seragam, maka setiap fungsi CS-regular bernilai real di* $(X, d)$ *kontinu seragam.*
(Jain & Kundu, 2005, hal. 33)

**Bukti.** Dengan memperhatikan bawa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ juga merupakan suatu ruang metrik, maka kesimpulan dari Lema 3.6 terpenuhi. ■

Selanjutnya diberikan Teorema 3.9 yang menghubungkan pernyataan (d), yaitu, untuk setiap fungsi *CS-regular* bernilai real di $(X, d)$ adalah kontinu seragam, ke kesimpulan bahwa $(\hat{X}, \rho)$ adalah ruang Atsuji. Namun sebelumnya, diberikan Lema 3.7 dan Teorema 3.8 yang digunakan dalam pembuktian Teorema 3.9. Lema 3.7 yang menjelaskan bahwa fungsi yang kontinu seragam akan mengawetkan barisan Cauchy.

**Lema 3.7** *Misalkan* $(A, d)$ *dan* $(Y, \rho)$ *adalah ruang metrik. Misalkan pula* $f: A \to Y$ *adalah fungsi yang kontinu seragam. Jika* $(x_n)$ *adalah barisan Cauchy di* $A$, *maka* $\big(f(x_n)\big)$ *adalah barisan Cauchy di* $Y$.

**Bukti.** Akan dibuktikan $\forall \epsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N$ sedemikian sehingga $\rho\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \epsilon, \forall n, m \geq N$. Selanjutnya, misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Karena fungsi $f$ kontinu seragam, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in A$, jika $d(x, y) < \delta$ maka $\rho\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$. Selanjutnya, karena $(x_n)$ barisan Cauchy di $A$, terdapat bilangan asli $N$ sedemikian sehingga $d(x_n, x_m) < \delta$, $\forall n, m \geq N$. Kemudian, karena $d(x_n, x_m) < \delta$ dan $f$ kontinu seragam, maka $\rho\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \epsilon,\ \forall n, m \geq N$.■

Teorema 3.8 berikut menjelaskan mengenai eksistensi dan ketunggalan perluasan fungsi kontinu seragam dari ruang metrik ke ruang metrik yang lengkap.

**Teorema 3.8** *Misalkan $A$ adalah subhimpunan dari ruang metrik $(X, d)$ dan $(Y, \rho)$ adalah ruang metrik lengkap. Jika $f: A \to Y$ adalah fungsi kontinu seragam, maka terdapat perluasan fungsi $f$ yang kontinu seragam dan tunggal, yaitu $g: \bar{A} \to Y$.*
(Aliprantis & Burkinshaw, 1998, hal. 45)

**Bukti.** Konstruksi $g: \bar{A} \to Y$ dengan pendefinisian $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ dengan $(x_n)$ adalah barisan di $A$ yang konvergen ke $x$. Kemudian dibuktikan bahwa fungsi $g$ dijamin eksistensinya, terdefinisi dengan baik, kontinu seragam, dan tunggal.

Pertama-tama dibuktikan bahwa $g$ dijamin eksistensinya. Misalkan $a \in \bar{A}$ maka menurut Teorema 2.13 terdapat $(a_n)$ barisan di $A$ yang konvergen ke $a$. Lebih lanjut karena $(a_n)$ konvergen, maka $(a_n)$ adalah barisan Cauchy. Karena $(a_n)$ barisan Cauchy di $A$ dan $f$ kontinu seragam, berdasarkan Lema 3.7 maka $\big(f(a_n)\big)$ barisan Cauchy di $Y$. Kemudian karena $Y$ adalah ruang metrik lengkap dan $(f(x_n))$ adalah barisan Cauchy, maka $\lim_{n\to\infty}(f(x_n))$ ada. Kesimpulannya, eksistensi fungsi $g$ terjamin.

Kedua, dibuktikan bahwa fungsi $g$ terdefinisi dengan baik, yaitu jika $x = x'$ maka $g(x) = g(x')$. Misalkan $x = x' \in \bar{A}$, menurut Teorema 2.13, terdapat barisan $(x_n), (y_n)$ di $A$ dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = x'$. Karena $(x_n), (y_n)$ barisan yang konvergen, maka $(x_n), (y_n)$ barisan Cauchy. Selanjutnya karena $(x_n), (y_n)$ barisan Cauchy di $A$ dan $f$ kontinu seragam, maka menurut Lema 3.7 $\big(f(x_n)\big), (f(y_n))$ barisan Cauchy. $\big(f(x_n)\big), (f(y_n))$ adalah barisan Cauchy di ruang metrik lengkap, akibatnya $\big(f(x_n)\big), (f(y_n))$ konvergen. Misalkan $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = y'$. Kemudian ditunjukkan $y = y'$. Untuk itu konstruksi $(z_n)$ dengan $z_{2n} = x_n$ dan $z_{2n-1} = y_n$, kemudian tunjukkan bahwa $(z_n)$ konvergen ke $x$. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Barisan $x_n \to x$ artinya, terdapat bilangan asli $N'$ sehingga $d(x_n, x) < \epsilon, n > N'$. Barisan $y_n \to x' = x$ artinya, terdapat bilangan asli $N''$ sehingga $d(y_n, x) < \epsilon, n > N''$. Kemudian dengan memilih $N = \max\{N', N''\}$ didapat bahwa $\lim_{n\to\infty} z_n = x$, yaitu terdapat $N$ sedemikian sehingga $d(x, z_n) < \epsilon$, $\forall n \geq N$. Karena $z_n \to x$, maka menurut Lema

3.7 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ ada. Akibatnya sebarang subbarisan dari $(f(z_n))$ konvergen ke nilai yang sama. Secara khusus, $y' = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Dengan demikian, jika $x = x'$, maka $g(x') = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g(x)$.

Ketiga, ditunjukkan bahwa $g$ kontinu seragam. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Untuk $x, y \in A$. Karena $f(a) = g(a), \forall a \in A$ dan $f$ kontinu seragam, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $d(x,y) < \delta$ maka $\rho(g(x), g(y)) = \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$. Selanjutnya untuk $x, y \in \bar{A}$ dengan $d(x,y) < \delta$. Teorema 2.13 menjamin terdapat barisan $(x_n)$ dan $(y_n)$ di $A$ dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Menurut Teorema 2.12 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$, sehingga dapat dipilih $N_0$ sedemikian sehingga $d(x_n, y_n) < \delta$ untuk $n \geq N_0$. Karena $d(x_n, y_n) < \delta$ dan $f$ kontinu seragam, maka $\rho(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon, n \geq N_0$. Kesimpulannya, untuk $x, y \in \bar{A}$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $d(x,y) < \delta$ maka $\rho(g(x), g(y)) = \rho\left(\lim_{n\to\infty} f(y_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$.

Terakhir, ditunjukkan $g$ sebagai perluasan fungsi $f_{|W}$ yang kontinu seragam adalah tunggal. Misalkan terdapat perluasan lain dari fungsi $f_{|W}$, yaitu $h$ yang kontinu seragam. Karena $g, h$ adalah fungsi yang kontinu, $A$ subhimpunan yang padat di $\bar{A}$, dan $g(a) = h(a), \forall a \in A$, maka berdasarkan Teorema 2.19 $g = h$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat perluasan fungsi $f$, yaitu $g: \bar{A} \to Y$, yang kontinu seragam dan tunggal. ■

**Teorema 3.9** *Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $(\hat{X}, \hat{d})$ adalah completion-nya. Jika setiap fungsi CS-regular bernilai real $h: (X, d) \to (R, |\cdot|)$ kontinu seragam, maka $(\hat{X}, \hat{d})$ ruang Atsuji.*

(Jain & Kundu, 2005, hal. 33)

Seperti dalam Teorema 3.3 sebelumnya, dalam Teorema 3.9 digunakan diagram alur pembuktian. Berikut bagan alur pembuktianya.

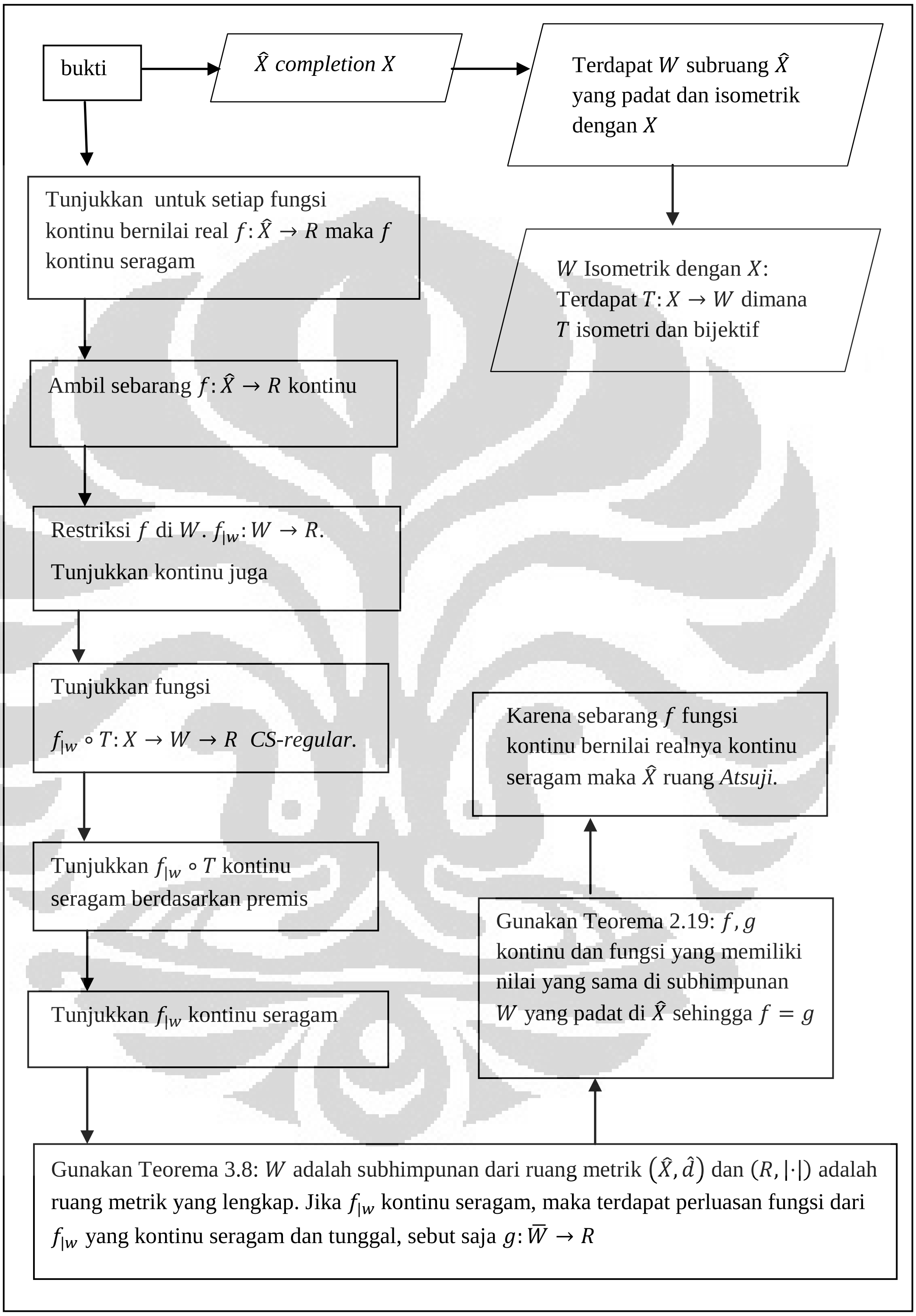


Diagram 3.2 Diagram alur pembuktian Teorema 3.9

**Bukti.** Untuk membuktikan bahwa $(\hat{X}, \rho)$ ruang Atsuji, menurut definisi ruang Atsuji haruslah ditunjukkan untuk setiap $f: \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $f$ kontinu maka $f$ kontinu seragam. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$. Pertama-tama misalkan $f: \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu, yaitu untuk setiap $x_0 \in \hat{X}$ terdapat $\delta > 0 \ni d(x, x_0) < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Selanjutnya perhatikan bahwa, karena $\hat{X}$ adalah *completion* dari $X$ maka terdapat $W$ subruang yang padat dari $\hat{X}$ dan $W$ ruang yang isometrik dengan $X$.

Langkah selanjutnya konstruksi fungsi $f_{|W}: W \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f_{|W}(w) = f(w), \forall w \in W$. Fungsi $f_{|W}$ kontinu di $W$ karena untuk setiap $w_0 \in W$, $w_0 \in \hat{X}$. Dengan pemilihan $\delta$ yang sama berlaku

$$\rho(w, w_0) < \delta \rightarrow \left|f_{|W}(\mathrm{w}) - f_{|W}(\mathrm{w}_0)\right| = |f(w) - f(w_0)| < \epsilon \qquad \cdots (3.4)$$

Kemudian konstruksi fungsi $f_{|W} \circ T: X \rightarrow W \rightarrow \mathbb{R}$ dan tunjukkan $f_{|W} \circ T$ adalah fungsi *CS-regular*. Misalkan $(x_n)$ adalah barisan Cauchy di $X$. Karena $(x_n)$ barisan Cauchy, maka untuk $\delta$ di pernyataan (3.4), akan terdapat bilangan natural $K$ sedemikian sehinng $d(x_n, x_m) < \delta, n, m \geq K$ $\cdots$ (3.5)

Perhatikan pula karena $T$ pada, maka untuk setiap $w \in W$ terdapat $x \in X \ni Tx = w$. Karena $T$ pada, serta menggunakan pernyataan (3.4) dan (3.5), didapatkan $\left(f_{|W} \circ T(x_n)\right)$ adalah barisan Cauchy di $R$. Karena untuk sebarang $(x_n)$ barisan Cauchy di $X$ mengakibatkan $\left(f_{|W} \circ T(x_n)\right)$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, maka menurut definisi fungsi *CS-regular* dapat disimpulkan bahwa fungsi $f_{|W} \circ T$ adalah fungsi *CS- regular* dari $X$ ke $\mathbb{R}$.

Selanjutnya, karena $f_{|W} \circ T$: $(X, d) \rightarrow (R, |\cdot|)$ adalah *CS-regular*, maka menurut premis $f_{|W} \circ T$ adalah fungsi yang kontinu seragam, yaitu $\forall x_1, x_2 \in X$ $\exists \delta' > 0 \ni d(x_1, x_2) < \delta' \rightarrow \left|f_{|W} \circ T(x_1) - f_{|W} \circ T(x_2)\right| < \epsilon$.

Tahap berikutnya adalah menunjukkan bahwa $f_{|W}$ adalah fungsi yang kontinu seragam. Dengan memilih $\delta'$ di atas, diperoleh bahwa untuk setiap $w_1, w_2 \in W$ berlaku

$$\rho(w_1, w_2) = \rho(Tx_1, Tx_2) = d(x_1, x_2) < \delta' \rightarrow \left|f_{|w}(w_1) - f_{|w}(w_2)\right|$$

$$= \left|f_{|w}\big(T(x_1)\big) - f_{|w}(T(x_2))\right| = \left|f_{|w} \circ T(x_1) - f_{|w} \circ T(x_2)\right| < \epsilon.$$

Terbukti bahwa $f_{|w}$ adalah fungsi yang kontinu seragam.

Lebih lanjut menurut Teorema 3.8, $W$ adalah subruang dari $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ dan $(R, |.|)$ lengkap. $f_{|w}: W \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang kontinu seragam, maka terdapat perluasan yang tunggal untuk fungsi $f_{|w}$, yaitu fungsi $g: \overline{W} = \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ yang kontinu seragam.

Perhatikan bahwa $f$ dan $g$ adalah dua buah fungsi yang memiliki sifat $f(w) = f_{|w}(w) = g(w), \forall w \in W$. Karena $f, g$ kontinu dan $W$ adalah subruang yang padat dari $\hat{X}$, maka menurut Teorema 2.19 $f(x) = g(x),\ \forall x \in \hat{X}$. Dengan kata lain $f = g$.

Karena untuk sebarang $f: \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu berlaku $f = g$ kontinu seragam, maka $\hat{X}$ adalah ruang *Atsuji*. ■

Teorema 3.9 menjelaskan bahwa, cukup dengan membuktikan bahwa setiap fungsi *CS-regular* bernilai real di ruang metrik $(X, d)$ kontinu seragam, maka *completion* dari ruang metrik tersebut adalah ruang Atsuji.

# BAB 4
# KESIMPULAN DAN SARAN

## 4.1 Kesimpulan

Dalam skripsi ini, telah dipelajari keterkaitan antar pernyataan-pernyataan berikut:

Misalkan $(X, d)$ adalah ruang metrik dan $(\hat{X}, \hat{d})$ adalah *completion*-nya.

(a) Setiap $(x_n)$ barisan di ruang metrik yang tidak memiliki subbarisan Cauchy, memiliki bilangan bulat positif $n_0$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$, $x_n$ titik terisolasi di ruang metrik tersebut dan $\inf\{I(x_n): n \geq n_0\} > 0$.

(b) Setiap ruang seragam dan setiap fungsi *Cauchy-regular* dari ruang metrik tersebut ke ruang seragam akan kontinu seragam.

(c) Setiap ruang metrik $(M, \rho)$, setiap fungsi *CS-regular* $f: (X, d) \to (M, \rho)$ adalah kontinu seragam.

(d) Setiap fungsi *CS-regular* bernilai real di $(X, d)$ adalah kontinu seragam.

Keterkaitan pernyataan-pernyataan tersebut diperlihatkan dalam Teorema 3.3, Teorema 3.5, dan Lema 3.6. Dalam Teorema 3.3, apabila pernyataan (a) dipenuhi, maka diperoleh kondisi pada pernyataan (b). Dalam Teorema 3.5, apabila pernyataan (b) dipenuhi, maka diperoleh kondisi pada pernyataan (c). Kemudian dalam Lema 3.6 dijelaskan bahwa, apabila pernyataan (c) dipenuhi, maka diperoleh kondisi pada pernyataan (d). Selanjutnya, Teorema 3.9 menyatakan bahwa jika kondisi pada pernyataan (d) dipenuhi, maka ruang metrik tersebut memiliki *Atsuji completion*. Akibatnya, jika pernyataan (a), (b), (c), atau (d) terpenuhi, maka *completion* dari ruang metrik $(X, d)$, yaitu $(\hat{X}, \hat{d})$, adalah ruang Atsuji.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa syarat-syarat fungsi di ruang metrik agar ruang metrik tersebut memiliki *Atsuji completion* adalah:

1. Setiap ruang seragam dan setiap fungsi *Cauchy-regular* dari ruang metrik tersebut ke ruang seragam akan kontinu seragam, atau
2. Setiap ruang metrik $(M, \rho)$, setiap fungsi *CS-regular* $f: (X, d) \to (M, \rho)$ adalah kontinu seragam, atau
3. Setiap fungsi *CS-regular* bernilai real di $(X, d)$ adalah kontinu seragam.

Selain itu, syarat barisan di ruang metrik agar ruang metrik memiliki *Atsuji completion* adalah:

Setiap barisan $(x_n)$ di ruang metrik yang tidak memiliki subbarisan Cauchy, memiliki bilangan bulat positif $n_0$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$, $x_n$ adalah titik terisolasi di ruang metrik tersebut dan $\inf\{I(x_n): n \geq n_0\} > 0$.

## 4.2 Saran

Pengembangan ekuivalensi untuk *Atsuji completion* yang diteliti oleh Gerald Beer telah menghasilkan dua puluh sembilan ekuivalensi. (Jain & Kundu, 2005). Dalam skripsi ini, hanya dipelajari beberapa pernyataan, yang termasuk dalam ekuivalensi tersebut, berdasarkan fungsi dan barisan di ruang metrik. Oleh karena itu, untuk penelitian skripsi yang lebih lanjut, penulis menyarankan untuk mempelajari pernyataan-pernyataan lain yang termasuk dalam dua puluh sembilan ekuivalensi untuk *Atsuji completion*, misalnya pernyataan-pernyataan yang berdasarkan kondisi subhimpunan ruang metrik yang lengkap atau kompak.

## DAFTAR PUSTAKA

Aliprantis, C. D., & Burkinshaw, O. (1998). Principles of Real Analysis. California: Academic Press.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). Introduction to Real Analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Engelking, R. (1989). General Topology. Berlin: Heldermann.

Jain, T., & Kundu, S. (2005). Atsuji Completion: Equivalent characterisations. *Topology and its Application,* 29-38.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Application.* New York: John Wiley & Sons.

Munkres, J. R. (1975). *Topology* (2 ed.). USA: Prentice Hall.

Williard, S. (1970). General Topology. Canada: Addison-Wesley Publishing Company.