UNIVERSITAS INDONESIA

SPEKTRUM DAN HIMPUNAN *RESOLVENT* DARI OPERATOR LINEAR TERBATAS DAN OPERATOR LINEAR *SELF ADJOINT* TERBATAS

SKRIPSI

DANIEL SALIM
0906511385

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
2012

UNIVERSITAS INDONESIA

SPEKTRUM DAN HIMPUNAN *RESOLVENT* DARI OPERATOR LINEAR TERBATAS DAN OPERATOR LINEAR *SELF ADJOINT* TERBATAS

SKRIPSI
Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana

DANIEL SALIM
0906511385

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Daniel Salim
NPM	:	0906511385
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	7 Desember 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Daniel Salim
NPM : 0906511385
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Spektrum dan Himpunan Resolvent dari Operator Linear Terbatas dan Operator Linear Self Adjoint Terbatas

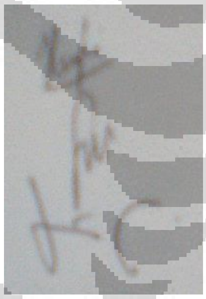
Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Hengki Tasman, M.Si. ( )

Penguji : Dra. Suarsih Utama M.Si. ( )

Penguji : Drs. Frederik Moses Poyk M.S. ( )



Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 14 Desember 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan sebaik-baiknya. Selama masa penulisan skripsi ini, penulis telah mendapat banyak semangat, dukungan, doa, bantuan, inspirasi, dan motivasi dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis ingin berterima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Hengki Tasman, M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi yang telah bersedia meluangkan banyak waktu dan pikiran untuk membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih juga atas kesabaran, canda tawa serta nasihat selama bimbingan.
2. Ibu Dra. Rianti Setiadi, M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang selama ini telah bersedia membimbing penulis untuk dapat memilih mata kuliah yang tepat selama menjalani masa kuliah.
3. Ibu Dra. Suarsih Utama M.Si. dan bapak Drs. Frederik Moses Poyk M.S. yang telah hadir sebagai dosen penguji pada seminar usulan penelitian dan kolokium penulis. Terima kasih atas masukan dan inspirasi yang telah diberikan.
4. Ibu Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, ibu Dra. Siti Aminah M.Kom, dan bapak Prof. Dr. Djati Kerami yang telah hadir sebagai dosen penguji pada seminar kemajuan penelitian penulis. Terima kasih atas masukan dan inspirasi yang telah diberikan.
5. Semua staf pengajar atas ilmu pengetahuan yang telah diberikan kepada penulis selama masa kuliah.
6. Seluruh staf karyawan yang selalu melakukan tugas mereka dengan baik, sehingga memberikan kenyamanan pelayanan bagi siapa saja.
7. Kedua orang tua penulis, Sujadi Salim dan Elliana, kakak penulis, Yully Salim, beserta seluruh anggota keluarga yang terus memberikan dukungan, doa, inspirasi, dan motivasi.
8. Andreas Febrian dan Lia Sadita yang telah membuat kerangka penulisan skripsi di Latex.
9. Andrew, Azki, Dian, Emyl, Maifiana, Rani, Sofwah, Soleman, Wilsan, dan Yanti sebagai teman seangkatan dan seperjuangan dalam penulisan skripsi ini.

10. Seluruh teman-teman angkatan 2009 atas semangat, dukungan, canda tawa dan banyak hal penting selama masa kuliah.
11. Kakak-kakak angkatan 2008, 2007, dan 2006 serta adik-adik angkatan 2010, dan 2011 yang terus memberi semangat.
12. Seluruh pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan, yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Layaknya pribahasa ”tiada gading yang tak retak”, penulis menyadari ketidaksempurnaan dari skripsi ini. Karenanya, penulis berharap atas masukan baik kritik maupun saran sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik. Penulis juga berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

2012

penulis

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Daniel Salim
NPM	:	0906511385
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (Non-exclusive Royalty Free Right) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Spektrum dan Himpunan Resolvent dari Operator Linear Terbatas dan Operator Linear Self Adjoint Terbatas

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.
Demikian pernyatan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 7 Desember 2012
Yang menyatakan

(Daniel Salim)

ABSTRAK

Nama	:	Daniel Salim
Program Studi	:	Matematika
Judul	:	Spektrum dan Himpunan *Resolvent* dari Operator Linear Terbatas dan Operator Linear *Self Adjoint* Terbatas

Teori spektral adalah salah satu cabang utama dari analisis fungsional. Dalam teori spektral, dipelajari mengenai operator-operator inversi dari operator linear. Yang diperhatikan adalah sifat-sifat umumnya dan hubungan dengan operator linear aslinya. Dalam teori spektral, dikenal dua himpunan yang saling bebas yaitu spektrum dan himpunan *resolvent*. Operator linear yang diperhatikan pada skripsi ini adalah operator linear terbatas dan operator linear *self adjoint* terbatas yang telah dikenal di analisis fungsional. Sifat spektrum dan himpunan *resolvent* dari kedua operator linear tersebut menjadi hal utama yang dikaji di skripsi ini.

Kata kunci	:	spektrum, teori spektral, himpunan *resolvent*, operator linear terbatas di ruang ber-*norm*, operator linear *self adjoint* terbatas di ruang Hilbert
x+40	:	0 tabel dan 0 diagram
Daftar referensi	:	5 (1989-2009)

ABSTRACT

Name	:	Daniel Salim
Program	:	Mathematics
Title	:	Spectrum and Resolvent Set of Bounded Linear Operators and Bounded Self Adjoint Linear Operators

Spectral theory is one of the main branches of functional analysis. Spectral theory is study about the inverse operators of linear operator. It is concerned with their general properties and their relations to the original linear operator. In spectral theory, there are two adjoint sets called spectrum and resolvent set. There are two linear operators in this undergraduate thesis, they are bounded linear operator and bounded self adjoint linear operator from functional analysis. Spectrum and resolvent set properties of those linear operators is the main part of this undergraduate thesis.

Keywords	:	spectrum, spectral theory, resolvent set, bounded linear operator, bounded self adjoint linear operator
x+40	:	0 table and 0 diagram
bibliography	:	5 (1989-2009)

DAFTAR ISI

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Teori spektral adalah salah satu cabang utama dari analisis fungsional. Secara garis besar, dalam teori spektral dari operator linear, dipelajari operator-operator inversi(*inverse*). Yang diperhatikan adalah sifat-sifat umumnya dan hubungannya dengan operator linear aslinya. Operator inversi ini berkaitan dengan masalah tentang penyelesaian persamaan seperti sistem persamaan linear, sistem persamaan diferensial, dan sistem persamaan integral.

Pada awalnya, diketahui tentang teori spektral yang dasar yaitu teori spektral dari matriks persegi kompleks. Misal matriks persegi A. Bentuk matriks A_λ sebagai $A - \lambda I$ dengan I adalah matriks identitas dan λ suatu bilangan kompleks. Dalam teori spektral dari matriks A ini, diperhatikan mengenai keberadaan inversi dari A_λ. Kumpulan nilai λ yang membuat inversi dari $A - \lambda I$ ada, biasa disebut sebagai himpunan *resolvent* dari A. Lalu, spektrum dari A merupakan komplemen dari himpunan *resolvent*-nya di bidang kompleks. Dalam aljabar, nilai λ yang membuat $A - \lambda I$ tidak memiliki inversi disebut sebagai nilai eigen. Oleh karena itu, spektrum dari matriks persegi kompleks A biasa dikenal sebagai kumpulan nilai eigen dari A.

Dalam aljabar, operator linear di ruang vektor kompleks berdimensi hingga selalu memiliki matriks representasi, sehingga teori spektral di ruang vektor berdimensi hingga sama dengan teori spektral dari matriks. Operator linear di ruang vektor kompleks berdimensi tak hingga memiliki perbedaan, yaitu tidak memiliki matriks representasi. Teori spektral dari operator linear berdimensi tak hingga ini cukup menarik untuk dipelajari.

Pada analisis fungsional, dipelajari operator linear terbatas dan operator linear *self adjoint* terbatas. Sifat operator inversi dari kedua operator tersebut yang diperhatikan tidak hanya sekedar keberadaan saja, tapi juga keterbatasan. Selain itu juga terdapat sifat umum lainnya yang diperhatikan, sehingga teori spektral dari kedua operator linear tersebut sangat menarik untuk dikaji. Sifat-sifat spektrum dan himpunan *resolvent* dari kedua operator linear tersebut menjadi hal utama yang ingin dipelajari lebih lanjut oleh penulis.

1.2 Perumusan masalah dan ruang lingkup penelitian

Perumusan masalah dalam skrispi ini adalah

1. bagaimana sifat-sifat spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear terbatas?
2. bagaimana sifat-sifat spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear *self adjoint* terbatas?

Ruang lingkup penilitian dalam skripsi ini adalah operator linear di ruang Banach dan ruang Hilbert atas lapangan kompleks.

1.3 Metodologi penelitian

Metode yang digunakan pada skrispi ini adalah studi literatur.

1.4 Tujuan penelitian

Tujuan skripsi ini adalah

1. memahami sifat-sifat spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear terbatas, dan
2. memahami sifat-sifat spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear *self adjoint* terbatas.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada skripsi ini operator linear yang ditinjau adalah operator linear terbatas dan operator linear *self adjoint* terbatas. Operator linear terbatas adalah operator linear di ruang ber-*norm* dan operator linear *self adjoint* adalah operator linear di ruang Hilbert. Karenanya, pada landasan teori ini, diperkenalkan ruang ber-*norm*, ruang Hilbert dan operator linear beserta hal-hal yang berhubungan dengan ketiga hal tersebut di subbab 2.1 dan 2.2. Lalu pada subbab 2.3, diperkenalkan spektrum dan himpunan *resolvent* pada operator linear di ruang vektor berdimensi hingga. Sebagian besar pembahasan pada skripsi ini merujuk dari Kreyzig (1989).

2.1 Ruang metrik, ruang vektor, ruang ber-*norm*, dan ruang hasil kali dalam

Pada subbab ini diperkenalkan tentang ruang metrik di 2.1.1, ruang vektor di 2.1.2, ruang ber-*norm* beserta ruang Banach di 2.1.3, dan ruang hasil kali dalam beserta ruang Hilbert di 2.1.4.

2.1.1 Ruang metrik

Pada bagian ini diperkenalkan mengenai ruang metrik, subhimpunan pada ruang metrik, ruang metrik yang lengkap, pemetaan kontinu, dan isometrik. Berikut ini adalah pengertian dari ruang metrik.

Definisi 2.1. ***Ruang metrik*** *adalah pasangan (X,d), dengan X adalah himpunan dan d adalah metrik di X (atau fungsi jarak di X).* ***Metrik*** *d adalah fungsi yang terdefinisi di $X \times X$ yang untuk setiap x,y,z di X berlaku:*

(M1) *d bernilai real, hingga dan tidak negatif.*

(M2) $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$.

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$ *(simetris).*

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(pertidaksamaan segitiga).*

Untuk mendefinisikan himpunan buka dan himpunan tertutup digunakan bola buka. Berikut ini adalah pengertian dari bola buka.

Definisi 2.2. *Diberikan titik $x_0 \in (X,d)$ dan bilangan real $r > 0$.* ***Bola buka*** *dengan pusat x_0 dan jari-jari r adalah himpunan*

$$B(x_0;r) = \{x \in X | d(x,x_0) < r\}$$

Misal M adalah subhimpunan dari ruang metrik X. Himpunan M disebut **buka** jika setiap $m \in M$ terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikan sehingga bola buka $B(m, \varepsilon)$ termuat di M. Himpunan M disebut **tertutup** jika komplemennya di ruang X buka. Merujuk dari Munkres (2000), irisan dari semua himpunan tertutup (subhimpunan dari X) yang memuat M dilambangkan dengan $\overline{M}$ dan dibaca "M *closure*". Perlu diketahui bahwa untuk setiap $x \in \overline{M}$ pasti terdapat suatu barisan (x_n) di M yang konvergen ke x. Apabila $\overline{M}$ adalah X maka M disebut **padat** (*dense*) di X. Himpunan M disebut **kompak** jika setiap barisan di M mempunyai subbarisan yang konvergen dan limitnya adalah anggota M.

Ruang metrik yang lengkap adalah bagian dari pengertian ruang Banach dan ruang Hilbert. Berikut ini adalah definisi dari ruang metrik yang lengkap.

Definisi 2.3. *Barisan (x_n) pada ruang metrik $X = (X, d)$ disebut **Cauchy** (atau fundamental) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon)$ yang memenuhi*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \ \forall m, n > N.$$

*Ruang X disebut **lengkap** bila setiap barisan Cauchy di X konvergen (limitnya merupakan anggota X).*

Perlu diketahui bahwa setiap barisan yang konvergen di ruang metrik juga merupakan barisan Cauchy. Selanjutnya adalah pengertian dari pemetaan kontinu.

Definisi 2.4. *Misal $X = (X, d)$ dan $Y = (Y, \widetilde{d})$ adalah ruang metrik. Suatu pemetaan $T : X \longrightarrow Y$ disebut kontinu di titik $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga*

$$\widetilde{d}(T(x), T(x_0)) < \varepsilon \ \text{ untuk setiap } x \text{ yang memenuhi } \ d(x, x_0) < \delta$$

*T disebut **kontinu** jika T kontinu di setiap titik di X.*

Apabila T kontinu, maka untuk setiap barisan (x_n) di $D(T)$ yang konvergen ke $x \in D(T)$ mengakibatkan barisan $(T(x_n))$ konvergen ke $T(x)$.

Berikut ini adalah pengertian isometrik.

Definisi 2.5. *Suatu pemetaan T dari ruang metrik (X, d) ke ruang metrik $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ disebut **isometrik** bila untuk setiap $x, y \in X$ berlaku*

$$\widetilde{d}(T(x), T(y)) = d(x, y).$$

2.1.2 Ruang vektor

Pada bagian ini diperkenalkan ruang vektor, subruang, dan hasil jumlah langsung. Berikut ini adalah pengertian dari ruang vektor.

Definisi 2.6. ***Ruang vektor*** *atas lapangan K adalah himpunan tak kosong X dengan anggota $x, y, \cdots$ (disebut vektor) bersama dengan dua operasi aljabar. Operasi-operasi aljabar ini adalah penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar.*

Penjumlahan vektor *menghubungkan pasangan vektor (x, y) dengan vektor $x + y$. Penjumlahan vektor bersifat komutatif dan asosiatif, yaitu*

$$\begin{aligned} x+y &= y+x \\ x+(y+z) &= (x+y)+z; \end{aligned}$$

lebih lanjut, terdapat vektor 0 (vektor nol) dan untuk setiap vektor x terdapat vektor $-x$ dengan

$$\begin{aligned} x+0 &= x \\ x+(-x) &= 0. \end{aligned}$$

Perkalian dengan skalar *menghubungkan setiap skalar a dan vektor x dengan vektor ax (juga bisa ditulis xa). Untuk setiap vektor x, y dan skalar a, b berlaku*

$$\begin{aligned} a(bx) &= (ab)x \\ 1x &= x \end{aligned}$$

dan hukum distribusi

$$\begin{aligned} a(x+y) &= ax+ay \\ (a+b)x &= ax+bx. \end{aligned}$$

Subruang dari ruang vektor X adalah subhimpunan tak kosong Y dari X sedemikian sehingga Y juga merupakan ruang vektor dengan dua operasi aljabar yang sama dengan operasi aljabar di X. Berikut ini adalah pengertian dari hasil tambah langsung.

Definisi 2.7. *Ruang vektor X disebut sebagai* ***hasil tambah langsung*** *(direct sum)* *antara dua subruang Y dan Z dari X, ditulis*

$$X = Y \oplus Z,$$

jika setiap $x \in X$ mempunyai representasi yang unik

$$x = y + z,\ y \in Y,\ z \in Z.$$

2.1.3 Ruang ber-*norm*

Pada bagian ini diperkenalkan mengenai ruang ber-*norm* beserta ruang Banach. Berikut ini adalah pengertian dair ruang ber-*norm* dan ruang Banach.

Definisi 2.8. ***Ruang ber-norm*** *X merupakan ruang vektor dengan suatu norm terdefinisi didalamnya.* ***Ruang Banach*** *adalah ruang ber-norm yang lengkap (lengkap di metrik yang didefinisikan dari norm; lihat persamaan (2.1)).* ***Norm*** *pada ruang vektor real atau kompleks X adalah pemetaan bernilai real di X dengan nilai pada suatu $x \in X$ ditulis*

$$\|x\| \quad (\textit{dibaca "norm dari x"})$$

dan mempunyai sifat-sifat:
(N1) $\|x\| \geq 0$.
(N2) $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$.
(N3) $\|ax\| = |a|\|x\|$.
(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
dengan $x, y \in X$ dan a adalah skalar. Norm di X dapat mendefinisikan metrik d di X sebagai

$$d(x,y) = \|x - y\| \tag{2.1}$$

dan disebut sebagai metrik yang dibangun dari norm. Ruang ber-norm ditulis dengan $(X, \|\cdot\|)$ atau disingkat dengan X.

Berdasarkan definisinya, ruang ber-*norm* juga merupakan ruang metrik. Perlu diketahui bahwa tidak semua ruang metrik adalah ruang ber-*norm*. Himpunan kompak pada ruang ber*norm* memiliki sifat yang diterangkan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.1. *Pada ruang ber-norm berdimensi hingga X, $M \subset X$ adalah himpunan kompak jika dan hanya jika M tertutup dan terbatas.*

Himpunan M pada Teorema 2.1 dikatakan **terbatas** apabila terdapat bilangan c sedemikian sehingga $\|x\| \leq c$ untuk setiap $x \in M$.

2.1.4 Ruang Hilbert

Pada bagian ini diperkenalkan mengenai ruang hasil kali dalam beserta ruang Hilbert, tegak lurus dan diberikan contoh-contoh dari ruang Hilbert. Berikut ini adalah pengertian dari ruang hasil kali dalam dan ruang Hilbert.

Definisi 2.9. ***Ruang hasil kali dalam*** *adalah ruang vektor X (atas lapangan K) dengan suatu hasil kali dalam yang terdefinisi di X.* ***Ruang Hilbert*** *adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap (lengkap di metrik yang didefinisikan dari hasil kali dalam; lihat persamaan (2.3)).* ***Hasil kali dalam*** *di X adalah pemetaan dari $X \times X$ ke lapangan K; dengan setiap pasang vektor x dan y berasosiasi dengan skalar yang ditulis*

$$\langle x, y \rangle \quad \textit{(dibaca hasil kali dalam dari x dan y)},$$

yang untuk setiap x, y, z di X dan skalar a berlaku:

(IP1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,.$

(IP2) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle.$

(IP3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}.$

(IP4) $\langle x, x\rangle \geq 0.$

(IP5) $\langle x, x\rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$.

Hasil kali dalam pada X mendefinisikan norm pada X sebagai

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0 \tag{2.2}$$

dan metrik pada X sebagai

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}. \tag{2.3}$$

Berdasarkan definisinya, ruang hasil kali dalam juga merupakan ruang ber-*norm* dan ruang Hilbert juga merupakan ruang Banach. Perlu diketahui bahwa tidak semua ruang ber-*norm* adalah ruang hasil kali dalam. Berikut ini adalah pengertian dari tegak lurus.

Definisi 2.10. *Suatu anggota x dari ruang hasil kali dalam X disebut* ***tegak lurus*** *dengan suatu $y \in X$ jika*

$$\langle x, y\rangle = 0. \tag{2.4}$$

Dapat dikatakan x dan y saling tegak lurus dan ditulis $x \perp y$. Untuk $A, B \subset X$, ditulis $x \perp A$ jika $x \perp a$ untuk setiap $a \in A$ dan $A \perp B$ jika $a \perp b$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$.

Subhimpunan B pada Definisi 2.10 ditulis sebagai $A^{\perp}$ apabila terdiri dari semua $x \in X$ yang tegak lurus dengan setiap anggota A. Subruang tertutup di ruang Hilbert memiliki sifat yang diterangkan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.2. *Misal Y subruang tertutup dari ruang Hilbert H. Maka*

$$H = Y \oplus Y^{\perp}.$$

Salah satu pertidaksamaan yang terkenal di ruang hasil kali dalam adalah pertidaksamaan Schwarz yang terdapat di Lema berikut ini.

Lema 2.3. *Hasil kali dalam dan norm (yang didefinisikan dari hasil kali dalam) memenuhi pertidaksamaan Schwarz dan pertidaksamaan segitiga seperti berikut*

1. *Pertidaksamaan Schwarz*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

2. *Pertidaksamaan segitiga*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Persamaan berlaku jika dan hanya jika $y = 0$ atau $x = cy$ $(c \geq 0)$.

Lema berikut ini adalah suatu sifat dari hasil kali dalam.

Lema 2.4. *Misal v_1, v_2 merupakan anggota dari ruang hasil kali dalam X. Jika $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$ untuk setiap $w \in X$, maka $v_1 = v_2$. Khususnya, $\langle v_1, w\rangle = 0$ untuk setiap $w \in X$ mengakibatkan $v_1 = 0$.*

Berikut ini adalah beberapa contoh dari ruang Hilbert yang juga merupakan ruang Banach.

Contoh 2.5. Ruang Euclidean $\mathbb{R}^n$

Ruang $\mathbb{R}^n$ adalah himpunan dari semua n-*tuples* terurut bilangan real yang anggotanya ditulis

$$x = (a_1, \cdots, a_n),\ y = (b_1, \cdots, b_n).$$

Ruang $\mathbb{R}^n$ adalah ruang Hilbert dengan hasil kali dalam

$$\langle x,y\rangle = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

Dengan persamaan (2.2) didapat

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Dari persamaan (2.3) didapat juga

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \cdots + (a_n-b_n)^2}.$$

Contoh 2.6. Ruang Unitary $\mathbb{C}^n$

Ruang Unitary $\mathbb{C}^n$ adalah ruang dari semua n-*tuples* terurut bilangan kompleks, yang anggotanya ditulis

$$x = (a_1,\cdots,a_n),\ y = (b_1,\cdots,b_n).$$

Ruang $\mathbb{C}^n$ adalah ruang Hilbert dengan hasil kali dalam

$$\langle x,y\rangle = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n},$$

norm

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2},$$

dan metrik

$$d(x,y) = \sqrt{|a_1-b_1|^2 + \cdots + |a_n-b_n|^2}.$$

Contoh 2.7. Ruang barisan Hilbert ℓ^2

Ruang yang diperkenalkan dan dipelajari oleh Hilbert (1912) ini adalah himpunan dari barisan $x = (a_j) = (a_1,a_2,\cdots)$ dengan $|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots$ konvergen. Barisan ini dapat terdiri dari bilangan real atau kompleks. Ruang ℓ^2 adalah ruang Hilbert dengan hasil kali dalam yang didefinisikan sebagai

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\overline{b_j}, \tag{2.5}$$

dengan $y = (b_j)$. Kekonvergenan dari barisan $(a_n\overline{b_n})$ ini dijamin dari pertidaksamaan Cauchy-Schwarz untuk penjumlahan

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|^2}.$$

Norm dan metrik pada ruang ℓ^2 didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2}, \qquad (2.6) \\ d(x,y) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j - b_j|^2}. \end{aligned}$$

Kekonvergenan dari $d(x,y)$ ini dijamin dari pertidaksamaan Minkowski untuk penjumlahan

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|^p\right)^{1/p}, \; p \geq 1.$$

Contoh 2.8. Ruang $L^2[a,b]$

Ruang $L^2[a,b]$ adalah himpunan dari fungsi bernilai kompleks yang kontinu pada interval real $[a,b]$. Hasil kali dalam pada $L^2[a,b]$ didefinisikan sebagai

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt. \qquad (2.7)$$

Lalu, *norm* dan metrik pada ruang $L^2[a,b]$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \qquad (2.8) \\ d(x,y) &= \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

2.2 Operator linear

Pemetaan antar ruang vektor disebut sebagai **operator**. Pada subbab ini diperkenalkan mengenai operator linear. Dilanjutkan dengan operator linear terbatas di 2.2.1, operator linear *self adjoint* terbatas di 2.2.2, operator linear tertutup di 2.2.3, dan pemetaan buka di 2.2.4. Berikut ini adalah pengertian dari operator linear.

Definisi 2.11. ***Operator linear*** *T adalah operator yang*

1. *domain $D(T)$ dari T adalah ruang vektor dan range $\Re(T)$ berada di ruang vektor atas lapangan yang sama,*
2. *untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan skalar a,*

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x)+T(y) \\ T(ax) &= aT(x). \end{aligned}$$

Inversi (*inverse*) dari operator T dilambangkan dengan T^{-1} dan memenuhi $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Operator I adalah operator identitas yang memetakan setiap x ke dirinya sendiri, atau dapat ditulis $I(x) = x$. Inversi dari operator linear T memiliki sifat-sifat seperti pada teorema berikut ini.

Teorema 2.9. *Misal X, Y suatu ruang vektor, dan keduanya real atau keduanya kompleks. Misal $T : D(T) \longrightarrow Y$ adalah operator linear dengan $D(T) \subset X$ dan range $\Re(T) \subset Y$. Maka:*

(a) *Inversi $T^{-1} : \Re(T) \longrightarrow D(T)$ ada jika dan hanya jika $T(x) = 0$ menyebabkan $x = 0$.*

(b) *Jika T^{-1} ada maka T^{-1} adalah operator linear.*

2.2.1 Operator linear terbatas

Pada bagian ini diperkenalkan mengenai operator linear terbatas. Berikut ini adalah pengertian dari operator linear terbatas.

Definisi 2.12. *Misal X dan Y adalah ruang ber-norm dan $T : D(T) \longrightarrow Y$ adalah sebuah operator linear, dengan $D(T) \subset X$. Operator T disebut* ***terbatas*** *bila ada bilangan real c sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D(T)$*

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|. \tag{2.9}$$

Norm dari T adalah

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}. \tag{2.10}$$

dapat dilihat bahwa $\|T\|$ dapat dipilih sebagai c pada Definisi 2.12 sehingga pertidaksamaan (2.9) menjadi

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|. \tag{2.11}$$

Dari persamaan (2.10) dapat dibentuk persamaan *norm* dari T berikut ini

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|. \tag{2.12}$$

Operator linear terbatas juga merupakan pemetaan kontinu, hal ini terdapat pada teorema berikut ini.

Teorema 2.10. *Misal $T : D(T) \longrightarrow Y$ adalah operator linear, dengan $D(T) \subset X$ dan X, Y adalah ruang ber-norm. T kontinu jika dan hanya jika T terbatas.*

2.2.2 Operator linear *self adjoint* terbatas

Pada bagian ini diperkenalakan mengenai operator linear *self adjoint* terbatas. Berikut ini adalah pengertian operator linear *self adjoint* terbatas.

Definisi 2.13. *Misal $T : H_1 \longrightarrow H_2$ adalah operator linear terbatas dengan H_1 dan H_2 merupakan ruang Hilbert.* ***Operator adjoint Hilbert*** *T^* dari T adalah operator*

$$T^* : H_2 \to H_1$$

sedemikian sehingga untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$,

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

Operator T disebut ***selfadjoint*** *bila $T^* = T$.*

Teorema berikut ini adalah suatu sifat dari operator linear *self adjoint* terbatas.

Teorema 2.11. *Misal H adalah ruang Hilbert dan operator $T : H \longrightarrow H$ adalah operator linear terbatas. Jika T self adjoint, maka untuk setiap x di H, $\langle T(x), x \rangle$ bernilai real.*

Berikut ini adalah beberapa contoh dari operator linear *self adjoint* terbatas.

Contoh 2.12. Misalkan $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ didefinisikan sebagai $(a_n) \longmapsto (\lambda_n a_n)$, dengan (λ_n) adalah barisan terbatas di $\mathbb{R}$. Misalkan λ adalah suprimum dari barisan (λ_n). Operator T merupakan operator linear karena untuk setiap $x,y \in \ell^2$, dengan $x = (a_n)$ dan $y = (b_n)$, didapat

$$T(x+y) = (\lambda_n(a_n+b_n)) = ((\lambda_n\, a_n) + (\lambda_n\, b_n)) = T(x) + T(y)$$

dan untuk suatu bilangan kompleks k didapat

$$T(k\,x) = (\lambda_n(k\,a_n)) = k(\lambda_n\, a_n) = k\,T((a_n)) = k\,T(x).$$

Dari persamaan (2.6) didapat

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |a_n|^2} \\ &\leq \sqrt{\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \\ &\leq \lambda \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \\ &\leq \lambda \|x\|, \end{aligned}$$

sehingga T terbatas. Dari persamaan (2.5) didapat

$$\begin{aligned} \langle T(x), y \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, a_n\, \overline{b_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \overline{\lambda_n\, b_n} \\ &= \langle x, T(y) \rangle, \end{aligned}$$

sehingga T *self adjoint*. Jadi dapat disimpulkan bahwa T adalah operator linear *self adjoint* terbatas.

Contoh 2.13. Misal $T : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ dengan $(T(x))(t) = tx(t)$ untuk $t \in [0,1]$. Untuk setiap $x,y \in L^2[0,1]$ dan $a \in \mathbb{C}$ didapat

$$(T(x+y))(t) = t(x+y)(t) = t(x(t)+y(t)) = tx(t)+ty(t) = (T(x))(t)+(T(y))(t)$$

dan

$$(T(a\,x))(t) = t\,a\,x(t) = a\,t\,x(t) = a(T(x))(t),$$

sehingga T adalah operator linear. Dari persamaan (2.8)

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \sqrt{\int_0^1 |t\,x(t)|^2 dt} \\ &\leq \|x\| \text{ karena } t \leq 1 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sehingga T terbatas. Dari persamaan (2.7)

$$\begin{aligned} \langle T(x), y\rangle &= \int_0^1 t\,x(t)\,\overline{y(t)}dt \\ &= \int_0^1 x(t)\,\overline{t\,y(t)}dt \\ &= \langle x, T(y)\rangle, \end{aligned}$$

sehingga T *self adjoint*. Jadi T adalah operator linear *self adjoint* terbatas.

2.2.3 Operator linear tertutup

Pada skripsi ini digunakan beberapa sifat dari operator linear tertutup. Oleh karena itu, pada bagian ini diperkenalkan mengenai operator linear tertutup. Berikut ini adalah pengertian dari operator linear tertutup.

Definisi 2.14. *Misal X dan Y adalah ruang ber-norm dan $T : D(T) \longrightarrow Y$ adalah operator linear dengan domain $D(T) \subset X$. T disebut **operator linear tertutup** jika grafik*

$$G(T) = \{(x,y)|x \in D(T),\, y = T(x)\} \tag{2.13}$$

tertutup pada ruang ber-norm $X \times Y$, dengan dua operasi aljabar pada ruang vektor di $X \times Y$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} (x_1,y_1) + (x_2,y_2) &= (x_1+x_2, y_1+y_2) \\ a(x,y) &= (ax, ay) \end{aligned}$$

(suatu skalar a) dan norm di $X \times Y$ didefinisikan sebagai

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|. \tag{2.14}$$

Grafik $G(T)$ pada Definisi 2.14 merupakan suatu himpunan dan merupakan subhimpunan dari ruang ber-*norm* $X \times Y$, sehingga grafik tertutup pada Definisi 2.14 mengikuti pengertian himpunan tertutup. Selain dari grafik, suatu operator linear dapat dikatakan tertutup dengan memperhatikan barisan pada domain dan *range*-nya, hal ini diterangkan pada teorema berikut.

Teorema 2.14. *Misal X dan Y adalah ruang ber-norm dan $T : D(T) \longrightarrow Y$ adalah operator linear dengan domain $D(T) \subset X$. T tertutup jika dan hanya jika memenuhi syarat; jika $x_n \longrightarrow x$, dengan $x_n \in D(T)$, dan $T(x_n) \longrightarrow y$, maka $x \in D(T)$ dan $T(x) = y$.*

Berikut ini adalah sifat dari inversi operator linear tertutup.

Teorema 2.15. *Jika operator linear tertutup T memiliki inversi, maka T^{-1} merupakan operator linear tertutup.*

Bukti. Misalkan $P : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ adalah suatu operator dengan $(x,y) \mapsto (y,x)$. Berdasarkan persamaan (2.14) maka $\|(x,y)\| = \|(y,x)\|$. Berdasarkan persamaan (2.1) dapat dibentuk suatu metrik dari *norm*. Metrik d di $X \times Y$ adalah

$$\begin{aligned} d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| \\ &= \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|, \end{aligned} \tag{2.15}$$

dan metrik $\widetilde{d}$ di $Y \times X$ adalah

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(P(x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \widetilde{d}((y_1,x_1)-(y_2,x_2)) \\ &= \|(y_1,x_1)-(y_2,x_2)\| \\ &= \|y_1 - y_2\| + \|x_1 - x_2\|, \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$. Dari persamaan (2.15) dan (2.16) didapat

$$\widetilde{d}(P(x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d((x_1,y_1),(x_2,y_2)),$$

yang mengakibatkan P adalah isometrik.

Berdasarkan Teorema 2.9 didapat T^{-1} merupakan suatu operator linear. Grafik dari T^{-1} dapat ditulis sebagai

$$G(T^{-1}) = \{(T(x),x) | x \in D(T)\}$$

yang merupakan subhimpunan dari $Y \times X$. Karena $G(T) \subset X \times Y$ tertutup (disebabkan oleh T tertutup) dan ada operator P yang isometrik, maka $G(T^{-1})$ tertutup. Jadi didapat T^{-1} merupakan operator linear tertutup. $\square$

Untuk operator linear terbatas, terdapat hubungan antara himpunan yang tertutup dengan operator tertutup. Hubungan tersebut terdapat pada teorema berikut.

Lema 2.16. *Misal $T : D(T) \longrightarrow Y$ adalah operator linear terbatas dengan domain $D(T) \subset X$, serta X dan Y adalah ruang ber-norm. Maka:*

1. *Jika $D(T)$ subhimpunan tertutup di X, maka T tertutup.*
2. *Jika T tertutup dan Y lengkap, maka $D(T)$ subhimpunan tertutup di X.*

2.2.4 Pemetaan buka

Pada bagian ini diperkenalkan mengenai pemetaan buka. Berikut ini adalah pengertian dari pemetaan buka.

Definisi 2.15. *Misal X,Y adalah ruang metrik. Suatu operator $T : D(T) \longrightarrow Y$ disebut sebagai **pemetaan buka** jika setiap himpunan buka di $D(T) \subset X$ dipetakan ke himpunan buka di Y.*

Operator linear terbatas di ruang Banach adalah pemetaan buka, hal ini terdapat pada teorema berikut.

Teorema 2.17. *Operator linear terbatas T yang memetakan ruang Banach X pada ruang Banach Y adalah pemetaan buka. Jika T bijektif, maka T^{-1} kontinu dan terbatas.*

2.3 Teori spektral di ruang ber-*norm* berdimensi hingga

Pada bagian ini diperkenalkan mengenai teori spektral di ruang ber-*norm* berdimensi hingga. Berikut ini diperkenalkan spektrum dan himpunan *resolvent* dari matriks.

Definisi 2.16. ***Nilai eigen** dari matriks persegi $A = (a_{ij})$ adalah bilangan kompleks λ yang sedemikian sehingga persamaan $Ax = \lambda x$ memiliki solusi $x \neq 0$. Vektor x ini disebut sebagai **vektor eigen** dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ dan vektor nol membentuk subruang vektor dari X yang disebut **ruang eigen** dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Himpunan $\sigma(A)$ yang memuat semua nilai eigen dari A disebut **spektrum** dari A. Komplemennya $\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A)$ di bidang kompleks disebut himpunan resolvent dari A.*

Apabila λ adalah nilai eigen dari matriks persegi A, λ adalah solusi dari persamaan karakteristik dari A, yaitu $\det(A-\lambda I)=0$. Setiap operator linear di ruang berdimensi hingga pasti terdapat matriks representasi. Merujuk dari Jacob (1990), berikut ini adalah pengertian dari matriks representasi.

Definisi 2.17. *Misal $T: V \longrightarrow W$ suatu operator linear, dengan $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ adalah basis terurut dari ruang vektor V dan $C=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$ adalah basis terurut dari ruang vektor W. Didefinisikan $T_{BC}=(a_{ij})$ suatu matriks $m\times n$ dengan konstanta a_{ij} dapat ditentukan secara unik dari persamaan*

$$T(v_j)=a_{1j}w_1+a_{2j}w_2+\cdots+a_{mj}w_m$$

untuk setiap j. Matriks T_{BC} disebut ***matriks representasi*** *dari operator linear T.*

Apabila operator linear $T: X \longrightarrow X$ di ruang ber-*norm* X berdimensi hingga, maka matriks representasinya adalah matriks persegi. Nilai eigen dari matriks representasi dari T memiliki sifat berikut ini.

Teorema 2.18. *Setiap matriks yang merepresentasikan operator linear $T: X \longrightarrow X$ di ruang ber-norm berdimensi hingga X relatif terhadap berbagai basis dari X mempunyai nilai eigen yang sama.*

Nilai eigen matriks representasi dari T juga merupakan nilai eigen dari T, hal ini berlaku juga untuk spektrum dan himpunan *resolvent* dari T. Untuk memudahkan dalam memahami, diberikan contoh berikut ini.

Contoh 2.19. Misalkan $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $T(v)=2v$ dan $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Misal $B=\{(1,0),(0,1)\}$ dan $C=\{(1,0),(1,1)\}$ merupakan basis dari $\mathbb{R}^2$.

Apabila T memetakan dari ruang yang berbasis B ke ruang yang berbasis C. Sebelum mencari matriks representasi T_{BC} harus dihitung dahulu peta dari anggota basis B, yaitu

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (2,0)=2(1,0)+0(1,1) \\ T(0,1) &= (0,2)=-2(1,0)+2(1,1). \end{aligned}$$

Jadi didapat $a_{11}=2$, $a_{12}=-2$, $a_{21}=0$, dan $a_{22}=2$ sehingga

$$T_{BC}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari T_{BC} adalah

$$det(T_{BC}-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=0. \tag{2.17}$$

Solusi dari persamaan (2.17) ini tunggal yaitu $\lambda_1 = 2$. Untuk λ_1 demikian dapat dipilih $v_1 = (1,0)$ sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1. Dapat dilihat juga bahwa $T(v_1) = \lambda_1 v_1$. Jadi spektrum dari T_{BC} adalah $\sigma(T_{BC}) = \{2\}$.

Apabila T memetakan dari ruang yang berbasis C ke ruang yang berbasis B. Sebelum mencari matriks representasi T_{CB} harus dihitung dahulu peta dari anggota basis C, yaitu

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (2,0) = 2(1,0)+0(0,1) \\ T(1,1) &= (2,2) = 2(1,0)+2(0,1). \end{aligned}$$

Jadi didapat $a_{11} = 2$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 0$, dan $a_{22} = 2$ sehingga

$$T_{CB} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari T_{CB} adalah

$$det(T_{CB}-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=0. \tag{2.18}$$

Solusi dari persamaan (2.18) ini tunggal yaitu $\lambda_2 = 2$. Untuk λ demikian dapat dipilih $v_2 = (0,1)$ sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Dapat dilihat juga bahwa $T(v_2) = \lambda_2 v_2$. Jadi spektrum dari T_{CB} adalah $\sigma(T_{CB}) = \{2\}$. Dapat dilihat $\sigma(T_{BC}) = \sigma(T_{CB})$ dan juga merupakan spektrum dari T, $\sigma(T) = \{2\}$.

BAB 3
SPEKTRUM DAN HIMPUNAN *RESOLVENT* DARI OPERATOR LINEAR TERBATAS DAN OPERATOR LINEAR *SELF ADJOINT* TERBATAS

Bab ini terdiri dari konsep dasar di subbab 3.1, spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear terbatas di subbab 3.2, serta spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear terbatas di subbab 3.3.

3.1 Konsep dasar

Misalkan X adalah ruang ber-*norm* kompleks dan $T : D(T) \longrightarrow X$ adalah operator linear dengan $D(T) \subset X$. Bentuk operator

$$T_\lambda = T - \lambda I \tag{3.1}$$

dengan λ adalah bilangan kompleks dan I adalah operator identitas di $D(T)$. Karena T adalah operator linear, maka operator T_λ juga merupakan operator linear. Hal ini dapat ditunjukkan dengan

$$T_\lambda(x+y) = T(x+y) - \lambda(x+y) = T(x) - \lambda x + T(y) - \lambda y = T_\lambda(x) + T_\lambda(y),$$

dan

$$T_\lambda(kx) = T(kx) - \lambda(kx) = k(T(x) - \lambda x) = kT_\lambda(x).$$

berlaku untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan skalar $k \in \mathbb{C}$.

Operator *resolvent* dari T adalah operator $R_\lambda(T)$ dengan $R_\lambda(T) = (T_\lambda)^{-1}$. Operator *resolvent* belum tentu ada, karena T_λ belum tentu memiliki inversi. Apabila $R_\lambda(T)$ ada, maka $R_\lambda(T)$ merupakan operator linear (dengan Teorema 2.9). Penulisan $R_\lambda(T)$ disederhanakan menjadi R_λ apabila operator T yang dibahas sudah jelas. Berikut ini adalah pengertian dari spektrum dan himpunan *resolvent* secara umum.

Definisi 3.1. *Misal $X \neq \{0\}$ adalah ruang ber-norm kompleks dan $T : D(T) \longrightarrow X$ adalah operator linear dengan $D(T) \subset X$.* ***Nilai biasa*** *(regular value) λ dari T adalah bilangan kompleks sedemikian sehingga*

(R1) $R_\lambda(T)$ *ada*

(R2) $R_\lambda(T)$ *terbatas*

(R3) *$R_\lambda(T)$ terdefinisi pada himpunan yang padat terhadap X.*

Himpunan resolvent *$\rho(T)$ dari T adalah kumpulan semua nilai biasa λ dari T. Komplemennya $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ di bidang kompleks $\mathbb{C}$ disebut* ***spektrum*** *dari T, dan $\lambda \in \sigma(T)$ disebut* ***nilai spektral*** *dari T. Lebih lanjut, spektrum $\sigma(T)$ dipartisi menjadi tiga himpunan yang saling bebas, yaitu:*

1. ***Spektrum titik*** *atau spektrum diskrit $\sigma_p(T)$ adalah himpunan dari λ yang sedemikian sehingga $R_\lambda(T)$ tidak ada. Nilai $\lambda \in \sigma_p(T)$ disebut* ***nilai eigen*** *dari T.*
2. ***Spektrum kontinu*** *$\sigma_c(T)$ adalah himpunan dari λ yang sedemikian sehingga $R_\lambda(T)$ ada dan memenuhi (R3) tapi tidak memenuhi (R2), yaitu $R_\lambda(T)$ tidak terbatas.*
3. ***Spektrum residual*** *$\sigma_r(T)$ adalah himpunan dari λ yang sedemikian sehingga $R_\lambda(T)$ ada (bisa sebagai operator linear terbatas atau tidak) namun tidak memenuhi (R3), yaitu domain dari $R_\lambda(T)$ tidak padat di X.*

Teorema 2.9 butir (a) berbunyi, $R_\lambda(T)$ ada jika dan hanya jika $T_\lambda(x) = 0$ mengakibatkan vektor $x = 0$. Oleh karenanya, jika $T_\lambda(x) = 0$ untuk suatu $x \neq 0$, maka $R_\lambda(T)$ tidak ada atau dengan kata lain λ adalah nilai eigen dari T. Vektor x ini disebut sebagai vektor eigen dari T yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Kumpulan semua vektor eigen dari T yang bersesuaian dengan nilai eigen λ dan vektor 0 membentuk subruang di $D(T)$ yang disebut ruang eigen dari T yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Sampai di sini, terlihat bahwa pengertian nilai eigen pada Definisi 3.1 harmonis dengan Definisi 2.16.

Misal A adalah matriks $n \times n$. Matriks A sendiri adalah suatu operator linear di ruang vektor berdimensi n. Apabila matriks A memiliki inversi, maka jelas bahwa inversinya adalah suatu operator linear yang terbatas dan terdefinisi di ruang berdimensi n. Mengingat spektrum dari operator linear di ruang berdimensi hingga adalah spektrum dari matriks representasinya, maka terlihat bahwa spektrum kontinu dan spektrum *residual* dari operator linear di ruang berdimensi hingga adalah himpunan kosong. Dengan kata lain setiap nilai spektralnya adalah nilai eigen.

Berikut contoh-contoh operator linear dengan spektrumnya,

Contoh 3.1. Misal operator linear $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ didefinisikan sebagai

$$(a_1, a_2, \cdots) \longmapsto (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \cdots),$$

dengan (λ_j) adalah barisan terbatas di $\mathbb{R}$ dan konvergen ke suatu $k \notin (\lambda_j)$.

$T - \lambda I$ didefinisikan dengan

$$(a_1, a_2, \cdots) \longmapsto ((\lambda_1 - \lambda)a_1, (\lambda_2 - \lambda)a_2, \cdots).$$

R_λ terdefinisi sebagai

$$(a_1, a_2, \cdots) \longmapsto \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda}a_1, \frac{1}{\lambda_2 - \lambda}a_2, \cdots\right).$$

R_λ ada untuk setiap $\lambda \neq \lambda_j$. R_λ yang ada selalu terbatas kecuali untuk $\lambda = k$. Jadi $\rho(T) = \mathbb{C} - (\{\lambda_j | \forall j\} \cup \{k\})$ dan $\sigma(T) = \{\lambda_j | \forall j\} \cup \{k\}$, dengan λ_j merupakan anggota spektrum titik dari T, dan k merupakan anggota spektrum kontinu dari T. Berdasarkan Contoh 2.12, T adalah operator linear *self adjoint* terbatas. Hal ini mengakibatkan operator T tidak memiliki spektrum residual, karena operator linear *self adjoint* terbatas tidak memiliki spektrum residual (hal ini ditunjukkan di Teorema 3.18).

Contoh 3.2. Misal operator linear $T : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ didefinisikan sebagai

$$(T(x))(t) = tx(t)$$

dengan $t \in [0,1]$. Operator T_λ didefinisikan dengan

$$(T_\lambda(x))(t) = (t - \lambda)x(t).$$

R_λ terdefinisi sebagi

$$(R_\lambda(x))(t) = \frac{1}{t - \lambda}x(t).$$

$R_\lambda(x)$ terdefinisi dengan baik kecuali ketika λ berada di interval tutup $[0,1]$, sehingga setiap $\lambda \in [0,1]$ bukanlah anggota dari $\rho(T)$. Jadi $\rho(T) = \mathbb{C} - [0,1]$ dan $\sigma(T) = [0,1]$, dengan $[0,1]$ adalah spektrum kontinu dari T. Operator T tidak memiliki nilai eigen, hal ini ditunjukkan pada Contoh 3.12. Operator T juga tidak memiliki spektrum residual, karena T merupakan operator linear *self adjoint* terbatas (Contoh 2.13).

Contoh 3.3. (Operator geser ke kanan) Misal operator linear $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ didefinisikan sebagai

$$(a_1, a_2, \cdots) \longmapsto (0, a_1, a_2, \cdots).$$

$T-\lambda I$ didefinisikan dengan

$$(a_1,a_2,\cdots)\longmapsto(-\lambda a_1,a_1-\lambda a_2,a_2-\lambda a_3,\cdots).$$

Untuk $\lambda\neq 0$, R_λ didefinisikan sebagai

$$(a_1,a_2,\cdots)\longmapsto(-\frac{a_1}{\lambda},-\frac{a_1}{\lambda^2}-\frac{a_2}{\lambda},-\frac{a_1}{\lambda^3}-\frac{a_2}{\lambda^2}-\frac{a_3}{\lambda},\cdots)$$

Operator R_0 ada sebagai operator geser ke kiri, yaitu

$$(0,a_1,a_2,\cdots)\longmapsto(a_1,a_2,\cdots).$$

Untuk $|\lambda|>1$, dapat ditunjukkan bahwa R_λ terbatas, namun tidak untuk $0<|\lambda|\leq 1$. Jadi $\rho(T)=\mathbb{C}-\{\lambda\mid|\lambda|\leq 1\}$ dan $\sigma(T)=\{\lambda\mid|\lambda|\leq 1\}$. Operator T tidak memiliki nilai eigen, karena operator $R_\lambda(T)$ ada untuk setiap λ. Serta $0<|\lambda|\leq 1$ adalah anggota spektrum kontinu dari T. Dari definisi T, $T_0(\ell^2)$ tidak padat di ℓ^2 maka $\lambda=0$ adalah anggota spektrum residual.

Lema berikut ini adalah suatu sifat dari operator *resolvent* dari operator linear terbatas di ruang Banach kompleks.

Lema 3.4. *Misal X adalah ruang Banach kompleks, operator $T:X\longrightarrow X$ adalah operator linear, dan $\lambda\in\rho(T)$. Dengan asumsi (a) T tertutup atau (b) T terbatas, maka $R_\lambda(T)$ terdefinisi di seluruh ruang X dan terbatas.*

Bukti. (a) Karena T tertutup, dengan menggunakan Teorema 2.14 dapat ditunjukkan bahwa T_λ tertutup. Akibatnya $R_\lambda=(T_\lambda)^{-1}$ juga tertutup dengan berdasarkan Teorema 2.15. Karena X adalah ruang yang lengkap maka Teorema 2.16 butir ke 2 mengakibatkan $D(R_\lambda)$ tertutup. Berdasarkan Definisi 3.1 butir (R3), $\overline{D(R_\lambda)}=X$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $R_\lambda(T)$ terdefinisi di seluruh ruang X. R_λ terbatas berdasarkan Definisi 3.1 butir (R2).

(b) Karena $D(T)=X$ tertutup, maka T tertutup berdasarkan Teorema 2.16 butir 1. Selanjutnya pembuktian dapat dilanjutkan seperti bagian (a). $\square$

3.2 Spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear terbatas

Misal X adalah ruang Banach kompleks. Himpunan $B(X,X)$ adalah ruang Banach yang beranggotakan semua operator linear terbatas T pada ruang X.

Teorema 3.5. *Misal $T \in B(X,X)$, dengan X adalah ruang Banach kompleks. Jika $\|T\| < 1$, maka $(I-T)^{-1}$ ada sebagai operator linear terbatas yang terdefinisi di seluruh X dan*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \cdots \tag{3.2}$$

dengan deret di kanan konvergen di $B(X,X)$.

Sebelum membuktikan Teorema 3.5, ditunjukkan terlebih dahulu untuk setiap operator linear terbatas T berlaku pertidaksamaan berikut ini

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n, \tag{3.3}$$

dengan n ialah bilangan asli.

Dengan persamaan (2.11), untuk setiap x di $D(T)$ berlaku

$$\|T^n(x)\| = \|T(T^{n-1}(x))\| \leq \|T\|\|T^{n-1}(x)\|.$$

Lalu diteruskan hingga didapat

$$\|T^n(x)\| \leq \|T\|^n\|x\|,$$

atau apabila $x \neq 0$ dapat ditulis dengan

$$\frac{\|T^n(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\|^n. \tag{3.4}$$

Berdasarkan persamaan (2.10), *norm* dari T^n adalah

$$\|T^n\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T^n(x)\|}{\|x\|}. \tag{3.5}$$

Dari pertidaksamaan (3.4) dan persamaan (3.5) maka didapat pertidaksamaan (3.3).

Berikut ini adalah bukti dari Teorema 3.5.

Bukti. Dengan pertidaksamaan (3.3) dan $\|T\| < 1$, maka deret geometri

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\|$$

konvergen. Jadi didapat deret pada (3.2) konvergen mutlak untuk $\|T\| < 1$. Karena

$B(X,X)$ lengkap, deret pada (3.2) juga konvergen.

Operator $I - T^{n+1}$ dapat dibentuk menjadi

$$I - T^{n+1} = (I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^n) = (I+T+T^2+\cdots+T^n)(I-T).$$

Ketika $n \to \infty$, dengan menggunakan pertidaksamaan (3.3) didapat $T^{n+1} \to 0$. Jadi didapat

$$I = (I-T)(I+T+T^2+\cdots) = (I+T+T^2+\cdots)(I-T),$$

yang berarti $(I-T)^{-1}$ ada sebagai $I+T+T^2+\cdots$. Mengingat T terdefinisi di seluruh X, maka $(I-T)^{-1}$ juga terdefinisi di seluruh X. Lalu, kekonvergenan deret (3.2) ini menyebabkan operator $(I-T)^{-1}$ terbatas. □

Teorema 3.5 memiliki kontribusi dalam mendapatkan sifat dari spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear terbatas berikut ini.

Teorema 3.6. *Misal T adalah operator linear terbatas di ruang Banach kompleks X. Himpunan resolvent $\rho(T)$ dari T adalah buka, yang juga berarti spektrum $\sigma(T)$ dari T tertutup.*

Bukti. Untuk $\rho(T) = \emptyset$, himpunan *resolvent* buka (sebenarnya $\rho(T)$ tidak kosong, hal ini ditunjukkan pada Teorema 3.8).

Untuk $\rho(T) \neq \emptyset$, misalkan $\lambda_0 \in \rho(T)$. Untuk sembarang $\lambda \in \mathbb{C}$ dibentuk

$$\begin{aligned} T - \lambda I &= T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I \\ &= (T - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}) \end{aligned}$$

Misalkan $V = I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}$, sehingga dapat ditulis $T_\lambda = T_{\lambda_0} V$. Karena T terbatas, maka R_{λ_0} terdefinisi di seluruh X dan juga terbatas dengan Lema 3.4 butir (b). Dengan demikian, operator $T_\lambda = T_{\lambda_0} V$ terdefinisi dengan baik. Untuk λ yang memenuhi

$$\begin{aligned} \|(\lambda - \lambda_0)(R_{\lambda_0})^{-1}\| &< 1 \\ |\lambda - \lambda_0| &< \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

maka berdasarkan Teorema 3.5 V mempunyai inversi yang terdefinisi di seluruh X

dan terbatas, dengan

$$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j (R_{\lambda_0})^j. \tag{3.7}$$

Jadi inversi dari T_λ terdefinisi sebagai $R_\lambda = V^{-1} R_{\lambda_0}$, dengan syarat λ pada pertidaksamaan (3.6). Jadi setiap $\lambda \in B\left(\lambda_0; \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}\right)$ adalah nilai biasa dari T. Karena λ_0 diambil sembarang, dapat disimpulkan bahwa himpunan *resolvent* dari T buka dan komplemennya terhadap bidang kompleks $\sigma(T)$ adalah himpunan tertutup. □

Dengan bukti Teorema 3.6, didapatkan suatu representasi dari operator *resolvent* seperti pada teorema berikut ini.

Teorema 3.7. *Misal T adalah operator linear terbatas di ruang Banach kompleks X dan suatu $\lambda_0 \in \rho(T)$. Representasi dari fungsi resolvent $R_\lambda(T)$ adalah*

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j (R_{\lambda_0})^{j+1}. \tag{3.8}$$

Deret ini konvergen mutlak untuk setiap λ di cakram buka

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \tag{3.9}$$

di bidang kompleks. Cakram tersebut adalah subhimpunan dari $\rho(T)$.

Bukti. Dari bukti Teorema 3.6, didapat $R_\lambda = V^{-1} R_{\lambda_0}$ dengan V^{-1} pada persamaan (3.7) dan λ di cakram (3.9). Ketika V^{-1} disubtitusikan ke R_λ maka didapat persamaan (3.8). Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.3), dapat ditunjukkan deret geometri

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|(\lambda - \lambda_0)^j (R_{\lambda_0}(T))^{j+1}\|$$

konvergen dengan λ di cakram (3.9), sehingga deret (3.8) konvergen mutlak untuk λ di cakram (3.9). Karena setiap λ di cakram (3.9) merupakan nilai biasa dari T, maka cakram (3.9) merupakan subhimpunan dari $\rho(T)$. □

Selain Teorema 3.6, Teorema 3.5 juga memiliki kontribusi dalam mendapatkan sifat spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear terbatas berikut ini.

Teorema 3.8. *Spektrum $\sigma(T)$ dari operator linear terbatas $T : X \longrightarrow X$ di ruang Banach kompleks X merupakan himpunan kompak dan berada di cakram*

$$|\lambda| \leq \|T\|. \tag{3.10}$$

Himpunan resolvent $\rho(T)$ dari T tidak kosong.

Bukti. Misal $\lambda \neq 0$. Operator linear T_λ dapat ditulis sebagai

$$T_\lambda = T - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right).$$

Berdasarkan Teorema 3.5, T_λ memiliki inversi yang terbatas dan terdefinisi di seluruh X apabila memenuhi

$$\left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| < 1 \text{ atau dengan kata lain } |\lambda| > \|T\|.$$

Akibatnya λ yang memenuhi $|\lambda| > \|T\|$ berada di himpunan *resolvent* dari T. Jadi $\rho(T)$ tidak kosong dan spektrum dari T harus berada di cakram (3.10). Dengan demikian spektrum dari T terbatas. Spektrum dari T tertutup berdasarkan Teorema 3.6. Berdasarkan Teorema 2.1 dapat disimpulkan $\sigma(T)$ kompak. $\square$

Dapat ditunjukkan bahwa $\|T\|$ dari operator linear di Contoh 3.1 adalah maksimum dari $\{\{|\lambda_j| | \forall j\} \cup \{|k|\}\}$. Dapat ditunjukkan juga bahwa $\|T\|$ dari operator linear di Contoh 3.2 dan Contoh 3.3 adalah 1. Dengan demikian terlihat bahwa, spektrum dan himpunan *resolvent* dari operator linear di Contoh 3.1, Contoh 3.2, dan Contoh 3.3 memenuhi Teorema 3.8.

Terlepas dari sifat spektrum dan himpunan *resolvent*, mari perhatikan operator *resolvent*. Berikut ini adalah suatu sifat antar operator *resolvent* dari operator linear terbatas.

Teorema 3.9. *Misal X adalah ruang Banach kompleks, $T \in B(X,X)$ dan bilangan $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Maka:*

a. *Operator resolvent R_λ dari T memenuhi relasi Hilbert atau persamaan resolvent*

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda. \tag{3.11}$$

b. *R_λ komutatif dengan setiap $S \in B(X,X)$ yang komutatif dengan T.*

c. $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

Bukti. Untuk setiap $\lambda \in \rho(T)$, berdasarkan Lema 3.4 terdapat operator identitas $I = T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda$ yang terdefinisi di X.

(a) Karena $T_\lambda - T_\mu = T - \lambda I - (T - \mu I) = (\mu - \lambda)I$, konsekuensinya

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\lambda &= R_\mu(T_\lambda R_\lambda) - (R_\mu T_\mu)R_\lambda \\ &= R_\mu(T_\lambda - T_\mu)R_\lambda \\ &= (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda. \end{aligned}$$

(b) Misal $S \in B(X,X)$ sedemikian sehingga $TS = ST$. Karena $\lambda IS = S\lambda I$, maka didapat $T_\lambda S = ST_\lambda$. Didapat R_λ komutatif dengan S dikarenakan

$$R_\lambda S = R_\lambda S T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda S R_\lambda = S R_\lambda.$$

(c) Karena $R_\mu \in B(X,X)$ komutatif dengan T, berdasarkan (b) didapat R_λ komutatif dengan R_μ.

□

Sedikit kembali pada konsep dasar bahwa nilai λ adalah nilai eigen dari operator linear T apabila $(T - \lambda I)(x) = 0$ (atau $T(x) = \lambda x$) untuk suatu x bukan vektor nol. Karena T adalah operator linear, didapat

$$T^2(x) = T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda^2 x.$$

Dengan menggunakan induksi, didapat

$$T^n(x) = \lambda^n(x)\ , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Didapat bahwa λ^n adalah nilai eigen dari T^n. Dengan ini, dapat disimpulkan juga

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

adalah nilai eigen dari

$$p(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 I.$$

Mari sebut $p(\lambda)$ sebagai polinomial nilai λ dan $p(T)$ sebagai polinomial operator T.

Sampai di sini, terlihat suatu hubungan antara nilai eigen dari suatu operator linear dengan nilai eigen dari polinomial operatornya. Lalu, bagaimana hubungan spektrumnya? Sebelum itu mari definisikan himpunan $p(\sigma(T))$ sebagai himpunan polinomial nilai spektral dari T

$$p(\sigma(T)) = \{\mu \in \mathbb{C} | \mu = p(\lambda), \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Teorema berikut ini adalah suatu hubungan spektrum dari suatu operator linear terbatas dengan spektrum dari polinomial operatornya.

Teorema 3.10. *Misal X adalah ruang Banach kompleks, $T \in B(X,X)$ dan*

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 \ (a_n \neq 0),$$

maka

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T));$$

dengan kata lain spektrum $\sigma(p(T))$ dari operator

$$p(T) = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 I$$

adalah semua nilai dari polinomial p di spektrum $\sigma(T)$ dari T.

Bukti. Asumsikan $\sigma(T) \neq \emptyset$. Karena $T \in B(X,X)$, maka $p(T) \in B(X,X)$ dan faktor-faktor dari $p(T)$ juga termuat di $B(X,X)$.

Untuk polinomial p berderajat $n = 0$. Nilai $p(\lambda) = a_0$ untuk setiap $\lambda \in \mathbb{C}$ sehingga $p(\sigma(T)) = \{a_0\}$. Operator $p(T) = a_0 I$, sehingga $\sigma(p(T)) = \{a_0\}$. Jadi dapat disimpulkan $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

Untuk polinomial p berderajat $n > 0$,

(A) Ditunjukkan bahwa $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$.

Untuk menyederhanakan penulisan, misal $Q = p(T)$ dan $Q_\mu = p(T) - \mu I$ untuk $\mu \in \mathbb{C}$. Dimisalkan juga $q_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu$ dengan μ yang tetap. Karena bekerja di lapangan kompleks, maka polinomial $q_\mu(\lambda)$ dapat difaktorkan menjadi

$$q_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu = a_n(\lambda - b_1)(\lambda - b_2)\cdots(\lambda - b_n). \tag{3.12}$$

Dari pemfaktoran $q_\mu(\lambda)$ di persamaan (3.12), didapat

$$Q_\mu = p(T) - \mu I = a_n(T - b_1 I)(T - b_2 I)\cdots(T - b_n I).$$

Apabila Q_μ mempunyai inversi, Q_μ^{-1} adalah operator *resolvent* dari $p(T)$.

Jika setiap b_j adalah nilai biasa dari T, maka setiap $T - b_j I$ mempunyai inversi yang terbatas dan terdefinisi di seluruh X (dengan Lema 3.4). Hal ini menyebabkan

$$Q_\mu^{-1} = \frac{1}{a_n}(T - b_n I)^{-1} \cdots (T - b_2 I)^{-1}(T - b_1 I)^{-1} \tag{3.13}$$

terbatas dan terdefinisi di seluruh X. Jadi didapat $\mu \in \rho(p(T))$.
Misal $\xi \in \sigma(p(T))$. Seperti pada persamaan 3.12, $q_\xi(\lambda)$ dapat difaktorisasi menjadi

$$q_\xi(\lambda) = p(\lambda) - \xi = a_n(\lambda - c_1)(\lambda - c_2)\cdots(\lambda - c_n). \tag{3.14}$$

Karena bila c_j adalah nilai biasa dari T mengakibatkan $\xi \in \rho(p(T))$, maka haruslah paling tidak terdapat suatu k yang sedemikian sehingga $c_k \in \sigma(T)$. Dengan persamaan (3.14) didapat

$$q_\xi(c_k) = p(c_k) - \xi = 0,$$

sehingga $\xi = p(c_k)$ merupakan anggota $p(\sigma(T))$.
Jadi didapat $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$.

(B) Ditunjukkan bahwa $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.
Misal $\mu \in p(\sigma(T))$, yang berarti $\mu = p(b)$ untuk suatu $b \in \sigma(T)$. Ketika b adalah nilai spektral dari T berarti terdapat dua kemungkinan, yaitu

(a) $T - b\, I$ tidak memiliki inversi.
Karena $\mu = p(b)$ atau $p(b) - \mu = 0$ maka b adalah pembuat nol dari polinomial $q_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu$. Jadi dapat ditulis

$$q_\mu(\lambda) = (\lambda - b)g(\lambda), \tag{3.15}$$

dengan $g(\lambda)$ adalah perkalian dari $n-1$ faktor linear lainnya dan a_n. Berhubungan dengan persamaan (3.15), didapat

$$Q_\mu = p(T) - \mu I = (T - bI)g(T). \tag{3.16}$$

Semua faktor linear dari $g(T)$ komutatif dengan $T - bI$ sehingga didapat

$$Q_\mu = g(T)(T - bI). \tag{3.17}$$

Andaikan Q_μ mempunyai inversi. Dengan persamaan (3.16) dan (3.17) didapat

$$\begin{aligned} I = Q_\mu Q_\mu^{-1} &= Q_\mu^{-1} Q_\mu \\ I = (T - bI)g(T)Q_\mu^{-1} &= Q_\mu^{-1} g(T)(T - bI). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dengan persamaan (3.13), dapat ditulis juga

$$Q_\mu^{-1} = \frac{1}{a_n} R_{b_n} \cdots R_{b_2} R_{b_1}.$$

Berdasarkan Teorema 3.9 butir (b) setiap R_{b_j} komutatif dengan $g(T)$, sehingga Q_μ^{-1} komutatif dengan $g(T)$. Akibatnya persamaan (3.18) menjadi

$$I = (T - bI)g(T)Q_\mu^{-1} = g(T)Q_\mu^{-1}(T - bI),$$

yang berarti $T - bI$ memiliki inversi. Hal ini bertentangan dengan kondisi $T - bI$ tidak memiliki inversi, sehingga operator *resolvent* Q_μ^{-1} dari $p(T)$ haruslah tidak ada. Jadi didapat $\mu \in \sigma(p(T))$, sehingga $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.

(b) $T - bI$ memiliki inversi.

Apabila *range* dari $T - bI$ adalah X, maka berdasarkan Teorema 2.17 $(T - bI)^{-1}$ terbatas. Hal ini mengakibatkan $b \in \rho(T)$ yang bertentangan dengan pernyataan $b \in \sigma(T)$. Jadi haruslah $\mathfrak{R}(T - bI) \neq X$. Dengan persamaan (3.16) didapat $\mathfrak{R}(Q_\mu) \neq X$. Dengan kontraposisi dari Lema 3.4 didapat $\mu \in \sigma(p(T))$, sehingga $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$ di kasus $T - bI$ mempunyai inversi.

Jadi untuk kemungkinan (a) maupun (b) didapat $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.

Jadi dengan (A) dan (B) didapat $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

□

3.3 Spektral dan himpunan *resolvent* dari operator linear *self adjoint* terbatas

Seperti yang diketahui dari landasan teori, bahwa ruang Hilbert juga merupakan ruang ber-*norm* yang lengkap (ruang Banach). Selain itu, operator linear *self adjoint* terbatas juga merupakan operator linear terbatas. Konsekuensinya semua teorema pada Subbab 3.2. juga berlaku di pembahasan pada subbab ini.

Selanjutnya, pada subbab ini digunakan ruang Hilbert kompleks yang dinotasikan dengan $\mathcal{H}$.

Teorema berikut ini adalah suatu sifat yang paling mendasar spektrum titik dari operator linear *self adjoint*. terbatas.

Teorema 3.11. *Misal $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ adalah operator linear self adjoint terbatas maka*

(a) *semua nilai eigen dari T(jika ada) bernilai real.*

(b) *vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda saling tegak lurus dari T.*

Bukti. (a). Diketahui bahwa T *self adjoint* terbatas, sehingga berdasarkan Teorema 2.11, $\langle T(x), x\rangle$ bernilai real. Misal λ adalah nilai eigen dari T dengan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ, didapat

$$\langle T(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle.$$

Karena $\langle x, x\rangle = ||x||^2$ bernilai real, maka λ bernilai real.

(b). Misal $\lambda_1 \neq \lambda_2$ adalah nilai eigen dari T dengan masing-masing vektor eigennya x_1 dan x_2. Karena T *self adjoint* dan berdasarkan butir (a), maka

$$\begin{aligned}
\langle T(x_1), x_2\rangle &= \langle x_1, T(x_2)\rangle \\
\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle &= \overline{\lambda_2}\langle x_1, x_2\rangle \\
\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle &= \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.
\end{aligned}$$

Karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$, maka haruslah $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. Jadi vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda dari T saling tegak lurus. $\square$

Suatu operator linear *self adjoint* mungkin tidak memiliki nilai eigen, berikut ini salah satu contohnya.

Contoh 3.12. $T : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ dengan $(T(x))(t) = t\,x(t)$ untuk $t \in [0,1]$. Berdasarkan Contoh 2.13 maka T adalah operator linear *self adjoint* terbatas.

Misalkan ada nilai eigen λ sedemikian sehingga terdapat fungsi $x \neq 0$ yang memenuhi persamaan $T(x) = \lambda\,x$. Ketika fungsi $T(x)$ memetakan t, didapat $(T(x))(t) = \lambda\,x(t)$. Mengingat bahwa $(T(x))(t) = t\,x(t)$, didapat $t = \lambda$. Hal ini bertentangan dengan λ yang haruslah konstanta. Jadi T tidak memiliki nilai eigen.

Dengan Teorema 3.11, didapatkan sifat nilai biasa dari operator linear *self adjoint* berikut ini.

Teorema 3.13. *Misal $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ adalah operator linear self adjoint terbatas. Suatu konstanta λ merupakan nilai biasa dari T jika dan hanya jika terdapat bilangan real positif c sedemikian sehingga*

$$\|T_\lambda(x)\| \geq c\|x\|, \ \forall x \in \mathcal{H}. \tag{3.19}$$

Bukti. 1. $(\rightarrow)$

Diketahui bahwa λ adalah nilai biasa, sehingga dari Definisi 3.1 R_λ terdefinisi dan terbatas. Berdasarkan Lema 3.4 R_λ terdefinisi di seluruh $\mathcal{H}$, sehingga $I = R_\lambda T_\lambda$ adalah operator identitas di $\mathcal{H}$. Untuk setiap x di $\mathcal{H}$

$$\|x\| = \|I(x)\| = \|(R_\lambda)(T_\lambda)(x)\| \leq \|R_\lambda\|\|T_\lambda(x)\|,$$

sehingga didapat pertidaksamaan (3.19) dengan $c = \frac{1}{\|R_\lambda\|}$.

2. $(\leftarrow)$

Diketahui bahwa terdapat bilangan real $c > 0$ sedemikian sehingga pertidaksamaan (3.19) berlaku. Untuk membuktikan $\lambda \in \rho(T)$ perlu ditunjukkan R_λ ada, terbatas, dan terdefinisi pada domain yang padat terhadap $\mathcal{H}$.

- R_λ ada.

  Perlu ditunjukkan bahwa $T_\lambda : \mathcal{H} \longrightarrow T_\lambda(\mathcal{H})$ adalah fungsi bijektif. Dari pemetaannya dapat terlihat bahwa T_λ surjektif. Selanjutnya tinggal perlu ditunjukkan T_λ injektif.

  Misal $T_\lambda(x_1) = T_\lambda(x_2)$. Kemudian didapat $0 = T_\lambda(x_1 - x_2)$ dikarenakan T adalah operator linear. Berdasarkan aksioma (N2) dari Definisi 2.8 maka,

$$0 = \|T_\lambda(x_1 - x_2)\| \geq c\|x_1 - x_2\| \tag{3.20}$$

  Karena $c > 0$, maka hanya $\|x_1 - x_2\| = 0$ yang memenuhi pertidaksamaan (3.20). Jadi $x_1 = x_2$ sehingg T_λ injektif. Dengan demikian, T_λ bijektif. Karena T_λ bijektif maka dapat disimpulkan R_λ ada.

- R_λ terdefinisi pada domain yang padat terhadap $\mathcal{H}$.

  Mengingat $R_\lambda = (T_\lambda)^{-1}$, sehingga $D(R_\lambda)$ adalah $T_\lambda(\mathcal{H})$. Perlu ditunjukkan bahwa $\overline{T_\lambda(\mathcal{H})} = \mathcal{H}$. Misalkan suatu $x_0 \perp \overline{T_\lambda(\mathcal{H})}$, sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle T_\lambda(x), x_0 \rangle &= 0 \\ \langle T(x), x_0 \rangle - \lambda\langle x, x_0 \rangle &= 0 \\ \langle x, T(x_0) \rangle &= \langle x, \bar{\lambda} x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.4 didapat $T(x_0) = \overline{\lambda}\, x_0$. Andaikan $x_0 \neq 0$, berarti $\overline{\lambda}$ adalah nilai eigen. Didapat $\overline{\lambda} = \lambda$ berdasarkan Teorema 3.11 butir (a), sehingga $T(x_0) - \lambda x_0 = 0$ atau $T_\lambda(x_0) = 0$. Mengingat pernyataan bahwa pertidaksamaan (3.19) berlaku, maka didapat

$$0 = \|T_\lambda(x_0)\| \geq c\|x_0\|. \tag{3.21}$$

Karena $c > 0$, maka hanyalah $\|x_0\| = 0$ yang memenuhi pertidaksamaan (3.21). Hal ini bertentangan dengan pengandaian $x_0 \neq 0$. Jadi solusi dari $T(x_0) = \overline{\lambda}\, x_0$ hanyalah solusi *trivial*, yaitu $x_0 = 0$. Dapat disimpulkan $\overline{T_\lambda(\mathcal{H})}^{\perp} = \{0\}$, yang lalu dengan Teorema 2.2 didapatkan $\overline{T_\lambda(\mathcal{H})} = \mathcal{H}$.

- R_λ terbatas.
  Dalam menunjukkan R_λ terbatas, digunakan Teorema 2.17. Untuk itu, akan dibuktikan $T_\lambda(\mathcal{H})$ tertutup sehingga $T_\lambda(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Misal $y \in \overline{T_\lambda(\mathcal{H})}$, sehingga terdapat barisan $(y_n) = (T_\lambda(x_n))$ (dengan $x_n \in \mathcal{H}$) di $T_\lambda(\mathcal{H})$ yang konvergen ke y. Didapat (x_n) adalah suatu barisan Cauchy, karena

$$\|y_n - y_m\| = \|T_\lambda(x_n - x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\|.$$

  Mengingat $\mathcal{H}$ lengkap, maka (x_n) konvergen ke suatu $x \in \mathcal{H}$. Mengingat T terbatas, maka T_λ juga terbatas. Berdasarkan Teorema 2.10 didapat T_λ kontinu, sehingga $y_n = T_\lambda(x_n)$ konvergen ke $T_\lambda(x)$ dengan $T_\lambda(x) = y$. Berarti $y \in T_\lambda(\mathcal{H})$. Jadi $T_\lambda(\mathcal{H})$ tertutup, yang membawa pada kesimpulan R_λ terbatas.

Jadi dapat disimpulkan, $\lambda \in \rho(T)$. □

Melanjutkan Teorema 3.11 yang berbunyi bahwa semua nilai eigen dari operator linear *self adjoint* terbatas adalah bilangan real, ternyata seluruh spektrum berada di himpunan bilangan real.

Teorema 3.14. *Spektrum $\sigma(T)$ dari suatu operator linear self adjoint terbatas $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ adalah himpunan bilangan real.*

Bukti. Misal $\lambda = a + ib$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Untuk $x \neq 0 \in \mathcal{H}$,

$$\langle T_\lambda(x), x\rangle = \langle T(x), x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \tag{3.22}$$

$$\overline{\langle T_\lambda(x), x\rangle} = \langle T(x), x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle. \tag{3.23}$$

Pengurangan dari persamaan (3.22) dengan persamaan (3.23) menghasilkan

$$2iIm\langle T_\lambda(x),x\rangle = \langle T_\lambda(x),x\rangle - \overline{\langle T_\lambda(x),x\rangle} = (\bar{\lambda}-\lambda)\langle x,x\rangle = -2ib\langle x,x\rangle.$$

Dengan membagi dua dan mencari modulus kedua ruas, maka didapat

$$|Im(\langle T_\lambda(x),x\rangle)| = |b|\|x\|^2.$$

Mengingat $|\langle T_\lambda(x),x\rangle| \geq |Im(\langle T_\lambda(x),x\rangle)|$ dan pertidaksamaan Schwarz, maka didapat

$$\|T_\lambda(x)\| \geq |b|\|x\|.$$

Apabila $b \neq 0$, maka dengan Teorema 3.13 bilangan λ adalah nilai biasa dari T. Jadi bila λ adalah nilai spektral dari T, haruslah $b = 0$ atau dengan kata lain λ bernilai real. □

Lebih rinci lagi, spektrum dari operator linear *self adjoint* terbatas ternyata terdapat di suatu interval tertutup. Hal ini dijelaskan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.15. *Spektrum $\sigma(T)$ dari operator linear self adjoint terbatas $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ berada di interval tertutup bilangan real $[m,M]$ dengan*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x),x\rangle, \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x),x\rangle$$

Bukti. Spektrum $\sigma(T)$ berada di himpunan bilangan real telah dibuktikan di Teorema 3.14. Untuk membuktikan Teorema 3.15, perlu ditunjukkan $\lambda_1 = M + c$ dan $\lambda_2 = m - c$ (dengan $c > 0$) berada di himpunan *resolvent* $\rho(T)$.

Untuk setiap $x \neq 0 \in \mathcal{H}$, dapat dibentuk $v = \|x\|^{-1}x$ sehingga $\|v\| = 1$. Dengan demikian didapatkan

$$\langle T(x),x\rangle = \|x\|^2\langle T(v),v\rangle \leq \|x\|^2 \sup_{\|\tilde{v}\|=1} \langle T(\tilde{v}),\tilde{v}\rangle = \|x\|^2 M$$

dan

$$\langle T(x),x\rangle = \|x\|^2\langle T(v),v\rangle \geq \|x\|^2 \inf_{\|\tilde{v}\|=1} \langle T(\tilde{v}),\tilde{v}\rangle = \|x\|^2 m.$$

Dapat juga ditulis dengan $-\langle T(x),x\rangle \geq -\|x\|^2 M$ dan $\langle T(x),x\rangle \geq \|x\|^2 m$. Lalu, dengan pertidaksamaan Schwarz didapatkan

$$\begin{aligned}
\|T_{\lambda_1}(x)\|\|x\| &\geq -\langle T_{\lambda_1}(x), x\rangle \\
&= -\langle T(x), x\rangle + \lambda_1\langle x, x\rangle \\
&\geq -M\|x\|^2 + \lambda_1\|x\|^2 = c\|x\|^2,
\end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned}
\|T_{\lambda_2}(x)\|\|x\| &\geq \langle T_{\lambda_2}(x), x\rangle \\
&= \langle T(x), x\rangle - \lambda_2\langle x, x\rangle \\
&\geq m\|x\|^2 - \lambda_2\|x\|^2 = c\|x\|^2
\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 3.13 bilangan λ_1 dan λ_2 berada di himpunan resolvent $\rho(T)$. □

Terlepas dari sifat spektrum dan himpunan *resolvent*, teorema berikut ini adalah bentuk persamaan *norm* dari operator linear *self adjoint* terbatas.

Teorema 3.16. *Untuk setiap operator linear self adjoint terbatas T di $\mathcal{H}$*

$$\|T\| = \max(|m|, |M|) = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle| \tag{3.24}$$

dengan m, M seperti yang terdapat dalam Teorema 3.15.

Bukti. Jika $T(x) = 0$ untuk setiap x dengan $\|x\| = 1$, maka $T = 0$. Untuk kasus seperti ini, sudah jelas memenuhi persamaan (3.24).

Untuk kasus yang terdapat suatu x dengan $\|x\| = 1$ sehingga membuat $T(x) \neq 0$, dari pertidaksamaan Schwarz didapat

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|\|x\| = \|T\|. \tag{3.25}$$

Lalu perlu ditunjukkan

$$\|T\| \leq \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle|. \tag{3.26}$$

Bentuk $y_1 = v + w$ dan $y_2 = v - w$ dengan $v = \|T(x)\|^{1/2}x$ dan $w = \|T(x)\|^{-1/2}T(x)$, sehingga $\|v\|^2 = \|w\|^2 = \|T(x)\|$. *Norm* kuadrat dari y_1 dan

y_2 adalah

$$\begin{aligned} \|y_1\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle T(x), x\rangle \text{ dan} \\ \|y_2\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle T(x), x\rangle. \end{aligned}$$

Dengan mengetahui T adalah operator linear *self adjoint* terbatas maka didapatkan

$$\begin{aligned} \langle T(y_1), y_1\rangle - \langle T(y_2), y_2\rangle &= 2(\langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle) \\ &= 2(\langle T(x), T(x)\rangle + \langle T^2(x), x\rangle \\ &= 4\|T(x)\|^2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Untuk setiap $y \neq 0$ dan $z = \|y\|^{-1}y$, didapat

$$|\langle T(y), y\rangle| = \|y\|^2 |\langle T(z), z\rangle| \leq \|y\|^2 \sup_{\|\widetilde{x}\|=1} |\langle T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\rangle|. \tag{3.28}$$

Dengan pertidaksamaan (3.28) dan pertidaksamaan segitiga didapat

$$\begin{aligned} |\langle T(y_1), y_1\rangle - \langle T(y_2), y_2\rangle| &\leq |\langle T(y_1), y_1\rangle| + |\langle T(y_2), y_2\rangle| \\ &\leq (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) \sup_{\|\widetilde{x}\|=1} |\langle T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\rangle| \\ &= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \sup_{\|\widetilde{x}\|=1} |\langle T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\rangle| \\ &= 4\|T(x)\| \sup_{\|\widetilde{x}\|=1} |\langle T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\rangle|. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dari pertidaksamaan (3.29) dan (3.27) didapat

$$\begin{aligned} 4\|T(x)\|^2 &\leq 4\|T(x)\| \sup_{\|\widetilde{x}\|=1} |\langle T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\rangle| \\ \|T(x)\| &\leq \sup_{\|\widetilde{x}\|=1} |\langle T(\widetilde{x}), \widetilde{x}\rangle|. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.12) didapatkan pertidaksamaan (3.26). Dengan pertidaksamaan (3.26) dan pertidaksamaan (3.25) didapatkan persamaan (3.24). □

Telah diketahui bahwa spektrum dari operator linear *self adjoint* terbatas T berada di interval tertutup $[m, M]$ pada Teorema 3.15. Namun perlu dicatat bahwa tidak semua anggota interval $[m, M]$ merupakan anggota spektrum. Tetapi dengan Teorema 3.16 didapatkan suatu hal mengenai nilai m dan M. Hal tersebut berada di teorema berikut ini.

Teorema 3.17. *Misal $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ adalah suatu operator linear self adjoint terbatas dan $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Nilai m dan M adalah nilai spektral dari T.*

Bukti. (1). M adalah nilai spektral.

Berdasarkan Teorema 3.10 didapat

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda + k \in \sigma(T + kI).$$

Jadi dapat diasumsikan $0 \leq m \leq M$. Berdasarkan Teorema 3.16, didapat

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x\rangle = M.$$

Hal ini mengakibatkan $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| = M$ untuk $\|x\| = 1$. Lalu, buat barisan (x_n) yang memenuhi

$$\|x_n\| = 1,\ \ \langle T(x_n), x_n\rangle = M - \delta_n,\ \ \delta_n \geq 0,\ \ \delta_n \to 0.$$

Karena T adalah operator linear *self adjoint*, maka didapat

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - Mx_n\|^2 &= \langle T(x_n) - Mx_n, T(x_n) - Mx_n\rangle \\ &= \|T(x_n)\|^2 - 2M\langle T(x_n), x_n\rangle + M^2\|x_n\|^2 \\ &\leq M^2 - 2M(M - \delta_n) + M^2 \\ &= 2M\delta_n. \end{aligned}$$

Untuk n yang besar $\|T_M(x_n)\| \to 0$. Jadi tidak terdapat bilangan positif c yang memenuhi $\|T_M(x_n)\| \geq c\|x_n\|$, atau dengan kata lain $M \in \sigma(T)$ (Teorema 3.13).

(2). m adalah nilai spektral.

Juga dari Teorema 3.10, dapat diasumsikan $m \leq M \leq 0$. Jadi $\|T\| = |m|$, dan $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| = |m|$ untuk $\|x\| = 1$. Lalu, buat barisan (x_n) yang memenuhi

$$\|x_n\| = 1,\ \ \langle T(x_n), x_n\rangle = m + \varepsilon_n,\ \ \varepsilon_n \geq 0,\ \ \varepsilon_n \to 0.$$

Karena T adalah operator linear *self adjoint*, maka didapat

$$\begin{aligned}\|T(x_n) - m\,x_n\|^2 &= \langle T(x_n) - m\,x_n, T(x_n) - m\,x_n\rangle \\ &= \|T(x_n)\|^2 - 2m\langle T(x_n), x_n\rangle + m^2\|x_n\|^2 \\ &\leq m^2 - 2m(m + \varepsilon_n) + m^2 \\ &= 2\,m\,\varepsilon_n.\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama seperti pembuktian untuk M, maka didapatkan m adalah nilai spektral. $\square$

Walaupun tidak semua anggota interval $[m, M]$ pada Teorema 3.15 adalah anggota spektrum, ujung-ujung intervalnya merupakan nilai spektral.

Spektrum *residual* adalah salah satu bagian dari spektrum. Berikut ini adalah sifat spektrum *residual* dari operator linear *self adjoint* terbatas.

Teorema 3.18. *Spektrum residual $\sigma_r(T)$ dari operator self adjoint terbatas $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ kosong.*

Bukti. Misalkan ada $\lambda \in \sigma_r(T)$. Berdasarkan Definisi 3.1, T_λ^{-1} ada dan domainnya tidak padat terhadap $\mathcal{H}$. Hal ini menyebabkan ada suatu $y \neq 0 \in \mathcal{H}$ yang tegak lurus terhadap $T_\lambda(\mathcal{H})$, sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ didapat

$$\langle T_\lambda(x), y\rangle = 0.$$

Karena T *self adjoint* dan λ bernilai real (Teorema 3.14), maka $\langle x, T_\lambda(y)\rangle = 0$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$. Dengan memilih $x = T_\lambda(y)$, maka $\|T_\lambda(y)\|^2 = 0$ atau dengan kata lain $T_\lambda(y) = 0$. Hal ini berarti λ adalah nilai eigen dari T. Terjadi kontradiksi terhadap $\lambda \in \sigma_r(T)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\sigma_r(T) = \emptyset$. $\square$

BAB 4

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Operator linear terbatas di ruang Banach.
   - Memiliki himpunan *resolvent* berupa himpunan buka dan tak kosong.
   - Memiliki spektrum berupa himpunan yang kompak.
   - Memiliki operator-operator *resolvent* yang saling komutatif.
   - Memiliki himpunan polinomial nilai spektral yang sama dengan spektrum dari operator polinomialnya.
2. Operator linear *self adjoint* terbatas di ruang Hilbert.
   - Memiliki spektrum yang berada di interval tertutup pada garis bilangan real dengan ujung-ujung intervalnya merupakan nilai spektral.
   - Memiliki spektrum *residual* berupa himpunan kosong.

4.2 Saran

Bagi penulis selanjutnya dapat melanjutkan pembahasan dari skripsi ini, dianjurkan untuk memilih topik yang berhubungan dengan

- Aljabar Banach
- Operator linear kompak di ruang ber-*norm* dan spektrumnya.
- Keluarga spektral dari operator linear *self adjoint* terbatas.
- Operator linear tak terbatas di ruang Hilbert.

DAFTAR REFERENSI

[1] Kreyzig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library.

[2] Munkres, J. (2000). *Topology (2nd Edition)*. Prentice Hall USA.

[3] Jacob, B. (1990). *Linear Algebra* .W.H. Freeman and Company.

[4] Tomberg, A. dan Mendelson, D. (2009). *Spectral Theorem for Bounded Self-Adjoint Operators*. The Delta Epsilon - McGill Undergraduate Mathematics Magazine.

[5] *Spectrum of an operator. Example of continuous spectrum*. http://math.arizona.edu/∼lega/583/Spring99/lectnotes/DO4.html. Diakses pada tanggal 10 September 2012.