UNIVERSITAS INDONESIA

SUDUT ANTARA DUA SUBRUANG DARI SUATU RUANG HASIL KALI DALAM-n

TESIS

DEBBY SANJAYA
1006734546

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

SUDUT ANTARA DUA SUBRUANG DARI SUATU RUANG HASIL KALI DALAM-*n*

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

DEBBY SANJAYA

1006734546

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPOK

JULI 2012

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Debby Sanjaya
NPM	:	1006734546
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	9 Juli 2012

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh	:	
Nama	:	Debby Sanjaya
NPM	:	1006734546
Program Studi	:	Matematika
Judul Tesis	:	Sudut Antara Dua Subruang Dari Suatu Ruang Hasil Kali Dalam-*n*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	:	Dr. Hengki Tasman, M.Si	(Hengki)
Penguji	:	Prof. Belawati H. Widjaja, Ph.D	(Blawati)
Penguji	:	Dr. Sri Mardiyati, M.Kom	(Sri Mardiyati)

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	9 Juli 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur senantiasa dipanjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan tesis ini, sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Sains di Departemen Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia. Tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit bagi penulis untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Hengki Tasman, M.Si. selaku dosen pembimbing tesis dan pembimbing akademis penulis yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan tesis ini;
2. Prof. Djati Kerami selaku Ketua Program Studi Magister Matematika UI dan seluruh staf pengajar Departemen Matematika UI yang telah bersedia untuk meluangkan waktunya untuk berbagi ilmu dan berdiskusi dengan penulis selama masa perkuliahan;
3. Prof. Yohanes Surya, Hanna Surya, Surya Wijaya, Emi Nirmala, dan rekan-rekan kerja di Surya Institute dan Sure Indonesia, yang telah banyak memberikan dorongan dan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan tesis (dan kuliah) ini;
4. Dr. Sukmawati, Sp.KK yang menolong dalam penyembuhan *vasculitis* pada saat kritis penyelesaian tesis;
5. Seluruh karyawan Departemen Matematika UI yang telah banyak memberikan bantuan dalam pengurusan administrasi;
6. Teman-teman seperjuangan dan seangkatan 2010, baik yang telah lulus ataupun yang masih berjuang untuk lulus, terutama kepada Peter John dan Martin Albert Sulistio;
7. Richard Owen, pelipur lara yang selalu memberikan dukungan kepada penulis untuk memperoleh hasil terbaik selama proses perkuliahan dan penyelesaian tesis;
8. Serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam proses pembuatan dan penyelesaian tesis ini.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Tesis ini ditulis dengan menggunakan LaTeX dan *setting* yang diperoleh dari internet dan disesuaikan untuk penulisan matematis. Semoga nantinya dapat digunakan sebagai panduan menulis tugas akhir bagi mahasiswa-mahasiswa S1 dan S2 Matematika UI lainnya.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan dalam penulisan tesis ini. Untuk itu, penulis mengharapkan segala kritik dan saran yang membangun dari para pembaca untuk menyempurnakan tesis ini. Kritik dan saran dapat dikirimkan lewat email ke debby.sanjaya@gmail.com.

Akhir kata, penulis memohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan dalam tesis ini. Semoga tesis ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya, serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat untuk kepentingan orang banyak.

Depok, Juli 2012

penulis

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Debby Sanjaya
NPM	:	1006734546
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Sudut Antara Dua Subruang Dari Suatu Ruang Hasil Kali Dalam-*n*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.
Demikian pernyatan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di	:	Depok
Pada tanggal	:	9 Juli 2012

Yang menyatakan

(Debby Sanjaya)

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

ABSTRAK

Nama : Debby Sanjaya
Program Studi : Matematika
Judul : Sudut Antara Dua Subruang Dari Suatu Ruang Hasil Kali Dalam-n

Dalam tesis ini diperkenalkan ruang hasil kali dalam-n dan ruang norm-n sebagai perluasan dari ruang hasil kali dalam dan ruang norm. Setiap ruang hasil kali dalam dapat dilengkapi dengan suatu hasil kali dalam-n sederhana

$$\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle x_0, x_1 \rangle & \langle x_0, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_0, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}.$$

Hasil kali dalam-n sederhana ini menginduksi suatu norm-n standar

$$\|x_1, \cdots, x_n\| = \sqrt{\langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle},$$

yang tak lain merupakan determinan Gram yang merupakan kuadrat dari volume dari paralelotop berdimensi-n yang dibangun oleh $x_1, \cdots, x_n$.

Tugas akhir ini membahas tentang sudut antara dua subruang dari suatu ruang hasil kali dalam-n dan representasinya secara geometris. Lebih lanjut, dipelajari hubungannya dengan sudut-sudut kanonik yang selama ini telah digunakan untuk mendeskripsikan sudut antara dua ruang.

Kata kunci : hasil kali dalam-n, norm-n, paralelotop berdimensi-n, sudut antara dua subruang

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

ABSTRACT

Name : Debby Sanjaya
Program : Mathematics
Title : Angle Between Two Subspaces of An n-Inner Product Space

The definitions of n-inner product space and n-normed space as generalizations of inner product space and normed space are introduced. Every inner product space can form an n-inner product space with a simple n-inner product

$$\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle x_0, x_1 \rangle & \langle x_0, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_0, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}.$$

The simple n-inner product induces a standard n-norm

$$\|x_1, \cdots, x_n\| = \sqrt{\langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle},$$

which is actually the Gram determinant which represents the square root of the volume of the n-dimensional parallelotope generated by $x_1, \cdots, x_n$.

This thesis discussed the angle between subspaces of an n-inner product space and its geometrical representation. Moreover, its relation to canonical angles, which has been used for describing the angles between two subspaces, is observed too.

Keywords : n-inner product, n-norm, n-dimensional parallelotope, angle between two subspaces

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

DAFTAR ISI

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

DAFTAR GAMBAR

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

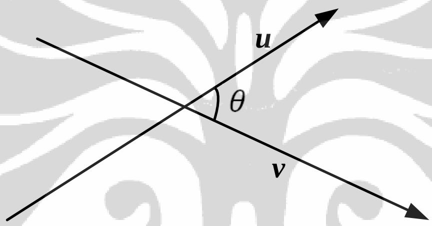
BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Dalam aljabar linear sudah lazim dikenal dan dipelajari tentang sudut antara dua vektor. Misalnya untuk dua buah vektor tak nol $u, v \in \mathbb{R}^2$ (perhatikan Gambar 1.1), sudut antara kedua vektor itu didefinisikan sebagai suatu nilai θ, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, dengan

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|},$$

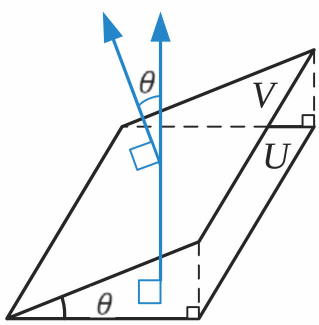
dengan $u \cdot v$ menyatakan hasil kali titik dan $\|u\|, \|v\|$ menyatakan panjang dari masing-masing vektor.



Gambar 1.1: Sudut θ antara vektor u dan vektor v

Sekarang, pandang garis $U = \text{span}\{u\}$ dan garis $V = \text{span}\{v\}$. U dan V merupakan subruang dari $\mathbb{R}^2$. Perhatikan bahwa sudut antara garis U dan garis V juga sebesar θ. Sebagai contoh lain perhatikan Gambar 1.2.

Contoh 1.1. *Misalkan U dan V adalah dua bidang yang merupakan subruang dari $\mathbb{R}^3$. Sudut θ antara U dan V didefinisikan sebagai sudut antara vektor-vektor normalnya (yang tegak lurus terhadap masing-masing bidang).*



Gambar 1.2: Sudut θ antara bidang U dan bidang V

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Biasanya pembahasan tentang sudut antara dua subruang berhenti sampai dengan sudut antara dua bidang di $\mathbb{R}^3$. Hal ini dikarenakan untuk dimensi yang lebih besar, keadaannya tidak dapat digambarkan. Perluasan topik untuk sudut antara dua subruang sebenarnya sudah mulai diteliti sejak pertengahan abad ke-20, namun belum dikenal luas.

Mendefinisikan sudut di antara dua subruang dari $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, tidaklah semudah mengukur sudut di antara dua subruang dari $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$. Ada banyak hal yang harus diperhatikan untuk persoalan dengan ruang berdimensi lebih besar, karena tidak adanya bantuan dari "penglihatan" geometris. Lebih lanjut, pendefinisiannya harus memperhatikan banyak aspek, salah satunya adalah aplikasi/penggunaan dari definisi tersebut. Sampai saat ini, sudut antara dua subruang sudah digunakan dalam bidang komputasi dan statistik. Istilah yang biasanya digunakan adalah sudut-sudut kanonik (*canonical angle / principal angle*) antara dua subruang. Dalam statistik, sudut-sudut kanonik digunakan sebagai ukuran ketergantungan suatu himpunan peubah acak pada himpunan peubah acak lainnya. Sedangkan dalam komputasi, sudut-sudut kanonik digunakan untuk membandingkan kesamaan dari dua buah citra (image). Namun, dalam tugas akhir ini, sudut antara dua subruang yang dimaksud lebih secara geometris dan tidak membahas langsung tentang sudut-sudut kanonik. Sebagai penutup, dibandingkan hubungan antara sudut antara dua subruang secara geometris dan sudut-sudut kanonik.

Pada tugas akhir ini, pembahasan diperluas untuk hasil kali dalam dan norm pada suatu ruang hasil kali dalam. Secara sederhana, ruang hasil kali dalam adalah suatu ruang vektor yang disertai dengan suatu hasil kali dalam. Hasil kali titik adalah salah satu contoh dari hasil kali dalam. Idenya adalah untuk me-ngalikan vektor-vektor dan hasilnya adalah skalar.

1.2 Perumusan Masalah

Tesis ini membahas sudut antara dua subruang dari suatu ruang hasil kali dalam-*n*, terutama untuk dimensi yang lebih besar. Selain itu, juga dibahas mengenai rumus untuk menghitung sudut di antara dua subruang tersebut dan interpretasinya secara geometris. Lebih lanjut, dipelajari hubungannya dengan sudut-sudut kanonik yang selama ini telah digunakan untuk mendeskripsikan sudut antara dua subruang.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tesis ini adalah mempelajari generalisasi dari definisi sudut antara dua subruang dan interpretasinya secara geometris.

1.4 Batasan Masalah

Dalam tesis ini, ruang hasil kali dalam-n yang dibahas dibatasi untuk yang berlapangan $\mathbb{R}$. Untuk hasil kali dalam-n yang dibahas adalah hasil kali dalam-n sederhana.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal dan buku yang berhubungan dengan topik penelitian.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas tentang topik-topik pendukung yang digunakan dalam pembahasan pada bab-bab berikutnya.

2.1 Ruang Hasil Kali Dalam dan Ruang Norm

Secara sederhana, ruang hasil kali dalam adalah suatu ruang vektor disertai dengan suatu hasil kali dalam. Adapun hasil kali dalam didefinisikan sebagai berikut (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.1. *Misalkan X adalah sebuah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Suatu fungsi $\langle \bullet, \bullet \rangle$ dari X^2 ke $\mathbb{R}$ disebut suatu hasil kali dalam jika memenuhi ketiga sifat berikut:*

1. *Non-negatif*

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

   untuk setiap $x \in X$ dan $\langle x, x \rangle = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

2. *Simetris*

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

   untuk setiap $x, y \in X$.

3. *Linear pada komponen pertama*

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

   untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ *disebut ruang hasil kali dalam (real).*

Perhatikan bahwa poin 3 pada Definisi 2.1 mengandung beberapa sifat berikut:

1. Perkalian Skalar

   Dengan substitusi $\beta = 0$, diperoleh

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,$$

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in X$.

2. Linear pada komponen kedua

   Jelas karena hasil kali dalam real bersifat simetris dan linear pada komponen pertama, maka terpenuhi juga sifat linear pada komponen kedua,

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$$

   untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $x, y, z \in X$.

Karena hasil kali dalam real bersifat linear pada komponen pertama dan linear pada komponen kedua, maka dapat dikatakan bahwa hasil kali dalam real bersifat bilinear. Perhatikan bahwa hasil kali dalam pada ruang vektor dengan lapangan $\mathbb{C}$ tidak bersifat linear pada komponen kedua, melainkan bersifat linear konjugat.

Berbicara tentang hasil kali dalam, erat hubungannya dengan norm. Definisi dari norm adalah sebagai berikut (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.2. *Misalkan X adalah sebuah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Suatu fungsi $\|\bullet\|$ dari X ke $\mathbb{R}$ yang memenuhi keempat sifat berikut*

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, disebut suatu norm dan $(X, \|\bullet\|)$ disebut ruang norm.

Untuk setiap hasil kali dalam $\langle x, y \rangle$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

membentuk suatu norm pada X, yang biasa disebut sebagai norm terinduksi dari hasil kali dalam $\langle x, y \rangle$.

Suatu vektor $x \in X$ dikatakan sebagai vektor satuan jika $\|x\| = 1$.

Teorema berikut ini memuat sifat-sifat dasar dari norm vektor.

Teorema 2.1. *Misalkan X ruang hasil kali dalam atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan hasil kali dalam $\langle \bullet, \bullet \rangle$.*

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

1. (**Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz**) *Untuk setiap* $u, v \in X$

$$|\langle u + v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\| ,$$

dengan kesamaannya diperoleh jika dan hanya jika salah satu dari u dan v merupakan kelipatan (perkalian skalar) dari yang lainnya.

2. (**Pertidaksamaan Segitiga**) *Untuk setiap* $u, v \in X$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| ,$$

dengan kesamaannya diperoleh jika dan hanya jika salah satu dari u dan v merupakan kelipatan (perkalian skalar) dari yang lainnya.

3. (**Hukum Jajargenjang**) *Untuk setiap* $u, v \in X$

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

2.2 Paralelotop dan Determinan Gram

Paralelotop adalah bangun berdimensi hingga yang merupakan generalisasi dari jajargenjang. Definisi 2.3 berikut ini memuat definisi paralelotop secara matematis (John; Courant, 1989).

Definisi 2.3. *Paralelotop berdimensi-n yang dibangun oleh vektor-vektor* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *adalah himpunan titik-titik yang vektor posisinya berbentuk*

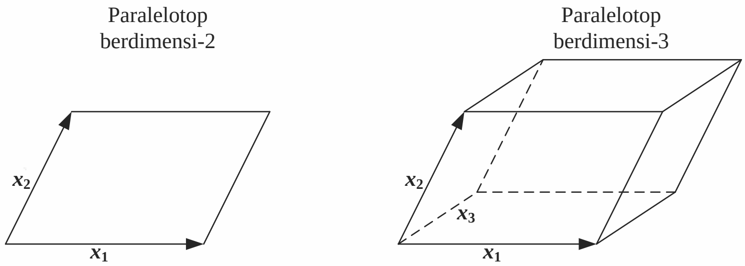
$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

dengan $0 <= \alpha_i <= 1$*, untuk setiap* $i = 1, 2, \cdots, n$*. Vektor-vektor* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *merupakan rusuk-rusuk dari paralelotop tersebut, sedangkan rusuk-rusuk yang lain sejajar dengan vektor-vektor ini.*

Paralelotop berdimensi-1 tentu saja hanya berupa sebuah vektor. Paralelotop berdimensi-2 merupakan bentuk jajargenjang. Sedangkan paralelotop berdimensi-3 disebut juga paralelepipedum (*parallelpiped*), perhatikan Gambar 2.1.

Volume paralelotop dapat dihitung dengan menggunakan determinan Gram (lihat Definisi 2.4 untuk definisi determinan Gram). Kata ”volume” di sini merupakan generalisasi dari panjang vektor pada paralelotop berdimensi-1. Luas

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.



Gambar 2.1: Paralelotop berdimensi-2 dan 3

jajargenjang pada paralelotop berdimensi-2, dan volume bangun ruang paralelepipedum pada paralelotop berdimensi-3.

Definisi 2.4. *Misalkan* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *merupakan suatu ruang hasil kali dalam atas lapangan* $\mathbb{R}$. *Misalkan pula* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *merupakan suatu himpunan vektor-vektor di* X. *Matriks Gram dari* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *didefinisikan sebagai*

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Determinan dari matriks inilah yang disebut determinan Gram,

$$\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n) = det(G(x_1, x_2, \cdots, x_n)). \tag{2.2}$$

Teorema 2.2. *Determinan Gram* $\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *menyatakan kuadrat dari volume paralelotop berdimensi-n yang dibangun oleh vektor-vektor* $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Bukti. Berikut ini diberikan bukti secara rekursif.

Untuk $n = 1$

Misalkan volume dari paralelotop berdimensi-n yang dibangun oleh vektor-vektor $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dinotasikan sebagai $V(P_n)$. Untuk paralelotop berdimensi-1 yang dibangun oleh x_1, volumenya adalah

$$V(P_1) = \|x_1\| = \sqrt{\langle x_1, x_1\rangle}. \tag{2.3}$$

Untuk $n = 2$

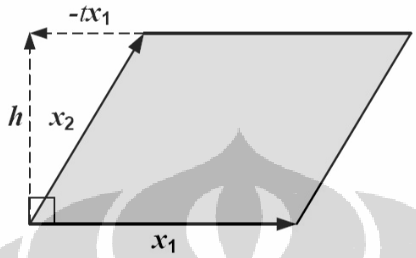
Sekarang kita lihat paralelotop berdimensi-2 yang dibangun oleh vektor-vektor x_1, x_2 pada Gambar berikut. Volume dari paralelotop berdimensi-2 sama dengan

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

luas jajargenjang, yaitu alas dikali tinggi. Misalkan alas dari jajargenjang ini adalah x_1 dan tingginya adalah

$$h = x_2 - tx_1, \tag{2.4}$$

untuk suatu skalar $t \in \mathbb{R}^+$.



Gambar 2.2: Luas jajargenjang = alas × tinggi

Volume dari paralelotop berdimensi-2 ini diberikan oleh

$$V(P_2) = \|x_1\| \|h\|. \tag{2.5}$$

Perhatikan ekspansi dari dua buah hasil kali dalam berikut:

$$\begin{aligned} \langle h, x_1 \rangle &= \langle x_2 - tx_1, x_1 \rangle \\ &= \langle x_2, x_1 \rangle - t \langle x_1, x_1 \rangle \\ &= \langle x_1, x_2 \rangle - t \langle x_1, x_1 \rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

dan

$$\begin{aligned} \langle h, h \rangle &= \langle x_2 - tx_1, x_2 - tx_1 \rangle \\ &= \langle x_2, x_2 - tx_1 \rangle - t \langle x_1, x_2 - tx_1 \rangle \\ &= \langle x_2, x_2 - tx_1 \rangle - 0 \\ &= \langle x_2, x_2 \rangle - t \langle x_2, x_1 \rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Karena h dan x_1 saling tegak lurus, maka $\langle h, x_1 \rangle = 0$. Dari persamaan 2.6 dapat diperoleh

$$\langle x_1, x_2 \rangle - t \langle x_1, x_1 \rangle = 0. \tag{2.8}$$

Selanjutnya dari persamaan 2.7 dan persamaan 2.8 dapat dibentuk suatu sistem

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

persamaan

$$t\langle x_1,x_1\rangle + 0\langle h,h\rangle = \langle x_1,x_2\rangle \tag{2.9}$$

$$t\langle x_2,x_1\rangle + \langle h,h\rangle = \langle x_2,x_2\rangle. \tag{2.10}$$

Untuk berapapun nilai t, dengan Aturan Cramer diperoleh solusi dari sistem persamaan (2.9 - 2.10) adalah

$$\begin{aligned}\langle h,h\rangle &= \frac{\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & 0 \\ \langle x_2,x_1\rangle & 1\end{vmatrix}} \\ &= \frac{\Gamma(x_1,x_2)}{\langle x_1,x_1\rangle}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dari persamaan 2.11 diperoleh

$$\|h\|^2 = \frac{\Gamma(x_1,x_2)}{\|x_1\|^2}. \tag{2.12}$$

Dengan melakukan substitusi persamaan 2.12 ke persamaan 2.5 diperoleh

$$V(P_2) = \sqrt{\Gamma(x_1,x_2)}. \tag{2.13}$$

Misalkan untuk $n = k$ berlaku, bahwa volume paralelotop berdimensi-k yang dibangun oleh vektor-vektor $x_1,\cdots,x_k$ sama dengan akar kuadrat dari $\Gamma(x_1,\cdots,x_k)$, yaitu

$$V(P_k) = \sqrt{\Gamma(x_1,\cdots,x_k)}. \tag{2.14}$$

Pandang bahwa paralelotop berdimensi-k yang dibangun oleh vektor-vektor $x_1,\cdots,x_k$ merupakan "alas" dari paralelotop berdimensi-$(k+1)$ yang dibangun oleh vektor-vektor $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}$, sedangkan tingginya adalah

$$h = x_{k+1} - y, \tag{2.15}$$

dengan $y = \sum_{j=1}^{k} t_j x_j$ dan $t_j \in \mathbb{R}^+$. Sehingga, volume dari paralelotop berdimensi-$(k+1)$ yang dibangun oleh vektor-vektor $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}$ dapat

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

diperoleh dari

$$\begin{aligned} V(P_{k+1}) &= V(P_k)\,\|h\| \\ &= \sqrt{\Gamma(x_1,\cdots,x_k)}\,\|h\|. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Perhatikan bahwa h tegak lurus terhadap vektor-vektor $x_1,\cdots,x_k$, sehingga

$$\left\langle x_{k+1}-y, x_j\right\rangle = 0, \tag{2.17}$$

untuk $j = 1,\cdots,k$.

Sementara itu,

$$\begin{aligned} h^2 = \langle h,h\rangle &= \langle x_{k+1}-y, x_{k+1}-y\rangle \\ &= \langle x_{k+1}-y, x_{k+1}\rangle. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dari persamaan 2.16 dan persamaan 2.17 dapat dibentuk sebuah sistem persamaan

$$\sum_{j=1}^{k} t_j\left\langle x_i, x_j\right\rangle + 0\,\langle h,h\rangle = \langle x_i, x_{k+1}\rangle, \tag{2.19}$$

untuk setiap $i = 1,\cdots,k$, dan

$$\sum_{j=1}^{k} t_j\left\langle x_{k+1}, x_j\right\rangle + \langle h,h\rangle = \langle x_{k+1}, x_{k+1}\rangle. \tag{2.20}$$

Dengan Aturan Cramer, diperoleh

$$\begin{aligned} \|h\|^2 = \langle h,h\rangle &= \frac{\begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_{k+1}\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2,x_{k+1}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_{k+1}\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_k\rangle & 0 \\ \langle x_2,x_1\rangle & \cdots & \langle x_2,x_k\rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_k\rangle & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\Gamma(x_1,\cdots,x_{k+1})}{\Gamma(x_1,\cdots,x_k)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Terakhir, dengan melakukan substitusi persamaan 2.21 ke persamaan 2.16

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

diperoleh

$$\begin{aligned} V(P_{k+1}) &= \sqrt{\Gamma(x_1,\cdots,x_k)}\,\|h\| \\ &= \sqrt{\Gamma(x_1,\cdots,x_k)}\sqrt{\frac{\Gamma(x_1,\cdots,x_{k+1})}{\Gamma(x_1,\cdots,x_k)}} \\ &= \Gamma(x_1,\cdots,x_{k+1}). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Jadi, terbukti bahwa determinan Gram $\Gamma(x_1,\cdots,x_n)$ merupakan kuadrat dari volume paralelotop berdimensi-n yang dibangun oleh vektor-vektor $x_1,\cdots,x_n$. □

Berikut ini adalah beberapa sifat dari determinan Gram. Misalkan $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ merupakan suatu himpunan vektor-vektor di X. Maka

1. $\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \Gamma(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})$, dengan $\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$ merupakan permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$. Maksudnya, determinan Gram invarian terhadap permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$.

2. $\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n) \geq 0$
   Bentuk kesamaannya berlaku jika dan hanya jika vektor-vektor $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ bergantung linear.

   Volume dari paralelotop berdimensi-n bernilai non-negatif. Kemudian jika vektor-vektor $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ bergantung linear, maka paralelotop yang dibangun sebenarnya mempunyai dimensi kurang dari n. Oleh karena itu, volume paralelotop berdimensi-n yang dibangun oleh vektor-vektor $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ yang bergantung linear adalah 0.

3. **Pertidaksamaan Hadamard**
   $\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n) \leq \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$
   Bentuk kesamaannya berlaku jika dan hanya jika $\langle x_i,x_j\rangle = \delta_{i,j}\|x_i\|\,\|x_j\|$, untuk setiap $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$.

   Nilai maksimum dari volume paralelotop berdimensi-n yang dibangun oleh $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ diperoleh ketika setiap pasang dari vektor-vektor $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ saling ortogonal. Sebagai gambaran, paralelotop berdimensi-2 dengan volume maksimum berbentuk persegi panjang dan paralelotop berdimensi-3 dengan volume maksimum berbentuk balok. Adapun volume maksimum diperoleh dengan menghitung $\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|$.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

2.3 Ruang Hasil Kali Dalam-n dan Ruang Norm-n

Pada tahun 1960-an, Gahler memulai mengembangkan definisi tentang norm-2 (Freese, 2001), yang merupakan perluasan dari norm pada Definisi 2.2. Kemudian melalui studi lebih lanjut, ia mengenalkan definisi tentang norm-n, yang ide awalnya adalah untuk menyeragamkan notasi panjang, luas, dan volume. Definisinya adalah sebagai berikut (Misiak, 1989).

Definisi 2.5. *Misalkan $n \in N$ dan X adalah suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan $dim(X) \geq n$. Suatu fungsi bernilai real $\|\bullet, \cdots, \bullet\|$ pada X^n yang memenuhi keempat sifat berikut ini*

1. $\|x_1, x_2, \cdots, x_n\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *bergantung linear*
2. $\|x_1, x_2, \cdots, x_n\|$ *invarian terhadap setiap permutasi*
3. $\|x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \alpha x_n\| = |\alpha| \, \|x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\|$ *untuk setiap* $\alpha \in R$
4. $\|x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, z\|$

disebut suatu norm-n dari X dan pasangan $(X, \|\bullet, \cdots, \bullet\|)$ disebut ruang norm-n.

Perhatikan bahwa sembarang hasil kali dalam-n menginduksi suatu norm-n, dengan

$$\|x_1, x_2, \cdots, x_n\| = \sqrt{\langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle}.$$

Selanjutnya pada tahun 1980-an, murid dari Gahler yang bernama A. Misiak (1989) memperkenalkan istilah ruang hasil kali dalam-n, sebagai generalisasi dari ruang hasil kali dalam. Hasil kali dalam-n mengoperasikan $n+1$ buah vektor dan memetakannya ke skalar di lapangan $\mathbb{R}$. Idenya adalah menambahkan vektor-vektor lain ke hasil kali dalam $\langle x, y \rangle$, namun tetap mempertahankan sifat linearnya. Lebih lanjut, penambahan vektor-vektor lain ini tidak menimbulkan sifat-sifat baru yang signifikan pada hasil kali dalam itu sendiri. Maksudnya, vektor-vektor yang ditambahkan ini tidak bersifat linear.

Definisi 2.6. *Misalkan $n \in N$ dan X adalah suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan $dim(X) \geq n$. Suatu fungsi bernilai real $\langle \bullet, \bullet | \bullet, \cdots, \bullet \rangle$ pada X^{n+1} yang memenuhi keenam sifat berikut ini*

1. *Non-negatif*

$$\langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle \geq 0,$$

untuk setiap $x, x_2, \cdots, x_n \in X$ *dan*
$\langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $x, x_2, \cdots, x_n$ *bergantung linear*

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

2. *Simetris*
$$\langle x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle = \langle y,x|x_2,\cdots,x_n\rangle$$
untuk setiap $x,y,x_2,\cdots,x_n \in X$.

3. *Invarian terhadap permutasi*
$$\langle x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle = \langle x,y|x_{i_2},\cdots,x_{i_n}\rangle$$
untuk setiap $x,y,x_2,\cdots,x_n \in X$ *dan* $i_2,i_3\cdots,i_n$ *sembarang permutasi dari* $2,3,\cdots,n$.

4. *Jika* $n>1$, *maka* $\langle x,x|x_2,\cdots,x_n\rangle = \langle x_2,x_2|x,\cdots,x_n\rangle$ *untuk setiap* $x,x_2,\cdots,x_n \in X$.

5. *Perkalian skalar*
$$\langle \alpha x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle = \alpha\langle x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle$$
untuk setiap $x,y,x_2,\cdots,x_n \in X$.

6. *Linear pada komponen pertama*
$$\langle x+y,z|x_2,\cdots,x_n\rangle = \langle x,z|x_2,\cdots,x_n\rangle + \langle y,z|x_2,\cdots,x_n\rangle$$
untuk setiap $x,y,z,x_2,\cdots,x_n \in X$.

disebut suatu hasil kali dalam-n dan $(X,\langle\bullet,\bullet|\bullet,\cdots,\bullet\rangle)$ *disebut ruang hasil kali dalam-n.*

Garis vertikal pada notasi $\langle x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle$ digunakan untuk memisahkan komponen-komponen yang bersifat linear (kiri) dan komponen-komponen yang tidak bersifat linear (kanan). Kemudian untuk $n=1$, notasi $\langle x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle$ dipahami sebagai hasil kali dalam $\langle x,y\rangle$.

Perhatikan bahwa poin 5 dan poin 6 pada Definisi 2.6 mengandung sifat seperti poin 3 pada Definisi 2.1. Lebih lanjut, dengan sifat simetris dan linear pada komponen pertama, dapat diperoleh bahwa hasil kali dalam-*n* juga bersifat linear pada komponen kedua. Sehingga dapat dikatakan bahwa hasil kali dalam-*n* bersifat bilinear (pada lapangan $\mathbb{R}$).

Sebagai contoh adalah hasil kali dalam-*n* sederhana yang termuat dalam Teorema 2.3 berikut ini.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Teorema 2.3. *Setiap ruang hasil kali dalam X dapat dilengkapi dengan suatu hasil kali dalam-n sederhana*

$$\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle x_0, x_1 \rangle & \langle x_0, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_0, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}. \tag{2.23}$$

Perhatikan bahwa $\langle x_i, x_j \rangle$ menyatakan suatu hasil kali dalam di X.

Bukti. Misalkan $x, y, x_0, x_1, \cdots, x_n \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Untuk membuktikan sifat non-negatif, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle &= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\ &= \Gamma(x_1, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{2.24}$$

   merupakan kuadrat dari volume paralelotop berdimensi-*n* yang dibangun oleh $x_1, \cdots, x_n$. Nilainya non-negatif dan bernilai nol jika dan hanya jika $x_1, \cdots, x_n$ bergantung linear.

2. Dengan sifat simetris dari hasil kali dalam $\langle x_i, x_j \rangle$, maka dapat ditunjukkan bahwa matriks yang nilai determinannya adalah $\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle$ merupakan transpose dari matriks yang determinannya adalah

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

$\langle x_1, x_0 | x_2, \cdots, x_n \rangle$. Sehingga terbukti sifat simetrisnya,

$$
\begin{aligned}
\langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle &= \begin{vmatrix} \langle x_0, x_1 \rangle & \langle x_0, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_0, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_0 \rangle & \langle x_2, x_0 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_0 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \left| \begin{pmatrix} \langle x_1, x_0 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_0 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_0 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}^T \right| \\
&= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_0 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_0 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_0 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \langle x_1, x_0 | x_2, \cdots, x_n \rangle .
\end{aligned}
$$

3. Misalkan $i_2, i_3, \cdots, i_n$ adalah suatu permutasi dari $2, 3, \cdots, n$. Misalkan pula $\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle$ dan $\langle x, y | x_{i_2}, \cdots, x_{i_n} \rangle$ menyatakan determinan dari matriks-matriks A dan B. Perhatikan bahwa matriks B dapat diperoleh dari matriks A yang ditukar beberapa baris dan beberapa kolomnya. Perhatikan pula bahwa banyaknya pertukaran adalah genap, sehingga determinannya tetap. Oleh karena itu,

$$\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle = \langle x, y | x_{i_2}, \cdots, x_{i_n} \rangle .$$

4. Misalkan $n > 1$.

$$
\begin{aligned}
\langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle &= \Gamma(x, x_2, \cdots, x_n) \\
&= \Gamma(x_2, x, x_3, \cdots, x_n) \\
&= \langle x_2, x_2 | x, \cdots, x_n \rangle ,
\end{aligned}
$$

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

untuk setiap $x, x_2, \cdots, x_n \in X$.

5. Sifat perkalian skalar:

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle &= \begin{vmatrix} \langle \alpha x_0, x_1 \rangle & \langle \alpha x_0, x_2 \rangle & \cdots & \langle \alpha x_0, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha \langle x_0, x_1 \rangle & \alpha \langle x_0, x_2 \rangle & \cdots & \alpha \langle x_0, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \alpha \begin{vmatrix} \langle x_0, x_1 \rangle & \langle x_0, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_0, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \alpha \langle x_0, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle .
\end{aligned}
$$

6. Sifat linear:

$$
\begin{aligned}
\langle x+y, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle &= \begin{vmatrix} \langle x+y, x_1 \rangle & \langle x+y, x_2 \rangle & \cdots & \langle x+y, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle x, x_1 \rangle + \langle y, x_1 \rangle & \langle x, x_2 \rangle + \langle y, x_1 \rangle & \cdots & \langle x, x_n \rangle + \langle y, x_1 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle x, x_1 \rangle & \langle x, x_2 \rangle & \cdots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle y, x_1 \rangle & \langle y, x_2 \rangle & \cdots & \langle y, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \\
&= \langle x, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle + \langle y, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle .
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi yang didefinisikan dalam persamaan 2.23 adalah suatu hasil kali dalam-n. $\square$

Teorema 2.4. *Setiap hasil kali dalam-n menginduksi suatu norm-n, dengan*

$$\|x_1, x_2, \cdots, x_n\| = \sqrt{\langle x_1, x_1 | x_2, \cdots, x_n \rangle}. \tag{2.25}$$

Bukti Teorema 2.4 cukup trivial. Sebagai contoh, hasil kali dalam-n sederhana menginduksi norm-n

$$\|x_1, x_2, \cdots, x_n\| = \left(\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.26}$$

yang merupakan akar kuadrat dari determinan Gram, yang merepresentasikan volume dari suatu paralelotop berdimensi-n yang dibangun oleh $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Hasil kali dalam-n memenuhi beberapa sifat seperti pada suatu hasil kali dalam. Misalnya saja pertidaksamaan Cauchy-Schwarz yang termuat dalam Teorema 2.5 berikut ini.

Teorema 2.5. (Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz) *Jika X suatu ruang hasil kali dalam-n, maka berlaku pertidaksamaan*

$$|\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle|^2 \leq \langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle \langle y, y | x_2, \cdots, x_n \rangle. \tag{2.27}$$

Bukti. Misalkan $x, y, x_2, \cdots, x_n \in X$ dengan $x, x_2, \cdots, x_n$ bebas linear. Misalkan pula

$$u = y - \frac{\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle}{\langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle} x.$$

Perhatikan bahwa $\langle u, u | x_2, \cdots, x_n \rangle \geq 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle u, u | x_2, \cdots, x_n \rangle \\ 0 &\leq \left\langle y - \frac{\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle}{\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle} x, y - \frac{\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle}{\langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle} x | x_2, \cdots, x_n \right\rangle \\ 0 &\leq \langle y, y | x_2, \cdots, x_n \rangle - \frac{|\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle|^2}{\langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle} \\ \frac{|\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle|^2}{\langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle} &\leq \langle y, y | x_2, \cdots, x_n \rangle \\ |\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle|^2 &\leq \langle x, x | x_2, \cdots, x_n \rangle \langle y, y | x_2, \cdots, x_n \rangle. \end{aligned} \tag{2.28}$$

□

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

BAB 3
SUDUT ANTARA DUA SUBRUANG

3.1 Temuan Risteski dan Trecevski

Tesis ini berawal dari studi jurnal yang dikeluarkan oleh Risteski dan Trencevski (2001), yang memperkenalkan lebih lanjut definisi secara geometris dari sudut antara dua subruang dari $\mathbb{R}^n$ dan menjelaskan hubungannya dengan sudut-sudut kanonik. Definisi yang mereka gunakan didasarkan pada sebuah generalisasi dari pertidaksamaan Cauchy-Schwarz. Namun, Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi (2005) menemukan kesalahan pada teorema landasan yang diberikan oleh Risteski dan Trencevski, dengan memberikan satu contoh penyangkal, dan memperbaikinya.

Untuk mendefinisikan sudut antara dua subruang (dengan sembarang dimensi) dari ruang vektor Euclid $\mathbb{R}^n$, Risteski dan Trecevski memberikan Teorema 3.1 berikut ini disertai buktinya.

Teorema 3.1. *Misalkan A dan B merupakan subruang dari ruang vektor Euclid $\mathbb{R}^n$ dengan hasil kali dalam $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Misalkan $\{a_1, \cdots, a_p\}$ adalah basis dari A dan $\{b_1, \cdots, b_q\}$ adalah basis dari B, dengan $p \leq q \leq n$. Maka pertidaksamaan*

$$det(MM^T) \leq \Gamma_1 \times \Gamma_2, \tag{3.1}$$

berlaku dengan

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_p \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_2, a_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_p, a_1 \rangle & \langle a_p, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_p, a_p \rangle \end{vmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \cdots & \langle b_1, b_q \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \cdots & \langle b_2, b_q \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_q, b_1 \rangle & \langle b_q, b_2 \rangle & \cdots & \langle b_q, b_q \rangle \end{vmatrix},$$

serta

$$M = \begin{bmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle & \langle a_1, b_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, b_q \rangle \\ \langle a_2, b_1 \rangle & \langle a_2, b_2 \rangle & \cdots & \langle a_2, b_q \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_p, b_1 \rangle & \langle a_p, b_2 \rangle & \cdots & \langle a_p, b_q \rangle \end{bmatrix},$$

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

dengan Γ_1 *dan* Γ_2 *menyatakan determinan Gram dari vektor-vektor* $\{a_1, \cdots, a_p\}$ *dan* $\{b_1, \cdots, b_q\}$. *Lebih lanjut, kesamaan dalam (3.1) dicapai jika dan hanya jika* $A \subseteq B$.

Adapun bukti yang diberikan oleh Risteski dan Trecevski adalah sebagai berikut.

Bukti. Pertidaksamaan (3.1) invarian terhadap setiap operasi baris elementer. Tanpa mengurangi generalitas, diasumsikan $\{a_1, \cdots, a_p\}$ adalah vektor-vektor ortonormal dan $\{b_1, \cdots, b_q\}$ juga merupakan vektor-vektor ortonormal. (Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi menyanggah pernyataan ini.)

Karena $\{a_1, \cdots, a_p\}$ adalah vektor-vektor ortonormal, maka $\langle a_i, a_i \rangle = 1$ dan $\langle a_i, a_j \rangle = 0$, untuk setiap $i, j \in \{1, \cdots, p\}$ dan $i \neq j$.

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_p \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_2, a_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_p, a_1 \rangle & \langle a_p, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_p, a_p \rangle \end{vmatrix} = \det(I_p) = 1$$

dan

$$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \cdots & \langle b_1, b_q \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \cdots & \langle b_2, b_q \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_q, b_1 \rangle & \langle b_q, b_2 \rangle & \cdots & \langle b_q, b_q \rangle \end{vmatrix} = \det(I_q) = 1$$

dengan I_p dan I_q adalah matriks-matriks identitas berdimensi p dan q. Hanya perlu dibuktikan bahwa $\det(MM^T) \leq 1$.

Misalkan $c_i = (\langle a_i, b_1 \rangle, \langle a_i, b_2 \rangle, \cdots, \langle a_i, b_q \rangle)$ untuk $1 \leq i \leq p$. Perhatikan bahwa itu artinya $c_i \in \mathbb{R}^q$, untuk $1 \leq i \leq p$. Karena $\{a_1, \cdots, a_p\}$ dan $\{b_1, \cdots, b_q\}$ merupakan sistem-sistem ortonormal, maka untuk $1 \leq i \leq p$ dan $1 \leq j \leq q$ berlaku

$$\langle a_i, b_j \rangle = \cos\theta_{ij} \|a_i\| \|b_j\| = \cos\theta_{ij} \leq 1.$$

Lebih lanjut diperoleh bahwa

$$\|c_i\| = \sqrt{\langle c_i, c_i \rangle} \leq 1$$

dengan pengukuran Euclid di $\mathbb{R}^q$, untuk setiap $1 \leq i \leq p$.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Misalkan $c_{p+1}, \cdots, c_q$ adalah vektor-vektor ortonormal sedermikian sehingga masing-masing vektor tersebut ortogonal terhadap $c_1, \cdots, c_p$. Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\det(MM^T) &= \begin{vmatrix} \langle c_1, c_1 \rangle & \langle c_1, c_2 \rangle & \cdots & \langle c_1, c_q \rangle \\ \langle c_2, c_1 \rangle & \langle c_2, c_2 \rangle & \cdots & \langle c_2, c_q \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c_q, c_1 \rangle & \langle c_q, c_2 \rangle & \cdots & \langle c_q, c_q \rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle c_1, c_1 \rangle & \langle c_1, c_2 \rangle & \cdots & \langle c_1, c_p \rangle \\ \langle c_2, c_1 \rangle & \langle c_2, c_2 \rangle & \cdots & \langle c_2, c_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c_p, c_1 \rangle & \langle c_p, c_2 \rangle & \cdots & \langle c_p, c_p \rangle \end{vmatrix} \\
&= \Gamma(c_1, c_2, \cdots, c_q), \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

yang merupakan kuadrat dari volume paralelotop di $\mathbb{R}^q$, yang dibangun oleh vektor-vektor $c_1, c_2, \cdots, c_q$. Karena $\|c_i\| \leq 1$, untuk setiap $1 \leq i \leq q$, maka diperoleh $\det(MM^T) \leq 1$.

Lebih lanjut, kesamaan dalam (3.1) dicapai jika dan hanya jika $c_1, c_2, \cdots, c_q$ merupakan sistem ortonormal, dengan $\|c_i\| = 1$, untuk setiap $1 \leq i \leq q$. Namun, $\|c_i\| = 1$ mengakibatkan $a_i \in B$, sehingga $A \subseteq B$. Sebaliknya, jika $A \subseteq B$, maka jelas bahwa kesamaan dalam (3.1) tercapai. □

Kemudian, dengan asumsi Teorema 3.1 berlaku benar, didefinisikan sudut θ antara subruang A dan subruang B dengan

$$\cos^2 \theta = \frac{\det(MM^T)}{\Gamma_1 \Gamma_2}, \qquad (3.3)$$

dengan matriks M seperti didefinisikan pada Teorema 3.1 dan Γ_1, Γ_2 adalah determinan Gram yang diperoleh dari vektor-vektor $a_1, \cdots, a_p$ dan $b_1, \cdots, b_q$, secara berurutan.

3.2 Sanggahan oleh Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi

Pembuktian Teorema 3.1 yang diberikan oleh Risteski dan Trecevski sekilas terlihat benar. Namun, ada bagian yang tidak tepat menurut Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi pada pembuktian ini. Seperti ditulis pada awal bukti Teorema 3.1, Risteski dan Trecevski menyatakan bahwa "tanpa mengurangi generalitas, diasumsikan $\{a_1, \cdots, a_p\}$ adalah suatu sistem ortonormal dan $\{b_1, \cdots, b_q\}$ juga

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

merupakan suatu sistem ortonormal." Hal ini tidak dapat dilakukan karena pada Teorema 3.1 basis dari kedua subruang adalah sembarang. Keadaan pembuktian dengan kedua basis tersebut ortonormal hanyalah merupakan salah satu kasus yang mungkin terjadi dan tidak bisa mewakili semua kasus yang mungkin.

Lebih lanjut, Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi menyatakan bahwa pertidaksamaan (3.1) hanya berlaku jika salah satu kasus ini terjadi

1. $p = q$
2. $\{b_1, \cdots, b_q\}$ juga ortonormal.

Untuk kasus lainnya, masih memungkinkan tanda "$\leq$" pada pertidaksamaan (3.1) diganti oleh tanda "$>$". Berikut ini adalah contoh dimana "$>$" terjadi.

Contoh 3.2. *Misalkan $X = \mathbb{R}^3$ dilengkapi dengan hasil kali dalam biasa. Misalkan pula $A = span\{a\}$, dengan $a = (1,0,0)$ dan $B = span\{b_1, b_2\}$ dengan $b_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ dan $b_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

Berdasarkan Teorema 3.1, ada beberapa nilai berikut ini yang harus diperhatikan.

$$M = \begin{bmatrix} \langle a, b_1 \rangle & \langle a, b_2 \rangle \end{bmatrix}.$$

Sehingga ruas kiri dari pertidaksamaan (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned} \det(MM^T) &= \langle a, b_1 \rangle^2 + \langle a, b_2 \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sedangkan untuk ruas kanan dari pertidaksamaan (3.1) adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} |\langle a, a \rangle| \times \begin{vmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle \end{vmatrix} &= \|a\|^2 \|b_1, b_2\|^2 \\ &= \|a\|^2 \left(\|b_1\|^2 \|b_2\|^2 - \langle b_1, b_2 \rangle \right)^2 \\ \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh bahwa

$$det(MM^T) > \Gamma_1 \times \Gamma_2.$$

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Dengan demikian, Teorema 3.1 tidak sah.

Contoh ini membuktikan bahwa pertidaksamaan (3.1) gagal bahkan untuk kasus $\{a_1,\cdots,a_p\}$ ortonormal dan $\{b_1,\cdots,b_q\}$ ortogonal. Padahal ortogonalitas hampir menyerupai ortonormalitas. Hal ini mengindikasikan bahwa pertidaksamaan (3.1) berlaku untuk $\{a_1,\cdots,a_p\}$ dan $\{b_1,\cdots,b_q\}$ yang sama-sama ortonormal.

Melihat kembali formula yang diberikan oleh Risteski dan Trenchevski pada persamaan (3.3), jika kita coba pada kasus di Contoh 3.2, maka akan kita peroleh bahwa

$$\cos^2\theta = \frac{\det(MM^T)}{\Gamma_1\Gamma_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = 1\frac{1}{3}, \tag{3.4}$$

yang nilainya lebih besar daripada 1. Dengan demikian, formula pada persamaan (3.3) tidak masuk di akal karena nilai dari ruas kanannya belum tentu berada di interval $[0;1]$.

Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi memperbaiki formula tersebut dan memperluas ruang semestanya menjadi suatu ruang hasil kali dalam-n sederhana dengan hasil kali dalam yang sembarang.

3.3 Sudut antara Dua Subruang yang Sederhana

Pada subbab ini kita lihat terlebih dahulu dua kasus sudut antara dua subruang yang sederhana. Pengertian sudut di sini sama seperti pengertian sudut yang biasanya. Kemudian perbaikan dari formula pada persamaan (3.3), yang dikemukakan Risteski dan Trenchevski, harus merupakan generalisasi dari dua kasus ini.

Misalkan X merupakan ruang hasil kali dalam-n sederhana atas lapangan real, dengan hasil kali dalam sederhana $\langle\bullet,\bullet\rangle)$. Diberikan dua subruang dari X, yaitu U dan V, yang bukan merupakan himpunan nol dan $p = \dim(U) \leq \dim(V) = q < \infty$. Dua kasus yang dibahas pada bab ini adalah

- sudut antara subruang berdimensi 1 dari X dan subruang berdimensi q dari X
- sudut antara dua subruang berdimensi p dari X, yang beririsan di suatu subruang berdimensi $p-1$ dari X.

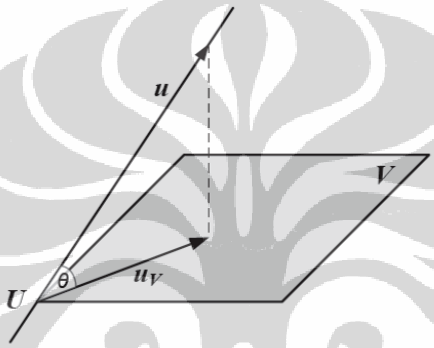
Untuk kasus pertama, U dapat dipandang sebagai suatu "garis" yang merupakan kumpulan kelipatan dari vektor u. Sudut yang dibentuk antara garis U dan subruang V adalah sudut yang dibentuk oleh vektor u dan proyeksi ortogonal dari vektor u pada subruang V. Gambar 3.1 menunjukkan ilustrasinya dan Definisi 3.1 memuat formulanya.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Definisi 3.1. *Misalkan X adalah ruang hasil kali dalam, $U = span\{u\}$ adalah sebuah subruang dari X, dan $V = span\{v_1, v_2, ..., v_q\}$ adalah sebuah subruang berdimensi q dari X. Maka sudut θ antara U dan V didefinisikan oleh*

$$\cos^2\theta = \frac{\langle u, u_V\rangle^2}{\|u\|^2\|u_V\|^2}, \tag{3.5}$$

dengan u_V menyatakan proyeksi ortogonal dari u pada V dan $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$ adalah norm yang diinduksi oleh hasil kali dalam di X.



Gambar 3.1: Sudut antara subruang U berdimensi-1 dan subruang V berdimensi q

Pada Definisi 3.1, u dapat ditulis sebagai $u = u_V + u_V^\perp$ dengan $u_V^\perp$ adalah komplemen ortogonal dari u pada V. Maka persamaan (3.5) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \frac{\langle u_V + u_V^\perp, u_V\rangle^2}{\|u\|^2\|u_V\|^2} \\
&= \frac{\langle u_V, u_V\rangle + \langle u_V^\perp, u_V\rangle^2}{\|u\|^2\|u_V\|^2} \\
&= \frac{\langle u_V, u_V\rangle + 0^2}{\|u\|^2\|u_V\|^2} \\
&= \frac{\langle u_V, u_V\rangle^2}{\|u\|^2\|u_V\|^2} \\
&= \frac{\|u_v\|^4}{\|u\|^2\|u_V\|^2} \\
&= \frac{\|u_V\|^2}{\|u\|^2}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa nilai $\cos\theta$ merupakan perbandingan antara panjang proyeksi u pada V terhadap panjang dari u.

Sedangkan untuk kasus kedua, U dan V subruang-subruang berdimensi-p yang beririsan di W yang berdimensi-$(p-1)$. Karena itu, sudut antara U dan V

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

dipengaruhi oleh vektor-vektor pada basis-basis U dan V yang tidak berada di W, yaitu vektor u dan vektor v. Sudut antara U dan V adalah sudut yang dibentuk oleh proyeksi-proyeksi ortogonal dari vektor u dan vektor v pada subruang W. Definisi 3.2 memuat formulanya.

Definisi 3.2. *Misalkan X adalah ruang hasil kali dalam dengan $U = span\{u, w_2, ..., w_p\}$ dan $V = span\{v, w_2, ..., w_p\}$ adalah subruang-subruang berdimensi p dari X yang beririsan di suatu subruang berdimensi $p-1$, $W = span\{w_2, ..., w_p\}$ dengan $p \geq 2$. Maka sudut θ antara U dan V didefinisikan oleh*

$$\cos^2\theta = \frac{\langle u_W^{\perp}, v_W^{\perp}\rangle^2}{\|u_W^{\perp}\|^2 \|v_W^{\perp}\|^2}, \tag{3.7}$$

dengan $u_W^{\perp}$ dan $v_W^{\perp}$ adalah komplemen ortogonal dari u dan v pada W.

Akan ditunjukkan bahwa dari formula pada Definisi 3.2 dapat disimpulkan bahwa nilai dari $\cos\theta$ sama dengan perbandingan antara volume dari paralelotop dimensi-p yang dibangun oleh proyeksi dari $u, w2, \cdots, w_p$ pada V dan volume dari paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh $u, w2, \cdots, w_p$, yaitu

$$\cos^2\theta = \frac{\|u_V, w2, \cdots, w_p\|^2}{\|u, w2, \cdots, w_p\|^2}, \tag{3.8}$$

dengan u_V adalah hasil proyeksi dari u pada V.

Pada Definisi 3.2 diberikan

$$\cos^2\theta = \frac{\langle u_W^{\perp}, v_W^{\perp}\rangle^2}{\|u_W^{\perp}\|^2 \|v_W^{\perp}\|^2}, \tag{3.9}$$

dengan $u_W^{\perp}$ dan $v_W^{\perp}$ adalah komplemen ortogonal dari u dan v pada W.

Perhatikan bahwa u dapat dituliskan sebagai $u = u_W + u_W^{\perp}$, dengan u_W adalah proyeksi u pada W dan $u_W^{\perp}$ adalah komplemen ortogonal u pada W. Berdasarkan sifat-sifat norm-n dan norm standar diperoleh

$$\begin{aligned}
\|u, w_2, \cdots, w_p\| &= \left\|u_W + u_W^{\perp}, w_2, \cdots, w_p\right\| \\
&= \|u_W, w_2, \cdots, w_p\| + \left\|u_W^{\perp}, w_2, \cdots, w_p\right\| \\
&= 0 + \left\|u_W^{\perp}, w_2, \cdots, w_p\right\| \\
&= \left\|u_W^{\perp}\right\| \|w_2, \cdots, w_p\|.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dengan cara yang serupa dapat dinyatakan bahwa

$$\left\|v, w_2, \cdots, w_p\right\| = \left\|v_W^{\perp}\right\| \left\|w_2, \cdots, w_p\right\|,$$

dengan $v_W^{\perp}$ adalah komplemen ortogonal v pada W.

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\left\langle u, v | w_2, \cdots, w_p \right\rangle &= \left\langle u_W + u_W^{\perp}, v_W + v_W^{\perp} | w_2, \cdots, w_p \right\rangle \\
&= \left\langle u_W, v_W | w_2, \cdots, w_p \right\rangle + \left\langle u_W^{\perp}, v_W^{\perp} | w_2, \cdots, w_p \right\rangle \\
&= 0 + \left\langle u_W^{\perp}, v_W^{\perp} | w_2, \cdots, w_p \right\rangle \\
&= \left\langle u_W^{\perp}, v_W^{\perp} \right\rangle \left\|w_2, \cdots, w_p\right\|. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Lihat kembali persamaan (3.9). Kita kalikan penyebut dan pembilang pada ruas kanan dari persamaan (3.9) masing-masing dengan $\left\|w_2, \cdots, w_p\right\|^4$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \frac{\left\langle u_W^{\perp}, v_W^{\perp} \right\rangle^2}{\left\|u_W^{\perp}\right\|^2 \left\|v_W^{\perp}\right\|^2} \\
&= \frac{\left\langle u_W^{\perp}, v_W^{\perp} \right\rangle^2 \left\|w_2, \cdots, w_p\right\|^4}{\left\|u_W^{\perp}\right\|^2 \left\|v_W^{\perp}\right\|^2 \left\|w_2, \cdots, w_p\right\|^4} \\
&= \frac{\left\langle u, v | w_2, \cdots, w_p \right\rangle}{\left\|u, w_2, \cdots, w_p\right\|^2 \left\|v, w_2, \cdots, w_p\right\|^2}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan bahwa $u_V = \alpha v + \sum_{k=2}^{p} \beta_k w_k$. Dengan menerapkan Aturan Cramer, diperoleh

$$\alpha = \frac{\left\langle u, v | w_2, \cdots, w_p \right\rangle}{\left\|v, w_2, \cdots, w_p\right\|^2}. \qquad (3.13)$$

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Oleh karena itu, didapatkan

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \frac{\langle u, v|w_2,\cdots,w_p\rangle^2}{\|u,w_2,\cdots,w_p\|^2\,\|v,w_2,\cdots,w_p\|^2}\\ &= \frac{\alpha\langle u, v|w_2,\cdots,w_p\rangle}{\|u,w_2,\cdots,w_p\|^2}\\ &= \frac{\langle u, u_V|w_2,\cdots,w_p\rangle}{\|u,w_2,\cdots,w_p\|^2}\\ &= \frac{\|u_V,w_2,\cdots,w_p\|^2}{\|u,w_2,\cdots,w_p\|^2}. \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa pada Definisi 3.2 , nilai dari $\cos\theta$ sama dengan perbandingan antara volume dari paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh proyeksi dari $u, w_2, \cdots, w_p$ pada V dan volume dari paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh $u, w_2, \cdots, w_p$.

3.4 Sudut antara Dua Subruang Sembarang

Pada subbab ini dibahas mengenai formula sudut antara dua subruang dengan dimensi berhingga yang sembarang sebagai perluasan dari formula-formula sudut yang sudah dibahas pada subbab sebelumnya. Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi mendefinisikan formula sudut antara dua subruang dengan dimensi berhingga yang sembarang dari suatu ruang hasil kali dalam-n sederhana dalam Definisi 3.3 berikut ini.

Definisi 3.3. *Misalkan $U = span\{u_1, \cdots, u_p\}$ suatu subruang berdimensi-p dari ruang hasil kali dalam-n sederhana X dan $V = span\{v_1, \cdots, v_q\}$ suatu subruang berdimensi-q dari X, dengan $p \leq q$. Sudut θ antara U dan V didefinisikan oleh*

$$\cos^2\theta = \frac{\|proj_V u_1, proj_V u_2, \cdots, proj_V u_p\|^2}{\|u_1, u_2, \cdots, u_p\|^2}, \qquad (3.15)$$

dengan $proj_V u_i$ adalah proyeksi dari u_i pada V, untuk $i = 1, \cdots, p$.

Untuk memudahkan dalam membaca indeks, maka notasi proyeksi u_i pada V tidak ditulis u_{iV} melainkan $\mathrm{proj}_V u_i$.

Perhatikan bahwa X merupakan ruang hasil kali dalam-n sederhana, dengan hasil kali dalam yang sembarang. Sedangkan norm dan norm-n yang digunakan adalah yang standar.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Secara sederhana, Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi memformulasikan seperti itu alasannya karena ada dua fakta pendukung. Kedua fakta pendukung ini menjadi dasar untuk mengambil kesimpulan bahwa sudut tersebut bisa diformulasikan demikian.

Fakta 1

Perbandingan pada ruas kanan dari persamaan (3.15) mempunyai nilai dari 0 sampai dengan 1.

Fakta 2

Perbandingan pada ruas kanan dari persamaan (3.15) bebas terhadap basis dari U dan V yang dipilih.

Berikut ini adalah bukti bahwa kedua penyataan tersebut benar.

Bukti Fakta 2. Perhatikan bahwa proyeksi u_i pada V unik sehingga invarian juga terhadap pemilihan basis dari V yang digunakan. Sedangkan karena proyeksi berupa transformasi linear, maka nilai perbandingan pada persamaan (3.15) tersebut juga invarian terhadap pemilihan basis dari U yang digunakan. Oleh karena itu, perbandingan tersebut bernilai tetap, walaupun

- u_i diganti oleh u_j
- u_i diganti oleh $u_i + \alpha u_j$
- u_i diganti oleh αu_i, untuk $\alpha \neq 0$.

□

Bukti Fakta 1. Karena nilai norm-n bersifat nonnegatif, maka nilai perbandingan kedua norm-n pada persamaan (3.15) juga pasti bernilai nonnegatif. Kemudian bahwa nilai perbandingan kurang dari sama dengan 1, dapat dipahami dengan mudah secara geometris. Perhatikan bahwa dengan norm-n standar dan hasil kali dalam-n sederhana dapat diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \left\|\text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p\right\|^2 &= \left\langle \text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_1 | \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p \right\rangle \\ &= \Gamma\left(\text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p\right), \end{aligned} \tag{3.16}$$

yang menyatakan kuadrat dari volume paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh $\text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p$, dan

$$\begin{aligned} \left\|u_1, u_2, \cdots, u_p\right\|^2 &= \left\langle u_1, u_1 | u_2, \cdots, u_p \right\rangle \\ &= \Gamma\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

yang menyatakan kuadrat dari volume paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh $u_1, u_2, \cdots, u_p$.

Perhatikan bahwa $\|\text{proj}_V u_i\| \leq \|u_i\|$, untuk setiap $i = 1, \cdots, p$. Oleh karena itu, volume paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh $\text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p$ kurang dari atau sama dengan volume paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh $u_1, u_2, \cdots, u_p$. Akibatnya, jelas bahwa perbandingan kuadrat dari kedua volume tersebut kurang dari atau sama dengan 1.

Untuk membuktikannya secara matematis, boleh diasumsikan bahwa $\{u_1, \cdots, u_p\}$ ortonormal. Akibatnya, diperoleh $\|u_1, \cdots, u_p\| = 1$. Lebih lanjut, karena $\|\text{proj}_V u_i\| \leq \|u_i\|$, untuk setiap $i = 1, \cdots, p$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\|\text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p\| \leq 1.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$0 \leq \frac{\|\text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p\|^2}{\|u_1, u_2, \cdots, u_p\|^2} \leq 1. \tag{3.18}$$

□

Selanjutnya kita buat persamaan (3.15) dalam $u_1, \cdots, u_p$ dan $v_1, \cdots, v_q$ secara eksplisit. Misalkan untuk setiap $i = 1, \cdots, p$, proyeksi dari u_i pada V dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \cdots, v_q$,

$$\text{proj}_V u_i = \sum_{k=1}^{q} \alpha_{ik} v_k, \tag{3.19}$$

dengan

$$\alpha_{ik} = \frac{\left\langle u_1, v_k | v_{i_2(k)}, \cdots, v_{i_q(k)} \right\rangle}{\|v_1, v_2, \cdots, v_q\|^2}$$

untuk $k = 1, 2, \cdots, q$, dan $\{i_2(k), \cdots, i_q(k)\}$ merupakan permutasi dari $\{1, 2, \cdots, q\} \setminus \{k\}$.

Hasil kali dalam antara dua buah proyeksi u_i, u_j bisa ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \langle \text{proj}_V u_i, \text{proj}_V u_j \rangle &= \langle u_i, \text{proj}_V u_V \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{q} \alpha_{jk} \langle u_i, v_k \rangle, \end{aligned} \tag{3.20}$$

untuk $i, j = 1, \cdots, p$.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \left\|\mathrm{proj}_V u_1, \mathrm{proj}_V u_2, \cdots, \mathrm{proj}_V u_p\right\|^2 &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{q} \alpha_{1k} \langle u_1, v_k\rangle & \cdots & \sum_{k=1}^{q} \alpha_{pk} \langle u_1, v_k\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{q} \alpha_{1k} \langle u_p, v_k\rangle & \cdots & \sum_{k=1}^{q} \alpha_{pk} \langle u_p, v_k\rangle \end{vmatrix} \\ &= \frac{\det\left(M\tilde{M}^T\right)}{\left\|v_1, v_2, \cdots, v_q\right\|^2}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

dengan

$$M := [\langle u_i, v_k\rangle]$$

dan

$$\tilde{M} := \left[\left\langle u_i, v_k | v_{i_2(k)}, \cdots, v_{i_q(k)}\right\rangle\right],$$

untuk $k = 1, 2, \cdots, q$, dan $\{i_2(k), \cdots, i_q(k)\}$ merupakan permutasi dari $\{1, 2, \cdots, q\} \setminus \{k\}$.

Matriks M dan matriks $\tilde{M}$ sama-sama merupakan matriks berukuran $(p \times q)$. Oleh karena itu, hasil kali $M\tilde{M}^T$ merupakan matriks berukuran $(p \times p)$.

Perhatikan bahwa dengan menggunakan norm-n standar dan hasil kali dalam-n sederhana, kedua norm berikut bisa ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \left\|v_1, \cdots, v_q\right\|^{2p} &= \left\langle v_1, v_1 | v_2, \cdots, v_q\right\rangle^p \\ &= \Gamma\left(v_1, \cdots, v_q\right)^p \end{aligned} \tag{3.22}$$

dan

$$\begin{aligned} \left\|u_1, \cdots, u_p\right\|^{2} &= \left\langle u_1, u_1 | u_2, \cdots, u_p\right\rangle \\ &= \Gamma\left(u_1, \cdots, u_p\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Jadi, kita peroleh bahwa persamaan (3.15) dapat ditulis sebagai

$$\cos^2\theta = \frac{\det\left(M\tilde{M}^T\right)}{\Gamma(u_1, \cdots, u_p)\,\Gamma\left(v_1, \cdots, v_q\right)^p}, \tag{3.24}$$

yang merupakan perbaikan formula pada persamaan (3.3) yang dikeluarkan oleh Risteski dan Trecevski, yang dikoreksi oleh Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi.

Selanjutnya, persamaan (3.24) dapat disederhanakan untuk dua kasus, yaitu jika

1. $\{v_1, \cdots, v_q\}$ ortonormal

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

2. $\{v_1, \cdots, v_q\}$ dan $\{u_1, \cdots, u_p\}$ ortonormal.

Kasus 1

Jika $\{v_1, \cdots, v_q\}$ ortonormal, maka $\Gamma\left(v_1, \cdots, v_q\right) = 1$. Kemudian, untuk setiap $i = 1, \cdots, p$, proyeksi dari u_i pada V dapat ditulis sebagai kombinasi dari vektor-vektor $v_1, \cdots, v_q$, yaitu

$$\text{proj}_V u_i = \sum_{k=1}^{q} \langle u_i, v_k \rangle v_k.$$

Oleh karena itu, hasil kali dalam dari proyeksi-proyeks u_i dan u_j pada V bisa ditulis sebagai

$$\left\langle \text{proj}_V u_i, \text{proj}_V u_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{q} \langle u_i, v_k \rangle \left\langle u_j, v_k \right\rangle,$$

untuk setiap $i, j = 1, \cdots, p$.

Karenanya kita peroleh dengan norm-n standar bahwa

$$\begin{aligned} \left\| \text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p \right\|^2 &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{q} \langle u_1, v_k \rangle \langle u_1, v_k \rangle & \cdots & \sum_{k=1}^{q} \langle u_1, v_k \rangle \left\langle u_p, v_k \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{q} \left\langle u_p, v_k \right\rangle \langle u_1, v_k \rangle & \cdots & \sum_{k=1}^{q} \left\langle u_p, v_k \right\rangle \left\langle u_p, v_k \right\rangle \end{vmatrix} \\ &= \det\left(M\tilde{M}^T\right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

dengan

$$M := \left[\langle u_i, v_k \rangle\right].$$

Sehingga, kita peroleh formula

$$\cos^2 \theta = \frac{\det\left(M\tilde{M}^T\right)}{\Gamma\left(u_1, \cdots, u_p\right)}. \tag{3.26}$$

Kasus 2

Melanjutkan dari Kasus 1, jika $\{u_1, \cdots, u_p\}$ juga ortonormal, maka $\Gamma\left(u_1, \cdots, u_p\right) = 1$, sehingga dapat disimpulkan

$$\cos^2 \theta = \det\left(MM^T\right). \tag{3.27}$$

3.5 Sudut-Sudut Kanonik

Salah satu aplikasi dari sudut antara dua subruang adalah pada bidang statistik. Sudut-sudut kanonik antara dua subruang erat berhubungan dengan ketergantungan

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

dua kovariansi dari salah satu peubah acak pada peubah acak lainnya.

Selain itu, sudut-sudut kanonik juga digunakan dalam bidang komputasi. Salah satunya adalah untuk mengukur kesamaan citra dari benda-benda 3D yang invarian terhadap rotasi kamera dan perpindahan benda. Yosuke Igarashi dan Kazuhiro Fukui (2010) mengusulkan metode dengan menggunakan sudut-sudut kanonik efektif untuk pengenalan foto-foto wajah.

Adapun definisi dari sudut-sudut kanonik adalah sebagai berikut.

Definisi 3.4. *Misalkan U adalah subruang berdimensi-p dan V adalah subruang berdimensi-q dari $\mathbb{R}^n$, dengan $1 \leq p \leq q \leq n$. Sudut-sudut kanonik di antara U dan V adalah θ_i , $i \in \{1,2,\cdots,p\}$, yang memenuhi*

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p \leq \frac{\pi}{2} \tag{3.28}$$

dan

$$\begin{aligned} \cos\theta_i &= \frac{\langle u_i, v_i\rangle}{\|u_i\|\,\|v_i\|} &(3.29)\\ &= \max\left\{\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} : \begin{array}{ll} u \in U, & u \perp u_k, \\ v \in V, & v \perp v_k, \end{array} k = 1,\cdots,i-1\right\}, &(3.30) \end{aligned}$$

dengan $(u_i, v_i) \in U \times V$, untuk $i = 1,\cdots,p$. Pasangan-pasangan vektor (u_i, v_i) tersebut disebut pasangan vektor-vektor kanonik.

Adapun langkah-langkah untuk mencarinya adalah sebagai berikut:

1. Langkah pertama kita cari terlebih dahulu vektor-vektor satuan $u_1 \in U_1 = U$ dan $v_1 \in V_1 = V$ yang membuat sudut terkecil (nilai kosinus terbesar) di antara U_1 dan V_1. Sudut ini adalah θ_1.

2. Kemudian, tentukan komplemen ortogonal dari u_1 pada U_1 dan komplemen ortogonal dari v_1 pada V_1. Misalkan $U_2 = u_1^{\perp} \cap U_1$ dan $V_2 = v_1^{\perp} \cap V_1$. Kemudian cari vektor-vektor satuan $u_2 \in U_2$ dan $v_2 \in V_2$ yang membuat sudut terkecil di antara U_2 dan V_2. Sudut ini adalah θ_2.

3. Dan selanjutnya, iterasi ini dilakukan sampai θ_p.

Banyak peneliti yang hanya menggunakan θ_1 untuk estimasi. Namun secara geometris, θ_1 bukanlah suatu ukuran aproksimasi yang baik. Risteski and Trencevski (2001) menyebutkan bahwa jika kita mengalikan nilai-nilai kosinus dari sudut-sudut kanonik, kita akan memperoleh kosinus dari sudut yang bisa

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

dianggap sebagai sudut ”geometris” antara kedua subruang yang diberikan. Selengkapnya tentang hubungan keduanya bisa dilihat pada teorema berikut.

Teorema 3.3. *Misalkan U adalah subruang berdimensi-p dan V adalah subruang berdimensi-q dari ruang hasil kali dalam $\mathbb{R}^n$, dengan $1 \leq p \leq q < \infty$. Misalkan pula $\{u_1, \cdots, u_p\}$ merupakan basis ortonormal dari U dan $\{v_1, \cdots, v_q\}$ merupakan basis ortonormal dari V. Maka berlaku*

$$\cos\theta = \prod_{i=1}^{p} \cos\theta_i, \tag{3.31}$$

dengan θ adalah sudut di antara U dan V, sedangkan θ_i, $i = 1, \cdots, p$, adalah sudut-sudut kanonik antara U dan V.

Bukti. Perhatikan bahwa karena $\{u_1, \cdots, u_p\}$ dan $\{v_1, \cdots, v_q\}$ orthonormal, maka kita bisa gunakan persamaan (3.27), yaitu

$$\cos^2\theta = \det(MM^T),$$

dengan

$$M = \left[\langle u_i, v_j \rangle\right],$$

untuk $i = 1, \cdots, p$ dan $j = 1, \cdots, q$.

Lebih lanjut, perkalian matriks M dan matriks transposenya M^T menghasilkan matriks yang terdiagonalkan. Oleh karena itu, nilai dari $\det(MM^T)$ sama dengan hasil kali dari nilai-nilai eigennya. Matriks MM^T mempunyai p buah nilai eigen. Misalkan nilai-nilai eigen tersebut adalah $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$. Klaim bahwa semua kuadrat dari kosinus dari sudut-sudut kanonik di antara U dan V merupakan nilai-nilai eigen dari MM^T,

$$\lambda_i = \cos^2\theta_i, \tag{3.32}$$

untuk $i = 1, \cdots, p$.

Misalkan $f(u) := \max_{v \in V, \|v\|=1} \langle u, v \rangle$. Untuk setiap $u \in \mathbb{R}^n$, nilai $\langle u, v \rangle$ terbesar diperoleh pada hasil proyeksi u pada V, yaitu $v = \text{proj}_V u$. Sehingga untuk setiap $u \in U$, dengan $\|u\| = 1$,

$$f(u) = \max_{v \in V, \|v\|=1} \langle u, v \rangle = \|\text{proj}_V u\|, \tag{3.33}$$

yang diperoleh ketika $v = \frac{\text{proj}_V u}{\|\text{proj}_V u\|}$.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Misalkan $g = f^2$, maka

$$g(u) := \left(\max_{v \in V, \|v\|=1} \langle u, v \rangle \right)^2 = \|\mathrm{proj}_V u\|^2, \tag{3.34}$$

untuk setiap $u \in U$ dengan $\|u\| = 1$. Lebih lanjut, nilai-nilai kritis dari g merupakan kuadrat dari nilai-nilai kritis dari f, yaitu $\cos^2 \theta_i$, $i = 1, \cdots, p$.

Sekarang, tulis u sebagai kombinasi linear dari $u_1, \cdots, u_p$, yaitu $u = \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \|\mathrm{proj}_V u\| &= \sum_{k=1}^{q} \langle u, v_k \rangle v_k \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left\langle \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_i, v_k \right\rangle v_k \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} \beta_i \langle u_i, v_k \rangle v_k. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dengan memandang g sebagai fungsi dari $\beta_1, \cdots, \beta_p$, maka didapat nilai fungsi g adalah

$$\begin{aligned} g(\beta_1, \cdots, \beta_p) &= \|\mathrm{proj}_V u\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} \beta_i \langle u_i, v_k \rangle v_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} \beta_i \langle u_i, v_k \rangle \right)^2 \end{aligned} \tag{3.36}$$

dengan $\sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 = 1$.

Lebih lanjut, karena $M = [\langle u_i, v_k \rangle]$, maka dapat ditulis

$$g(t) = t^T M M^T t = \left\| M^T t \right\|_q^2, \tag{3.37}$$

dengan $t = [t_1, \cdots, t_p]^T \in \mathbb{R}^p$ dan $\|t\|_p = 1$. Di sini $\|\cdot\|$ menyatakan norm standar di $\mathbb{R}^p$.

Berikutnya untuk mencari nilai kritis g, kita misalkan fungsi

$$h_\lambda(t) = \left\| M^T t \right\|_q^2 + \lambda \left(1 - \|t\|_p^2 \right) \tag{3.38}$$

untuk $t \in \mathbb{R}^p$ dengan λ adalah pengali Lagrange.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

Perhatikan bahwa titik kritis t_0 diperoleh ketika

$$\nabla h_\lambda(t_0) = 0. \tag{3.39}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}
\nabla h_\lambda(t_0) &= 0 \\
2MM^T t_0 - 2\lambda t_0 &= 0 \\
MM^T t_0 &= \lambda t_0 \\
t_0^T MM^T t_0 &= t_0^T \lambda t_0 \\
g(t_0) &= \lambda t_0^T t_0 \\
g(t_0) &= \lambda \|t_0\| \\
g(t_0) &= \lambda.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Artinya, setiap pengali Lagrange λ merupakan nilai kritis dari g. Karena itu, sudah dibuktikan bahwa

$$\lambda_i = \cos^2\theta_i, \tag{3.41}$$

untuk $i = 1, \cdots, p$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$\cos^2\theta = \det(MM^T) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i = \prod_{i=1}^{p} \cos^2\theta_i, \tag{3.42}$$

atau dengan perkataan lain

$$\cos\theta = \prod_{i=1}^{p} \cos\theta_i. \tag{3.43}$$

□

BAB 4
Kesimpulan dan Saran

Formula untuk menghitung sudut antara dua subruang, $U = \text{span}\{u_1, \cdots, u_p\}$ dan $V = \text{span}\{v_1, \cdots, v_q\}$ dengan $p \leq q$, dari suatu ruang hasil kali dalam-n sederhana X adalah

$$\cos^2\theta = \frac{\left\|\text{proj}_V u_1, \text{proj}_V u_2, \cdots, \text{proj}_V u_p\right\|^2}{\left\|u_1, u_2, \cdots, u_p\right\|^2},$$

yang dikemukakan oleh Gunawan, Neswan, dan Setya-Budhi (2005). Secara geometris, kosinus dari sudut tersebut merupakan perbandingan antara volume paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh $\text{proj}_V u_i$ terhadap volume paralelotop berdimensi-p yang dibangun oleh u_i, dengan $i = 1, \cdots, p$. Jika $\{u_1, \cdots, u_p\}$ dan $\{v_1, \cdots, v_q\}$ ortonormal, formula tersebut juga bisa ditulis dalam bentuk

$$\cos^2\theta = \frac{\det(M\tilde{M}^T)}{\Gamma(u_1, \cdots, u_p)\Gamma_(v_1, \cdots, v_q)},$$

yang merupakan perbaikan dari formula yang dikemukakan oleh Risteski dan Trenchevski (2001).

Selama ini, dalam aplikasi di bidang statistika dan komputasi, untuk mendeskripsikan sudut antara dua subruang digunakan sudut-sudut kanonik. Contohnya dalam statistika, sudut-sudut kanonik digunakan untuk menentukan ketergantungan dan kovariansi dari salah satu peubah acak pada peubah acak lainnya. Sedangkan contohnya dalam komputasi, sudut-sudut kanonik digunakan untuk mengukur kesamaan citra dari benda-benda 3D yang invarian terhadap rotasi kamera dan perpindahan benda.

Telah dibuktikan bahwa formula kosinus sudut antara dua subruang merupakan hasil kali dari semua nilai kosinus sudut-sudut kanonik,

$$\cos\theta = \prod_{i=1}^{p} \cos\theta_i.$$

Sebagai saran, formula kosinus sudut antara dua subruang (3.15) ini dapat diteliti lebih lanjut agar dapat digunakan sebagai pengganti sudut-sudut kanonik dalam aplikasinya.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.

DAFTAR REFERENSI

[1] Courant, R. dan John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis* II/I. New York: Springer-Verlag.

[2] Freese, R.W. dan Cho, YJ. (2001). *Geometry of Linear 2-Normed Spaces*. New York: Nova.

[3] Gunawan, H. (2002). *Inner Products On n-Inner Product Spaces*. *Soochow Journal of Mathematics*. 28, 4, 389-398.

[4] Gunawan, H., Neswan, O., dan Setya-Budhi, W. (2005). *A Formula For Angles Between Two Subspaces Of Inner Product Spaces*. *Beitrage zur Algebra and Geometrie*. 46, 2, 311-320.

[5] Igarashi, Y. dan Fukui, K. *3D Object Recognition Based On Canonical Angles Between Shape Subspaces*. (2010). ACCV'10 Volume Part IV. 580-591.

[6] Jones, F. "Volumes of Parallelograms". www.owlnet.rice.edu/fjones/chap8.pdf (05 Mar. 2012, Pukul 13:13 WIB.)

[7] Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Canada. John Wiley & Sons, Inc.

[8] Misiak, A. (1989). *n-Inner Product Spaces*. *Math. Nachr.*. 140, 299-319.

[9] Misiak, A. dan Ryz, A. (2000). *n-Inner Product Spaces And Projections*. *Mathematica Bohemica*. 125, 1, 87-97.

[10] Risteski, I. B. dan Trencevski, K. G. (2001). *Principal Values And Principal Subspaces Of Two Subspaces Of Vector Spaces With Inner Product*. *Beitr. Algebra Geom. 42, 289-300.*

[11] Roman, S. (2008). *Advanced Linear Algebra, 3rd Edition*. New York: Springer.

Sudut antara..., Debby Sanjaya, FMIPA UI, 2012.