



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**MODEL SEPARABEL  
UNTUK INTERAKSI PION - NUKLEON**

**TESIS**

**ASMI SUSANTO  
0906576403**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM PASCASARJANA FISIKA MURNI DAN TERAPAN  
DEPOK  
JANUARI 2012**



UNIVERSITAS INDONESIA

MODEL SEPARABEL  
UNTUK INTERAKSI PION - NUKLEON

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

Asmi Susanto  
0906576403

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM PASCASARJANA FISIKA MURNI DAN TERAPAN  
KEKHUSUSAN FISIKA NUKLIR DAN PARTIKEL  
DEPOK  
JANUARI 2012

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Asmi Susanto

NPM : 0906576403

Tanda Tangan :


Tanggal : 10 Januari 2012

## HALAMAN PENGESAHAN


Tesis ini diajukan oleh :  
Nama : Asmi Susanto  
NPM : 0906576403  
Program Studi : Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan  
Peminatan : Fisika Nuklir dan Partikel  
Judul Tesis : Model Separabel untuk Interaksi Pion - Nukleon

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Agus Salam (  )

Penguji : Prof. Dr. Terry Mart (  )

Penguji : Dr. Anto Sulaksono (  )

Penguji : Dr. Imam Fachruddin (  )

Ditetapkan di : Depok  
Tanggal : 10 Januari 2012

## KATA PENGANTAR

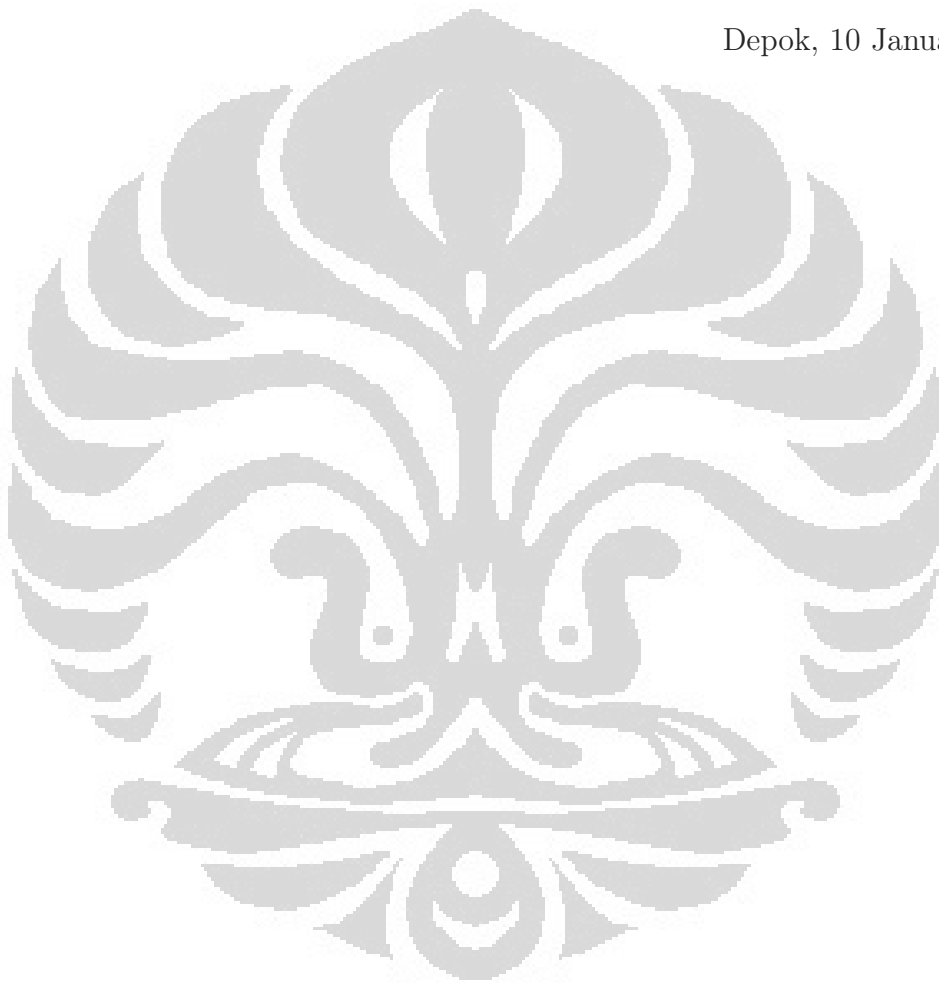
Puji syukur Penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya, Penulis dapat menyelesaikan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Sains Program Studi Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi Penulis untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dr. Agus Salam, selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan Penulis dalam penyusunan tesis ini.
2. Pemerintah Provinsi Jambi yang telah memberikan Penulis beasiswa dari awal sampai berakhirnya studi, dan Pemerintah Daerah Kabupaten Sarolangun yang telah memberikan Penulis izin tugas belajar selama masa studi.
3. Prof. Dr. Terry Mart, Dr. Anto Sulaksono dan Dr. Imam Fachruddin, selaku dewan penguji yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan tesis ini.
4. Orang tua (mak/pak) dan keluarga Penulis yang telah memberikan motivasi dan dukungan moral.
5. Istriku (Efitria Lapita, S.Pd), yang selalu memberikan dukungan.
6. Pak Suparman, atas bantuan administrasi selama masa studi.
7. Sahabat-sahabat yang telah banyak membantu Penulis dalam menyelesaikan tesis ini dan yang telah mewarnai pengalaman hidup Penulis pada masa-masa perkuliahan, khususnya teman Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan '09 dan '10 (maaf, nama tidak dituliskan).

Akhir kata, Penulis berharap Allah SWT berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Penulis

Depok, 10 Januari 2012



## HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

---

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Asmi Susanto  
NPM : 0906576403  
Program Studi : Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan  
Departemen : Fisika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Model Separabel untuk Interaksi Pion - Nukleon

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalih media/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 10 Januari 2012

Yang menyatakan



(Asmi Susanto)

# Abstrak

Nama : Asmi Susanto  
Program Studi : Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan  
Judul : Model Separabel untuk Interaksi Pion-Nukleon

Telah dilakukan perhitungan pergeseran fase hamburan Pion Nukleon untuk gelombang parsial  $S, P$  dan  $D$ , dan untuk isospin  $\frac{1}{2}$  dan  $\frac{3}{2}$ . Interaksi menggunakan bentuk separabel rank-1 dan rank-2. Parameter interaksi ditentukan melalui fitting dengan data pergeseran fase analisis SAID. Didapatkan bahwa rank-1 dan rank-2 dapat memfit data dengan baik sampai momentum 400 MeV/c. Disamping itu, rank -2 dapat menjelaskan cukup baik sampai momentum 1200 MeV/c.

Kata kunci : pion, nukleon, hamburan, pergeseran fase, interaksi separabel.  
xii+75 halaman : 16 gambar; 10 tabel  
Daftar Pustaka : 16 (1970-2010)

## Abstract

Name : Asmi Susanto  
Program Study : Pascasarjana Fisika Murni dan Terapan  
Title : Separable Model for Pion-Nucleon Interaction

Phaseshift of Pion-Nucleon Scattering has been calculated for the partial waves  $S, P$ , and  $D$ , and for the isospin  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{3}{2}$ . The interaction is assumed to take the separable form of rank-1 and rank-2. Interaction parameters are determined through fitting with the phaseshift data of SAID analysis. It is found that the rank-1 and rank-2 can fit the data quite well for the momentum up to 400 MeV/c. Meanwhile, the rank-2 can describe the data fairly well for the momentum up to 1200 MeV/c.

Keywords : pion, nucleon, scattering, phaseshift, separable interaction  
xii+75 pages : 16 pictures; 10 tables  
Bibliography : 16 (1970-2010)



# Daftar Isi

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI	vi
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xii
<b>1 Pendahuluan</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Metode Penelitian	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
<b>2 Teori Dasar Hamburan</b>	<b>4</b>
2.1 Kinematika Proses Hamburan	5
2.2 Persamaan Lippmann-Schwinger	13
2.3 Amplitudo Transisi	14
2.4 Pergeseran Fase	15
<b>3 Interaksi Pion - Nukleon (<math>\pi N</math>)</b>	<b>18</b>
3.1 Pion - Nukleon ( $\pi N$ )	18

3.2	Pendekatan Separabel . . . . .	19
3.2.1	Potensial Separabel Rank - 1 . . . . .	20
3.2.2	Potensial Separabel Rank - 2 . . . . .	23
3.3	Penetapan Parameter . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Hasil Dan Diskusi</b>	<b>31</b>
4.1	Proses Fitting . . . . .	31
4.2	Hasil dan Diskusi . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Kesimpulan dan Saran</b>	<b>46</b>
	<b>Lampiran</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>Integrasi dengan Metode Residu</b>	<b>48</b>
A.1	Fungsi Kompleks . . . . .	48
A.2	Teorema Residu . . . . .	48
A.2.1	Deret Laurent . . . . .	48
A.2.2	Residu . . . . .	48
A.2.3	Integrasi Rank - 1 . . . . .	49
A.2.4	Integrasi Rank - 2 . . . . .	54
<b>B</b>	<b>Deferensial</b>	<b>71</b>
<b>C</b>	<b>Notasi dan Unit</b>	<b>73</b>
	<b>DAFTAR ACUAN</b>	<b>74</b>

# Daftar Gambar

2.1	Kinematika koordinat Jacobi . . . . .	5
2.2	Proses kinematika tumbukan elastik dua benda . . . . .	7
4.1	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $S_{11}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	32
4.2	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $S_{31}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	33
4.3	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $P_{11}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	35
4.4	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $P_{13}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	36
4.5	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $P_{31}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	37
4.6	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $P_{33}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	39

4.7	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $D_{13}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	40
4.8	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $D_{15}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	41
4.9	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $D_{33}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	43
4.10	Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap $\vec{p}_\pi^{lab}$ pada gelombang parsial $D_{35}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2. . . . .	44
A.1	Integrasi teorema residu rank-1 . . . . .	49
A.2	Integrasi teorema residu rank-2 . . . . .	54
A.3	Integrasi teorema residu rank-2 . . . . .	60
A.4	Integrasi teorema residu rank-2 . . . . .	65

# Daftar Tabel

4.1	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $S_{11}$	. . .	33
4.2	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $S_{31}$	. . .	34
4.3	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $P_{11}$	. . .	35
4.4	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $P_{13}$	. . .	37
4.5	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $P_{31}$	. . .	38
4.6	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $P_{33}$	. . .	39
4.7	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $D_{13}$	. . .	41
4.8	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $D_{15}$	. . .	42
4.9	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $D_{33}$	. . .	43
4.10	Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial $D_{35}$	. . .	45

# Bab 1

## Pendahuluan

### 1.1 Latar Belakang

Ditengah berkembangnya teknologi dan ilmu pengetahuan dewasa ini, para Ilmuwan Fisika terus menggali pengetahuan tentang Fisika. Ini dibuktikan dengan ditemukannya partikel - partikel baru, yang kemudian partikel ini dikelompokkan dan ditemukan pola bagaimana partikel - partikel dialam berinteraksi. Menurut [6] Interaksi fundamental di alam ada 4 yaitu, interaksi gravitasi, interaksi elektromagnetik (e.m.), interaksi kuat dan interaksi lemah. Segala proses di alam berlangsung akibat satu atau lebih dari interaksi fundamental tersebut. Beberapa sifat interaksi fundamental [6]:

- Interaksi gravitasi yang paling lemah. Interaksi kuat yang paling kuat.
- Interaksi gravitasi dan interaksi e.m. berjangkauan panjang (tak berhingga). Interaksi kuat dan interaksi lemah berjangkauan pendek (kurang lebih seukuran dimensi nukleon).

Jika salah satu gaya itu tidak ada maka alam semesta tidak akan terbentuk.

Hamburan  $\pi N$  merupakan salah satu contoh interaksi kuat, menurut A.M Gasparyan, Dkk fenomena hamburan  $\pi N$  menarik untuk dipelajari karena beberapa hal [9] Pertama, adanya ketersediaan data akurat yang banyak dan mempunyai struktur yang sederhana. Kedua, merupakan salah satu sumber informasi utama tentang spektrum Baryon. Ketiga, interaksi  $\pi N$  adalah komposisi penting pada banyak reaksi hadronik. Juga ada indikasi yang kuat bahwa sistem  $\pi N$  memainkan peranan penting (walaupun tidak dominan) pada produksi meson  $n$  dan  $w$  dan berhubungan dengan produksi *strangeness*. Sehingga kesuksesan penggunaan partikel  $\pi$  dalam mempelajari struktur Nu-

klir membutuhkan pengetahuan tentang bagaimana sebenarnya interaksi kuat antara  $\pi$  dengan Nukleus.

Eksperimen hamburan dilakukan dengan menembakkan atom, inti atom atau partikel dari sebuah proyektil kepada partikel lain yang dianggap sebagai target. Dalam [11] teori interaksi kuat dipelajari melalui teori *Quantum Chromodynamics* (QCD), yaitu teori yang dapat menjelaskan pertukaran *boson gauge*. *Boson gauge* kuat dinamakan dengan *gluon*, karena gluon mengkomunikasikan gaya untuk partikel-partikel berinteraksi secara kuat terikat bersama-sama, seperti lem “*glue*“. Pada tahun 1950-an dan 1960-an telah ditemukan partikel-partikel yang dinamakan pion, eta dan delta. Partikel-partikel ini dinamakan hadron. Teori QCD bisa digunakan pada sistem hamburan energi tinggi (*high energy physics*). Untuk energi rendah dan menengah (*low and medium energy physics*) aplikasi teori ini sulit untuk diterapkan karena terkendala oleh kerumitan matematisnya, di samping tuntutan untuk memperhitungkan lebih banyak lagi proses (diagram) yang mungkin. Untuk energi rendah dan menengah, penelitian dapat dilanjutkan dengan menggunakan baryon dan meson (hadron) sebagai pengganti quark dan gluon atau bisa juga dengan memprediksikan bentuk interaksi secara fenomenologis. Untuk keperluan yang bersifat praktis, interaksi kuat dapat diasumsikan berbentuk separabel. Interaksi beberapa benda (*few-body problem*) yang menggunakan bentuk separabel digunakan untuk mempermudah penyelesaian persamaan Lippmann - Schwinger secara analitis.

Setelah diperoleh solusi persamaan Lippmann - Schwinger secara analitis, dan jika dilanjutkan menghitung nilai pergeseran fase hamburan  $\pi N$  maka kita dapat mengetahui gaya interaktif yang terjadi pada hamburan  $\pi N$ , cara ini cukup berhasil dilakukan oleh [12]. Dan [3] telah melakukan usaha-usaha mempertemukan interaksi separabel dan potensial pertukaran satu boson (OBEP untuk One Boson Exchange Potential) dengan bentuknya yang nonlokal. Untuk itu penulis mencoba melakukan penelitian membuat model separabel untuk interaksi Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) yang disertai faktor bentuk yang lebih kompleks.

## 1.2 Perumusan Masalah

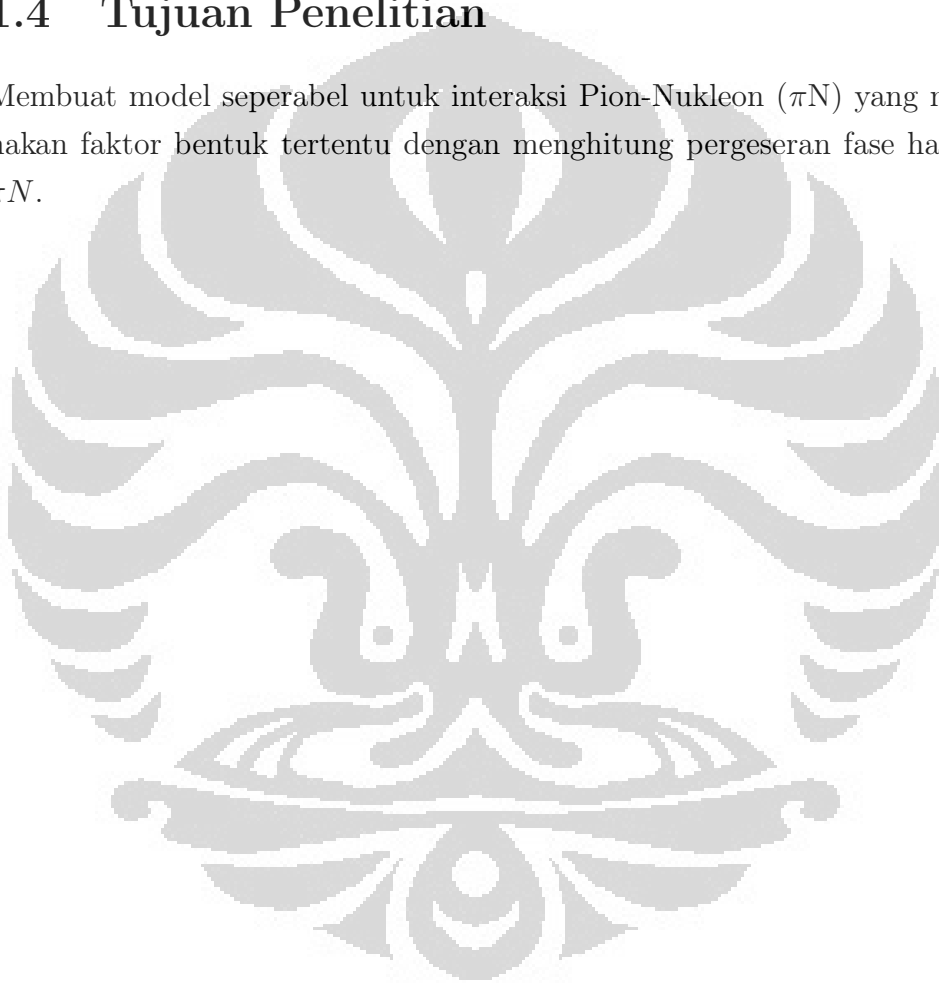
Rumusan masalahnya difokuskan pada menemukan model interaksi Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) yang sederhana tetapi dapat menjelaskan observable dengan baik.

### 1.3 Metode Penelitian

Dilakukan dengan menurunkan persamaan Lippmann-Schwinger sehingga didapat elemen matriks- $t$ . Dari elemen matriks- $t$  kita dapat menentukan pergeseran fase hamburan, untuk mencari parameter potensial dilakukan *fitting* dengan membandingkan pergeseran fase hasil perhitungan dan data. Proses *fitting* dikerjakan dengan menggunakan *routine fitting minuit* dari CERN.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Membuat model seperabel untuk interaksi Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) yang menggunakan faktor bentuk tertentu dengan menghitung pergeseran fase hamburan  $\pi N$ .





## Bab 2

# Teori Dasar Hamburan

Hamburan pada eksperimen terjadi jika suatu partikel di tembakkan dari proyektil kepada partikel yang dianggap sebagai target sehingga akan terjadi interaksi antar partikel itu. Pada umumnya hamburan merupakan proses dari objek yang saling mendekat dan pada jarak tertentu objek ini akan berinteraksi kemudian objek ini akan berpisah kembali. [2] menyatakan banyak dari apa yang kita ketahui tentang kekuatan dan interaksi dalam atom dan inti yang telah dipelajari dari percobaan hamburan, biasanya kita tahu sifat dari partikel yang digunakan sebagai proyektil, momentum mereka, dan mungkin polarisasi mereka. Partikel-partikel ini tersebar oleh atom-atom target dan selanjutnya dideteksi oleh alat yang dapat memberi kita intensitas sebagai fungsi dari sudut hamburan. Dan rentang interaksi berada dalam jarak yang amat kecil sehingga diluar jarak itu kedua objek praktis tidak berinteraksi, dengan kata lain diluar jarak itu mereka diasumsikan dalam keadaan bebas.

Interaksi antar partikel dapat dipahami dengan mengkaji proses hamburan. Hamburan elastik terjadi jika tidak ada energi yang hilang sedangkan sebaliknya kita sebut sebagai hamburan inelastik. Teori hamburan klasik menyatakan jika suatu peristiwa partikel pada pusat hamburan dengan energi datang  $E$  dan impact parameter  $b$  akan membentuk sudut hambur, menurut [1] masalah penting pada hamburan klasik adalah impact parameter dan perhitungan sudut hambur. Biasanya semakin kecil impact parameter semakin besar sudut hambur. Teori hamburan kuantum menurut [1] bila kita membayangkan sebuah peristiwa gelombang berjalan searah sumbu  $z$ , dimana bertemu dengan potensial hamburan menghasilkan gelombang spherical artinya kita mencari solusi persamaan umum Schrodinger. Penjelasan tentang hamburan dalam bab ini difokuskan pada interaksi dua objek dan hanya bersifat singkat sebagai dasar untuk formulasi pada bab-bab selanjutnya.

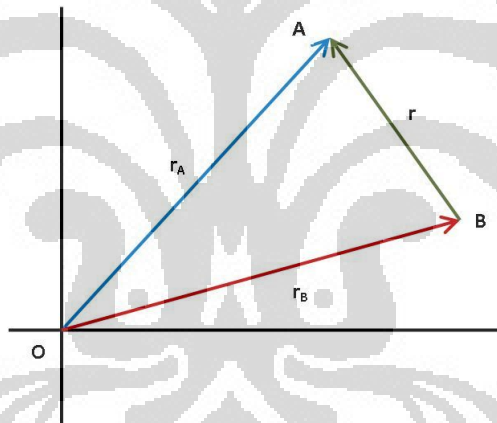
## 2.1 Kinematika Proses Hamburan

Interaksi antara pion ( $\pi$ ) dan nukleon (N) dikelompokkan dalam interaksi dua benda. Ini berarti hanya terdapat dua partikel pada keadaan awal dan akhir. Umumnya interaksi ini dapat dituliskan sebagai [4] :

$$A(\vec{p}_A) + B(\vec{p}_B) \rightarrow A(\vec{q}_A) + B(\vec{q}_B) \quad (2.1)$$

dimana  $\vec{p}_i$  adalah momentum awal dan  $\vec{q}_i$  adalah momentum akhir partikel  $i$ , dengan  $i \in \{A, B\}$ .

Untuk memudahkan menghitung proses hamburan dalam *Kinematika Non-Relativistik* maka kita menggunakan momentum relative ( $\vec{p}$ ). Mendapatkan persamaan momentum relatif menurut [7] bisa menggunakan koordinat Jacobi, yaitu :



Gambar 2.1: Kinematika koordinat Jacobi

Dengan memperhatikan Gambar 2.1 didapatkan informasi bahwa posisi relatif partikel A terhadap partikel B adalah :

$$\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad (2.2)$$

Jika persamaan (2.2) dideferensialkan terhadap waktu kita dapatkan :

$$\vec{v} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \quad (2.3)$$

Karena persamaan umum momentum  $\vec{p} = m\vec{v}$  maka persamaan (2.3) menjadi :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\vec{p}_A}{m_A} - \frac{\vec{p}_B}{m_B} \\ \vec{v} &= \frac{m_B\vec{p}_A - m_A\vec{p}_B}{m_A m_B} \\ m_A m_B \vec{v} &= m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B\end{aligned}\quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) dikalikan dengan  $\frac{1}{m_A + m_B}$  akan didapat :

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \vec{v} = \frac{m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B}{m_A + m_B} \quad (2.5)$$

Jika  $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \mu$  , maka persamaan (2.5) :

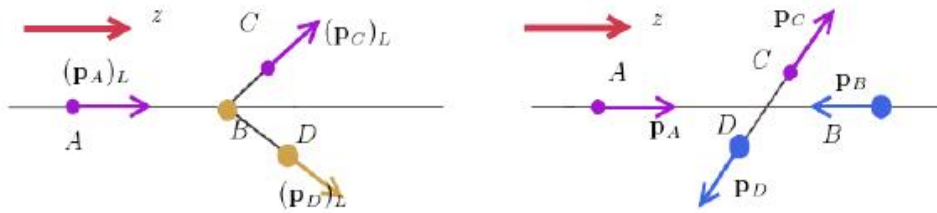
$$\mu \vec{v} = \frac{m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B}{m_A + m_B} \quad (2.6)$$

Karena  $\vec{p} = \mu \vec{v}$  dengan  $\mu$  adalah masa tereduksi, maka persamaan (2.6) menjadi :

$$\vec{p} = \frac{m_B \vec{p}_A - m_A \vec{p}_B}{m_A + m_B} \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) merupakan persamaan momentum relatif yang tidak bergantung pada kerangka acuan yang dipakai, dengan  $m_A$  menyatakan massa partikel A,  $m_B$  merupakan massa partikel B,  $\vec{p}_A$  adalah momentum partikel A dan  $\vec{p}_B$  momentum partikel B dengan momentum bersifat kekal dalam proses hamburan yaitu  $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ , dengan  $\vec{q}$  adalah momentum relatif setelah hamburan.

Kerangka yang kita gunakan dalam pembahasan ini adalah kerangka laboratorium (lab) dan kerangka pusat massa (cm). Melihat sistem dua partikel dimana  $m_A$  menyatakan massa partikel A yang merupakan proyektil, dan  $m_B$  massa partikel B yang merupakan target. Didalam kerangka laboratorium (lab) pada keadaan awal (sebelum mengalami hamburan)  $m_A$  dan  $m_B$  memiliki momentum masing-masing  $\vec{p}_A^{lab}$  dan  $\vec{p}_B^{lab}$ . Kemudian pada keadaan akhir (sesudah hamburan) momentum yang dimiliki  $m_A$  dan  $m_B$  adalah  $\vec{q}_A^{lab}$  dan  $\vec{q}_B^{lab}$ . Pada kerangka acuan pusat massa momentum awal dan akhir bagi partikel proyektil ( $m_A$ ) yaitu  $\vec{p}_A^{cm}$  dan  $\vec{q}_A^{cm}$ , momentum awal dan akhir dari partikel target ( $m_B$ ) adalah  $\vec{p}_B^{cm}$  dan  $\vec{q}_B^{cm}$ . Gambar (2.2) merupakan proses kinematika tumbukan elastik dua benda, dimana gambar sebelah kiri untuk kerangka lab dan sebelah kanan untuk kerangka cm



Gambar 2.2: Proses kinematika tumbukan elastik dua benda

Melihat partikel target yang ditembakkan berada dalam keadaan diam relatif terhadap kerangka lab, maka  $\vec{p}_B^{lab} = 0$ . Sehingga  $\vec{p}^{lab}$  diperoleh dari persamaan (2.7) adalah :

$$\vec{p}^{lab} = \frac{m_B \vec{p}_A^{lab}}{m_A + m_B} \quad (2.8)$$

Untuk kerangka cm,  $\vec{p}_A^{cm} = -\vec{p}_B^{cm}$ . jika disubsitusikan kepersamaan (2.7) diperoleh :

$$\vec{p}^{cm} = \vec{p}_A^{cm} \quad (2.9)$$

pada momentum relatif berlaku :

$$\vec{p}^{cm} = \vec{p}^{lab} \quad (2.10)$$

substitusikan persamaan (2.8) dan (2.9) ke persamaan (2.10) :

$$\vec{p}_A^{cm} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{p}_A^{lab} \quad (2.11)$$

persamaan (2.11) dikalikan dengan  $\frac{m_A}{m_A}$  :

$$\vec{p}_A^{cm} = \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B) m_A} \vec{p}_A^{lab}$$

mengingat definisi massa tereduksi ( $\mu$ ) maka hubungan  $\vec{p}^{lab}$  dan  $\vec{p}^{cm}$  adalah :

$$\vec{p}_A^{cm} = \frac{\mu}{m_A} \vec{p}_A^{lab} \quad (2.12)$$

Pada suatu hamburan elastik, energi kinetik total bersifat kekal. Energi kinetik total dalam suatu kerangka acuan adalah penjumlahan dari energi kinetik masing - masing partikel. Sehingga besarnya energi total sebelum dan sesudah hamburan berlaku :

Kerangka Lab :

$$E^{lab} = E_A^{lab} + E_B^{lab} = E_A'^{lab} + E_B'^{lab} \quad (2.13)$$

$E_B^{lab} = 0$  karena  $\vec{p}_B^{lab} = 0$ , maka persamaan (2.13):

$$E^{lab} = E_A^{lab} = E_A'^{lab} + E_B'^{lab} \quad (2.14)$$

$$E^{lab} = \frac{(\vec{p}_A^{lab})^2}{2m_A} \quad (2.15)$$

Untuk kerangka cm prinsip hukum kekekalannya juga sama dengan kerangka lab, tapi menggunakan  $\vec{p}_A^{cm} = -\vec{p}_B^{cm}$ , maka :

$$E^{cm} = E_A^{cm} + E_B^{cm} = E_A'^{cm} + E_B'^{cm} \quad (2.16)$$

$$E^{cm} = \frac{(\vec{p}_A^{cm})^2}{2m_A} + \frac{(\vec{p}_B^{cm})^2}{2m_B} \quad (2.17)$$

$$E^{cm} = \frac{(\vec{p}_A^{cm})^2}{2m_A} + \frac{(-\vec{p}_A^{cm})^2}{2m_B}$$

$$E^{cm} = \frac{(\vec{p}_A^{cm})^2}{2m_A} + \frac{(\vec{p}_A^{cm})^2}{2m_B} \quad (2.18)$$

$$E^{cm} = \frac{(\vec{p}_A^{cm})^2(m_A + m_B)}{2m_A m_B} \quad (2.19)$$

mengingat kembali definisi masa tereduksi, jadi :

$$E^{cm} = \frac{(\vec{p}_A^{cm})^2}{2\mu} \quad (2.20)$$

substitusikan persamaan (2.12) ke persamaan (2.20), maka :

$$E^{cm} = \frac{(\frac{\mu}{m_A} \vec{p}_A^{lab})^2}{2\mu} \quad (2.21)$$

$$E^{cm} = \frac{\mu^2}{2\mu m_A^2} (\vec{p}_A^{lab})^2 \quad (2.22)$$

$$E^{cm} = \frac{\mu}{m_A} \frac{(\vec{p}_A^{lab})^2}{2m_A}$$

berdasarkan persamaan (2.15), hubungan  $E^{cm}$  dan  $E^{lab}$  dapat di tulis :

$$E^{cm} = \frac{\mu}{m_A} E^{lab} \quad (2.23)$$

Gambar (2.2) menunjukkan proses terjadinya hamburan dimana proyektil datang pada arah sumbu-z dengan momentum awal  $\vec{p}_A^{lab}$  dan  $\vec{p}_A^{cm}$ . hamburan terjadi pada bidang  $\hat{x} - \hat{z}$ , maka momentum akhir dalam kerangka cm adalah :

$$\vec{q}^{cm} = \vec{q}_{\hat{x}} + \vec{q}_{\hat{z}} = |\vec{p}_A^{cm}| \sin \theta^{cm} \hat{x} + |\vec{p}_A^{cm}| \cos \theta^{cm} \hat{z} \quad (2.24)$$

seperti persamaan (2.7), momentum relatif sesudah hamburan adalah :

$$\vec{q} = \frac{m_B \vec{q}_A - m_A \vec{q}_B}{m_A + m_B} \quad (2.25)$$

- Pada kerangka lab persamaan dapat ditulis menjadi :

Sumbu- $x$

$$\vec{q}_{\hat{x}}^{lab} = \frac{m_B \vec{q}_{A,x}^{lab} - m_A \vec{q}_{B,x}^{lab}}{m_A + m_B} \quad (2.26)$$

$$\vec{q}_{\hat{x}}^{lab} = \frac{m_B |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab} - m_A |\vec{q}_B^{lab}| \sin \beta^{lab}}{m_A + m_B} \hat{x} \quad (2.27)$$

Sumbu- $z$

$$\vec{q}_{\hat{z}}^{lab} = \frac{m_B \vec{q}_{A,z}^{lab} - m_A \vec{q}_{B,z}^{lab}}{m_A + m_B} \quad (2.28)$$

$$\vec{q}_{\hat{z}}^{lab} = \frac{m_B |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} - m_A |\vec{q}_B^{lab}| \cos \beta^{lab}}{m_A + m_B} \hat{z} \quad (2.29)$$

Berdasarkan hukum kekekalan momentum yaitu besar momentum sebelum hamburan sama dengan besar momentum setelah hamburan, maka dapat ditulis :

$$\vec{p}_A^{lab} + \vec{p}_B^{lab} = \vec{q}_A^{lab} + \vec{q}_B^{lab} \quad (2.30)$$

karena  $\vec{p}_B^{lab} = 0$

$$\vec{p}_A^{lab} = \vec{q}_A^{lab} + \vec{q}_B^{lab} \quad (2.31)$$

Sumbu- $x$

tanda pada  $\vec{q}_B^{lab}$  menjadi negatif (-) karena saling berlawanan arah, maka :

$$|\vec{p}_A^{lab}|_x = |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab} - |\vec{q}_B^{lab}| \sin \beta^{lab} \quad (2.32)$$

Sumbu- $z$

$$|\vec{p}_A^{lab}|_z = |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} + |\vec{q}_B^{lab}| \cos \beta^{lab} \quad (2.33)$$

$$|\vec{q}_B^{lab}| \cos \beta^{lab} = |\vec{p}_A^{lab}| - |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} \quad (2.34)$$

pada sumbu- $x$  nilai momentum  $|\vec{P}_A^{lab}|_x$  sama dengan 0 (nol) karena saling

meniadakan, maka :

$$0 = |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab} - |\vec{q}_B^{lab}| \sin \beta^{lab} \quad (2.35)$$

$$|\vec{q}_B^{lab}| \sin \beta^{lab} = |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab} \quad (2.36)$$

substitusikan persamaan (2.36) ke persamaan (2.27) diperoleh :

$$|\vec{q}_{\hat{x}}^{lab}| = \frac{m_B |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab} - m_A |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab}}{m_A + m_B} \quad (2.37)$$

substitusikan persamaan (2.34) ke persamaan (2.29), sehingga :

$$|\vec{q}_{\hat{z}}^{lab}| = \frac{m_B |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} - m_A (|\vec{p}_A^{lab}| - |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab})}{m_A + m_B} \quad (2.38)$$

- Pada kerangka pusat massa

Berdasarkan persamaan (2.9), maka :  $\vec{q}^{cm} = \vec{q}_A^{cm}$ . Sehingga :

Sumbu- $x$

$$|\vec{q}_{\hat{x}}^{cm}| = |\vec{q}_A^{cm}| \sin \theta^{cm} \quad (2.39)$$

Sumbu- $z$

$$|\vec{q}_{\hat{z}}^{cm}| = |\vec{q}_A^{cm}| \cos \theta^{cm} \quad (2.40)$$

Hubungan kerangka lab dan kerangka cm adalah :

kerangka cm = kerangka lab

Sumbu- $x$

$$|\vec{q}_{\hat{x}}^{cm}| = |\vec{q}_{\hat{x}}^{lab}| \quad (2.41)$$

$$|\vec{q}_A^{cm}| \sin \theta^{cm} = \frac{m_B |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab} - m_A |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab}}{m_A + m_B} \quad (2.42)$$

Sumbu- $z$

$$|\vec{q}_{\hat{z}}^{cm}| = |\vec{q}_{\hat{z}}^{lab}| \quad (2.43)$$

$$|\vec{q}_A^{cm}| \cos \theta^{cm} = \frac{m_B |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} - m_A (|\vec{p}_A^{lab}| - |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab})}{m_A + m_B} \quad (2.44)$$

Bila persamaan (2.42) dibagi dengan persamaan (2.44), maka :

$$\frac{\sin \theta^{cm}}{\cos \theta^{cm}} = \frac{m_B |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab} - m_A |\vec{q}_A^{lab}| \sin \theta^{lab}}{m_B |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} - m_A (|\vec{p}_A^{lab}| - |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab})} \quad (2.45)$$

Jadi hubungan antara  $\theta^{cm}$  dengan  $\theta^{lab}$  adalah :

$$\tan \theta^{cm} = \frac{(m_B - m_A) \sin \theta^{lab}}{m_B \cos \theta^{lab} - m_A \left( \frac{|\vec{p}_A^{lab}|}{|\vec{q}_A^{lab}|} - \cos \theta^{lab} \right)} \quad (2.46)$$

Kemudian untuk menyederhanakan persamaan (2.46) kita mencari penyelesaian  $|\vec{q}_A^{lab}|$ , dengan mengkuadratkan persamaan (2.34) dan (2.36), sehingga diperoleh :

$$(|\vec{p}_A^{lab}| - |\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab})^2 = |\vec{q}_B^{lab}|^2 \cos^2 \beta^{lab} \quad (2.47)$$

$$|\vec{q}_B^{lab}|^2 \sin^2 \beta^{lab} = |\vec{q}_A^{lab}|^2 \sin^2 \theta^{lab} \quad (2.48)$$

dari persamaan (2.47) :

$$|\vec{p}_A^{lab}|^2 - 2|\vec{p}_A^{lab}||\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} + |\vec{q}_A^{lab}|^2 \cos^2 \theta^{lab} = |\vec{q}_B^{lab}|^2 \cos^2 \beta^{lab} \quad (2.49)$$

Jika  $\cos^2 \beta^{lab} = 1 - \sin^2 \beta^{lab}$  dan mensubstitusikan persamaan (2.48) ke persamaan (2.49), sehingga diperoleh :

$$|\vec{p}_A^{lab}|^2 - 2|\vec{p}_A^{lab}||\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} + |\vec{q}_A^{lab}|^2 \cos^2 \theta^{lab} = |\vec{q}_B^{lab}|^2 - |\vec{q}_A^{lab}|^2 \sin^2 \theta^{lab} \quad (2.50)$$

Pada hamburan elastik hukum kekekalan energi dalam kerangka lab adalah :

$$\frac{|\vec{p}_A^{lab}|^2}{2m_A} = \frac{|\vec{q}_A^{lab}|^2}{2m_A} + \frac{|\vec{q}_B^{lab}|^2}{2m_B} \quad (2.51)$$

dari persamaan (2.51) didapat :

$$|\vec{q}_B^{lab}|^2 = \frac{m_B}{m_A} |\vec{p}_A^{lab}|^2 - \frac{m_B}{m_A} |\vec{q}_A^{lab}|^2 \quad (2.52)$$

substitusikan persamaan (2.52) ke persamaan (2.50), maka :

$$|\vec{p}_A^{lab}|^2 - 2|\vec{p}_A^{lab}||\vec{q}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} + |\vec{q}_A^{lab}|^2 \cos^2 \theta^{lab} = \left\{ \frac{m_B}{m_A} |\vec{p}_A^{lab}|^2 - \frac{m_B}{m_A} |\vec{q}_A^{lab}|^2 \right\} - |\vec{q}_A^{lab}|^2 \sin^2 \theta^{lab} \quad (2.53)$$

diketahui  $\cos^2 \theta^{lab} + \sin^2 \theta^{lab} = 1$ , sehingga persamaan (2.53) dapat disederhanakan menjadi :

$$\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right) |\vec{q}_A^{lab}|^2 - 2|\vec{p}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} |\vec{q}_A^{lab}| + \left(1 - \frac{m_B}{m_A}\right) |\vec{p}_A^{lab}|^2 = 0 \quad (2.54)$$



dari persamaan kuadrat (2.54) diketahui :

$$a = 1 + \frac{m_B}{m_A} \quad (2.55)$$

$$b = -2|\vec{p}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} \quad (2.56)$$

$$c = \left(1 - \frac{m_B}{m_A}\right) |\vec{p}_A^{lab}|^2 \quad (2.57)$$

persamaan kuadrat (2.54) diselesaikan menggunakan rumus abc, yaitu :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.58)$$

$$|\vec{q}_{A\pm}^{lab}| = \frac{2|\vec{p}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} \pm \sqrt{(2|\vec{p}_A^{lab}| \cos \theta^{lab})^2 - 4\left\{1 + \frac{m_B}{m_A}\right\}\left\{\left(1 - \frac{m_B}{m_A}\right) |\vec{p}_A^{lab}|^2\right\}}}{2\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)} \quad (2.59)$$

setelah disederhanakan bagian yang didalam akar pada persamaan (2.59), di peroleh :

$$= 4|\vec{p}_A^{lab}|^2 \left(\frac{m_B^2}{m_A^2} - \sin^2 \theta^{lab}\right) \quad (2.60)$$

substitusikan persamaan (2.60) ke persamaan (2.59), kemudian disederhanakan maka akan diperoleh :

$$|\vec{q}_{A\pm}^{lab}| = \frac{2|\vec{p}_A^{lab}| \cos \theta^{lab} \pm 2|\vec{p}_A^{lab}| \sqrt{\frac{m_B^2}{m_A^2} - \sin^2 \theta^{lab}}}{2\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)} \quad (2.61)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.61) kepersamaan (2.46) akan didapat hubungan  $\theta^{cm}$  dan  $\theta^{lab}$  yang lebih sederhana. Dimana  $\theta^{cm}$  hanya merupakan fungsi dari momentum awal dan sudut hamburnya. Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\theta^{cm} = f(\theta^{lab}) \quad (2.62)$$

## 2.2 Persamaan Lippmann-Schwinger

Diketahui persamaan umum Schrodinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + v(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (2.63)$$

Persamaan (2.63) dikalikan dengan faktor  $-\frac{2m}{\hbar^2}$ , menjadi :

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} v(\vec{r})\psi(\vec{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2} E\psi(\vec{r}) \quad (2.64)$$

Jika :

$$U(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} v(\vec{r})$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

Sehingga persamaan (2.64) dapat ditulis dengan :

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) - U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = -k^2 \psi(\vec{r}) \quad (2.65)$$

Bila disederhanakan (2.65) akan menjadi :

$$\{\nabla^2 + k^2\}\psi(\vec{r}) = U(\vec{r})\psi(\vec{r}) \quad (2.66)$$

Persamaan (2.66) merupakan representasi persamaan Schrodinger dalam ruang koordinat. Selanjutnya, dengan memanfaatkan sifat delta Dirac yaitu :

$$\int d^3 \vec{r}' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}') = f(\vec{r}) \quad (2.67)$$

maka suku kanan persamaan (2.66) berubah menjadi :

$$U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \int d^3 \vec{r}' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.68)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.68) ke persamaan (2.66) diperoleh persamaan :

$$\{\nabla^2 + k^2\}\psi(\vec{r}) = \int d^3 \vec{r}' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.69)$$

Diketahui fungsi Green seperti dibawah ini :

$$\{\nabla^2 + k^2\}G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.70)$$

maka persamaan (2.69) menjadi :

$$\{\nabla^2 + k^2\}\psi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}'\{\nabla^2 + k^2\}G(\vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.71)$$

$$\{\nabla^2 + k^2\}\psi(\vec{r}) = \{\nabla^2 + k^2\} \int d^3\vec{r}'G(\vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.72)$$

$$\psi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}'G(\vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.73)$$

Sehingga, solusi komplit jika ada interaksi :

$$\psi(\vec{r}) = \phi_i(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}'G(\vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi(\vec{r}') \quad (2.74)$$

Persamaan (2.74) adalah persamaan Lippmann - Schwinger didalam ruang koordinat. Jika interaksinya tidak ada ( $U(\vec{r}) = 0$ ), maka :

$$\{\nabla^2 + k^2\}\phi_i(\vec{r}) = 0 \quad (2.75)$$

dengan  $i$  = initial yang berarti sebagai fungsi gelombang awal.

## 2.3 Amplitudo Transisi

Setelah mengganti  $U = \frac{2m}{\hbar^2}v$ , maka persamaan (2.74) bisa dituliskan dalam notasi Dirac menjadi :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\phi_i\rangle + GU|\psi\rangle \\ &= |\phi_i\rangle + \frac{2m}{\hbar^2}Gv|\psi\rangle \end{aligned} \quad (2.76)$$

dimana *subscript i* yang berarti awal dan *f* yang berarti akhir. Amplitudo transisi didefinisikan sebagai [9] :

$$t_{fi} \equiv \langle\phi_f|T|\phi_i\rangle \equiv \langle\phi_f|v|\psi\rangle \quad (2.77)$$

Gunakan (2.76) dan relasi kelengkapan  $\sum|\phi_m\rangle\langle\phi_m| = 1$  pada (2.77) diperoleh :

$$t_{fi} = v_{fi} + \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{m,n} v_{fm} \langle\phi_m|G|\phi_n\rangle t_{ni} \quad (2.78)$$

Misalkan  $\phi$  adalah fungsi gelombang di ruang momentum  $\vec{p}$ , maka persamaan (2.78) menjadi :

$$t(\vec{p}_f, \vec{p}_i) = v(\vec{p}_f, \vec{p}_i) + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{p}_m \int d^3\vec{p}_n v(\vec{p}_f, \vec{p}_m) G(\vec{p}_m, \vec{p}_n) t(\vec{p}_n, \vec{p}_i) \quad (2.79)$$

Dengan menggunakan fungsi Green dalam ruang momentum yang diberikan oleh Charles [9] :

$$G(\vec{p}_m, \vec{p}_n) = \frac{\delta(\vec{p}_m - \vec{p}_n)}{p^2 - p_m^2} \quad (2.80)$$

maka persamaan (2.79) menjadi :

$$t(\vec{p}_f, \vec{p}_i) = v(\vec{p}_f, \vec{p}_i) + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{p}_n \frac{v(\vec{p}_f, \vec{p}_n) t(\vec{p}_n, \vec{p}_i)}{p^2 - p_n^2} \quad (2.81)$$

## 2.4 Pergeseran Fase

Dalam teori medan kuantum dikenal matriks- $S$  sebagai dasar untuk menghitung amplitudo transisi, sementara dari persamaan Schrödinger dapat diperoleh matriks- $t$  sebagai kuantitas untuk menghitung peluang hamburan [5]. Ueda, et.al [12] menuliskan amplitudo hamburan elastik  $\pi N$  sebagai  $t_{\pi N}$ , dimana  $t_{\pi N}$  merupakan solusi dari persamaan Lippmann - Schwinger. Matriks- $S$  untuk amplitudo elastik dengan momentum angular total  $J$  dan parity  $P$  dalam semua kasus dari rank dan channel - channel sebagai berikut :

$$S = 1 - i2\pi p \mu(p) t_{\pi N} \quad (2.82)$$

dimana :

$$\frac{1}{\mu(p)} = \frac{1}{m_\pi} + \frac{1}{m_N} \quad (2.83)$$

Selanjutnya hubungan pergeseran fase  $\delta$  dan absorption parameter  $\eta$  dengan matriks- $S$  menurut [12] adalah :

$$S = \eta e^{2i\delta} \quad (2.84)$$

Sifat - sifat interaksi yang muncul pada kanal - kanal gelombang parsial dapat dikenali dengan menganalisis pergeseran fase. pergeseran fase menunjukkan sifat atraktif atau repulsif dari gaya nuklir.  $\delta$  merupakan pergeseran fase yang menunjukkan bagaimana perubahan fase fungsi gelombang sebelum dan setelah hamburan [9]. Dari definisi pergeseran fase kita dapat melihat, bahwa nilai dari pergeseran fase berkaitan dengan sifat dari interaksi  $\pi N$  [13]. Pergeseran

fase dengan nilai negatif menunjukkan adanya gaya repulsif (saling tolak) sedangkan pergeseran fase dengan nilai positif menunjukkan gaya yang sifatnya atraktif (saling tarik) pada interaksi  $\pi N$ . Dan jika berdasarkan [12] nilai parameter  $\lambda$  yang bernilai negatif pada model potensial separabel yang digunakan menunjukkan potensial ini memberikan deskripsi interaksi nuklir  $\pi N$  yang sifatnya atraktif. Sedangkan Nilai parameter  $\lambda$  yang bernilai positif pada model potensial separabel yang digunakan menunjukkan potensial ini memberikan deskripsi interaksi nuklir  $\pi N$  yang sifatnya repulsif.

Dari definisi persamaan (2.82), (2.84) dan karena proses ini dalam tumbukan elastik maka  $\eta = 1$ , sehingga :

$$\begin{aligned} 1 - i2\pi p\mu(p)t_{\pi N} &= e^{2i\delta} \\ 1 - i2\pi p\mu(p)t_{\pi N} &= \cos(2\delta) + i\sin(2\delta) \end{aligned} \quad (2.85)$$

sebagai sebuah bilangan kompleks,  $t_{\pi N} = Re[t_{\pi N}] + iIm[t_{\pi N}]$  maka :

$$\begin{aligned} 1 - i2\pi p\mu(p)(Re[t_{\pi N}] + iIm[t_{\pi N}]) &= \cos(2\delta) + i\sin(2\delta) \\ 1 - i2\pi p\mu(p)Re[t_{\pi N}] + 2\pi p\mu(p)Im[t_{\pi N}] &= \cos(2\delta) + i\sin(2\delta) \\ 1 + 2\pi p\mu(p)Im[t_{\pi N}] - i2\pi p\mu(p)Re[t_{\pi N}] &= \cos(2\delta) + i\sin(2\delta) \end{aligned} \quad (2.86)$$

ini juga dapat ditulis :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2\delta)}{\cos(2\delta)} &= \frac{-2\pi p\mu(p)Re[t_{\pi N}]}{1 + 2\pi p\mu(p)Im[t_{\pi N}]} \\ \tan(2\delta) &= \frac{-2\pi p\mu(p)Re[t_{\pi N}]}{1 + 2\pi p\mu(p)Im[t_{\pi N}]} \\ 2\delta &= \arctan \left[ \frac{-2\pi p\mu(p)Re[t_{\pi N}]}{1 + 2\pi p\mu(p)Im[t_{\pi N}]} \right] \end{aligned} \quad (2.87)$$

jika :

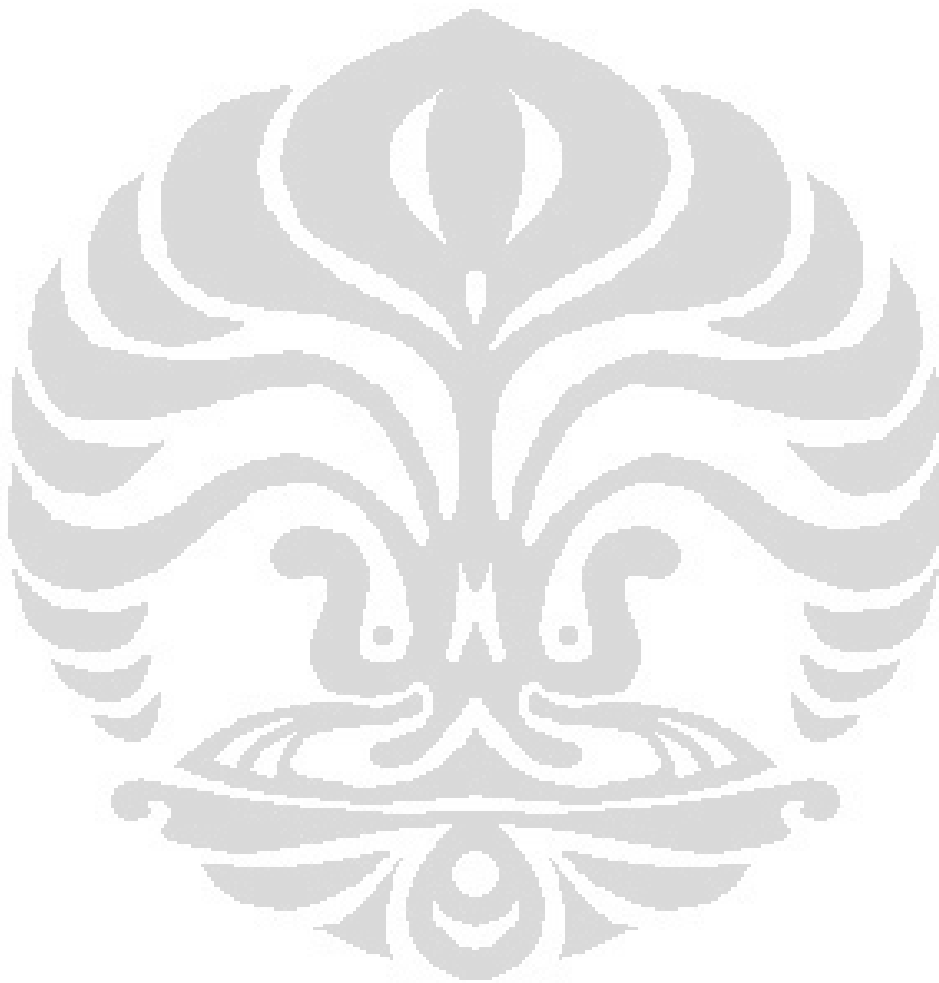
$$\chi = \frac{-2\pi p\mu(p)Re[t_{\pi N}]}{1 + 2\pi p\mu(p)Im[t_{\pi N}]} \quad (2.88)$$

maka, akan diperoleh hubungan antara pergeseran fase dengan matriks- $t$  sebagai berikut :

$$\delta = \frac{1}{2} \arctan(\chi) \quad (2.89)$$

Dari memperoleh nilai pergeseran fase kita dapat memperoleh observable. Tapi untuk proses sebaliknya tidak semudah itu. Kita tidak dapat memperoleh pergeseran fase dari data observable hasil eksperimen melalui proses analitik langsung. Karenanya, prosedur yang biasa digunakan untuk memperoleh nilai

pergeseran fase dari nilai observable (hasil eksperimen) adalah dengan proses fitting. Kita memasukkan nilai pergeseran fase awal kemudian dilakukan iterasi terhadap nilai tersebut dengan membandingkan data observable yang diperoleh dari pergeseran fase dengan data eksperimen. Untuk membentuk model potensial bagi interaksi  $\pi N$ , kami melakukan fitting dengan data pergeseran fase yang diperoleh melalui SAID-analysis.



## Bab 3

# Interaksi Pion - Nukleon ( $\pi N$ )

### 3.1 Pion - Nukleon ( $\pi N$ )

Hamburan terjadi apabila ada interaksi dari partikel yaitu dari proyektil dan target, makin besar interaksi maka  $\theta$ -nya semakin besar. Dalam hal ini akan difokuskan pada interaksi  $\pi N$ , dimana Pion ( $\pi$ ) diasumsikan dari proyektil dan Nukleon ( $N$ ) sebagai targetnya. Interaksi antara pion ( $\pi$ ) dan nukleon ( $N$ ) dikelompokkan dalam interaksi dua benda. Ini berarti hanya terdapat dua partikel pada keadaan awal dan akhir, salah satu bentuk interaksi yang mungkin adalah :

$$\pi(\vec{p}_\pi) + N(\vec{p}_N) \rightarrow \pi(\vec{q}_\pi) + N(\vec{q}_N) \quad (3.1)$$

dimana  $\vec{p}_\pi$ ,  $\vec{p}_N$  adalah momentum awal dan  $\vec{q}_\pi$ ,  $\vec{q}_N$  adalah momentum akhir dari masing - masing partikel Pion dan Nukleon.

Potensial separabel menurut [8] adalah potensial non lokal interaksi berupa operator yang bekerja dengan aturan potensial pada persamaan Schrodinger tetapi tidak diagonal pada representasi koordinat. Dengan kata lain aksi potensial non lokal pada fungsi gelombang bergantung pada nilai fungsi pada seluruh ruang konfigurasi. Jika memilih potensial nonlokal tanpa deret yang panjang, kita dapat bergantung validitas yang disebut teori daerah efektif yang menjamin fitting data untuk energi rendah. Faktor bentuk yang digunakan dalam potensial separabel merupakan tranformasi Fourier dari representasi ruang ke momentum. Dalam faktor bentuk tersebut terdapat berbagai nilai parameter, yang akan dicari dalam penelitian ini. Kami menggunakan data eksperimen dari SAID analisis dan melakukan fitting terhadapnya. Pada pe-

nelitian ini, kami memilih bentuk potensial separabel yang didasarkan pada faktor bentuk potensial yang digunakan [12].

### 3.2 Pendekatan Separabel

Dengan memperhatikan hamburan  $\pi N$  dalam sistem pusat massa dimana momentum relatif awal dan momentum relatif akhir adalah  $\vec{p}$  dan  $\vec{q}$ , dan energi totalnya adalah  $w$ . [12] Amplitudo transisi  $t$  untuk hamburan  $\pi N$  dapat dituliskan kembali dalam bentuk lain dari persamaan Lippmann - Schwinger 2.81, dimana persamaan tersebut sudah dituliskan dalam representasi gelombang parsial, yaitu sebagai berikut :

$$t_{\ell}(q, p; w) = v_{\ell}(q, p) + \int_0^{\infty} dk k^2 v_{\ell}(q, k) G_N(w; k) t_{\ell}(k, p; w) \quad (3.2)$$

dengan  $v(q, p)$  adalah potensial dan  $G_N(w; k)$  adalah fungsi Green bebas. Pada hamburan *channel* tunggal fungsi Green-nya adalah :

$$G_N(w; k) = [w - w_N(k)]^{-1} \quad (3.3)$$

dimana :

$$\begin{aligned} w_N(k) &= \frac{k^2}{2m_{\pi}} + m_{\pi} + \frac{k^2}{2m_N} + m_N \\ &= \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{m_{\pi}} + \frac{1}{m_N} \right) + (m_{\pi} + m_N) \\ &= \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{m_{\pi}} + \frac{1}{m_N} \right) + m_{\pi N} \\ &= \frac{k^2}{2\mu_{\pi N}} + m_{\pi N} \end{aligned} \quad (3.4)$$

dengan  $\mu_{\pi N}$  adalah massa tereduksi untuk partikel  $\pi$  dan  $N$ ,  $m_{\pi N}$  adalah massa total kedua partikel. Dengan cara yang sama akan didapatkan :

$$w = \frac{q^2}{2\mu_{\pi N}} + m_{\pi N} \quad (3.5)$$



bila disubstitusikan persamaan (3.4) dan persamaan (3.5) kepersamaan (3.3) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 G_N(w; k) &= [\{\frac{q^2}{2\mu_{\pi N}} + m_{\pi N}\} - \{\frac{k^2}{2\mu_{\pi N}} + m_{\pi N}\}]^{-1} \\
 &= [\frac{q^2}{2\mu_{\pi N}} - \frac{k^2}{2\mu_{\pi N}}]^{-1} \\
 &= [\frac{q^2}{2\mu_{\pi N}} - \frac{k^2}{2\mu_{\pi N}}]^{-1} \\
 &= \frac{2\mu_{\pi N}}{q^2 - k^2} \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Model separabel pada interaksi  $\pi N$  akan dibahas dalam bentuk dua jenis potensial separabel yaitu :

### 3.2.1 Potensial Separabel Rank - 1

Menurut [12] potensial separabel untuk bentuk rank - 1 diasumsikan seperti :

$$v_\ell(q, p) = \lambda g_\ell(q)g_\ell(p) \tag{3.7}$$

dimana  $\lambda = +1$  atau  $-1$  adalah parameter fase yang menyatakan kasus repulsif dan atraktif, dengan  $g_\ell(p)$  disebut sebagai faktor bentuk (*form factor*), maka dengan  $v_\ell(q, k) = \lambda g_\ell(q)g_\ell(k)$  persamaan (3.2) dapat dituliskan kembali sebagai :

$$\begin{aligned}
 t_\ell(q, p; w) &= \lambda g_\ell(q)g_\ell(p) + \int_0^\infty dk k^2 \lambda g_\ell(q)g_\ell(k)G_N(w; k)t_\ell(k, p; w) \\
 &= g_\ell(q)[\lambda g_\ell(p) + \lambda \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k)G_N(w; k)t_\ell(k, p; w)] \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

misalkan :

$$t_\ell(q, p; w) = g_\ell(q)a(p, w) \tag{3.9}$$

selanjutnya mensubstitusikan persamaan (3.9) ke persamaan (3.8) dengan  $t_\ell(k, p; w) = g_\ell(k)a(p, w)$  :

$$g_\ell(q)a(p, w) = g_\ell(q)[\lambda g_\ell(p) + \lambda \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k)G_N(w; k)g_\ell(k)a(p, w)] \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
a(p, w) &= \lambda g_\ell(p) + \lambda \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k) a(p, w) \\
&= \lambda g_\ell(p) + \lambda a(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$a(p, w) - \lambda a(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k) = \lambda g_\ell(p) \quad (3.12)$$

$$a(p, w) \left\{ 1 - \lambda \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k) \right\} = \lambda g_\ell(p) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
a(p, w) &= \frac{\lambda g_\ell(p)}{1 - \lambda \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k)} \\
&= \frac{g_\ell(p)}{\frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k)} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

substitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.9) akan diperoleh :

$$t_\ell(q, p; w) = \frac{g_\ell(q) g_\ell(p)}{\frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k)} \quad (3.15)$$

jika :

$$\tau(w) = \left[ \lambda^{-1} - \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k) \right]^{-1} \quad (3.16)$$

maka persamaan (3.15) menjadi :

$$t_\ell(q, p; w) = g_\ell(q) \tau(w) g_\ell(p) \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) ini merupakan solusi persamaan (3.2) untuk separabel potensial rank - 1. Dalam rank - 1 untuk hamburan *channel* tunggal dari potensial separabel pada energi lab pion datang dengan menawarkan  $g_\ell(k)$  dalam bentuk :

$$g_\ell(k) = k^\ell \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{k^2 + \beta_i^2} \quad (3.18)$$

selanjutnya akan kita sebut sebagai *form factor*, dengan  $\ell$  adalah orde gelombang parsial dimana  $C$  dan  $\beta$  merupakan parameter yang mencirikan kekuatan dan daerah potensial. Memperhatikan salah satu suku pada persamaan (3.16) di misalkan sebagai :

$$I_\ell = \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) G_N(w; k) g_\ell(k) \quad (3.19)$$

substitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.19) :

$$\begin{aligned} I_\ell &= \int_0^\infty dk k^2 g_\ell(k) \left( \frac{2\mu_{\pi N}}{q^2 - k^2} \right) g_\ell(k) \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^\infty dk \frac{k^2 g_\ell^2(k)}{q^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

persamaan (3.20) diselesaikan dengan teorema residu yang dijelaskan secara lengkap pada bagian lampiran A. Setelah menghitung integrasinya yang ditunjukkan pada lampiran A, maka dengan mensubstitusikan ke persamaan (3.17) : Untuk *form factor* diperoleh : pada  $\ell = 0$  adalah :

$$t_0(q, p) = \lambda \frac{C_0^2}{(q^2 + \beta_0^2)(p^2 + \beta_0^2)} \left[ 1 + \lambda \frac{\pi \mu_{\pi N} C_0^2}{2\beta_0(\beta_0 - iq)^2} \right]^{-1} \quad (3.21)$$

pada  $\ell = 1$  adalah :

$$t_1(q, p) = \lambda \frac{C_1^2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \left[ 1 + \lambda \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1^2 [2iq^3 + 3\beta q^2 + \beta^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \right]^{-1} \quad (3.22)$$

dan pada  $\ell = 2$  adalah :

$$t_2(q, p) = \lambda \frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \left[ 1 + \lambda \frac{\pi \mu_{\pi N} C_2^2 [2iq^5 - 3\beta^5 - 5\beta^3 q^2]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \right]^{-1} \quad (3.23)$$

dimana parameter dalam potensial tersebut akan didapatkan dengan melakukan fitting pada data eksperimen pergeseran fase.

### 3.2.2 Potensial Separabel Rank - 2

Potensial separabel untuk bentuk rank - 2 diasumsikan seperti [12] :

$$v_\ell(q, p) = \lambda_1 g_{\ell 1}(q) g_{\ell 1}(p) + \lambda_2 g_{\ell 2}(q) g_{\ell 2}(p) \quad (3.24)$$

jika persamaan (3.24) disubstitusikan ke persamaan (3.2) dengan  $v_\ell(q, k) = \lambda_1 g_{\ell 1}(q) g_{\ell 1}(k) + \lambda_2 g_{\ell 2}(q) g_{\ell 2}(k)$  didapat :

$$\begin{aligned} t_\ell(q, p; w) &= \{ \lambda_1 g_{\ell 1}(q) g_{\ell 1}(p) + \lambda_2 g_{\ell 2}(q) g_{\ell 2}(p) \} + \int_0^\infty dk k^2 \{ \lambda_1 g_{\ell 1}(q) g_{\ell 1}(k) \\ &\quad + \lambda_2 g_{\ell 2}(q) g_{\ell 2}(k) \} G_N(w; k) t_\ell(k, p; w) \\ &= \lambda_1 g_{\ell 1}(q) g_{\ell 1}(p) + \lambda_2 g_{\ell 2}(q) g_{\ell 2}(p) \\ &\quad + \int_0^\infty dk k^2 \{ \lambda_1 g_{\ell 1}(q) g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) t_\ell(k, p; w) \\ &\quad + \lambda_2 g_{\ell 2}(q) g_{\ell 2}(k) G_N(w; k) t_\ell(k, p; w) \} \\ &= \lambda_1 g_{\ell 1}(q) g_{\ell 1}(p) + \int_0^\infty dk k^2 \lambda_1 g_{\ell 1}(q) g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) t_\ell(k, p; w) \\ &\quad + \lambda_2 g_{\ell 2}(q) g_{\ell 2}(p) + \int_0^\infty dk k^2 \lambda_2 g_{\ell 2}(q) g_{\ell 2}(k) G_N(w; k) t_\ell(k, p; w) \\ &= g_{\ell 1}(q) \left( \lambda_1 g_{\ell 1}(p) + \lambda_1 \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) t_\ell(k, p; w) \right) \\ &\quad + g_{\ell 2}(q) \left( \lambda_2 g_{\ell 2}(p) + \lambda_2 \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 2}(k) G_N(w; k) t_\ell(k, p; w) \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

dengan memperhatikan persamaan (3.8) dan (3.9) tentang definisi dari  $a(p, w)$ , maka persamaan (3.25) menjadi :

$$t_\ell(q, p; w) = g_{\ell 1}(q) a_1(p, w) + g_{\ell 2}(q) a_2(p, w) \quad (3.26)$$

pada :

$$a_1(p, w) = \lambda_1 g_{\ell 1}(p) + \lambda_1 \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) t_\ell(k, p; w) \quad (3.27)$$

jika :

$$t_\ell(k, p; w) = g_{\ell 1}(k)a_1(p, w) + g_{\ell 2}(k)a_2(p, w) \quad (3.28)$$

sehingga persamaan (3.27) menjadi :

$$\begin{aligned} a_1(p, w) &= \lambda_1 g_{\ell 1}(p) + \lambda_1 \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) \\ &\quad \{g_{\ell 1}(k)a_1(p, w) + g_{\ell 2}(k)a_2(p, w)\} \\ &= \lambda_1 g_{\ell 1}(p) + \lambda_1 a_1(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 1}(k) \\ &\quad + \lambda_1 a_2(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 2}(k) \end{aligned} \quad (3.29)$$

pada persamaan (3.29) suku yang mengandung  $a_1(p, w)$  diletakkan pada sebelah kiri tanda “sama dengan“ :

$$\begin{aligned} a_1(p, w) - \lambda_1 a_1(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 1}(k) &= \\ \lambda_1 g_{\ell 1}(p) + \lambda_1 a_2(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 2}(k) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} a_1(p, w) \left\{ 1 - \lambda_1 \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 1}(k) \right\} &= \\ \lambda_1 g_{\ell 1}(p) + \lambda_1 a_2(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 2}(k) \end{aligned} \quad (3.31)$$

maka :

$$\begin{aligned} a_1(p, w) &= \frac{\lambda_1 g_{\ell 1}(p) + \lambda_1 a_2(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 2}(k)}{1 - \lambda_1 \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 1}(k)} \\ &= \frac{g_{\ell 1}(p) + a_2(p, w) \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 2}(k)}{\lambda_1^{-1} - \int_0^\infty dk k^2 g_{\ell 1}(k) G_N(w; k) g_{\ell 1}(k)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

dengan menggunakan cara yang sama mendapatkan  $a_1(p, w)$ , sehingga akan diperoleh :

$$a_2(p, w) = \frac{g_{\ell_2}(p) + a_1(p, w) \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_2}(k) G_N(w; k) g_{\ell_1}(k)}{\lambda_2^{-1} - \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_2}(k) G_N(w; k) g_{\ell_2}(k)} \quad (3.33)$$

misalkan :

$$X_{ij}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_i}(k) G_N(w; k) g_{\ell_j}(k) \quad (3.34)$$

dari suku persamaan (3.32) dan (3.33) diperoleh :

$$X_{12}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_1}(k) G_N(w; k) g_{\ell_2}(k) \quad (3.35)$$

$$X_{11}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_1}(k) G_N(w; k) g_{\ell_1}(k) \quad (3.36)$$

$$X_{21}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_2}(k) G_N(w; k) g_{\ell_1}(k) \quad (3.37)$$

$$X_{22}(w) = \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_2}(k) G_N(w; k) g_{\ell_2}(k) \quad (3.38)$$

dan jika :

$$N_{3-i, 3-i}(w) = \lambda_i^{-1} - X_{ii}(w); (i = 1, 2); X_{12}(w) = X_{21}(w) = N_{12}(w) \quad (3.39)$$

sehingga :

$$N_{22}(w) = \lambda_1^{-1} - X_{11}(w) \quad (3.40)$$

$$N_{11}(w) = \lambda_2^{-1} - X_{22}(w) \quad (3.41)$$

maka persamaan (3.32) dan (3.33) dapat ditulis :

$$a_1(p, w) = \frac{g_{\ell_1}(p) + a_2(p, w) X_{12}}{\lambda_1^{-1} - X_{11}} \quad (3.42)$$

$$a_2(p, w) = \frac{g_{\ell 2}(p) + a_1(p, w)X_{21}}{\lambda_2^{-1} - X_{22}} \quad (3.43)$$

melihat definisi persamaan (3.39),(3.40) dan (3.41), menjadikan persamaan (3.42) dan (3.43) dapat dituliskan seperti :

$$a_1(p, w)N_{22}(w) = g_{\ell 1}(p) + a_2(p, w)N_{12}(w) \quad (3.44)$$

$$a_2(p, w)N_{11}(w) = g_{\ell 2}(p) + a_1(p, w)N_{12}(w) \quad (3.45)$$

dari persamaan (3.45) :

$$a_1(p, w) = \frac{a_2(p, w)N_{11}(w) - g_{\ell 2}(p)}{N_{12}(w)} \quad (3.46)$$

selanjutnya mensubstitusikan persamaan (3.46) ke persamaan (3.44) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} (a_2(p, w)N_{11}(w) - g_{\ell 2}(p)) N_{22}(w) &= g_{\ell 1}(p)N_{12}(w) + a_2(p, w)[N_{12}(w)]^2 \\ a_2(p, w)N_{11}(w)N_{22}(w) - g_{\ell 2}(p)N_{22}(w) &= g_{\ell 1}(p)N_{12}(w) + a_2(p, w)[N_{12}(w)]^2 \\ a_2(p, w)\{N_{11}(w)N_{22}(w) - [N_{12}(w)]^2\} &= g_{\ell 1}(p)N_{12}(w) + g_{\ell 2}(p)N_{22}(w) \end{aligned} \quad (3.47)$$

jadi :

$$a_2(p, w) = \frac{g_{\ell 1}(p)N_{12}(w) + g_{\ell 2}(p)N_{22}(w)}{N_{11}(w)N_{22}(w) - [N_{12}(w)]^2} \quad (3.48)$$

misalkan :

$$D(w) = N_{11}(w)N_{22}(w) - [N_{12}(w)]^2 \quad (3.49)$$

sehingga persamaan (3.48) dapat ditulis menjadi :

$$a_2(p, w) = \frac{g_{\ell 1}(p)N_{12}(w) + g_{\ell 2}(p)N_{22}(w)}{D(w)} \quad (3.50)$$

substitusikan persamaan (3.50), maka persamaan (3.46) menjadi :

$$\begin{aligned} a_1(p, w) &= \frac{\left[ \frac{g_{\ell 1}(p)N_{12}(w) + g_{\ell 2}(p)N_{22}(w)}{D(w)} \right] N_{11}(w) - g_{\ell 2}(p)}{N_{12}(w)} \\ &= \frac{g_{\ell 1}(p)N_{12}(w)N_{11}(w)}{D(w)N_{12}(w)} + \frac{g_{\ell 2}(p)N_{22}(w)N_{11}(w)}{D(w)N_{12}(w)} - \frac{g_{\ell 2}(p)}{N_{12}(w)} \\ &= \frac{g_{\ell 1}(p)N_{11}(w)}{D(w)} + g_{\ell 2}(p) \left[ \frac{N_{22}(w)N_{11}(w)}{D(w)N_{12}(w)} - \frac{1}{N_{12}(w)} \right] \\ &= \frac{g_{\ell 1}(p)N_{11}(w)}{D(w)} + g_{\ell 2}(p) \left[ \frac{N_{22}(w)N_{11}(w) - D(w)}{D(w)N_{12}(w)} \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

kemudian substitusikan persamaan (3.49) ke persamaan (3.51) diperoleh :

$$\begin{aligned}
 a_1(p, w) &= \frac{g_{\ell 1}(p)N_{11}(w)}{D(w)} + g_{\ell 2}(p) \left[ \frac{N_{22}(w)N_{11}(w) - \{N_{11}(w)N_{22}(w) - [N_{12}(w)]^2\}}{D(w)N_{12}(w)} \right] \\
 &= \frac{g_{\ell 1}(p)N_{11}(w)}{D(w)} + g_{\ell 2}(p) \left[ \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\
 &= \frac{g_{\ell 1}(p)N_{11}(w)}{D(w)} + \frac{g_{\ell 2}(p)N_{12}(w)}{D(w)} \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

substitusikan persamaan (3.52) dan persamaan (3.50) ke persamaan (3.26) menjadi :

$$\begin{aligned}
 t_{\ell}(q, p; w) &= g_{\ell 1}(q) \left[ \frac{g_{\ell 1}(p)N_{11}(w)}{D(w)} + \frac{g_{\ell 2}(p)N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\
 &\quad + g_{\ell 2}(q) \left[ \frac{g_{\ell 1}(p)N_{12}(w)}{D(w)} + \frac{g_{\ell 2}(p)N_{22}(w)}{D(w)} \right] \\
 &= g_{\ell 1}(q) \frac{N_{11}(w)}{D(w)} g_{\ell 1}(p) + g_{\ell 1}(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_{\ell 2}(p) \\
 &\quad + g_{\ell 2}(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_{\ell 1}(p) + g_{\ell 2}(q) \frac{N_{22}(w)}{D(w)} g_{\ell 2}(p) \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

sehingga persamaan (3.53) dapat disederhanakan menjadi :

$$t_{\ell}(q, p; w) = \sum_{i,j=1,2} g_{\ell i}(q) \frac{N_{ij}(w)}{D(w)} g_{\ell j}(p) \tag{3.54}$$

persamaan (3.54) merupakan solusi persamaan (3.2) untuk separabel potensial rank - 2. Pada rank - 2 untuk hamburan *channel* tunggal dari potensial separabel pada energi lab pion datang dengan menawarkan *form factor*  $g_{\ell 1}(k)$  dan  $g_{\ell 2}(k)$  sama dengan bentuk *form factor* pada rank - 1, yaitu :

$$g_{\ell 1}(k) = k^{\ell} \frac{C_1}{k^2 + \beta_1^2} \tag{3.55}$$

$$g_{\ell 2}(k) = k^{\ell} \frac{C_2}{k^2 + \beta_2^2} \tag{3.56}$$



sehingga bila disubstitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.35), (3.36), (3.37), (3.38), maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned} X_{12} &= \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_1}(k) g_{\ell_2}(k) \frac{2\mu_{\pi N}}{q^2 - k^2} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g_{\ell_1}(k) g_{\ell_2}(k)}{q^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} X_{11} &= \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_1}(k) g_{\ell_1}(k) \frac{2\mu_{\pi N}}{q^2 - k^2} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g_{\ell_1}^2(k)}{q^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} X_{21} &= \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_2}(k) g_{\ell_1}(k) \frac{2\mu_{\pi N}}{q^2 - k^2} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g_{\ell_2}(k) g_{\ell_1}(k)}{q^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} X_{22} &= \int_0^{\infty} dk k^2 g_{\ell_2}(k) g_{\ell_2}(k) \frac{2\mu_{\pi N}}{q^2 - k^2} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 g_{\ell_2}^2(k)}{q^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.60)$$

persamaan (3.57), (3.58), (3.59) dan (3.60) diselesaikan dengan teorema residu yang dijelaskan secara lengkap pada bagian lampiran A. Setelah menghitung integrasinya yang ditunjukkan pada lampiran A, maka dengan mensubstitusikan ke persamaan (3.54) :

Untuk *form factor* diperoleh :

pada  $\ell = 0$  adalah :

$$t_0(q, p) = \left[ \frac{C_1^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_1 C_2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ + \left[ \frac{C_1 C_2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_2^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (3.61)$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.29), (A.30), (A.44) dan (A.46) masing - masing mengandung nilai  $N_{11}(w)$ ,  $N_{22}(w)$ ,  $N_{12}(w)$ , dan  $D(w)$  pada persamaan (3.61).

pada  $\ell = 1$  adalah :

$$t_1(q, p) = \left[ \frac{C_1^2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_1 C_2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ + \left[ \frac{C_1 C_2 qp}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_2^2 qp}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (3.62)$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.58), (A.59), (A.73) dan (A.74) masing - masing mengandung nilai  $N_{11}(w)$ ,  $N_{22}(w)$ ,  $N_{12}(w)$ , dan  $D(w)$  pada persamaan (3.62).

dan pada  $\ell = 2$  adalah :

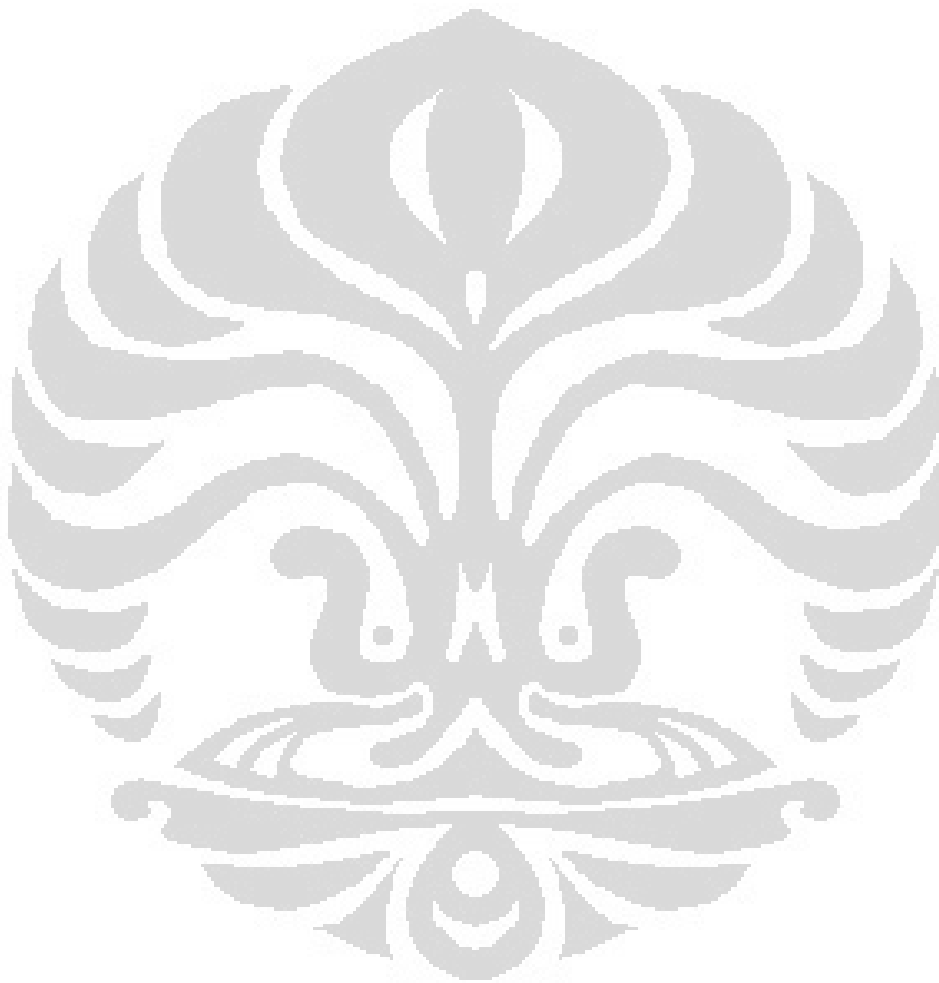
$$t_2(q, p) = \left[ \frac{C_1^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ + \left[ \frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (3.63)$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.86), (A.87), (A.101) dan (A.102) masing - masing mengandung nilai  $N_{11}(w)$ ,  $N_{22}(w)$ ,  $N_{12}(w)$ , dan  $D(w)$  pada persamaan (3.63).

Dimana parameter dalam potensial tersebut akan didapatkan dengan melakukan fitting pada data eksperimen pergeseran fase.

### 3.3 Penetapan Parameter

Ada tiga parameter yaitu  $\lambda_i$ ,  $\beta_i$  dan  $C_i$ . Pada saat melakukan proses *fitting* salah satu yang diharapkan adalah mencari kombinasi parameter pada potensial yang dapat menghasilkan nilai pergeseran fase yang mendekati nilai pergeseran fase pada data eksperimen. Dalam proses *fitting* terlebih dahulu menetapkan nilai awal parameter dan ukuran langkah yang digunakan untuk membatasi variasi nilai parameter, serta batas minimum dan maksimumnya.



# Bab 4

## Hasil Dan Diskusi

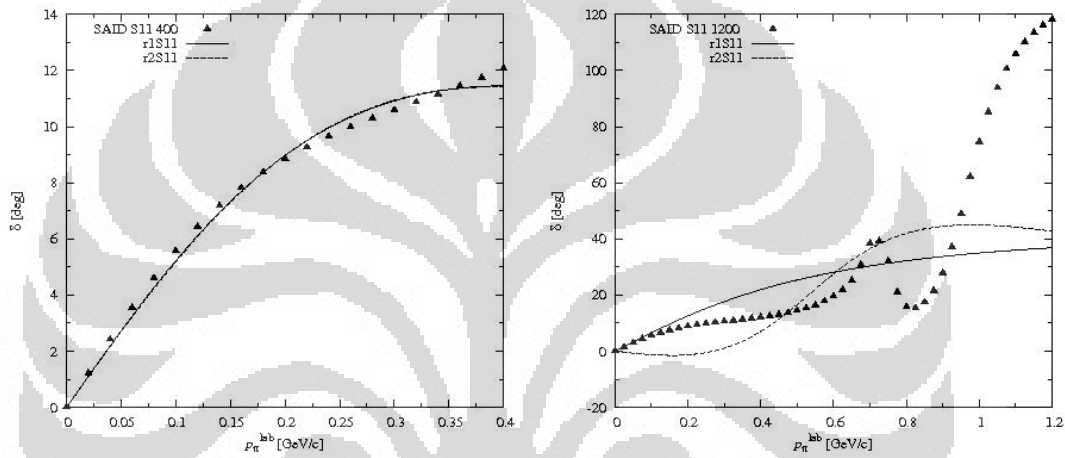
### 4.1 Proses Fitting

Proses *fitting* dilakukan dengan menggunakan *routine fitting* MINUIT dari CERN. Selanjutnya proses ini diawali dengan memilih parameter yang ada pada potensial secara acak, sehingga menghasilkan data berupa pergeseran fase. Parameter dipilih dengan cara menetapkan terlebih dahulu batas minimum dan maksimum, nilai awal dan ukuran langkah yang digunakan. Ini dilakukan dengan tujuan untuk membatasi variasi nilai parameter. Variabel lain yang dibatasi adalah nilai momentum awal pada kerangka lab ( $\vec{p}_\pi^{lab}$ ).  $\vec{p}_\pi^{lab}$  yang dipilih untuk memfitting adalah berkisar pada momentum 0 - 400 MeV/c dan 0 - 1200 MeV/c. Kemudian membandingkan nilai pergeseran fase hasil *fitting* dengan data eksperimen dari SAID analisis. Data eksperimen SAID analisis yang diambil disini adalah  $S_{11}, S_{31}, P_{11}, P_{13}, P_{31}, P_{33}, D_{13}, D_{15}, D_{33}$  dan  $D_{35}$ .

Setelah proses *fitting* dilakukan program minuit akan memperoleh nilai - nilai parameter baru. Nilai yang diperoleh bisa mendekati ataupun berbeda jauh dengan nilai parameter yang dipilih secara acak diawal. Notasi yang digunakan adalah  $\ell_{ij}$ , dengan  $\ell$  merupakan gelombang parsial,  $i$  merupakan isospin dan  $j$  adalah spin. Notasi  $S, P, D$  digunakan untuk menggambarkan orde gelombang parsial pada  $\ell = 0, \ell = 1,$  dan  $\ell = 2$ . Untuk penulisan isospin dengan angka 1 dan 3 masing - masing melambangkan isospin  $\frac{1}{2}$  dan  $\frac{3}{2}$ , sama halnya juga pada penulisan spin angka 1, 3 dan 5 masing - masing untuk menuliskan spin  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  dan  $\frac{5}{2}$ . Untuk memperjelas dalam notasi ini, sebagai contohnya penulisan pada notasi  $S_{31}$  mengandung arti “ $S$ ” adalah orde gelombang parsial pada  $\ell = 0$ , angka “3” merupakan isospin  $\frac{3}{2}$  dan angka “1” adalah penulisan untuk spin  $\frac{1}{2}$ .

## 4.2 Hasil dan Diskusi

Gambar (4.1) yang merupakan grafik hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $S_{11}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum berkisar dari 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum berkisar pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.



Gambar 4.1: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $\vec{p}_\pi^{lab}$  pada gelombang parsial  $S_{11}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

Gambar grafik panel kiri dengan momentum lab 0 - 400 MeV/c terlihat hasil *fitting* yang bagus untuk  $S_{11}$  baik pada rank-1 atau pun rank-2. Rank-1 mempunyai nilai  $\chi^2$  sebesar 0,08 dan rank-2 dengan  $\chi^2$  sebesar 0,12. Hal ini berbeda sekali seperti terlihat pada gambar grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c. Dimana penyimpangan yang terjadi sangat besar, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mendekati plot grafik data eksperimen. Ini disebabkan beberapa hal diantaranya adalah model separabel tidak dapat digunakan untuk gaya repulsif dan atraktif yang muncul secara sekaligus seperti yang dinyatakan oleh [3], kemungkinan lain adalah model potensial separabel masih sederhana sehingga tidak mampu untuk memproduksi kelengkungan kurva dari data eksperimen. Kelengkungan kurva data eksperimen

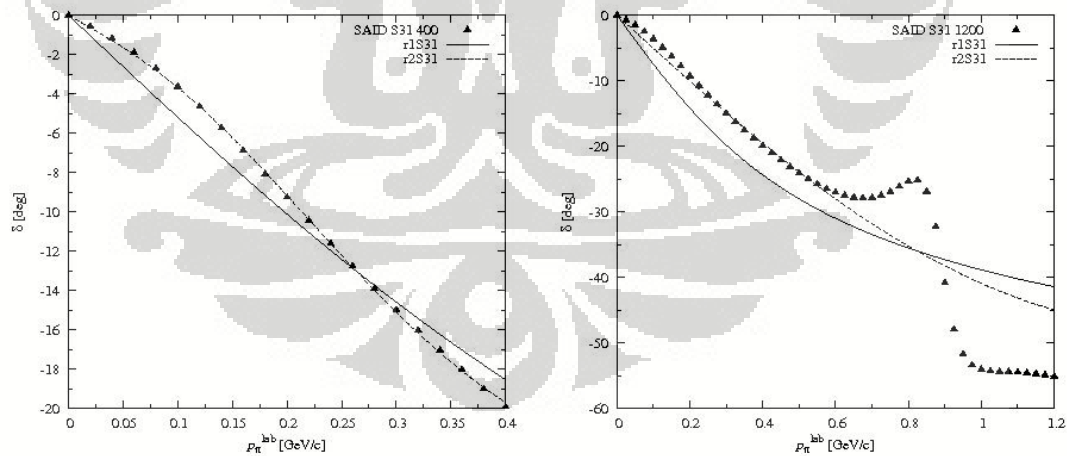
mempunyai titik - titik ekstrim yang tidak bisa dicapai oleh data pergeseran fase dari hasil *fitting*.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $S_{11}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.1).

$\vec{p}_\pi^{lab}$ [MeV/c]	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1$ [MeV]	$C_2$ [MeV]	$\beta_1$ [MeV]	$\beta_2$ [MeV]
0 - 400	1	- 1		749,18		719,53	
	2	+1	- 1	0,05	690,67	-669,59	690,63
0 - 1200	1	- 1		6000,00		-1199,21	
	2	+1	- 1	3157,42	5838,27	995,21	1410,59

Tabel 4.1: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $S_{11}$

Pada gambar (4.2) terlihat hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $S_{31}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum antara 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 juga di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.



Gambar 4.2: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $\vec{p}_\pi^{lab}$  pada gelombang parsial  $S_{31}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

Dengan memperhatikan gambar grafik panel kiri pada momentum lab pion 0 - 400 MeV/c terlihat hasil *fitting*  $S_{31}$  untuk rank-1 memiliki  $\chi^2$  sebesar 1,19, kemudian setelah digunakan rank-2 hasil *fitting* yang diperoleh jauh lebih baik dibandingkan dengan rank-1, dikarenakan rank-2 hanya mempunyai nilai  $\chi^2$  sebesar 0,01. Ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot gambar (4.2) di panel kiri. Kemudian untuk gambar grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c baik untuk rank-1 ataupun rank-2 mengalami kesulitan untuk memproduksi bentuk kurva yang tidak sederhana. Walaupun diawal proses pada rank-2 masih mampu untuk mengikuti grafik data eksperimen, namun pada momentum diatas  $\pm 550$  MeV/c sudah mulai terlihat perbedaan yang signifikan. Ini berarti model potensial separabel yang dipilih belum mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mendekati plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [3] dimana model potensial separabel tidak dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan.

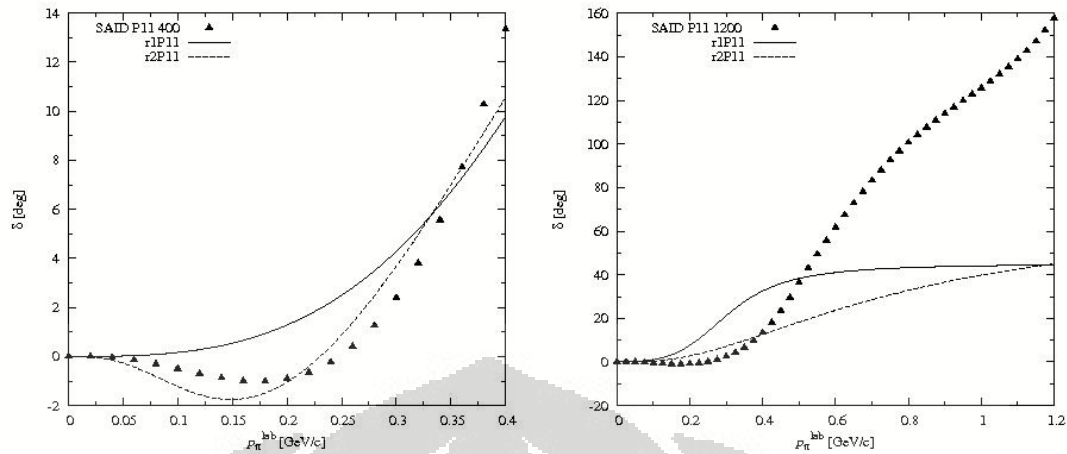
Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $S_{31}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.2).

$\vec{p}_\pi^{lab}$ [MeV/c]	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1$ [MeV]	$C_2$ [MeV]	$\beta_1$ [MeV]	$\beta_2$ [MeV]
0 - 400	1	+1		7999,99		1487,54	
	2	+1	-1	999,99	291,19	560,11	334,93
0 - 1200	1	+1		19430,24		1275,48	
	2	-1	+1	-6999,99	5511,66	6846,64	1366,35

Tabel 4.2: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $S_{31}$

Gambar (4.3) yang merupakan grafik hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $P_{11}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum berkisar dari 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum berkisar pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.

Gambar grafik panel kiri dengan momentum lab 0 - 400 MeV/c terlihat hasil *fitting* untuk gelombang parsial  $P_{11}$  pada rank-1, hasilnya sudah terlihat kecenderungan membentuk plot grafik nilai pergeseran fase dari data SAID analisis. Hasil *fitting* rank-1 ini memiliki  $\chi^2$  bernilai 3,09. Sedangkan pada rank-2 nilai  $\chi^2$  sebesar 1,09 sudah tampak lebih baik memproduksi hasil plot grafik dari pada rank-1. Hal ini berbeda sekali seperti terlihat pada gambar



Gambar 4.3: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $\vec{p}_\pi^{lab}$  pada gelombang parsial  $P_{11}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c. Diawal proses tampak plot grafik mendekati plot data eksperimen, namun selanjutnya penyimpangan yang terjadi sangat besar, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mengikuti plot grafik data eksperimen. Ini disebabkan beberapa hal diantaranya adalah model separabel tidak dapat digunakan untuk gaya repulsif dan atraktif yang muncul secara simultan seperti yang dinyatakan oleh [3], kemungkinan lain adalah model potensial separabel masih terlalu sederhana sehingga tidak mampu untuk memproduksi kelengkungan kurva dari data eksperimen. Kelengkungan kurva data eksperimen mempunyai titik - titik ekstrim yang tidak bisa dicapai oleh data pergeseran fase hasil fitting ini.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $P_{11}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.3).

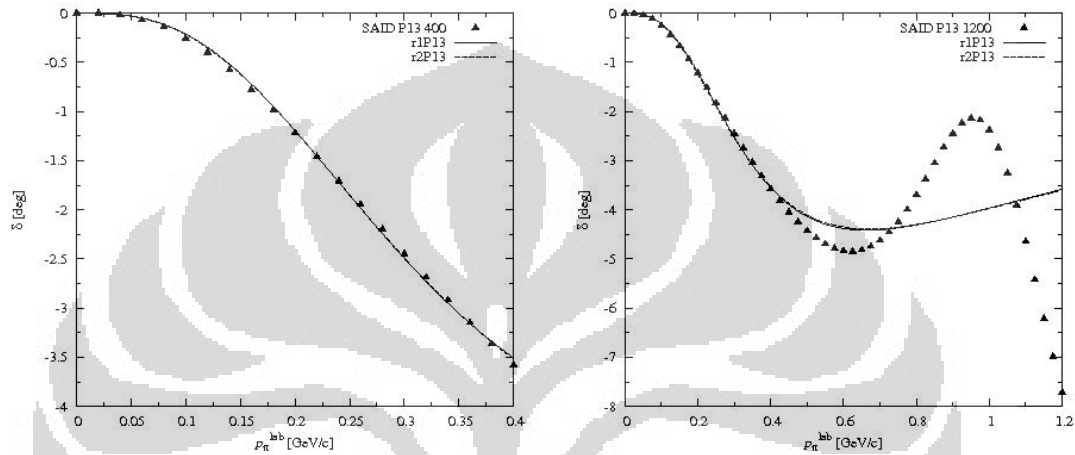
$\vec{p}_\pi^{lab}$ [MeV/c]	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1$	$C_2$	$\beta_1$ [MeV]	$\beta_2$ [MeV]
0 - 400	1	- 1		-83,68		4999,95	
	2	+1	+1	784,78	-511,01	-485,71	149,65
0 - 1200	1	- 1		125,46		3900,00	
	2	-1	+1	3,86	-465,58	-381,25	298,22

Tabel 4.3: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $P_{11}$

Pada gambar (4.4) terlihat hubungan antara momentum laboratorium pion



dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $P_{13}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum antara 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.



Gambar 4.4: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $p_{\pi}^{lab}$  pada gelombang parsial  $P_{13}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

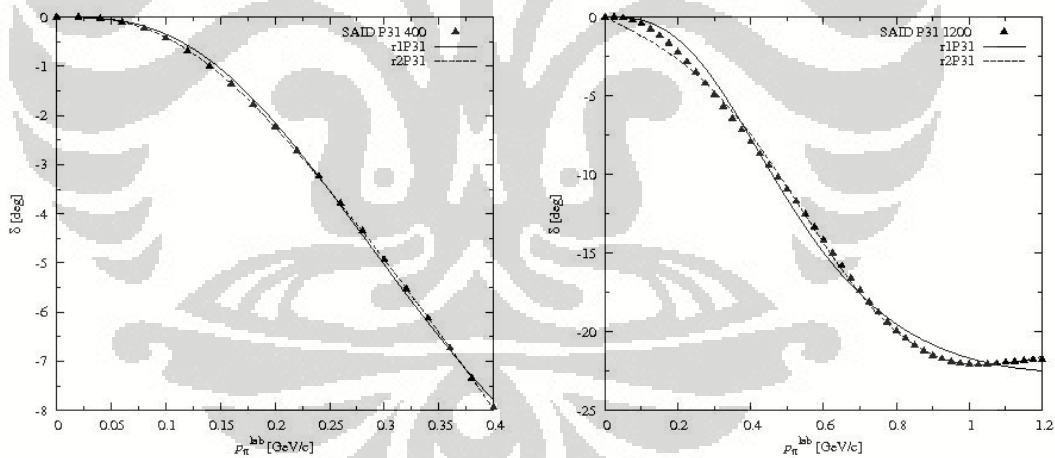
Dengan memperhatikan gambar grafik panel kiri pada momentum lab pion 0 - 400 MeV/c terlihat untuk rank-1 hasil *fitting* yang baik pada nilai pergeseran fase  $P_{13}$ , dimana nilai  $\chi^2$  yang di miliki adalah 0,0016, kemudian setelah digunakan rank-2 hasil *fitting* yang diperoleh sedikit lebih baik lagi dari pada rank-1, dikarenakan rank-2 hanya mempunyai nilai  $\chi^2$  sebesar 0,0013. Ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot gambar (4.4) di panel kiri. Kemudian untuk gambar grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c baik untuk rank-1 ataupun rank-2, diawal proses masih mampu untuk mengikuti grafik data eksperimen, namun pada momentum mulai sekitar  $\pm 450$  MeV/c sudah mulai terlihat penyimpangan. Ini berarti model potensial separabel yang dipilih belum mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak lagi mengikuti plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [3] dimana model potensial separabel tidak dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $P_{13}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.4).

$\vec{p}_\pi^{lab}$ [MeV/c]	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1$	$C_2$	$\beta_1$ [MeV]	$\beta_2$ [MeV]
0 - 400	1	+1		-0,46		332,94	
	2	+1	+1	0,12	0,46	375,64	324,96
0 - 1200	1	+1		0,46		333,92	
	2	+1	-1	26,96	26,95	318,93	318,93

Tabel 4.4: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $P_{13}$

Gambar (4.5) yang merupakan grafik hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $P_{31}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum berkisar dari 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum berkisar pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.



Gambar 4.5: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $\vec{p}_\pi^{lab}$  pada gelombang parsial  $P_{31}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

Gambar grafik panel kiri dengan momentum lab 0 - 400 MeV/c terlihat hasil *fitting* yang bagus pada gelombang parsial  $P_{31}$ , baik untuk rank-1 atau pun rank-2. Jika diperhatikan hasil plot grafiknya, produksi kurva grafik yang diperoleh terlihat jelas rank-2 lebih baik dari pada rank-1. Rank-1 mempunyai

nilai  $\chi^2$  sebesar 0,0074 dan rank-2 mempunyai nilai  $\chi^2$  0,0003. Begitu juga terlihat pada gambar grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c hasil *fitting* yang diperoleh sudah terlihat cukup baik. Dimana plot grafik yang dihasilkan sudah membentuk dan mengikuti plot grafik dari data eksperimen. Rank-1 mempunyai nilai  $\chi^2$  sebesar 0,33 dan rank-2 mempunyai nilai  $\chi^2$  0,10. Jika diperhatikan hasil plot grafiknya, produksi kurva grafik yang diperoleh terlihat rank-2 lebih baik dari pada rank-1. Model potensial separabel ini sudah mampu untuk memproduksi kelengkungan kurva dari data eksperimen dengan penyimpangan yang kecil. Titik - titik ekstrim dari plot grafik data eksperimen sudah bisa diikuti oleh data pergeseran fase dari hasil *fitting*.

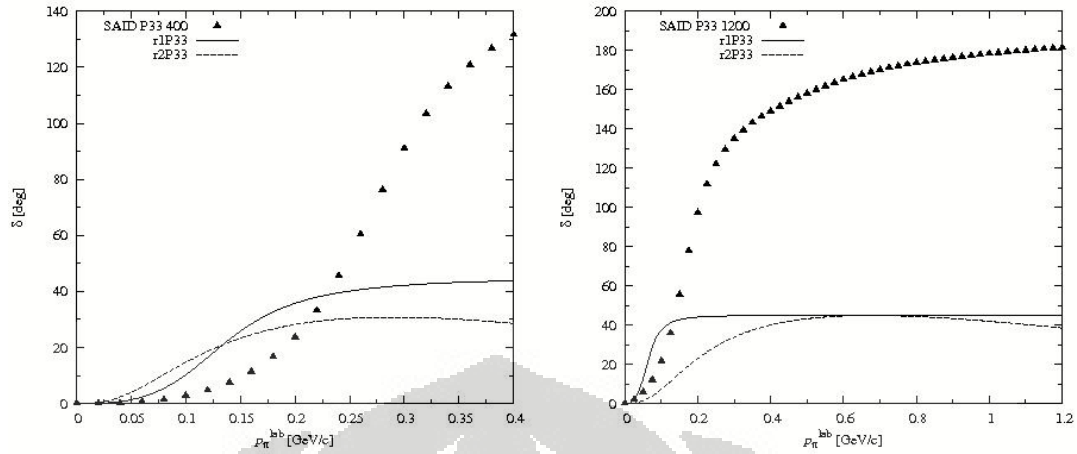
Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $P_{31}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.5).

$\vec{p}_\pi^{lab}$ [MeV/c]	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1$	$C_2$	$\beta_1$ [MeV]	$\beta_2$ [MeV]
0 - 400	1	+1		0,84		405,84	
	2	+1	+1	449,11	-0,53	818,52	294,53
0 - 1200	1	+1		1,65		664,67	
	2	-1	+1	0,16	-1,11	0,29	0,29

Tabel 4.5: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $P_{31}$

Pada gambar (4.6) terlihat hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $P_{33}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum antara 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 juga di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.

Dengan memperhatikan gambar grafik panel kiri pada momentum lab pion 0 - 400 MeV/c terlihat hasil *fitting*  $P_{33}$  untuk rank-1 dan rank-2 yang hanya bisa membentuk pola kemiripan saja, tapi mempunyai penyimpangan dari plot data eksperimen. Kemudian untuk gambar grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c baik untuk rank-1 ataupun rank-2 terlihat juga hanya bisa membentuk kemiripan tapi masih mempunyai penyimpangan yang besar. kedua jenis momentum 0 - 400 MeV dan 0 - 1200 MeV mengalami kesulitan untuk memproduksi bentuk kurva yang tidak sederhana. Ini berarti model potensial separabel yang dipilih belum mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mendekati plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [3] dimana model poten-



Gambar 4.6: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $\vec{p}_\pi^{lab}$  pada gelombang parsial  $P_{33}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

sial separabel tidak dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan.

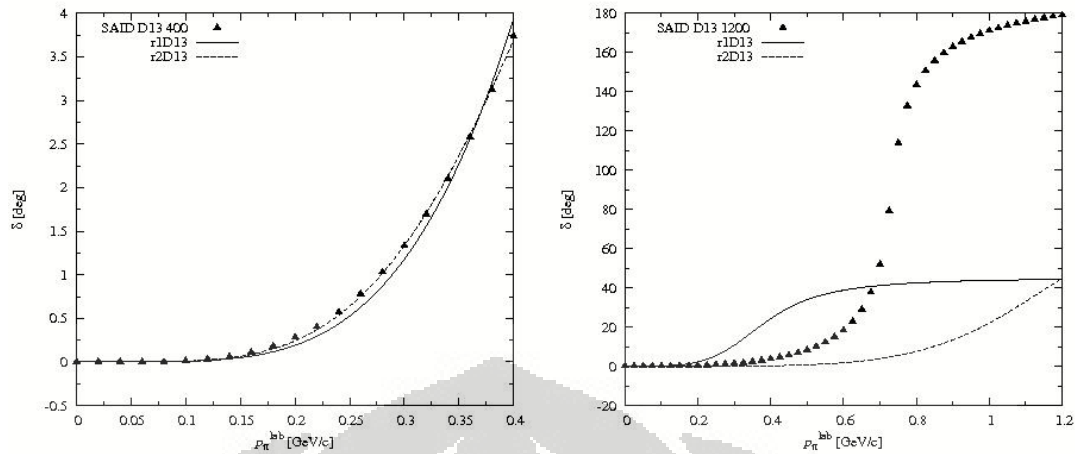
Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $P_{33}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.6).

$\vec{p}_\pi^{lab}$ [MeV/c]	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1$	$C_2$	$\beta_1$ [MeV]	$\beta_2$ [MeV]
0 - 400	1	-1		-683,13		5000,00	
	2	+1	+1	1,74	396,66	-80,34	967,82
0 - 1200	1	-1		2171,69		5000,00	
	2	+1	+1	65,55	1280,58	2999,14	-164,84

Tabel 4.6: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $P_{33}$

Gambar (4.7) yang merupakan grafik hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $D_{13}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum berkisar dari 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum berkisar pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.

Dengan memperhatikan gambar grafik panel kiri  $D_{13}$  pada momentum lab pion 0 - 400 MeV/c terlihat hasil *fitting* untuk rank-1 yang baik, dimana nilai



Gambar 4.7: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $\vec{p}_\pi^{lab}$  pada gelombang parsial  $D_{13}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

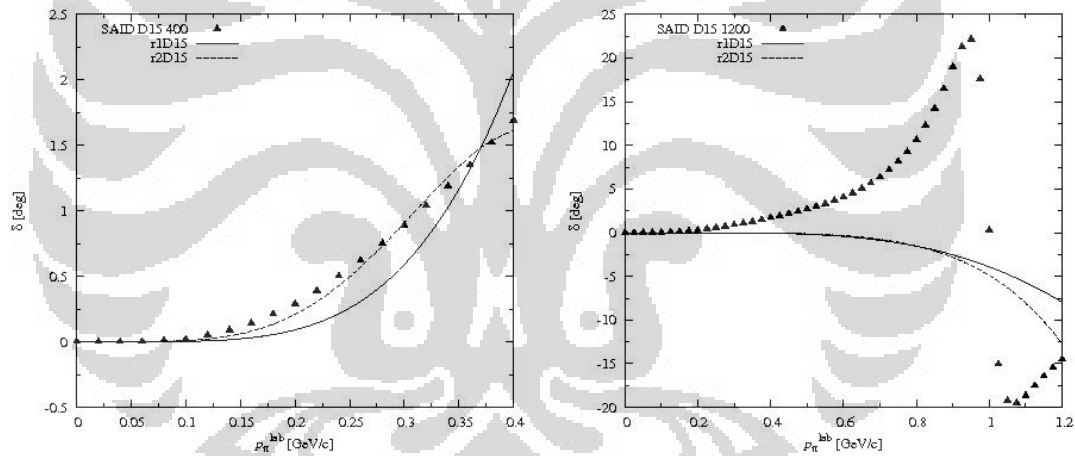
$\chi^2$  yang di miliki adalah 0,00995. Kemudian setelah digunakan rank-2 hasil *fitting* yang diperoleh lebih baik lagi dari rank-1, dikarenakan rank-2 hanya mempunyai nilai  $\chi^2$  sebesar 0,00061. Ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot gambar (4.7) di panel kiri. Kemudian untuk gambar grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c baik untuk rank-1 ataupun rank-2, diawal proses masih mampu untuk mengikuti grafik data eksperimen, namun bila nilai momentum terus di geser naik, maka penyimpangan akan terlihat pada momentum mulai  $\pm 375$  MeV/c. Ini berarti model potensial separabel yang dipilih belum mampu sepenuhnya untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak lagi mengikuti plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [3] dimana model potensial separabel tidak dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan. Kemungkinan lain adalah model potensial separabel masih sederhana sehingga tidak mampu untuk memproduksi kelengkungan kurva dari data eksperimen. Kelengkungan kurva data eksperimen mempunyai titik - titik ekstrim yang sulit dicapai oleh data pergeseran fase dari hasil *fitting*.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $D_{13}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.7).

$\vec{p}_\pi^{lab} [\text{MeV}/c]$	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1 [\text{MeV}]^{-1}$	$C_2 [\text{MeV}]^{-1}$	$\beta_1 [\text{MeV}]$	$\beta_2 [\text{MeV}]$
0 - 400	1	-1		4,60		484,50	
	2	+1	+1	758,01	-873,59	8,54	453,43
0 - 1200	1	+1		-2,60		278,54	
	2	+1	+1	-15,64	6,44	79,32	281,57

Tabel 4.7: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $D_{13}$ 

Pada gambar (4.8) terlihat hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $D_{15}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum antara 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.



Gambar 4.8: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $\vec{p}_\pi^{lab}$  pada gelombang parsial  $D_{15}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

Dengan memperhatikan gambar grafik panel kiri  $D_{15}$  pada momentum lab pion 0 - 400 MeV/c tampak rank-1 dan rank-2 mempunyai hasil *fitting* yang baik, walaupun pada rank-1 masih terlihat penyimpangan akan tetapi pola dari plot grafiknya sudah mulai terlihat mengikuti plot data eksperimen. Namun ketika menggunakan rank-2 hasil *fitting* sudah terlihat baik jika dibandingkan dengan rank-1. Nilai  $\chi^2$  yang di miliki untuk masing - masing rank-1 dan rank-2 adalah 0,04 dan 0,003. Selanjutnya untuk gambar grafik panel kanan

dengan momentum 0 - 1200 MeV/c baik untuk rank-1 ataupun rank-2, diawal proses masih mampu untuk mengikuti grafik data eksperimen, namun pada momentum mulai sekitar  $\pm 225$  MeV/c sudah mulai terlihat penyimpangan. Ini berarti model potensial separabel yang dipilih belum mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi secara utuh, sehingga plot grafik yang dihasilkan masih sulit mengikuti plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [3] dimana model potensial separabel tidak dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $D_{15}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.8).

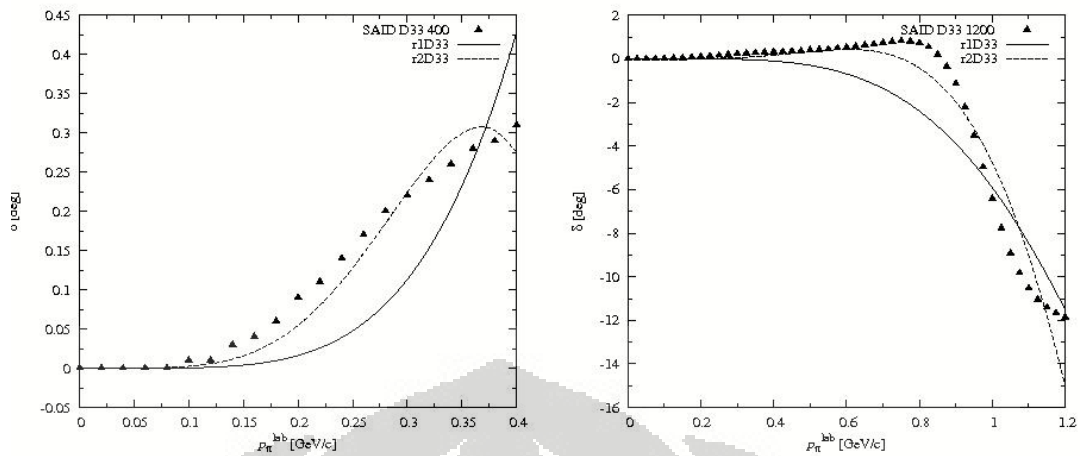
$\vec{p}_\pi^{lab}[\text{MeV}/c]$	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1[\text{MeV}]^{-1}$	$C_2[\text{MeV}]^{-1}$	$\beta_1[\text{MeV}]$	$\beta_2[\text{MeV}]$
0 - 400	1	-1		5,53		566,61	
	2	+1	+1	994,48	630,14	7,66	429,87
0 - 1200	1	-1		-2,86		-1211,62	
	2	+1	+1	-999,06	-744,11	1000,00	-104,66

Tabel 4.8: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $D_{15}$

Pada gambar (4.9) terlihat hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $D_{33}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum antara 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 juga di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.

Dengan memperhatikan gambar grafik panel kiri pada momentum lab pion 0 - 400 MeV/c terlihat hasil *fitting*  $D_{33}$  untuk rank-1 memiliki  $\chi^2$  sebesar 0,00488 yang sudah mengikuti pola data eksperimen, kemudian setelah digunakan rank-2 hasil *fitting* yang diperoleh jauh lebih baik dibandingkan dengan rank-1, dikarenakan rank-2 hanya mempunyai nilai  $\chi^2$  sebesar 0,00050. Ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot gambar (4.9) di panel kiri. Kemudian untuk gambar grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c baik untuk rank-1 ataupun rank-2 diawal proses tampak mengikuti plot grafik data eksperimen. Namun bila momentum diperbesar mulai terlihat perbedaan produksi pergeseran fase antara hasil *fitting* dengan data eksperimen, akan tetapi pola yang dihasilkan sudah tampak mendekati data eksperimen. Hasil plot grafik yang diperoleh menunjukkan rank-2 lebih baik dari rank-1. Model potensial separabel yang dipilih masih terlalu sederhana untuk menjelaskan





Gambar 4.9: Pergeseran fase hamburan( $\delta$ ) Pion-Nukleon( $\pi$ N) terhadap  $\vec{p}_\pi^{lab}$  pada gelombang parsial  $D_{33}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mendekati plot grafik data eksperimen. Ini sesuai dengan yang ditemukan [3] dimana model potensial separabel tidak dapat menggambarkan fenomena tarik menarik dan tolak menolak secara simultan.

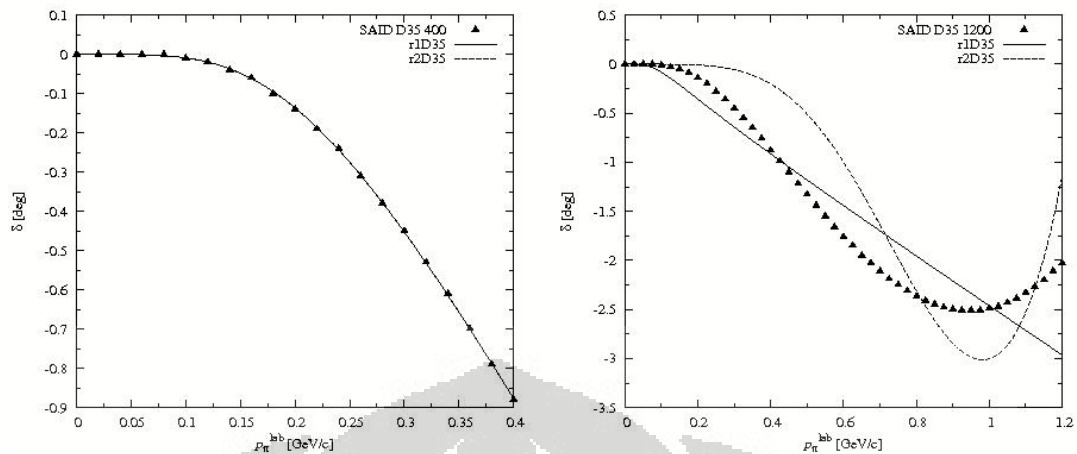
Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $D_{33}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.9).

$\vec{p}_\pi^{lab}$ [MeV/c]	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1$ [MeV] $^{-1}$	$C_2$ [MeV] $^{-1}$	$\beta_1$ [MeV]	$\beta_2$ [MeV]
0 - 400	1	-1		4,37		811,25	
	2	+1	+1	-586,44	-365,30	520,36	42,27
0 - 1200	1	+1		19,72		-1092,36	
	2	+1	+1	30,24	87,62	810,19	55,25

Tabel 4.9: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $D_{33}$

Pada gambar (4.10) terlihat hubungan antara momentum laboratorium pion dengan pergeseran fase pada gelombang parsial  $D_{35}$  dari model separabel potensial rank-1 dan rank-2. Panel kiri menunjukkan jangkauan momentum antara 0 - 400 MeV/c, sedangkan pada panel kanan menunjukkan jangkauan momentum pada 0 - 1200 MeV/c. Grafik untuk rank-1 dan rank-2 juga di plot secara bersamaan dalam satu gambar dengan spesifikasi pada masing - masing jangkauan momentum.





Gambar 4.10: Pergeseran fase hamburan ( $\delta$ ) Pion-Nukleon ( $\pi N$ ) terhadap  $p_{\pi}^{lab}$  pada gelombang parsial  $D_{35}$ . Segitiga : Pergeseran fase dari SAID analisis; garis : hasil perhitungan menggunakan potensial separabel rank-1; garis putus - putus : hasil perhitungan yang menggunakan potensial separabel rank-2.

Dengan memperhatikan gambar grafik panel kiri pada momentum lab pion 0 - 400 MeV/c terlihat hasil *fitting*  $D_{35}$  yang sangat baik. Hasil ini untuk rank-1 maupun rank-2 yang mempunyai  $\chi^2$  pada rank-1 0,00001 dan rank-2 adalah 0,00001. Ini bisa dibuktikan dengan memperhatikan plot gambar (4.10) di panel kiri. Kemudian untuk gambar grafik panel kanan dengan momentum 0 - 1200 MeV/c untuk rank-1 masih mengalami kesulitan untuk memproduksi bentuk kurva yang tidak sederhana. Walaupun diawal proses pada rank-1 masih mampu untuk mengikuti grafik data eksperimen, namun setelah momentum digeser keatas maka mulai terlihat perbedaan pola grafik yang signifikan. Pada rank-2 terlihat lebih baik dari rank-1, dimana rank-2 masih mampu untuk membentuk pola yang mirip dengan plot data eksperimen. Berdasarkan uraian diatas dapat kita ketahui bahwa model potensial separabel yang dipilih belum mampu untuk menjelaskan fenomena yang terjadi, sehingga plot grafik yang dihasilkan tidak mendekati plot grafik data eksperimen.

Untuk nilai parameter yang dihasilkan program MINUIT pada gelombang parsial  $D_{35}$  setelah proses *fitting* dapat dilihat dalam tabel (4.10).

Dari hasil perhitungan untuk semua kasus diatas, pada momentum rendah pergeseran fase yang dihasilkan oleh potensial separabel sangat baik digunakan untuk memfitting data eksperimen. Dapat dilihat bahwa pada sebagian

$\vec{p}_\pi^{lab}[\text{MeV}/c]$	Rank	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$C_1[\text{MeV}]^{-1}$	$C_2[\text{MeV}]^{-1}$	$\beta_1[\text{MeV}]$	$\beta_2[\text{MeV}]$
0 - 400	1	+1		7999,99		1487,54	
	2	+1	-1	999,99	291,19	560,11	334,93
0 - 1200	1	+1		19430,24		1275,48	
	2	-1	+1	-6999,99	5511,66	6846,64	1366,35

Tabel 4.10: Parameter Separabel Potensial pada Gelombang Parsial  $D_{35}$ 

besar data pergeseran fase yang difitting, untuk model potensial rank-1 ataupun rank-2 pada momentum lab pion 0-400 MeV/c ternyata baik mereproduksi ulang data pergeseran fase dari SAID analisis. Terlihat bahwa data dapat dideskripsikan cukup baik. Hasil pada momentum lab pion 0-400 MeV/c untuk semua kanal sangat mirip sehingga hasil untuk semua kanal dapat diterima baik rank-1 ataupun rank-2. Akan tetapi semakin besarnya momentum kecenderungan pergeseran fase sulit untuk mengikuti data eksperimen. Bentuk rank-1 dan rank-2 pada momentum lab pion 0 - 1200 MeV/c masih sulit memfitting secara utuh dengan baik. Fitting terbaik didapat secara utuh untuk rank-1 dan rank-2 dengan momentum lab pion 0-1200 MeV/c adalah pada gelombang parsial  $P_{31}$ . Dan hasil *fitting* yang kurang baik pada  $P_{33}$ .

Sedangkan pada penelitian Ratu [9], digunakan kinematika relativistik, dengan model potensial separabel yang dikerjakan hanya sampai pada rank-1. Momentum pion yang digunakan adalah 0-400 MeV/c dan 0-1500 MeV/c. Adapun hasil yang diperoleh Ratu [9] pada momentum 0-400 MeV/c terlihat kecocokan yang baik antara model separabel rank-1 dengan data pergeseran fase dari data SAID analisis, namun pada momentum hingga 1500 MeV/c terlihat kecocokan yang tidak begitu baik. Dan jika hasil *fitting* Ratu [9] pada semua gelombang parsial dibandingkan dengan hasil *fitting* yang didapat oleh penulis (khusus pada rank-1), ditemukan bahwa :

1. Pada momentum hingga 400 MeV masing-masing memfit dengan baik data eksperimen. Akan tetapi jika momentum pion diperbesar, maka hasil *fitting* Ratu [9] lebih baik dari yang penulis peroleh. Hal ini terjadi karena disamping kinematika yang digunakan Ratu [9] adalah relativistik, *form factor* yang digunakan Ratu [9] juga berbeda dengan yang digunakan oleh penulis. Dimana *form factor* yang digunakan Ratu [9] lebih kompleks dari pada yang penulis gunakan.
2. Reproduksi nilai pergeseran fase
  - Yang diperoleh Penulis  $\rightarrow |\delta| < 50\text{deg}$
  - Yang diperoleh [9]  $\rightarrow |\delta| < 95\text{deg}$

## Bab 5

# Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan dari hasil penelitian ini adalah dimana penelitian ini telah berhasil membuat model potensial separabel untuk hamburan pion-nukleon ( $\pi N$ ) pada bentuk rank-1 dan rank-2. Model potensial separabel ini baik untuk digunakan pada momentum 0-400 MeV/c. Dan hasil reproduksi data pergeseran fase rank-2 terlihat lebih baik jika dibandingkan dengan data pergeseran fase rank-1. Jika momentum pion lab digeser terus naik maka akan terlihat penyimpangan hasil data memfitting dengan data hasil eksperimen. Ini menunjukkan model potensial separabel yang digunakan belum mampu memberikan kecocokan dengan data pergeseran fase yang ada, sehingga dibutuhkan model potensial separabel yang lebih kompleks. Kemudian hasil fitting terbaik didapat hingga momentum pion lab 1200 MeV/c pada gelombang parsial  $P_{31}$ . Dan jika dibandingkan kembali hasil data pergeseran fase dari proses *fitting* dengan data SAID analisis maka akan terlihat juga rank-2 akan lebih baik dari rank-1.

Nilai parameter  $\lambda$  bernilai negatif pada model potensial separabel yang digunakan menunjukkan potensial pada penelitian ini memberikan deskripsi interaksi nuklir  $\pi N$  yang sifatnya atraktif. Sedangkan Nilai parameter  $\lambda$  yang bernilai positif menunjukkan potensial pada penelitian ini memberikan deskripsi yang sifatnya repulsif. Dan juga bisa ditentukan dengan cara melihat pergeseran fase dengan nilai negatif menunjukkan adanya gaya repulsif (saling tolak) sedangkan pergeseran fase dengan nilai positif menunjukkan gaya yang sifatnya atraktif (saling tarik). Hal yang tidak kalah pentingnya adalah faktor bentuk yang digunakan sangat menentukan ketepatan dalam menghasilkan nilai pergeseran fase yang sesuai dengan hasil eksperimen. Apa bila dilihat dari beberapa plot grafik, nilai pergeseran fase hasil *fitting* tidak bisa mengikuti nilai pergeseran fase data eksperimen jika  $|\delta| > 50$  deg.

Hasil dari membandingkan penelitian Ratu [9] dengan yang diperoleh penulis adalah jika momentum pion hingga 400 MeV dengan rank yang sama, reproduksi nilai pergeseran fase dapat digambarkan dengan baik. Tapi jika momentum pion diperbesar maka kinematika relativistik dapat mereproduksi nilai pergeseran fase lebih baik jika dibandingkan dengan kinematika non-relativistik.

Berdasarkan hasil dari penelitian ini penulis sarankan untuk melakukan lanjutan penelitian dengan model potensial separabel yang lebih kompleks. Dan juga melanjutkan ke rank yang lebih tinggi yang mengandung lebih banyak parameter, sehingga hasil yang diperoleh lebih baik lagi dalam mereproduksi kembali data pergeseran fase dari eksperimen.



# Lampiran A

## Integrasi dengan Metode Residu

### A.1 Fungsi Kompleks

Bentuk fungsi kompleks secara umum adalah :

$$f(z) = \mu(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{A.1})$$

dimana  $\mu(x, y)$  disebut bagian real dan  $iv(x, y)$  disebut bagian imajiner

### A.2 Teorema Residu

#### A.2.1 Deret Laurent

Bentuk umum deret Laurent :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \\ + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{z - z_0}^2 + \dots \quad (\text{A.2})$$

#### A.2.2 Residu

Berdasarkan persamaan (A.2) Koefisien  $b_1$  merupakan residu  $f(z)$  di  $z = z_0$ . Residu juga dapat dihitung dengan rumus :

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} \\ = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z - z_0)^m \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \right\} \\ = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{\phi(z)\} \quad (\text{A.3})$$

Dan juga untuk  $f(z)$  yang bisa dinyatakan dengan  $\frac{g(z)}{h(z)}$  dimana  $g(z_0)$  tidak sama dengan 0;  $h(z_0) = 0$ ;  $h'(z_0)$  tidak sama dengan 0, residu bisa dihitung dengan rumus :

$$b_1 = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (\text{A.4})$$

Hasil integral  $f(z)$  dengan menggunakan teorema residu adalah [15] :

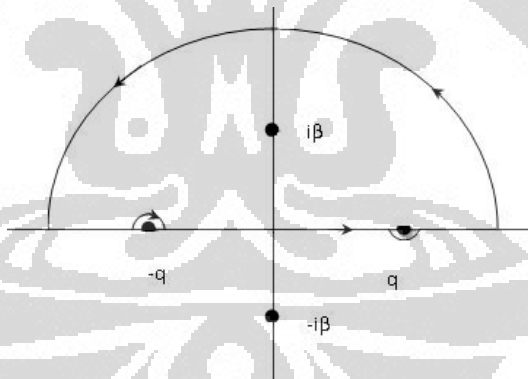
$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot (b_1 + b_2 + \dots) \quad (\text{A.5})$$

### A.2.3 Integrasi Rank - 1

Dalam ungkapan separabel matriks-t yang diberikan persamaan (3.20) di dalamnya terdapat bentuk integral :

$$I_\ell = \int_0^\infty dk \frac{k^2 g_\ell^2(k)}{q^2 - k^2} \quad (\text{A.6})$$

Integral persamaan (A.6) diselesaikan dengan menggunakan teorema residu, gambar bentuk integralnya adalah :



Gambar A.1: Integrasi teorema residu rank-1

Dalam integral ini bentuk  $g_\ell(k)$  adalah seperti yang terlihat pada persamaan (3.18) dimana  $C_i$  dan  $\beta_i$  adalah parameter potensial. Sebagai contoh menghitung integral untuk  $\ell = 0$ , dan agar lebih sederhana sembunyikan parameter  $C_i$ , sehingga faktor bentuk menjadi :

$$g_0(k) = \frac{1}{k^2 + \beta^2} \quad (\text{A.7})$$

substitusikan persamaan (A.7) ke persamaan (A.6) :

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k^2 + \beta^2)^2 (q^2 - k^2)} \\
 &= \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 (q - k)(q + k)} \\
 &= \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 \{-(k - q)\} (q + k)} \\
 &= \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{-(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 (k - q)(q + k)} \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

Dari ungkapan terakhir, integral memiliki dua pole sederhana pada  $k = q$  dan  $k = -q$  serta pole orde kedua pada  $k = -i\beta$  dan  $k = +i\beta$ . Untuk memecahkannya, kita ambil dari bidang kompleks.

#### Pole Orde satu

Berdasarkan persamaan (A.8) pada titik singular  $k = q$  residunya menjadi :

$$b_1 = -\frac{k^2}{(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 (q + k)} \tag{A.9}$$

substitusikan nilai titik singular  $k = q$  pada persamaan (A.9) :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -\frac{q^2}{(q + i\beta)^2 (q - i\beta)^2 (q + q)} \\
 &= -\frac{q^2}{(q + i\beta)^2 (q - i\beta)^2 2q} \\
 &= -\frac{q}{2(q^2 + \beta^2)^2} \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

### Pole Orde dua

Berdasarkan persamaan (A.8) pada titik singular  $k = i\beta$ , dengan menggunakan persamaan (A.3), maka residunya menjadi :

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \lim_{k \rightarrow k_0} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dk^{2-1}} \{(k - k_0)^2 f(k)\} \\
 &= \lim_{k \rightarrow i\beta} \frac{d}{dk} \left\{ (k - i\beta)^2 \frac{k^2}{(k + i\beta)^2 (k - i\beta)^2 (q - k)(q + k)} \right\} \\
 &= \lim_{k \rightarrow i\beta} \frac{d}{dk} \frac{k^2}{(k + i\beta)^2 (q - k)(q + k)} \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

dari lampiran B persamaan (B.14), maka persamaan (A.11) menjadi :

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \lim_{k \rightarrow i\beta} \frac{2k^5 + 2i\beta k^4 + 2i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k}{(-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2)^2} \\
 &= \frac{2(i\beta)^5 + 2(i\beta)^5 + 2(i\beta)^3 q^2 - 2\beta^2 (i\beta) q^2}{(- (i\beta)^4 - 2(i\beta)^4 + (q^2 + \beta^2)(i\beta)^2 + 2(i\beta)^2 q^2 - \beta^2 q^2)^2} \\
 &= \frac{4(i\beta)^5 + 2(i\beta)^3 q^2 - 2\beta^2 (i\beta) q^2}{[-3(i\beta)^4 + (q^2 + \beta^2)(i\beta)^2 + 2(i\beta)^2 q^2 - \beta^2 q^2]^2} \\
 &= \frac{4i\beta^5 - 2i\beta^3 q^2 - 2i\beta^3 q^2}{[-3\beta^4 - (q^2 + \beta^2)\beta^2 - 2\beta^2 q^2 - \beta^2 q^2]^2} \\
 &= \frac{4i\beta^5 - 4i\beta^3 q^2}{[-3\beta^4 - \beta^2 q^2 - \beta^4 - 3\beta^2 q^2]^2} \\
 &= \frac{4i\beta^3 (\beta^2 - q^2)}{[-4\beta^4 - 4\beta^2 q^2]^2} \\
 &= \frac{4i\beta^3 (\beta^2 - q^2)}{[-4\beta^2 (q^2 + \beta^2)]^2} \\
 &= \frac{4i\beta^3 (\beta^2 - q^2)}{16\beta^4 (q^2 + \beta^2)^2} \\
 &= \frac{i(\beta^2 - q^2)}{4\beta (q^2 + \beta^2)^2} \tag{A.12}
 \end{aligned}$$



Hasil integral (A.8) yang menggunakan persamaan (A.5), (A.10) dan (A.12) adalah :

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \oint_C dk \frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q-k)(q+k)} \\
 &= 2\pi i \cdot [b_1 + b_2] \\
 &= 2\pi i \cdot \left[ -\frac{q}{2(q^2 + \beta^2)^2} + \frac{i(\beta^2 - q^2)}{4\beta(q^2 + \beta^2)^2} \right] \\
 &= \pi \left[ \frac{-iq}{(q^2 + \beta^2)^2} - \frac{(\beta^2 - q^2)}{2\beta(q^2 + \beta^2)^2} \right] \\
 &= \pi \left[ \frac{-2\beta iq - \beta^2 + q^2}{2\beta(q^2 + \beta^2)^2} \right] \\
 &= \pi \left[ \frac{(-q + i\beta)^2}{2\beta(\beta - iq)^2(\beta + iq)^2} \right] \\
 &= \pi \left[ \frac{[i(\beta + iq)]^2}{2\beta(\beta - iq)^2(\beta + iq)^2} \right] \\
 &= -\pi \left[ \frac{(\beta + iq)^2}{2\beta(\beta - iq)^2(\beta + iq)^2} \right] \\
 &= -\frac{\pi}{2\beta(\beta - iq)^2}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q-k)(q+k)} = -\frac{\pi}{2\beta(\beta - iq)^2} \tag{A.14}$$

misalkan  $\frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q-k)(q+k)} = A$  maka :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dk A &= -\frac{\pi}{2\beta(\beta - iq)^2} \\
 2 \int_0^{\infty} dk A &= -\frac{\pi}{2\beta(\beta - iq)^2} \\
 \int_0^{\infty} dk A &= -\frac{\pi}{4\beta(\beta - iq)^2}
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

maka :

$$\int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k+i\beta)^2(k-i\beta)^2(q-k)(q+k)} = -\frac{\pi}{4\beta(\beta - iq)^2} \tag{A.16}$$

Melihat kembali persamaan (3.20), sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} I &= 2\mu_{\pi N} \cdot \left(-\frac{\pi}{4\beta(\beta - iq)^2}\right) \\ &= -\frac{\pi\mu_{\pi N}}{2\beta(\beta - iq)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

karena diawal perhitungan kita menyembunyikan parameter  $C$ , maka setelah dimunculkan persamaan (A.17) menjadi :

$$I = -\frac{\pi\mu_{\pi N}C^2}{2\beta(\beta - iq)^2} \quad (\text{A.18})$$

substitusikan persamaan (A.18) ke persamaan (3.16) :

$$\tau(w) = \left[ \lambda^{-1} - \left(-\frac{\pi\mu_{\pi N}C^2}{2\beta(\beta - iq)^2}\right) \right]^{-1} \quad (\text{A.19})$$

substitusikan persamaan (A.19) ke persamaan (3.17) diperoleh :

$$t_0(q, p) = g_0(q)g_0(p) \left[ \lambda^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C^2}{2\beta(\beta - iq)^2} \right]^{-1} \quad (\text{A.20})$$

berdasarkan persamaan (3.18), sehingga bentuk  $g_\ell(q)$  dan  $g_\ell(p)$  dapat ditulis :

$$g_\ell(q) = q^\ell \frac{C_i}{q^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.21})$$

$$g_\ell(p) = p^\ell \frac{C_i}{p^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.22})$$

substitusikan persamaan (A.21) dan (A.22) ke persamaan (A.20) :

$$t_0(q, p) = \frac{C^2}{(q^2 + \beta^2)(p^2 + \beta^2)} \left[ \lambda^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C^2}{2\beta(\beta - iq)^2} \right]^{-1} \quad (\text{A.23})$$

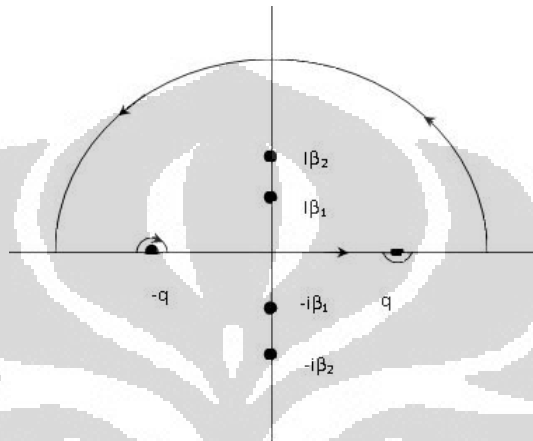
bila disederhanakan lagi, persamaan (A.23) adalah :

$$t_0(q, p) = \lambda \frac{C_0^2}{(q^2 + \beta_0^2)(p^2 + \beta_0^2)} \left[ 1 + \lambda \frac{\pi\mu_{\pi N}C_0^2}{2\beta_0(\beta_0 - iq)^2} \right]^{-1} \quad (\text{A.24})$$

### A.2.4 Integrasi Rank - 2

pada  $\ell = 0$

Dalam ungkapan separabel matriks-t yang diberikan persamaan (3.57), (3.58), (3.59) dan (3.60) didalamnya terdapat bentuk integral. Integral persamaan ini diselesaikan dengan menggunakan teorema residu, gambar bentuk integralnya adalah :



Gambar A.2: Integrasi teorema residu rank-2

Dalam integral ini bentuk  $g_{\ell 1}(k)$  dan  $g_{\ell 2}(k)$  adalah seperti yang terlihat pada persamaan (3.55) dan (3.56). Sebagai contoh menghitung integral untuk  $\ell = 0$ , dan agar lebih sederhana sembunyikan parameter  $C_1$  dan  $C_2$ , sehingga faktor bentuk menjadi :

$$g_{\ell 1}(k) = \frac{1}{k^2 + \beta_1^2} \quad (\text{A.25})$$

$$g_{\ell 2}(k) = \frac{1}{k^2 + \beta_2^2} \quad (\text{A.26})$$

substitusikan persamaan (A.25), (A.26) ke persamaan (3.57), (3.58), (3.59) dan (3.60). Khusus proses substitusi ke persamaan (3.58) dan (3.60) sama dengan proses pada persamaan (3.20), maka akan kita peroleh hasil integral teorema residunya adalah :

$$X_{11} = -\frac{\pi \mu_{\pi N} C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \quad (\text{A.27})$$

$$X_{22} = -\frac{\pi \mu_{\pi N} C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \quad (\text{A.28})$$

kemudian substitusikan persamaan (A.27) dan (A.28) ke persamaan (3.41) dan

(3.40) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} N_{22}(w) &= \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \\ &= \lambda_1 \left[ 1 + \lambda_1 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} N_{11}(w) &= \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \\ &= \lambda_2 \left[ 1 + \lambda_2 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

kemudian proses substitusi persamaan (A.25), (A.26) ke persamaan (3.57) dan (3.59) adalah :

$$\begin{aligned} X_{12} &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)(q^2 - k^2)} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Dari ungkapan terakhir, integral memiliki titik singular pada  $k = -i\beta_1$ ,  $k = +i\beta_1$ ,  $k = -i\beta_2$ ,  $k = +i\beta_2$ ,  $k = q$  dan  $k = -q$ . Untuk memecahkannya, kita ambil dari bidang kompleks.

a. Titik Singular pada  $k = i\beta_1$

Berdasarkan persamaan (A.31) pada titik singular  $k = i\beta_1$  residunya menjadi :

$$b_1 = \frac{k^2}{(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.32})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = i\beta_1$  pada persamaan (A.32) :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(i\beta_1)^2}{(i\beta_1 + i\beta_1)(i\beta_1 + i\beta_2)(i\beta_1 - i\beta_2)(q - i\beta_1)(q + i\beta_1)} \\ &= \frac{(i\beta_1)^2}{(2i\beta_1)(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \\ &= -\frac{\beta_1}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

b. Titik Singular pada  $k = i\beta_2$

Berdasarkan persamaan (A.31) pada titik singular  $k = i\beta_2$  residunya menjadi :

$$b_2 = \frac{k^2}{(k + i\beta_2)(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.34})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = i\beta_2$  pada persamaan (A.34) :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{(i\beta_2)^2}{(i\beta_2 + i\beta_2)(i\beta_2 + i\beta_1)(i\beta_2 - i\beta_1)(q - i\beta_2)(q + i\beta_2)} \\ &= \frac{(i\beta_2)^2}{(2i\beta_2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= \frac{\beta_2}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

c. Titik Singular pada  $k = q$

Berdasarkan persamaan (A.31) pada titik singular  $k = q$ , untuk mendapatkan residunya yang pertama kali kita lakukan adalah merubah kedalam bentuk  $z - z_0$  atau  $z = z_0$ , maka bentuk  $(q - k)$  berubah menjadi  $-(k - q)$  sehingga suku dalam integralnya bisa dituliskan seperti :

$$\frac{k^2}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(-(k - q))(q + k)} \quad (\text{A.36})$$

residunya menjadi :

$$b_3 = \frac{k^2}{-(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q + k)} \quad (\text{A.37})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = q$  pada persamaan (A.37) :

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{q^2}{-(q + i\beta_1)(q - i\beta_1)(q + i\beta_2)(q - i\beta_2)(q + q)} \\ &= \frac{q^2}{-2q(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= \frac{q}{-2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Hasil integral (A.31) yang menggunakan persamaan (A.5), (A.33), (A.35) dan

(A.38) adalah :

$$\begin{aligned}
X'_{12} &= 2\mu_{\pi N} \oint_C dk \frac{k^2}{(k+i\beta_1)(k-i\beta_1)(k+i\beta_2)(k-i\beta_2)(q-k)(q+k)} \\
&= 2\mu_{\pi N} \cdot 2\pi i \cdot [b_1 + b_2 + b_3] \\
&= 4\pi i \mu_{\pi N} \left[ -\frac{\beta_1}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} - \frac{\beta_2}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{q}{2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= -2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.39}$$

karena integral diatas dalam range  $-\infty$  s/d  $\infty$  jadi dengan memisalkan  $X'_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi$  maka :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dk \chi &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
2 \int_0^{\infty} dk \chi &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
\int_0^{\infty} dk \chi &= -\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.40}$$

maka :

$$X_{12} = -\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \tag{A.41}$$

karena diawal perhitungan kita menyembunyikan parameter  $C_1$  dan  $C_2$ , maka setelah dimunculkan persamaan (A.41) menjadi :

$$\begin{aligned}
X_{12} &= -\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \left[ \frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= - \left[ \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.42}$$

dengan memperhatikan kembali persamaan (3.39), sehingga dapat disimpul-

kan :

$$X_{21} = - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \quad (\text{A.43})$$

dan

$$\begin{aligned} N_{12}(w) &= - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{\beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{\beta_1(q^2 + \beta_2^2) - \beta_2(q^2 + \beta_1^2) + iq(\beta_2^2 - \beta_1^2)}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{\beta_1q^2 + \beta_1\beta_2^2 - \beta_2q^2 - \beta_2\beta_1^2 + iq\beta_2^2 - iq\beta_1^2}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{-\beta_1q^2 - \beta_1\beta_2^2 + \beta_2q^2 + \beta_2\beta_1^2 - iq\beta_2^2 + iq\beta_1^2}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{q^2(\beta_2 - \beta_1) - \beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) - iq(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{q^2 - \beta_1\beta_2 - iq(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{-(iq)^2 - \beta_1\beta_2 - iq(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{(iq)^2 + \beta_1\beta_2 + iq(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{(\beta_1 + iq)(\beta_2 + iq)}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + iq)(\beta_1 - iq)(\beta_2 + iq)(\beta_2 - iq)} \right] \\ &= -\pi\mu_{\pi N}C_1C_2 \left[ \frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - iq)(\beta_2 - iq)} \right] \\ &= - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - iq)(\beta_2 - iq)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

berdasarkan persamaan (3.49) dengan memasukkan persamaan (A.29), (A.30) dan (A.44) didapat :

$$\begin{aligned} D(w) &= \left( \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \right) \left( \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \right) \\ &\quad - \left( - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - iq)(\beta_2 - iq)} \right] \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$$D(w) = \left( \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2}{2\beta_2(\beta_2 - iq)^2} \right) \left( \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2}{2\beta_1(\beta_1 - iq)^2} \right) - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2}{(\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 - iq)(\beta_2 - iq)} \right]^2 \quad (\text{A.46})$$

berdasarkan persamaan (3.55) dan (3.56) sehingga bentuk  $g_{\ell i}(q)$  dan  $g_{\ell i}(p)$  dapat ditulis :

$$g_{\ell i}(q) = q^\ell \frac{C_i}{q^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.47})$$

$$g_{\ell i}(p) = p^\ell \frac{C_i}{p^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.48})$$

substitusikan persamaan (A.47) dan (A.48) pada persamaan (3.53) sehingga untuk masing - masing sukunya dapat ditulis seperti :

$$g_{\ell 1}(q) \frac{N_{11}(w)}{D(w)} g_{\ell 1}(p) = \frac{C_1^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.49})$$

$$g_{\ell 1}(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_{\ell 2}(p) = \frac{C_1C_2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.50})$$

$$g_{\ell 2}(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_{\ell 1}(p) = \frac{C_1C_2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.51})$$

$$g_{\ell 2}(q) \frac{N_{22}(w)}{D(w)} g_{\ell 2}(p) = \frac{C_2^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.52})$$

memperhatikan persamaan (3.53) maka :

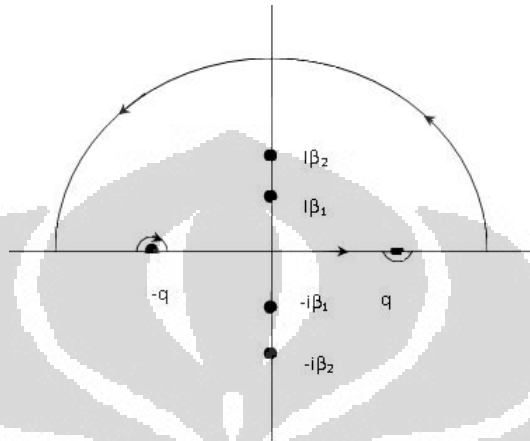
$$t_0(q, p) = \left[ \frac{C_1^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_1C_2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_1C_2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_2^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (\text{A.53})$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.29), (A.30), (A.44) dan (A.46) masing - masing mengandung nilai  $N_{11}(w)$ ,  $N_{22}(w)$ ,  $N_{12}(w)$ , dan  $D(w)$  pada persamaan (A.53).



pada  $\ell = 1$

Dalam ungkapan separabel matriks-t yang diberikan persamaan (3.57), (3.58), (3.59) dan (3.60) didalamnya terdapat bentuk integral. Integral persamaan ini diselesaikan dengan menggunakan teorema residu, gambar bentuk integralnya adalah :



Gambar A.3: Integrasi teorema residu rank-2

Dalam integral ini bentuk  $g_{\ell 1}(k)$  dan  $g_{\ell 2}(k)$  adalah seperti yang terlihat pada persamaan (3.55) dan (3.56). Sebagai contoh menghitung integral untuk  $\ell = 1$ , dan agar lebih sederhana sembunyikan parameter  $C_1$  dan  $C_2$ , sehingga faktor bentuk menjadi :

$$g_{\ell 1}(k) = \frac{k}{k^2 + \beta_1^2} \quad (\text{A.54})$$

$$g_{\ell 2}(k) = \frac{k}{k^2 + \beta_2^2} \quad (\text{A.55})$$

substitusikan persamaan (A.54), (A.55) ke persamaan (3.57), (3.58), (3.59) dan (3.60). Khusus proses substitusi ke persamaan (3.58) dan (3.60) sama dengan proses pada persamaan (3.20), maka akan kita peroleh hasil integral teorema residunya adalah :

$$X_{11} = -\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \quad (\text{A.56})$$

$$X_{22} = -\frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \quad (\text{A.57})$$

kemudian substitusikan persamaan (A.56) dan (A.57) ke persamaan (3.40) dan

(3.41) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} N_{22}(w) &= \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \\ &= \lambda_1 \left[ 1 + \lambda_1 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} N_{11}(w) &= \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \\ &= \lambda_2 \left[ 1 + \lambda_2 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

kemudian proses substitusi persamaan (A.54), (A.55) ke persamaan (3.57) dan (3.59) dengan nilai adalah :

$$\begin{aligned} X_{12} &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 k^2}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)(q^2 - k^2)} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^4}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Dari ungkapan terakhir, integral memiliki titik singular pada  $k = -i\beta_1$ ,  $k = +i\beta_1$ ,  $k = -i\beta_2$ ,  $k = +i\beta_2$ ,  $k = q$  dan  $k = -q$ . Untuk memecahkannya, kita ambil dari bidang kompleks.

a. Titik Singular pada  $k = i\beta_1$

Berdasarkan persamaan (A.60) pada titik singular  $k = i\beta_1$  residunya menjadi :

$$b_1 = \frac{k^4}{(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.61})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = i\beta_1$  pada persamaan (A.61) :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(i\beta_1)^4}{(i\beta_1 + i\beta_1)(i\beta_1 + i\beta_2)(i\beta_1 - i\beta_2)(q - i\beta_1)(q + i\beta_1)} \\ &= \frac{(i\beta_1)^4}{(2i\beta_1)(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \\ &= \frac{\beta_1^3}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

b. Titik Singular pada  $k = i\beta_2$

Berdasarkan persamaan (A.60) pada titik singular  $k = i\beta_2$  residunya menjadi :

$$b_2 = \frac{k^4}{(k + i\beta_2)(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.63})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = i\beta_2$  pada persamaan (A.63) :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{(i\beta_2)^4}{(i\beta_2 + i\beta_2)(i\beta_2 + i\beta_1)(i\beta_2 - i\beta_1)(q - i\beta_2)(q + i\beta_2)} \\ &= \frac{(i\beta_2)^4}{(2i\beta_2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= \frac{\beta_2^3}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

c. Titik Singular pada  $k = q$

Berdasarkan persamaan (A.60) pada titik singular  $k = q$ , untuk mendapatkan residunya yang pertama kali kita lakukan adalah merubah kedalam bentuk  $z - z_0$  atau  $z = z_0$ , maka bentuk  $(q - k)$  berubah menjadi  $-(k - q)$  sehingga suku dalam integralnya bisa dituliskan seperti :

$$\frac{k^4}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(-(k - q))(q + k)} \quad (\text{A.65})$$

residunya menjadi :

$$b_3 = \frac{k^4}{-(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q + k)} \quad (\text{A.66})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = q$  pada persamaan (A.66) :

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{q^4}{-(q + i\beta_1)(q - i\beta_1)(q + i\beta_2)(q - i\beta_2)(q + q)} \\ &= \frac{q^4}{-2q(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= \frac{q^3}{-2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Hasil integral (A.60) yang menggunakan persamaan (A.5), (A.62), (A.64) dan

(A.67) adalah :

$$\begin{aligned}
X'_{12} &= 2\mu_{\pi N} \oint_C dk \frac{k^4}{(k+i\beta_1)(k-i\beta_1)(k+i\beta_2)(k-i\beta_2)(q-k)(q+k)} \\
&= 2\mu_{\pi N} \cdot 2\pi i \cdot [b_1 + b_2 + b_3] \\
&= 4\pi i \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^3}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{q^3}{2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= 2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.68}$$

karena integral diatas dalam range  $-\infty$  s/d  $\infty$  jadi dengan memisalkan  $X'_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi$  maka :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dk \chi &= 2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
2 \int_0^{\infty} dk \chi &= 2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
\int_0^{\infty} dk \chi &= \pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.69}$$

maka :

$$X_{12} = \pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \tag{A.70}$$

karena diawal perhitungan kita menyembunyikan parameter  $C_1$  dan  $C_2$ , maka setelah dimunculkan persamaan (A.70) menjadi :

$$\begin{aligned}
X_{12} &= \pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \left[ \frac{\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\
&= \left[ \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{\pi \mu_{\pi N} C_1 C_2 iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]
\end{aligned} \tag{A.71}$$

dengan memperhatikan kembali persamaan (3.39), sehingga dapat disimpul-

kan :

$$X_{21} = \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \quad (\text{A.72})$$

dan

$$\begin{aligned} N_{12}(w) &= \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_1^3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2\beta_2^3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2iq^3}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2[\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2)q^2 + i(\beta_1 + \beta_2)q^3]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

berdasarkan persamaan (3.49) dengan memasukkan persamaan (A.58), (A.59) dan (A.73) didapat :

$$\begin{aligned} D(w) &= \left[ \left[ \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \left[ \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \right] \\ &\quad - \left[ - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2[\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2)q^2 + i(\beta_1 + \beta_2)q^3]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \right]^2 \\ &= \left[ \left[ \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^3 + 3\beta_2q^2 + \beta_2^3]}{2(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \left[ \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^3 + 3\beta_1q^2 + \beta_1^3]}{2(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \right] \\ &\quad - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1C_2[\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2)q^2 + i(\beta_1 + \beta_2)q^3]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

berdasarkan persamaan (3.55) dan (3.56) sehingga bentuk  $g_{\ell i}(q)$  dan  $g_{\ell i}(p)$  dapat ditulis :

$$g_{\ell i}(q) = q^\ell \frac{C_i}{q^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.75})$$

$$g_{\ell i}(p) = p^\ell \frac{C_i}{p^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.76})$$

substitusikan persamaan (A.75) dan (A.76) pada persamaan (3.53) sehingga untuk masing - masing sukunya dapat ditulis seperti :

$$g_{\ell 1}(q) \frac{N_{11}(w)}{D(w)} g_{\ell 1}(p) = \frac{C_1^2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.77})$$

$$g_{\ell 1}(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_{\ell 2}(p) = \frac{C_1 C_2 qp}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.78})$$

$$g_{\ell 2}(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_{\ell 1}(p) = \frac{C_1 C_2 q p}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.79})$$

$$g_{\ell 2}(q) \frac{N_{22}(w)}{D(w)} g_{\ell 2}(p) = \frac{C_2^2 q p}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.80})$$

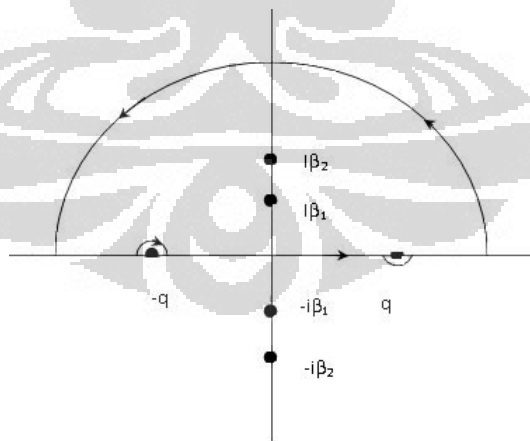
memperhatikan persamaan (3.53) maka :

$$t_1(q, p) = \left[ \frac{C_1^2 q p}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_1 C_2 q p}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ + \left[ \frac{C_1 C_2 q p}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_2^2 q p}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \quad (\text{A.81})$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.58), (A.59), (A.73) dan (A.74) masing - masing mengandung nilai  $N_{11}(w)$ ,  $N_{22}(w)$ ,  $N_{12}(w)$ , dan  $D(w)$  pada persamaan (A.81).

**pada  $\ell = 2$**

Dalam ungkapan separabel matriks-t yang diberikan persamaan (3.57), (3.58), (3.59) dan (3.60) didalamnya terdapat bentuk integral. Integral persamaan ini diselesaikan dengan menggunakan teorema residu, gambar bentuk integralnya adalah :



Gambar A.4: Integrasi teorema residu rank-2

Dalam integral ini bentuk  $g_{\ell 1}(k)$  dan  $g_{\ell 2}(k)$  adalah seperti yang terlihat pada persamaan (3.55) dan (3.56). Sebagai contoh menghitung integral untuk  $\ell = 2$ , dan agar lebih sederhana sembunyikan parameter  $C_1$  dan  $C_2$ , sehingga

faktor bentuk menjadi :

$$g_{\ell 1}(k) = \frac{k^2}{k^2 + \beta_1^2} \quad (\text{A.82})$$

$$g_{\ell 2}(k) = \frac{k^2}{k^2 + \beta_2^2} \quad (\text{A.83})$$

substitusikan persamaan (A.82), (A.83) ke persamaan (3.57), (3.58), (3.59) dan (3.60). Khusus proses substitusi ke persamaan (3.58) dan (3.60) sama dengan proses pada persamaan (3.20), maka akan kita peroleh hasil integral teorema residunya adalah :

$$X_{11} = -\frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^5 - 5\beta_1^3q^2 - 3\beta_1^5]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \quad (\text{A.84})$$

$$X_{22} = -\frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^5 - 5\beta_2^3q^2 - 3\beta_2^5]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \quad (\text{A.85})$$

kemudian substitusikan persamaan (A.84) dan (A.85) ke persamaan (3.40) dan (3.41) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} N_{22}(w) &= \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^5 - 5\beta_1^3q^2 - 3\beta_1^5]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \\ &= \lambda_1 \left[ 1 + \lambda_1 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_1^2[2iq^5 - 5\beta_1^3q^2 - 3\beta_1^5]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{aligned} N_{11}(w) &= \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^5 - 5\beta_2^3q^2 - 3\beta_2^5]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \\ &= \lambda_2 \left[ 1 + \lambda_2 \frac{\pi\mu_{\pi N}C_2^2[2iq^5 - 5\beta_2^3q^2 - 3\beta_2^5]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

kemudian proses substitusi persamaan (A.82), (A.83) ke persamaan (3.57) dan (3.59) dengan nilai adalah :

$$\begin{aligned} X_{12} &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^4 k^2}{(k^2 + \beta_1^2)(k^2 + \beta_2^2)(q^2 - k^2)} \\ &= 2\mu_{\pi N} \int_0^{\infty} dk \frac{k^6}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Dari ungkapan terakhir, integral memiliki titik singular pada  $k = -i\beta_1$ ,  $k = +i\beta_1$ ,  $k = -i\beta_2$ ,  $k = +i\beta_2$ ,  $k = q$  dan  $k = -q$ . Untuk memecahkannya,

kita ambil dari bidang kompleks.

a. Titik Singular pada  $k = i\beta_1$

Berdasarkan persamaan (A.88) pada titik singular  $k = i\beta_1$  residunya menjadi :

$$b_1 = \frac{k^6}{(k + i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.89})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = i\beta_1$  pada persamaan (A.89) :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(i\beta_1)^6}{(i\beta_1 + i\beta_1)(i\beta_1 + i\beta_2)(i\beta_1 - i\beta_2)(q - i\beta_1)(q + i\beta_1)} \\ &= \frac{(i\beta_1)^6}{(2i\beta_1^2)(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \\ &= -\frac{\beta_1^5}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

b. Titik Singular pada  $k = i\beta_2$

Berdasarkan persamaan (A.88) pada titik singular  $k = i\beta_2$  residunya menjadi :

$$b_2 = \frac{k^6}{(k + i\beta_2)(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(q - k)(q + k)} \quad (\text{A.91})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = i\beta_2$  pada persamaan (A.91) :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{(i\beta_2)^6}{(i\beta_2 + i\beta_2)(i\beta_2 + i\beta_1)(i\beta_2 - i\beta_1)(q - i\beta_2)(q + i\beta_2)} \\ &= \frac{(i\beta_2)^6}{(2i\beta_2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \\ &= -\frac{\beta_2^5}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

c. Titik Singular pada  $k = q$

Berdasarkan persamaan (A.88) pada titik singular  $k = q$ , untuk mendapatkan residunya yang pertama kali kita lakukan adalah merubah kedalam bentuk  $z - z_0$  atau  $z = z_0$ , maka bentuk  $(q - k)$  berubah menjadi  $-(k - q)$  sehingga suku dalam integralnya bisa dituliskan seperti :

$$\frac{k^6}{(k + i\beta_1)(k - i\beta_1)(k + i\beta_2)(k - i\beta_2)(-(k - q))(q + k)} \quad (\text{A.93})$$



residunya menjadi :

$$b_3 = \frac{k^6}{-(k+i\beta_1)(k-i\beta_1)(k+i\beta_2)(k-i\beta_2)(q+k)} \quad (\text{A.94})$$

substitusikan nilai titik singular  $k = q$  pada persamaan (A.94) :

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{q^6}{-(q+i\beta_1)(q-i\beta_1)(q+i\beta_2)(q-i\beta_2)(q+q)} \\ &= \frac{q^6}{-2q(q^2+\beta_1^2)(q^2+\beta_2^2)} \\ &= -\frac{q^5}{2(q^2+\beta_1^2)(q^2+\beta_2^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Hasil integral (A.88) yang menggunakan persamaan (A.5), (A.90), (A.92) dan (A.95) adalah :

$$\begin{aligned} X'_{12} &= 2\mu_{\pi N} \oint_C dk \frac{k^6}{(k+i\beta_1)(k-i\beta_1)(k+i\beta_2)(k-i\beta_2)(q-k)(q+k)} \\ &= 2\mu_{\pi N} \cdot 2\pi i \cdot [b_1 + b_2 + b_3] \\ &= 4\pi i \mu_{\pi N} \left[ -\frac{\beta_1^5}{2i(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} - \frac{\beta_2^5}{2i(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} - \frac{q^5}{2(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

karena integral diatas dalam range  $-\infty$  s/d  $\infty$  jadi dengan memisalkan  $X'_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi$  maka :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \chi &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ 2 \int_0^{\infty} dk \chi &= -2\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ \int_0^{\infty} dk \chi &= -\pi \mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

maka :

$$X_{12} = -\pi\mu_{\pi N} \left[ \frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \quad (\text{A.98})$$

karena diawal perhitungan kita menyembunyikan parameter  $C_1$  dan  $C_2$ , maka setelah dimunculkan persamaan (A.98) menjadi :

$$\begin{aligned} X_{12} &= -\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \left[ \frac{\beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

dengan memperhatikan kembali persamaan (3.39), sehingga dapat disimpulkan :

$$X_{21} = - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \quad (\text{A.100})$$

dan

$$\begin{aligned} N_{12}(w) &= - \left[ \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_1^5}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)(q^2 + \beta_1^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \beta_2^5}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(q^2 + \beta_2^2)} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 iq^5}{(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \\ &= \pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \left[ \frac{[(\beta_1^2 + \beta_1\beta_2\beta_2^2)\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^4 + \beta_1^3\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \beta_1\beta_2^3 + \beta_2^4)q^2 - i(\beta_1 + \beta_2)q^5]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

berdasarkan persamaan (3.49) dengan memasukkan persamaan (A.86), (A.87) dan (A.101) didapat :

$$\begin{aligned} D(w) &= \left[ \lambda_2^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C_2^2 [2iq^5 - 5\beta_2^3 q^2 - 3\beta_2^5]}{(q^2 + \beta_2^2)^2} \right] \left[ \lambda_1^{-1} + \frac{\pi\mu_{\pi N} C_1^2 [2iq^5 - 5\beta_1^3 q^2 - 3\beta_1^5]}{(q^2 + \beta_1^2)^2} \right] - \\ &\quad \pi\mu_{\pi N} C_1 C_2 \left[ \frac{[(\beta_1^2 + \beta_1\beta_2\beta_2^2)\beta_1^2\beta_2^2 + (\beta_1^4 + \beta_1^3\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \beta_1\beta_2^3 + \beta_2^4)q^2 - i(\beta_1 + \beta_2)q^5]}{(\beta_1 + \beta_2)(q^2 + \beta_1^2)(q^2 + \beta_2^2)} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

berdasarkan persamaan (3.55) dan (3.56) sehingga bentuk  $g_{li}(q)$  dan  $g_{li}(p)$  dapat ditulis :

$$g_{li}(q) = q^\ell \frac{C_i}{q^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.103})$$

$$g_{li}(p) = p^\ell \frac{C_i}{p^2 + \beta_i^2} \quad (\text{A.104})$$

substitusikan persamaan (A.103) dan (A.104) pada persamaan (3.53) sehingga untuk masing - masing sukunya dapat ditulis seperti :

$$g_{\ell 1}(q) \frac{N_{11}(w)}{D(w)} g_{\ell 1}(p) = \frac{C_1^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.105})$$

$$g_{\ell 1}(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_{\ell 2}(p) = \frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.106})$$

$$g_{\ell 2}(q) \frac{N_{12}(w)}{D(w)} g_{\ell 1}(p) = \frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.107})$$

$$g_{\ell 2}(q) \frac{N_{22}(w)}{D(w)} g_{\ell 2}(p) = \frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \quad (\text{A.108})$$

memperhatikan persamaan (3.53) maka :

$$\begin{aligned} t_2(q, p) = & \left[ \frac{C_1^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{11}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_1^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] \\ & + \left[ \frac{C_1 C_2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_1^2)} \frac{N_{12}(w)}{D(w)} \right] + \left[ \frac{C_2^2 q^2 p^2}{(q^2 + \beta_2^2)(p^2 + \beta_2^2)} \frac{N_{22}(w)}{D(w)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

dengan catatan harus mensubstitusikan persamaan (A.86), (A.87), (A.101) dan (A.102) masing - masing mengandung nilai  $N_{11}(w)$ ,  $N_{22}(w)$ ,  $N_{12}(w)$ , dan  $D(w)$  pada persamaan (A.109).

# Lampiran B

## Deferensial

Menurut [16] persamaan untuk deferensial :

$$\frac{d}{dx} aX^n = (n \cdot a)X^{n-1} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d}{dx} UV = U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d}{dx} \frac{U}{V} = \frac{V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}}{V^2} \quad (\text{B.3})$$

Hasil deferensial persamaan (A.11) diperoleh dengan cara :

$$A = \frac{d}{dk} \frac{k^2}{(k + i\beta)^2(q - k)(q + k)} \quad (\text{B.4})$$

untuk suku :

$$\begin{aligned} (k + i\beta)^2(q - k)(q + k) &= (k + i\beta)^2(q^2 - k^2) \\ &= (k^2 + 2i\beta k - \beta^2)(q^2 - k^2) \\ &= q^2k^2 + 2i\beta q^2k - \beta^2q^2 - k^4 - 2i\beta k^3 + \beta^2k^2 \\ &= -k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2k - \beta^2q^2 \end{aligned}$$

sehingga persamaan (B.4) :

$$A = \frac{d}{dk} \frac{k^2}{-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2k - \beta^2q^2} \quad (\text{B.5})$$

dari persamaan (B.5) diketahui :

$$U = k^2 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{dU}{dk} = 2k \quad (\text{B.7})$$

$$V = -k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2 \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{dV}{dk} = -4k^3 - 6i\beta k^2 + 2(q^2 + \beta^2)k + 2i\beta q^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} V \frac{dU}{dk} &= (-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2)(2k) \\ &= -2k^5 - 4i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 4i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} U \frac{dV}{dk} &= (k^2)(-4k^3 - 6i\beta k^2 + 2(q^2 + \beta^2)k + 2i\beta q^2) \\ &= -4k^5 - 6i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 2i\beta q^2 k^2 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$V^2 = (-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2)^2 \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} V \frac{dU}{dk} - U \frac{dV}{dk} &= (-2k^5 - 4i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 4i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k) \\ &\quad - (-4k^5 - 6i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 2i\beta q^2 k^2) \\ &= -2k^5 - 4i\beta k^4 + 2(q^2 + \beta^2)k^3 + 4i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k \\ &\quad + 4k^5 + 6i\beta k^4 - 2(q^2 + \beta^2)k^3 - 2i\beta q^2 k^2 \\ &= 2k^5 + 2i\beta k^4 + 2i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

maka :

$$\frac{dU}{dk} \frac{dV}{dk} = \frac{2k^5 + 2i\beta k^4 + 2i\beta q^2 k^2 - 2\beta^2 q^2 k}{(-k^4 - 2i\beta k^3 + (q^2 + \beta^2)k^2 + 2i\beta q^2 k - \beta^2 q^2)^2} \quad (\text{B.14})$$

# Lampiran C

## Notasi dan Unit

Dalam sistem satuan unit semua konstanta  $\hbar$  dan  $c$  yang muncul akan ditetapkan pada nilai satu dan dengan demikian tidak akan ditulis lagi.

$$\hbar = c = 1 \tag{C.1}$$

Penggunaan sistem satuan unit ini akan sangat membantu kita dalam melakukan perhitungan. Konvensi ke dalam satuan biasa dipakai dapat dilakukan diakhir perhitungan.

# Daftar Acuan

- [1] Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics Second Edition*. Pearson Education International. United States of America
- [2] Merzbacher, Eugen.(1970). *Quantum Mechanics*, second edition. University of North Carolina
- [3] Manabe, Y. Hosaka, A. dan Toki, H. *Relation Between the Separable and One-Boson-Exchange Potential for the Covariant Bethe-Salpeter Equation*. J, Phys. G31 (2005) 1183 - 1190
- [4] Salam, Agus. (2002). *Rescattering Effect and Two-Step Process In Kaon Photoproduction On the Deuteron*. Dissertation. University of Mainz. Mainz,Germany
- [5] Scheck, Florian. (2007) *Quantum Physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- [6] <http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/kenalfisnuk.pdf>
- [7] <http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/jacobi.pdf>
- [8] Joachain, CJ. (1975). *Quantum Collision Theory*. North - Holland Publishing Company. Amsterdam
- [9] Kusumawati, Ratu. (2010). *Pergeseran Fase Hamburan Pion-Nukleon dengan Interaksi Separabel*. Skripsi. Universitas Indonesia. Depok
- [10] W, Glöckle. (1983). *The Quantum Mechanical Few-Body Problem*. Springer Verlag. Berlin
- [11] [http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR.\\_PEND.\\_FISIKA/197411081999032-SELLY\\_FERANIE/Bab\\_2\\_Partikel\\_penyusun\\_materi\\_dan\\_gaya.pdf](http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._FISIKA/197411081999032-SELLY_FERANIE/Bab_2_Partikel_penyusun_materi_dan_gaya.pdf)

- [12] Ueda, T. dan Ikegami Y. *Seperable Representation of  $\pi N$  Scattering Amplitudes*. Progress of Theoretical Physics, Vol. 91. Januari 1994.
- [13] P. E. Hodgson, E. Gadioli, dan G. E. (1997). *Introductory Nuclear Physics*. Oxford University Press. New York
- [14] J. S. Hyslop, R. A. Arndt, L. D. Roper, dan R. L. Workman, Phys. Rev. D46 (1992) 961
- [15] Arfken, G.B dan Weber, H.J. (2005) .*Mathematical Methods for Physicists* sixth edition. Elsevier Academic Press . United States of America
- [16] Spiegel, R. Murray dan Martono Koko. (1992). *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuan* Edisi S1 (Metrik). Erlangga. Jakarta