



UNIVERSITAS INDONESIA

**RADIUS SPEKTRAL MINIMAL  
DARI KELAS GRAF DENGAN DIAMETER KURANG DARI EMPAT**

**TESIS**

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Magister Sains

SUKOTO

0906577425

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

DEPOK

JULI 2011

## HALAMAN PERSETUJUAN

Judul : **Radius Spektral Minimal dari Kelas Graf dengan Diameter  
Kurang dari Empat**

Nama : Sukoto

NPM : 0906577425

Laporan Tesis ini telah diperiksa dan disetujui.

Depok, Juli 2011



Dr. Hengki Tasman, M.Si.

Pembimbing Tesis

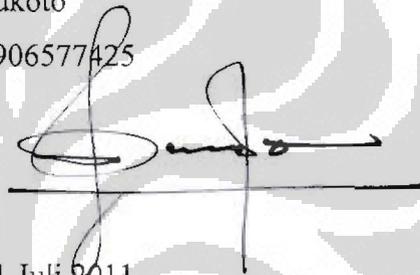
## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Sukoto

NPM : 0906577425

Tanda Tangan :

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Sukoto', is written over a horizontal line. The signature is stylized with a large initial 'S' and a long horizontal stroke.

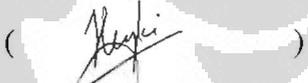
Tanggal : 11 Juli 2011

## HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :  
Nama : Sukoto  
NPM : 0906577425  
Program Magister : Matematika  
Judul Tesis : **Radius Spektral Minimal dari Kelas Graf  
dengan Diameter Kurang dari Empat**

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Hengki Tasman, M.Si. (  )

Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami (  )

Penguji : Dr. Alhadi Bustamam, M.Kom (  )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 11 Juli 2011

## KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan atas segala pertolongan dan kasih-Nya sehingga penulisan tesis yang berjudul **Radius Spektral Minimal dari Kelas Graf dengan Diameter Kurang dari Empat** dapat diselesaikan tepat waktu.

Banyak pihak yang telah membantu dalam penulisan tesis ini, oleh sebab itu tidak berlebihan kiranya penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak terkait:

1. Bapak Dr. Hengki Tasman, M.Si. atas segala arahan, bimbingan dan perhatian yang selama ini diberikan.
2. Terima kasih untuk seluruh Dosen beserta staf Departemen Matematika atas kesabaran dan bimbingannya.
3. Istri tercinta Wiwied, anak-anak tercinta Kezia, Eben Haezar, Benaya dan Bea atas segala doa, perhatian, kesabaran dan dukungan selama menempuh pendidikan ini.
4. Yayasan BPK Penabur yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mendapatkan program beasiswa selama dua tahun ini;
5. Ibu Sri Sutjiati, selaku Kepala SMPK 2 yang telah mendorong dan mendukung saya untuk mengambil Program S2 Matematika.
6. Rekan-rekan mahasiswa S2 angkatan 2009.

Depok, 11 Juli 2011

Sukoto

## HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sukoto  
NPM : 0906577425  
Program Studi : Magister Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

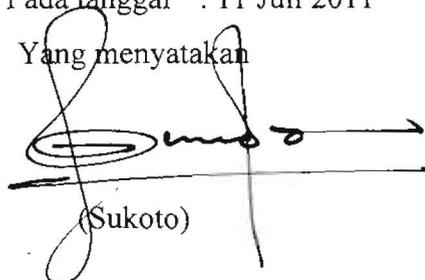
Radius Spektral Minimal dari Kelas Graf dengan Diameter Kurang dari Empat beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmediakan/memformatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 11 Juli 2011

Yang menyatakan



(Sukoto)

## ABSTRAK

Nama : Sukoto  
Program Studi : Magister Matematika  
Judul Tesis : **Radius Spektral Minimal dari Kelas Graf dengan Diameter Kurang dari Empat**

Pada tesis ini dibahas radius spektral minimal untuk graf  $n$  simpul berdiameter 1, kemudian graf  $n$  simpul berdiameter 2 dan graf  $n$  simpul berdiameter 3. Pada graf berdiameter 1 dibahas untuk semua nilai  $n$ , tetapi untuk graf berdiameter 2 dan 3 yang dibahas hanya untuk banyaknya simpul  $n < 8$ . Hasil yang diperoleh adalah graf  $n$  simpul dengan diameter 1 memiliki radius spektral minimal  $n - 1$  dan graf  $n$  simpul dengan diameter 2 memiliki radius spektral minimal  $\sqrt{n - 1}$ .

Kata kunci: graf, diameter graf, radius spektral minimal

## ABSTRACT

Name : Sukoto  
Study Program : Magister of Mathematics  
Title of Thesis : **The Minimal Spectral Radius of Graphs with  
Diameter Less than Four**

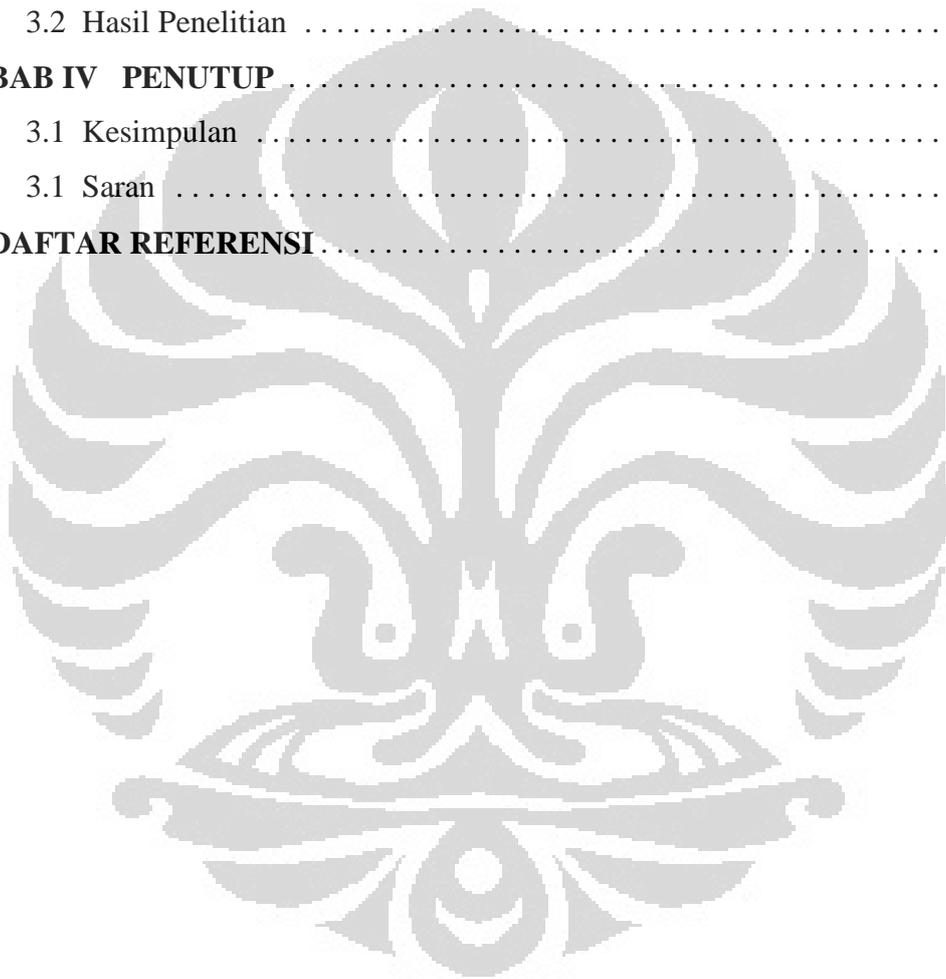
In this thesis we told about the minimal spectral radius for graphs  $n$  vertices with diameter 1, graphs  $n$  vertices with diameter 2 and graphs  $n$  vertices with diameter 3. For the graphs  $n$  vertices with diameter 1, we explored for all of  $n$  values. But for the graphs with diameters 2 and 3 we explored for  $n < 8$ . The results are the minimal spectral radius for graphs  $n$  vertices with diameter 1 equals  $n - 1$  and the minimal spectral radius for graphs  $n$  vertices with diameter 2 equals  $\sqrt{n - 1}$ .

Keywords: graph, diameter of graph, minimal spectral radius

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PERSETUJUAN</b> .....	ii
<b>LEMBAR PERNYATAAN ORISINALITAS</b> .....	iii
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iv
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	v
<b>LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH</b> .....	vi
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	ix
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang Masalah .....	2
1.2 Permasalahan .....	2
1.3 Tujuan Penelitian .....	2
1.4 Manfaat Penelitian .....	2
1.5 Metode Penelitian .....	2
1.6 Sistematika Penulisan .....	3
<b>BAB II LANDASAN TEORI</b> .....	4
2.1 Teori Graf .....	4
2.2 Spektral dan Radius Spektral .....	8
2.3 Matriks dan Graf <i>Circulant</i> .....	9
<b>BAB III RADIUS SPEKTRAL MINIMAL</b> .....	12
3.1 RSM Graf n Simpul dengan Diameter 1 .....	12
3.1.1 Menentukan RSM dengan Penelitian Langsung .....	12
3.1.2 Menentukan RSM dengan Studi Literatur .....	14

3.2 RSM Graf $n$ Simpul dengan Diameter 2 dan 3 . . . . .	16
3.2.1 RSM Graf $n = 3$ dengan Diameter 2 . . . . .	16
3.2.2 RSM Graf $n = 4$ dengan Diameter 2 dan 3 . . . . .	16
3.2.3 RSM Graf $n = 5$ dengan Diameter 2 dan 3 . . . . .	17
3.2.4 RSM Graf $n = 6$ dengan Diameter 2 dan 3 . . . . .	19
3.2.5 RSM Graf $n = 7$ dengan Diameter 2 dan 3 . . . . .	23
3.2 Hasil Penelitian . . . . .	24
<b>BAB IV PENUTUP</b> . . . . .	25
3.1 Kesimpulan . . . . .	25
3.1 Saran . . . . .	25
<b>DAFTAR REFERENSI</b> . . . . .	26

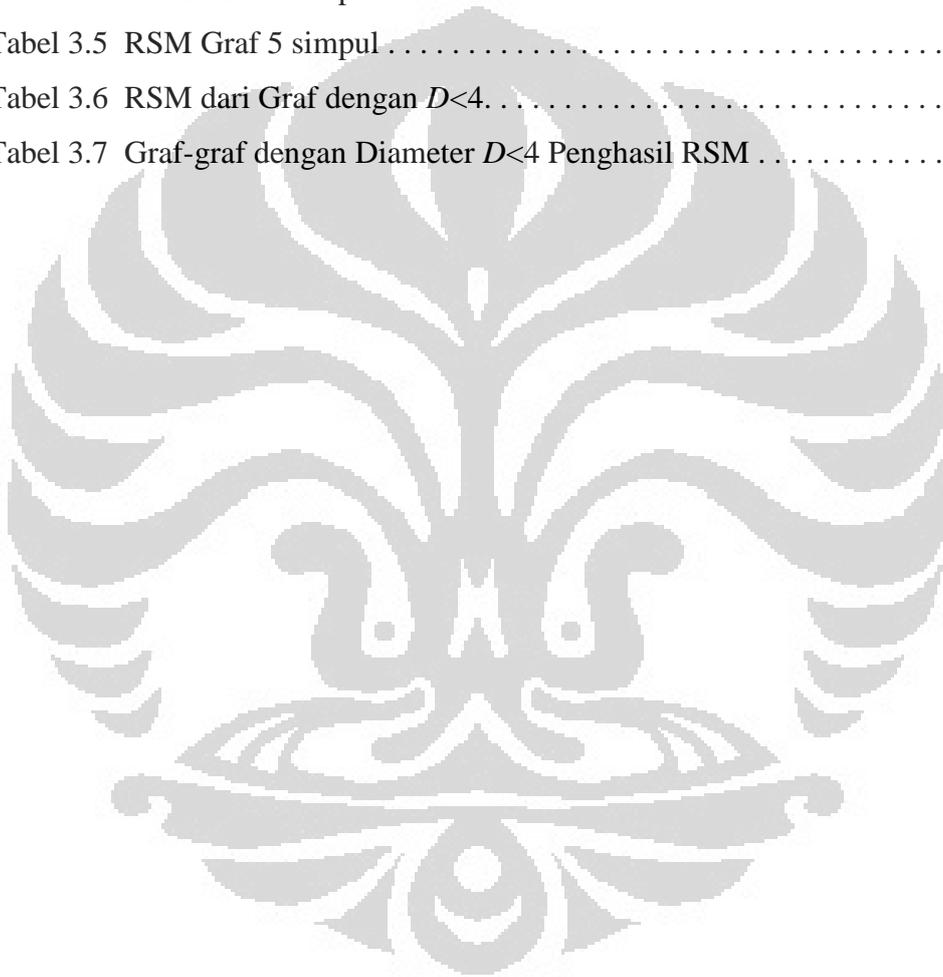


## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf $P_n$ .....	4
Gambar 2.2 Graf $P_4$ dan $P_6$ .....	4
Gambar 2.3 Graf $D_n$ .....	5
Gambar 2.4 Graf $D_6$ dan $D_8$ .....	6
Gambar 2.5 Graf $\tilde{D}_n$ .....	6
Gambar 2.6 Graf $\tilde{D}_6$ dan $\tilde{D}_8$ .....	6
Gambar 2.7 Graf $E_n$ .....	6
Gambar 2.8 Graf $E_6, E_7$ dan $E_8$ .....	7
Gambar 2.9 Graf $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ dan $\tilde{E}_8$ .....	7
Gambar 2.10 Graf $C_5, C_6$ dan $C_7$ .....	8
Gambar 2.11 Graf $K_{1,4}$ .....	8
Gambar 3.1 Graf $P_2$ .....	16
Gambar 3.2 Graf $K_{1,3}$ .....	17
Gambar 3.3 Graf $P_4$ .....	17
Gambar 3.4 Graf $C_5$ dan Graf $K_{1,4}$ .....	18
Gambar 3.5 Graf $D_5$ .....	19
Gambar 3.6 Graf $K_{1,5}$ .....	22
Gambar 3.7 Graf $C_6$ dan Graf $\tilde{D}_5$ .....	23
Gambar 3.8 Graf $K_{1,6}$ .....	23
Gambar 3.9 Graf $C_7$ .....	24

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Polinomial Karakteristik dan Nilai Eigen dari Graf $K_n$ . . . . .	13
Tabel 3.2	RSM Graf $n$ simpul ( $n < 8$ , diameter 1) . . . . .	14
Tabel 3.3	RSM Graf $n$ simpul (diameter 1). . . . .	15
Tabel 3.4	RSM Graf 4 simpul . . . . .	17
Tabel 3.5	RSM Graf 5 simpul . . . . .	18
Tabel 3.6	RSM dari Graf dengan $D < 4$ . . . . .	24
Tabel 3.7	Graf-graf dengan Diameter $D < 4$ Penghasil RSM . . . . .	25



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 LATAR BELAKANG

Pada teori spektral diperoleh banyak hubungan yang menarik secara fisik dari suatu jaringan, sedemikian rupa seperti daya tahan, diameter dan hubungan terhadap nilai *eigen* dari matriks *adjacency* dari suatu graf. Khusus untuk diameter, secara umum, untuk jaringan komunikasi dirancang sedemikian rupa diameternya kecil, sebab diameter yang besar akan memberikan kualitas layanan yang rendah dari suatu jaringan [van Dam & Kooij, 2007].

Dari [Wang, 2003] terlihat bahwa radius spektral suatu graf memainkan peran yang penting dalam pemodelan jaringan virus. Dari [Wang, 2003], secara nyata *susceptible-infected-susceptible* (SIS) suatu model infeksi diperhitungkan. Model SIS mengasumsikan bahwa suatu simpul pada suatu jaringan berada pada 2 pilihan kondisi:

- Kondisi pertama : suatu simpul terinfeksi dan dapat menginfeksi simpul yang lain;
- Kondisi kedua : suatu simpul sehat dapat mempengaruhi simpul yang lain terhindar dari terinfeksi.

Model SIS mengasumsikan bahwa suatu transisi terjadi secara instan. Secara instan suatu simpul terinfeksi dan dapat menginfeksi simpul yang lain, dengan segera juga suatu simpul dapat disembuhkan dari infeksi dan mempengaruhi yang lain untuk menjadi simpul sehat. Teori epidemik melihat secara instan perkiraan ambang batas epidemik  $\tau$ . Jika diasumsikan bahwa kecepatan terinfeksi setiap bagian dari jaringan adalah  $\beta$ , dan dalam kurun waktu yang sama, kecepatan suatu simpul menjadi sembuh dari terinfeksi adalah  $\delta$ , maka kecepatan efektif penyebaran virus dapat didefinisikan sebagai  $\beta/\delta$ . Ambang batas epidemik dapat didefinisikan sebagai berikut, untuk tingkat penyebaran virus dibawah  $\tau$ , kontaminasi virus pada jaringan terhenti, sedangkan untuk tingkat penyebaran di

atas  $\tau$ , virus menjadi berlebihan, yaitu semakin banyak simpul yang terinfeksi. Hal ini ditunjukkan dalam [Wang, 2003] bahwa  $\tau = 1/\rho(A)$  di mana  $\rho(A)$  dinotasikan sebagai radius spektral dari matriks *adjacency*  $A$  dari suatu graf. Jika mengikuti hasil ini, bahwa radius spektral yang lebih kecil membuat daya tahan dari jaringan yang melawan virus menjadi lebih besar, maka sangat penting untuk mendapatkan radius spektral minimal dari suatu kelas graf. Yang dimaksud mendapatkan radius spektral minimal dari suatu kelas graf adalah pada graf-graf  $n$  simpul dengan diameter tertentu yang manakah yang memiliki radius spektral minimal.

## 1.2 PERMASALAHAN

Graf terhubung dengan banyak simpul kurang dari delapan dan berdiameter kurang dari empat yang manakah yang memiliki radius spektral minimal?

## 1.3 TUJUAN PENELITIAN

Menentukan graf terhubung dengan banyak simpul kurang dari delapan dan berdiameter kurang dari empat yang memiliki radius spektral minimal.

## 1.4 MANFAAT PENELITIAN

Secara umum penelitian ini bermanfaat untuk memberikan informasi tentang graf  $n$  simpul dengan diameter  $D$  yang memiliki radius spektral minimal.

## 1.5 METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan dengan penelitian langsung, dan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku atau artikel yang relevan dengan topik penelitian, dan melakukan riset terhadap graf yang memiliki simpul  $n$

kurang dari 8, kemudian hasilnya dijabarkan dan disusun kembali secara rinci menjadi suatu karya tulis.

## 1.6 SISTEMATIKA PENULISAN

Tesis ini terdiri dari empat bab, yaitu

- BAB 1 berisi latar belakang, permasalahan yang dibahas, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.
- BAB 2 menjelaskan mengenai landasan teori yang digunakan pada bab-bab selanjutnya.
- BAB 3 membahas mengenai radius spektral minimal untuk graf  $n$  simpul dengan diameter 1 dan radius spektral minimal untuk graf  $n$  simpul dengan diameter 2 dan 3.
- BAB 4 berisi kesimpulan dan saran yang berkaitan dengan penulisan tesis.

## BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dalam teori graf yang digunakan pada bab selanjutnya.

### 2.1 Teori Graf

Sebelum membahas materi yang berkaitan dengan radius spektral minimal, perlu diperhatikan terlebih dahulu tentang konsep-konsep teori graf yang relevan (graf tak berarah). Teori graf diambil dari [Cvetković, 2010].

Sebuah graf  $G = (V, E)$  terdiri dari himpunan berhingga tak kosong  $V$  (himpunan simpul dari  $G$ ), dan sebuah himpunan  $E$  (himpunan pasangan 2 anggota dari  $V$ , suatu himpunan busur dari  $G$ ), bisa ditulis  $V(G)E(G)$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan simpul dari  $G$  dan  $E(G)$  adalah himpunan busur dari  $G$ . Banyaknya anggota dari  $V(G)$  dinotasikan dengan  $|G|$  dan disebut *order* dari  $G$ . Biasanya diasumsikan bahwa  $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Misalkan  $v_i v_j$  busur yang menghubungkan simpul  $v_i$  dan simpul  $v_j$ . Himpunan  $\{v_1 v_2 v_3 \dots v_n\}$ , himpunan busur-busur yang berbeda, yaitu  $v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, \dots, v_{n-1} v_n$ , disebut lintasan (*path*). Berikut contoh graf yang berupa lintasan.



Gambar 2.1 Graf  $P_n$



Gambar 2.2 Graf  $P_4$  dan  $P_6$

Panjang lintasan adalah banyaknya busur pada lintasan. Panjang lintasan  $\{v_1 v_2 v_3 \dots v_n\}$  adalah  $n-1$ . Lintasan terpendek dari  $v_1$  ke  $v_n$  adalah lintasan yang menghubungkan  $v_1$  dan  $v_n$  dan memiliki panjang minimal. Panjang lintasan

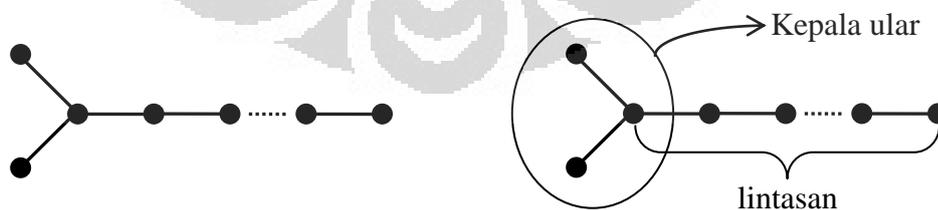
terpendek yang menghubungkan simpul  $i$  dan simpul  $j$  disebut jarak antara kedua simpul tersebut, dinotasikan sebagai  $d_{(ij)}$ . Jarak maksimum antara 2 simpul sembarang dalam graf  $G$  disebut diameter dari  $G$  dan dinotasikan dengan  $D(G)$ . Atau dengan penulisan lain

$$D(G) = \max_{i,j \in v(G)} (d_{(ij)})$$

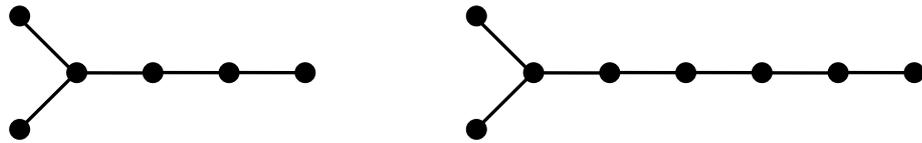
Dua buah simpul dikatakan *adjacent* jika mereka dihubungkan oleh sebuah busur. Banyaknya simpul yang *adjacent* terhadap suatu simpul  $i$  disebut derajat simpul (*vertex degree*) dari simpul  $i$ . Pada graf lengkap  $K_n$ , setiap pasang simpul *adjacent*. Graf lengkap  $K_n$ , memiliki sebanyak  $\binom{n}{2}$  busur dan merupakan graf teratur (*regular*) dengan derajat  $n-1$ . Yang dimaksud graf teratur adalah suatu graf di mana setiap simpulnya memiliki derajat yang sama. Graf lengkap  $K_n$  merupakan graf terhubung (suatu graf disebut graf terhubung jika setiap pasang simpul dihubungkan oleh suatu lintasan) dengan diameter minimal ( $D = 1$ ).

Berikut diberikan beberapa graf yang secara spesifik diperlukan dalam pembahasan Radius Spektral Minimal.

Graf  $D_n$  disebut graf *single-head snakes* [Cvetković, 2010], suatu graf dengan sebuah kepala ular di salah satu ujung suatu lintasan. Pada Gambar 2.3 merupakan bentuk umum dari graf  $D_n$  serta keterangan yang berkaitan dengan bagian yang disebut kepala ular dan bagian yang disebut lintasan. Sedangkan Gambar 2.4 adalah contoh dari graf  $D_n$  yaitu graf  $D_6$  dan  $D_8$ .

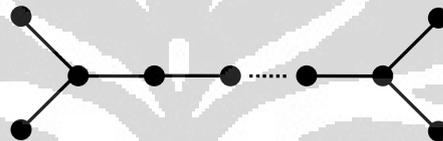


Gambar 2.3 Graf  $D_n$



Gambar 2.4 Graf  $D_6$  dan  $D_8$

Graf  $\tilde{D}_n$  disebut graf *Double-head snakes*, suatu graf dengan 2 buah kepala ular di kedua ujung suatu lintasan. Pada Gambar 2.5 merupakan bentuk umum dari graf  $\tilde{D}_n$ . Pada gambar tersebut terlihat 2 kepala ular di kedua ujung lintasan. Sedangkan Gambar 2.6 adalah contoh dari graf  $\tilde{D}_n$  yaitu graf  $\tilde{D}_6$  dan  $\tilde{D}_8$ .

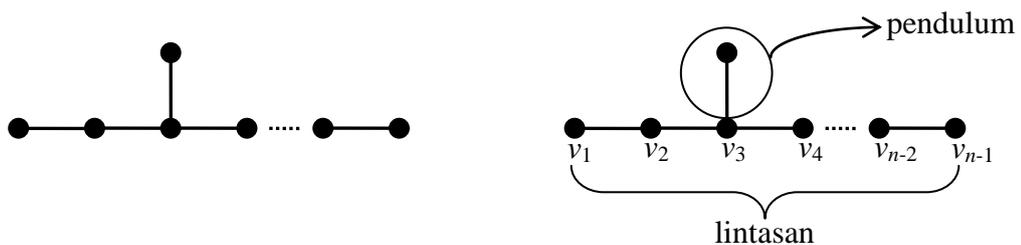


Gambar 2.5 Graf  $\tilde{D}_n$

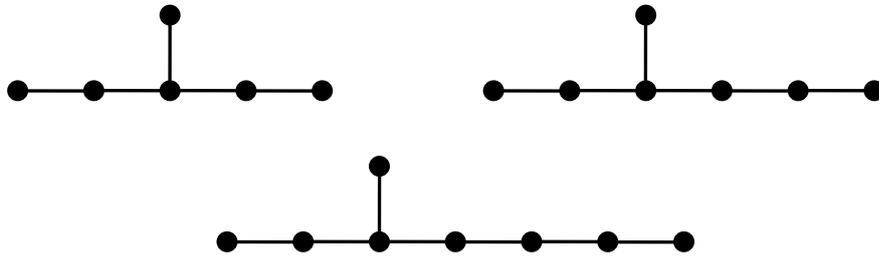


Gambar 2.6 Graf  $\tilde{D}_6$  dan  $\tilde{D}_8$

Graf  $E_n$  adalah suatu graf  $n$  simpul yang terdiri dari sebuah lintasan dan sebuah pendulum di simpul yang ke 3. Pada Gambar 2.7 merupakan bentuk umum dari graf  $E_n$  serta keterangan yang berkaitan dengan bagian yang disebut lintasan dan bagian yang disebut pendulum. Sedangkan Gambar 2.8 adalah contoh dari graf  $E_n$  untuk  $n = 6, 7$  dan  $8$  yaitu graf  $E_6, E_7$  dan  $E_8$ .

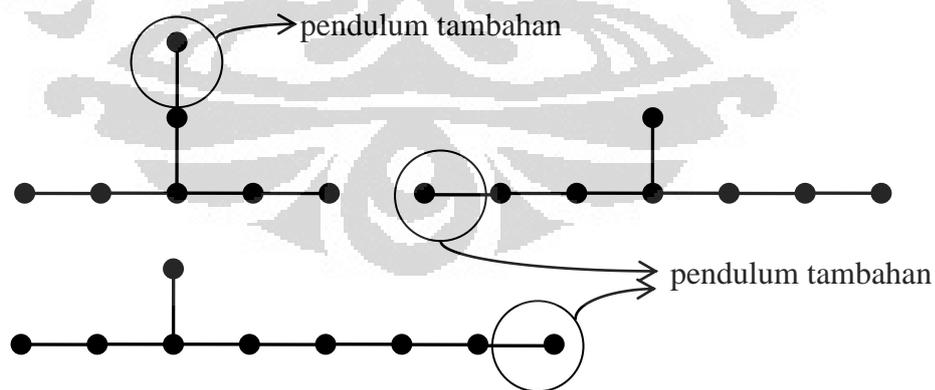


Gambar 2.7 Graf  $E_n$



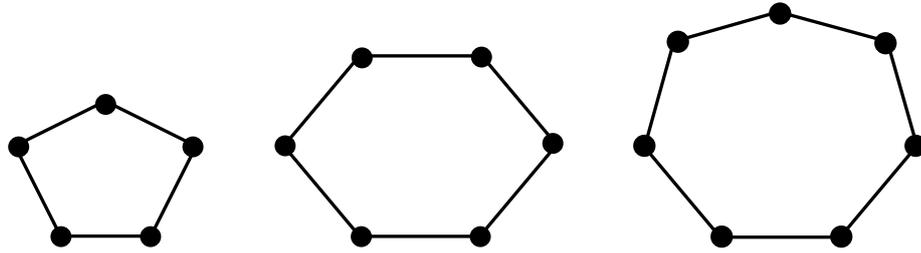
Gambar 2.8 Graf  $E_6$ ,  $E_7$  dan  $E_8$

Graf  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  dan  $\tilde{E}_8$  adalah graf-graf yang merupakan pengembangan Graf  $E_6$ ,  $E_7$  dan  $E_8$  dengan menambahkan sebuah pendulum. Sehingga banyaknya simpul dari Graf  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  dan  $\tilde{E}_8$  berturut-turut adalah 7, 8 dan 9. Graf  $\tilde{E}_6$  adalah graf yang merupakan pengembangan graf  $E_6$  dengan menambahkan sebuah pendulum pada pendulum yang sudah ada. Graf  $\tilde{E}_7$  adalah graf yang merupakan pengembangan graf  $E_7$  dengan menambahkan sebuah pendulum pada  $v_1$ . Sedangkan graf  $\tilde{E}_8$  adalah graf yang merupakan pengembangan graf  $E_8$  dengan menambahkan sebuah pendulum pada  $v_7$ . Gambar 2.9 adalah graf  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  dan  $\tilde{E}_8$  beserta letak pendulum tambahan pada masing-masing graf.



Gambar 2.9 Graf  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  dan  $\tilde{E}_8$

Graf lingkaran (*cycle*) adalah suatu graf dengan himpunan simpul  $\{v_1, \dots, v_n\}$  dan memiliki busur  $v_i v_{i+1}$  untuk  $i = 1, \dots, n-1$ , dan  $v_n v_1$ . Gambar 2.9 adalah contoh beberapa graf lingkaran yaitu Graf  $C_5$ ,  $C_6$  dan  $C_7$ .



Gambar 2.10 Graf  $C_5$ ,  $C_6$  dan  $C_7$

## 2.2 Spektral dan Radius Spektral

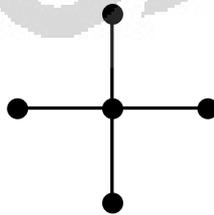
Relasi antara simpul-simpul pada suatu graf disebut relasi *adjacency*. Matriks *adjacency*  $A$  digunakan untuk menyatakan relasi *adjacency* dari graf  $G$ . Elemen  $a_{ij}$  dari matriks *adjacency*  $A$  adalah 1 jika simpul  $i$  dan  $j$  terhubung, dan sama dengan 0 jika tidak terhubung.

Polinomial karakteristik  $\det(\lambda I - A)$  dari matriks *adjacency*  $A$  disebut polinomial karakteristik dari graf  $G$ , dan dinotasikan sebagai  $P_G(\lambda)$ . Sehingga nilai-nilai *eigen* dari  $A$  disebut juga nilai-nilai *eigen* dari  $G$ . Dan spektral dari  $A$  (terdiri dari  $n$  nilai *eigen*) disebut spektral dari  $G$ . Spektrum dari  $G$  adalah daftar nilai *eigen* yang berbeda-beda beserta multisiplitasnya  $m_1, m_2, \dots, m_t$ , dan ditulis

$$\text{Spektrum } (G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_t \\ m_1 & \dots & m_t \end{pmatrix}$$

Contoh :

Diberikan graf 5 simpul yaitu graf  $K_{1,4}$  (Gambar 2.11) berikut ini.



Gambar 2.11 Graf  $K_{1,4}$

Matriks *adjacency* dari graf  $K_{1,4}$  adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari matriks *adjacency* di atas adalah  $\lambda^5 - 4\lambda^3$  yang menghasilkan 5 nilai  $\lambda$  yaitu 2, 0, 0, 0 dan -2. Sehingga spektrum dari graf  $K_{1,4}$  adalah

$$\text{Spektrum}(K_{1,4}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lema 2.2 [Brouwer & Haemers, 2010]** Jika  $G$  adalah graf tidak berarah maka nilai-nilai *eigen*-nya adalah real sebab  $A$  adalah matriks simetris.

Bukti :

$G$  adalah graf tidak berarah, sehingga jika ada busur dari  $v_i$  ke  $v_j$  maka ada busur dari  $v_j$  ke  $v_i$ , sehingga  $a_{ij} = a_{ji} = 1$  ( $a_{ij}$  adalah elemen dari matriks  $A$  pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ ), jika tidak ada busur dari  $v_i$  ke  $v_j$  maka tidak ada juga busur dari  $v_j$  ke  $v_i$ , sehingga  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ . Dengan demikian setiap  $a_{ij} = a_{ji}$  yang berarti matriks  $A$  adalah matriks simetris, sehingga setiap nilai eigen dari  $A$  adalah real.

Nilai-nilai *eigen* dari  $G$  biasanya dinotasikan dengan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Kita asumsikan bahwa  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Nilai *eigen* terbesar yaitu  $\lambda_1$  disebut radius spektral dari  $G$ .

### 2.3 Matriks dan Graf *Circulant*

Suatu matriks  $S$  yang berukuran  $n \times n$  disebut matriks *circulant* jika setiap  $s_{ij} = s_{i-j-1}$ . Dengan kata lain baris  $i$  dari  $S$  diperoleh dari baris pertama  $S$  dengan pertukaran secara siklik  $(i-1)$  langkah, sehingga setiap matriks *circulant* diturunkan dari baris pertamanya.

Misal  $W$  dinotasikan sebagai matriks *circulant* yang baris pertamanya adalah  $[0, 1, 0, \dots, 0]$  dan misalkan  $S$  dinotasikan suatu matriks *circulant* umum

yang baris pertamanya  $[s_1, s_2, \dots, s_n]$ . Maka dapat ditunjukkan suatu hubungan bahwa :

$$\begin{aligned}
 S &= s_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + s_n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
 S &= s_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^0 + s_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^1 + \dots + s_n \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \\
 S &= s_1 W^0 + s_2 W^1 + \dots + s_n W^{n-1} \\
 S &= \sum_{j=1}^n s_j W^{j-1}
 \end{aligned}$$

Karena nilai *eigen* dari  $W$  adalah  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ , dengan  $\omega = \exp(2\pi i/n)$ , itu mengikuti nilai *eigen* dari  $S$  yaitu

$$\lambda_r = \sum_{j=1}^n s_j \omega^{(j-1)r}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Definisi 2.2 [Biggs, 1993]** Suatu graf *circulant* adalah graf yang simpul-simpulnya dapat diurutkan sehingga matriks *adjacency*-nya adalah suatu matriks *circulant*.

Matriks *adjacency* adalah suatu matriks simetri dengan setiap elemen bernilai 0 pada diagonal utama. Jika baris pertama dari matriks *adjacency* dari suatu graf *circulant* adalah  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  maka  $a_1 = 0$  dan  $a_i = a_{n-i+2}$  untuk  $i = 2, 3, \dots, n$ .

**Proposisi 2.3 [Biggs, 1993]** Misalkan  $[0, a_2, \dots, a_n]$  adalah baris pertama dari matriks *adjacency* dari suatu graf *circulant*  $\Gamma$ . Maka nilai *eigen* dari  $\Gamma$  adalah

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^n a_j \omega^{(j-1)r}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

Bukti :

Hasil tersebut mengikuti secara langsung dari ekspresi untuk nilai *eigen* dari suatu matriks *circulant*.

Contoh :

Diberikan matriks *circulant*  $C$  berikut ini.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai *eigen* dari  $C$  adalah :

$$\omega = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\lambda_1 = \sum_{j=2}^n a_j \omega^{(j-1)} = a_2 \omega^1 + a_3 \omega^2 + a_4 \omega^3 = 1(i) + 2(-1) + 3(-i) = -2 - 2i$$

$$\lambda_2 = \sum_{j=2}^n a_j \omega^{(j-1)^2} = a_2 \omega^2 + a_3 \omega^4 + a_4 \omega^6 = 1(-1) + 2(1) + 3(-1) = -2$$

$$\lambda_3 = \sum_{j=2}^n a_j \omega^{(j-1)^3} = a_2 \omega^3 + a_3 \omega^6 + a_4 \omega^9 = 1(-i) + 2(-1) + 3(-i) = -2 - 2i$$

$$\lambda_4 = \sum_{j=2}^n a_j \omega^{(j-1)^4} = a_2 \omega^4 + a_3 \omega^8 + a_4 \omega^{12} = 1(1) + 2(1) + 3(i) = 6$$

Jadi,

$$\text{Spektrum}(C) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 - 2i \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## BAB III

### RADIUS SPEKTRAL MINIMAL

Pada bab ini pembahasan mengenai Radius Spektral Minimal yang selanjutnya disingkat RSM dimulai dari graf  $n$  simpul dengan diameter 1, dengan  $n = 2$  hingga  $n = 7$ . Selanjutnya pembahasan graf 3 simpul dengan diameter 2. Pembahasan selanjutnya untuk graf 4 simpul dengan diameter 2 dan 3, dilanjutkan untuk  $n = 5, 6$  dan  $7$ .

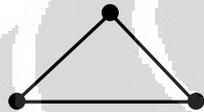
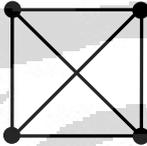
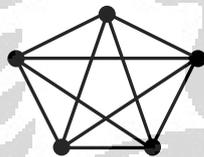
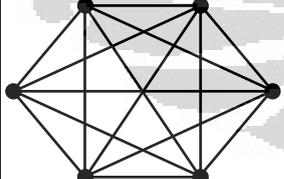
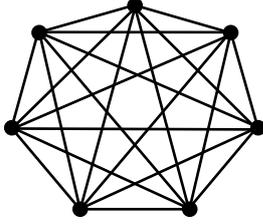
#### 3.1 RSM Graf $n$ Simpul dengan Diameter 1

Penelitian untuk graf  $n$  simpul dengan diameter 1, dibagi menjadi 2 bagian. Pertama, dilakukan dengan penelitian langsung untuk graf yang bersangkutan. Kedua dilakukan dengan studi literatur. Kedua penelitian tersebut dilakukan terhadap graf lengkap  $K_n$ , karena graf lengkap  $K_n$  memiliki diameter 1. Pada penelitian ini juga ditunjukkan bahwa diameter graf lengkap  $K_n$  adalah 1.

##### 3.1.1 Menentukan RSM dengan Penelitian Langsung

Pada bagian ini penulis memaparkan hasil penelitian terhadap graf lengkap  $K_n$  untuk  $n = 2$  hingga  $n = 7$ . Paparan berbentuk tabel yang terdiri dari 4 kolom. Kolom pertama berisi tentang banyaknya simpul ( $n$ ), kolom kedua menyajikan graf lengkap  $K_n$ , kolom ketiga menyajikan matriks *adjacency* berkaitan dengan graf lengkap  $K_n$  pada kolom kedua. Sedangkan kolom keempat menyajikan polinomial karakteristik beserta nilai *eigen*-nya.

Tabel 3.1 Polinomial Karakteristik dan Nilai *Eigen* dari Graf  $K_n$  ( $n < 8$ )

$n$	Graf	Matriks <i>Adjacency</i>	Polinomial Karakteristik, Spektrum
2		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	PK : $\lambda^2 - 1$ Spektrum : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	PK : $(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$ Spektrum : $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
4		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	PK : $(\lambda + 1)^3(\lambda - 3)$ Spektrum : $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
5		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	PK : $(\lambda + 1)^4(\lambda - 4)$ Spektrum : $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
6		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ Matriks 6x6	PK : $(\lambda + 1)^5(\lambda - 5)$ Spektrum : $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
7		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ Matriks 7x7	PK : $(\lambda + 1)^6(\lambda - 6)$ Spektrum : $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Dari hasil penelitian di atas dapat dibuat Tabel 3.2, sebagai berikut :

Tabel 3.2 RSM Graf  $n$  simpul ( $n < 8$ , diameter 1)

Banyaknya simpul ( $n$ )	2	3	4	5	6	7
RSM	1	2	3	4	5	6

### 3.1.2 Menentukan RSM dengan Studi literatur

**Teorema 3.1 [Cvetković, dkk, 1979]** Jika suatu graf terhubung memiliki sebanyak  $m$  buah nilai *eigen* yang berbeda, maka diameter ( $D$ ) dari graf tersebut memenuhi pertidaksamaan  $D \leq m - 1$ .

Bukti :

Misalkan  $G$  adalah graf terhubung yang memiliki  $m$  nilai *eigen* yang berbeda. Andaikan  $D(G) = s \geq m$ . Dari definisi diameter graf, ada suatu  $i$  dan  $j$  sedemikian elemen-elemen  $a_{ij}^{(k)}$  pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari matriks  $A^k$  untuk  $k = 1, 2, \dots, s - 1$  adalah sama dengan nol untuk  $k < s$ , dan  $a_{ij}^{(s)} \neq 0$ .

Misalkan persamaan karakteristik dari  $A$  adalah

$$\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \dots + b_m = 0$$

Akibatnya :

$$A^{m+k} + b_1A^{m+k-1} + \dots + b_mA^k = 0$$

Ambil  $k = s - m$ , sehingga diperoleh

$$A^s + b_1A^{s-1} + \dots + b_mA^{s-m} = 0 \quad (*)$$

Karena  $a_{ij}^{(k)} = 0$  untuk  $k = s - m, \dots, s - 1$ , maka persamaan (\*) menjadi

$$A^s + b_1 \cdot 0 + \dots + b_m \cdot 0 = 0$$

Mengakibatkan  $A^s = 0$  atau  $a_{ij}^{(s)} = 0$ . Ini kontradiksi dengan  $a_{ij}^{(s)} \neq 0$ .

Jadi pengandaian  $D(G) = s \geq m$  salah, haruslah  $D(G) \leq m - 1$ . □

Polinomial karakteristik graf  $K_n$  adalah  $P_{K_n}(\lambda) = (\lambda + 1)^{n-1}(\lambda - n + 1)$ .

Dari polinomial karakteristik tersebut nilai *eigen* yang dihasilkan adalah sebuah

nilai *eigen* bernilai  $(n - 1)$  dan sebanyak  $(n - 1)$  nilai *eigen* bernilai  $-1$  [Cvetković, dkk, 1979].

Mengapa demikian? Matriks *adjacency* dari graf  $K_n$  adalah suatu matriks simetri dengan setiap elemen bernilai 0 pada diagonal utama dan bernilai 1 untuk yang lain. Baris pertama dari matriks *adjacency* graf  $K_n$  adalah  $[0, 1, 1, \dots, 1]$  atau  $a_1 = 0$  dan  $a_i = a_{n-i+2}$  untuk  $i = 2, 3, \dots, n - 1$ . Sehingga matriks *adjacency* dari graf  $K_n$  adalah suatu matriks *circulant*. Karena  $1 + \omega^r + \dots + \omega^{(n-1)r} = 0$  untuk  $r \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ . Menurut Proposisi 2.2.

$$\text{Spektrum } K_n = \begin{pmatrix} n - 1 & -1 \\ 1 & n - 1 \end{pmatrix}$$

Dari studi literatur di atas diperoleh 2 hal :

Pertama : Setiap polinomial karakteristik graf  $K_n$  memiliki 2 buah nilai *eigen* yang berbeda atau  $m = 2$ . Dengan demikian menurut Teorema 3.1 maka nilai  $D$  yang memenuhi pertidaksamaan  $D \leq m - 1$  untuk  $m = 2$  adalah 1. Hal ini menegaskan bahwa diameter setiap graf  $K_n$  adalah 1.

Kedua : Karena setiap polinomial karakteristik graf  $K_n$  memiliki 2 buah nilai *eigen* yang berbeda yaitu  $(n - 1)$  dan  $-1$ , maka radius spektral graf  $K_n$  adalah  $(n - 1)$ . Karena graf  $n$  simpul dengan diameter 1, adalah suatu graf lengkap  $K_n$  dan tidak ada bentuk yang lain, maka RSM dari suatu graf  $n$  simpul dengan diameter 1 adalah radius spektral dari graf lengkap  $K_n$  yaitu  $(n - 1)$ .

Dari hasil studi literatur tersebut maka Tabel 3.1 dapat dilengkapi menjadi Tabel 3.3, berikut :

Tabel 3.3 RSM Graf  $n$  simpul (diameter 1)

Banyaknya simpul ( $n$ )	2	3	4	5	6	...	$n$
RSM	1	2	3	4	5	...	$(n - 1)$

### 3.2 RSM Graf $n$ Simpul dengan Diameter 2 dan 3

Untuk graf terhubung berdiameter 2 tidak mungkin terjadi pada graf dengan  $n = 2$ . Diameter 2 terjadi pada  $n = 3$  atau lebih. Demikian juga graf dengan diameter 3 terjadi pada graf dengan banyaknya simpul  $n = 4$  atau lebih.

### 3.2.1 RSM Graf $n = 3$ dengan Diameter 2

Perhatikan graf 3 simpul ( $n = 3$ ) dengan diameter 2 pada Gambar 3.1 berikut ini.



Gambar 3.1 Graf  $P_2$

Polinomial karakteristik dari graf Gambar 3.1 adalah  $\lambda^3 - 2\lambda$ . Polinomial karakteristik tersebut memberikan nilai *eigen*  $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$ . Karena graf  $P_2$  merupakan satu-satunya graf  $n = 3$ , dengan diameter 2, maka  $\sqrt{2}$  merupakan RSM. Jadi RSM dari graf  $n = 3$  dengan diameter 2 adalah  $\sqrt{2}$ .

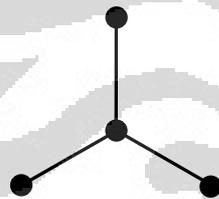
### 3.2.2 RSM Graf $n = 4$ dengan Diameter 2 dan 3

Untuk mendapatkan RSM dari graf  $n = 4$  dengan diameter 2 dan 3, penulis melakukan riset dengan cara mencari seluruh kemungkinan polinomial karakteristik mulai dari graf 4 simpul dengan banyaknya busur 5, kemudian 4 dan 3. Karena untuk banyaknya busur 2, graf 4 simpul bukanlah graf terhubung. Dari riset yang dilakukan penulis diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 3.4 Radius Spektral ( $\rho$ ) Graf 4 simpul

Banyak Busur	$D(G)$	Polinomial Karakteristik	Nilai Eigen	$\rho$
5	2	$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$	2,561; 0; -1; -1,561	2,561
4	2	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$	-1,481; -1; 0,311; 2,170	2,170
4	2	$\lambda^4 - 4\lambda^2$	2; 0; 0; -2	2
3	2	$\lambda^4 - 3\lambda^2$	0, 0, $-\sqrt{3}$ , $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
3	3	$\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$	-1, 618; -0,618; 0,618; 0,618	1,618

Berdasarkan Tabel 3.4 maka RSM dari graf 4 simpul dengan diameter 2 adalah  $\sqrt{3}$  yang terjadi pada graf  $K_{1,3}$  (Gambar 3.2). Sedangkan RSM untuk graf 4 simpul dengan diameter 3 adalah 1,618 yang terjadi pada graf  $P_4$  (Gambar 3.3).



Gambar 3.2 Graf  $K_{1,3}$



Gambar 3.3 Graf  $P_4$

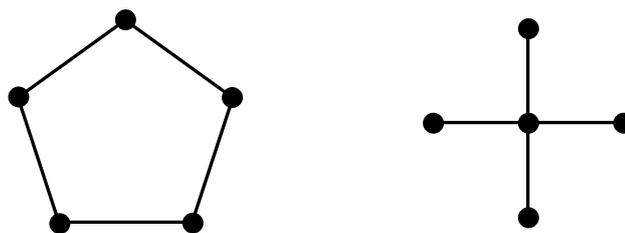
### 3.2.3 RSM Graf $n = 5$ dengan Diameter 2 dan 3

Untuk mendapatkan RSM graf  $n = 5$  dengan diameter 2 dan 3, penulis melakukan riset dengan cara mencari seluruh kemungkinan polinomial karakteristik mulai dari graf 5 simpul dengan banyaknya busur 9, kemudian 8 sampai dengan banyaknya busur 4, dengan hasil sebagai berikut :

Tabel 3.5 Radius Spektral ( $\rho$ ) Graf 5 simpul

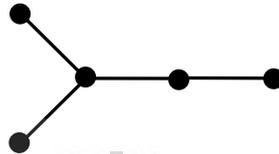
Banyak Busur	$D(G)$	Polinomial Karakteristik	Nilai Eigen	$\rho$
9	2	$\lambda^5 - 9\lambda^3 - 14\lambda^2 - 6\lambda$	0; -1; -1; -1,645; 3,645	3,645
8	2	$\lambda^5 - 8\lambda^3 - 10\lambda^2 - \lambda + 2$	3,32; 0,38; -1; -1; -1,68	3,32
8	2	$\lambda^5 - 8\lambda^3 - 8\lambda^2$	-2; -1,236; 0; 0; 3,236	2,236
7	2	$\lambda^5 - 7\lambda^3 - 8\lambda^2 + 2$	3,09; 0,43; -1; -1; -1,51	3,09
7	2	$\lambda^5 - 7\lambda^3 - 6\lambda^2$	3; 0; 0; -1; -2	3
7	2	$\lambda^5 - 7\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 2$	2,94; 0,62; -0,46; -1,47; -1,62	2,94
7	2	$\lambda^5 - 7\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda$	2,86; 0,32; 0; -1; -2,18	2,86
6	2	$\lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda$	2,69; 0,33; 0; -1,27; -1,75	2,69
6	2	$\lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$	2,64; 0,72; -0,59; -1; -1,78	2,64
6	2	$\lambda^5 - 6\lambda^3$	$\sqrt{6}$ ; 0; 0; 0; $-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$
6	2	$\lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda + 4$	2,56; 1; -1; -1; -1,56	2,56
6	2	$\lambda^5 - 6\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda$	2,48; 0,69; 0; -1,17; -2	2,48
5	2	$\lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$	2,34; 0,47; 0; -1; -1,81	2,34
5	2	$\lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda$	2,30; 0,62; 0; -1,30; -1,61	2,30
5	2	$\lambda^5 - 5\lambda^3 + 2\lambda$	2,14; 0,66; 0; -0,66; -2,14	2,14
5	2	$\lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$	2,21; 1; 0; -0,54; -1; -1,68	2,21
5	2	$\lambda^5 - 5\lambda^3 + 5\lambda - 2$	2; 0,62; 0,62; -1,62; -1,62	2
4	2	$\lambda^5 - 4\lambda^3$	2; 0; 0; 0; -2	2
4	3	$\lambda^5 - 4\lambda^3 + 2\lambda$	1,84; 0,76; 0; -0,76; -1,84	1,84
4	4	$\lambda^5 - 4\lambda^3 + 3\lambda$	$\sqrt{3}$ ; 1; 0; -1; $-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

Berdasarkan Tabel 3.5, maka RSM untuk graf 5 simpul dengan diameter 2 adalah 2 yang terjadi pada 2 graf, yaitu graf  $C_5$  dan graf  $K_{1,4}$  (Gambar 3.4).



Gambar 3.4 Graf  $C_5$  dan Graf  $K_{1,4}$

RSM untuk graf 5 simpul dengan diameter 3 adalah  $\sqrt{3}$ . Yaitu terjadi pada graf  $D_5$  (Gambar 3.5).



Gambar 3.5 Graf  $D_5$

### 3.2.4 RSM Graf $n = 6$ dengan Diameter 2 dan 3

Untuk mendapatkan RSM graf 6 simpul dengan diameter 2 dan 3 diperlukan Teorema 3.2 dan Teorema 3.7.

**Teorema 3.2 [van Dam & Kooij, 2007]** Semua graf terhubung  $n$  simpul ( $n \geq 5$ ) dan diameter  $D = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , RSM-nya  $\rho = 2$ . Untuk  $n \geq 7$ , RSM yang demikian hanya terjadi pada graf lingkaran  $C_n$ . Untuk  $n = 5$ , RSM yang demikian terjadi pada 2 graf, yaitu pada graf lingkaran  $C_5$  dan graf bintang (*star*)  $K_{1,4} = \tilde{D}_4$ . Untuk  $n = 6$ , RSM yang demikian terjadi pada 2 graf, yaitu pada graf lingkaran  $C_6$  dan graf  $\tilde{D}_5$ .

Untuk membuktikan Teorema 3.2 diperlukan Lema 3.3 dan Lema 3.4 berikut ini.

**Lema 3.3 [van Dam & Kooij, 2007]** Hanya graf-graf terhubung berikut yang memiliki radius spektral kurang dari 2, yaitu lintasan  $P_n$ , graf  $D_n$ , dan graf  $E_6, E_7$  serta  $E_8$ .

**Lema 3.4 [van Dam & Kooij, 2007]** Hanya graf-graf terhubung berikut yang memiliki radius spektral sama dengan 2, yaitu graf lingkaran  $C_n$ , graf  $\tilde{D}_{n-1}$  dan graf  $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7$  serta  $\tilde{E}_8$ .

Bukti Teorema 3.2 :

Semua graf terhubung  $n$  simpul ( $n \geq 5$ ) dan diameter  $D = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , RSM-nya  $\rho = 2$ . Dari Lemma 3.3 diperoleh hanya graf  $P_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$  ( $n=6,7,8$ ) yang memiliki radius spektral kurang dari 2. Sedangkan diameter dari graf-graf tersebut berturut-turut adalah  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-2$ . Diameter-diameter tersebut yang nilainya sama dengan  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  adalah untuk nilai  $n = 2, 3$  dan  $4$ . Sehingga menurut Lemma 3.4 Semua graf terhubung  $n$  simpul ( $n \geq 5$ ) dan diameter  $D = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , RSM-nya  $\rho = 2$ . Untuk  $n \geq 7$ , RSM yang demikian hanya terjadi pada graf lingkaran  $C_n$ . Hal ini terjadi berdasarkan Lemma 3.4 dan diameter dari  $C_n$  adalah  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Untuk  $n = 5$ , RSM yang demikian terjadi pada 2 graf yaitu pada graf lingkaran  $C_5$  dan graf bintang  $K_{1,4} = \tilde{D}_4$ . Hal ini berdasarkan Lemma 3.4 dan diameter dari  $C_5$  dan  $K_{1,4} = \tilde{D}_4$  adalah  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Untuk  $n = 6$ , RSM yang demikian terjadi pada 2 graf yaitu pada graf lingkaran  $C_6$  dan graf  $\tilde{D}_5$ . Hal ini berdasarkan Lemma 3.4 dan diameter dari graf  $C_6$  dan  $\tilde{D}_5$  adalah  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .  $\square$

Lema berikut diambil dari Lemma 11 [van Dam & Kooij, 2007] dan disesuaikan untuk  $n < 8$ .

**Lema 3.5** Misalkan  $G$  adalah sebuah graf dengan diameter dua pada himpunan simpul  $N$  yang terdiri dari  $n$  simpul, dengan derajat  $d_v$ ,  $v \in N$ . Maka  $n-1 \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in N} d_v^2$ , persamaan hanya untuk graf bintang  $K_{1,n-1}$ , graf lingkaran  $C_5$ .

Bukti :

Kita hitung banyaknya lintasan terinduksi dari 2 *links* (pada 3 simpul) dalam 2 cara yang berbeda. Pertama, karena diameter dari graf adalah 2, maka tiap pasang simpul yang tidak terhubung paling tidak satu, sehingga lintasan terinduksi. Banyaknya lintasan terinduksi yang panjangnya 2 paling tidak  $\frac{n(n-1)}{2} - e$ , di mana  $e$  banyaknya *links* pada graf. Kedua, setiap simpul  $v$  dapat menjadi simpul tengah dari paling banyak  $\frac{d_v(d_v-1)}{2}$  lintasan terinduksi dari 2 *links*, sehingga terdapat

paling banyak  $\sum_{v \in N} \frac{d_v(d_v-1)}{2}$  lintasan terinduksi. Diklaim bahwa pertidaksamaan di atas berlaku. Persamaan berlaku hanya jika graf tanpa *triangle* dan setiap 2 simpul tak terhubung memiliki tetangga bersama, dan ini kasus pada graf *stated*. Perhatikan sebuah graf 2 simpul tak terhubung. Simpul-simpul tersebut harus memiliki banyak tetangga yang sama, karena tetangga dari sebuah simpul merupakan tetangga dari simpul yang lain. Sehingga graf tersebut adalah graf teratur atau komplemen dari graf tersebut adalah graf tidak terhubung. Pada kondisi terakhir terjadi pada suatu graf bintang  $K_{1,n-1}$  yang merupakan graf (teratur) dengan diameter 2. Untuk graf *Moore* yaitu graf  $k$ -teratur (memiliki radius spektral  $k$ ) pada  $k^2+1$  simpul dengan diameter 2, yang sudah ditunjukkan oleh A.J. Hoffman, R.R. Singleton pada tahun 1960 bahwa  $k \in \{2, 3, 7, 57\}$ . Pada kasus  $k = 2$ , terealisasikan pada graf  $C_5$ .  $\square$

**Lema 3.6 [van Dam & Kooij, 2007]** Misalkan  $G$  adalah sebuah graf pada himpunan simpul  $N$  yang terdiri dari  $n$  simpul, dengan derajat  $d_v, v \in N$  dan radius spektral  $\rho$ . Maka  $\rho^2 \geq \frac{1}{n} \sum_{v \in N} d_v^2$ . Jika  $G$  adalah graf terhubung maka pertidaksamaan tersebut bernilai sama jika dan hanya jika  $G$  adalah graf teratur atau graf *bipartite* dengan derajat tetap pada tiap 2 bagiannya.

Teorema 3.7 diadaptasi dari Teorema 10 dari [van Dam & Kooij, 2007] disesuaikan untuk  $n < 8$ .

**Teorema 3.7** Untuk radius spektral  $\rho$  dari sebuah graf dengan diameter dua pada graf  $n$  simpul kita memiliki  $\rho \geq \sqrt{n-1}$ , di mana pertidaksamaan tersebut bernilai sama hanya untuk graf  $K_{1,n-1}$  dan graf  $C_5$ .

Bukti :

Berdasarkan Lema 3.5 Untuk pertidaksamaan  $n-1 \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in N} d_v^2$  (khusus untuk  $n < 8$ ) persamaan terjadi hanya untuk graf bintang  $K_{1,n-1}$  dan graf lingkaran  $C_5$ . Akan ditunjukkan bahwa kedua graf tersebut memiliki  $\rho = \sqrt{n-1}$ . Berdasarkan

Lemma 3.6 graf  $C_5$  dan graf  $K_{1,n-1}$  keduanya adalah graf teratur atau graf *bipartite* dengan derajat tetap pada tiap 2 bagiannya. Sehingga perhitungan radius spektralnya memenuhi persamaan

$$\rho^2 = \frac{1}{n} \sum_{v \in N} d_v^2$$

Untuk  $C_5$ ,

$$\rho^2 = \frac{1}{5}(2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2) = \frac{1}{5}(20) = 4$$

$$\rho = \sqrt{4} = \sqrt{5-1}$$

Untuk  $K_{1,n-1}$ ,

$$\rho^2 = \frac{1}{n}((n-1) + (n-1)^2) = \frac{1}{n}(n(n-1)) = n-1$$

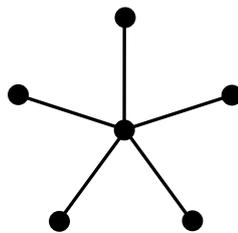
$$\rho = \sqrt{n-1}$$

Jadi radius spektral dari graf  $C_5$  dan graf  $K_{1,n-1}$  adalah  $\sqrt{n-1}$  yang merupakan RSM untuk graf berdiameter 2. □

Pembahasan untuk graf 6 simpul dibagi menjadi 2 bagian. Bagian pertama untuk graf 6 simpul dengan diameter 2 dan bagian kedua untuk graf 6 simpul dengan diameter 3.

### 3.2.4.1 RSM Graf $n = 6$ Diameter 2

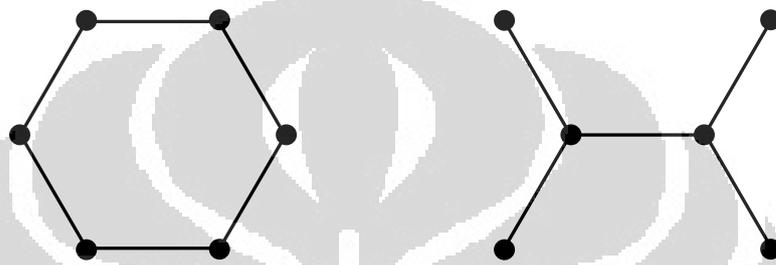
Berdasarkan Teorema 3.7 maka graf  $n = 6$  simpul diameter 2 memiliki RSM pada graf  $K_{1,5}$  (Gambar 3.6). Dengan nilai RSM  $\sqrt{n-1} = \sqrt{6-1} = \sqrt{5}$ ,



Gambar 3.6 Graf  $K_{1,5}$

### 3.2.4.2 RSM Graf $n = 6$ Diameter 3

Berdasarkan Teorema 3.2 maka graf  $n = 6$  simpul memenuhi ketentuan sebagai graf terhubung  $n$  simpul ( $n \geq 5$ ) dan diameter  $D = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{6}{2} \rfloor = 3$ . Sehingga RSM untuk graf  $n = 6$  dengan diameter 3 bernilai 2. Dimana RSM yang dimaksud terjadi pada 2 graf yaitu pada graf  $C_6$  dan graf  $\tilde{D}_5$  (Gambar 3.7).



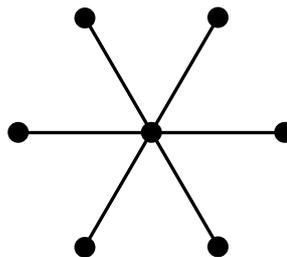
Gambar 3.7 Graf  $C_6$  dan Graf  $\tilde{D}_5$

### 3.2.5 RSM Graf $n = 7$ Diameter 2 dan 3

Sebagaimana pembahasan untuk graf 6 simpul dibagi menjadi 2 bagian, demikian pula untuk graf 7 simpul. Bagian pertama untuk graf 7 simpul dengan diameter 2 dan bagian kedua untuk graf 7 simpul dengan diameter 3.

#### 3.2.5.1 RSM Graf $n = 7$ Diameter 2

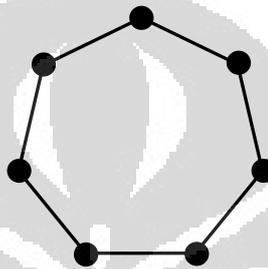
Berdasarkan Teorema 3.7 maka graf  $n = 7$  simpul diameter 2 memiliki RSM pada graf  $K_{1,6}$  (Gambar 3.8) dengan nilai RSM  $\sqrt{n-1} = \sqrt{7-1} = \sqrt{6}$ ,



Gambar 3.8 Graf  $K_{1,6}$

### 3.2.5.2 RSM Graf $n = 7$ Diameter 3

Berdasarkan Teorema 3.2 maka graf  $n = 7$  simpul memenuhi ketentuan sebagai graf terhubung  $n$  simpul ( $n \geq 5$ ) dan diameter  $D = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3$ . Sehingga RSM untuk graf  $n = 7$  dengan diameter 3 bernilai 2. Dimana RSM yang dimaksud terjadi pada graf  $C_7$ .



Gambar 3.9 Graf  $C_7$

### 3.2 Hasil Penelitian

Dari pembahasan RSM diperoleh hasil :

1. RSM dari graf dengan diameter  $D < 4$ .
2. Graf-graf dengan diameter  $D < 4$  penghasil RSM.

Seperti yang terlihat pada Tabel 3.6 dan Tabel 3.7 berikut ini.

Tabel 3.6 RSM dari Graf dengan Diameter  $D < 4$ .

$D$	Banyaknya Simpul ( $n$ )							
	2	3	4	5	6	7	...	$n$
1	1	2	3	4	5	6	...	$n-1$
2	-	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$		
3	-	-	1,61	1,84	2	2		

Tabel 3.7 Graf-graf dengan Diameter  $D < 4$  Penghasil RSM.

$D$	Banyaknya Simpul ( $n$ )							
	2	3	4	5	6	7	...	$n$
1	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	...	$K_n$
2	-	$P_3$	$K_{1,3}$	$K_{1,4}, C_5$	$K_{1,5}$	$K_{1,6}$		
3	-	-	$P_4$	$D_5$	$C_6, \tilde{D}_5$	$C_7$		



## **BAB IV**

### **PENUTUP**

#### **4.1 Kesimpulan**

Kesimpulan yang dapat diambil dari tesis ini adalah sebagai berikut :

1. Penelitian untuk menentukan RSM secara langsung dengan mencari seluruh kemungkinan graf  $n$  simpul hanya dapat dilakukan untuk nilai  $n$  yang kecil, misalnya  $n < 6$ . Sebab untuk  $n$  lebih besar dari 6 akan memberikan kemungkinan yang banyak sekali sehingga memerlukan waktu yang sangat lama.
2. RSM untuk graf  $n$  simpul dengan diameter 1 adalah  $n - 1$ .
3. RSM untuk graf  $n$  simpul dengan diameter 2 adalah  $\sqrt{n - 1}$ .

#### **4.1 Saran**

Untuk mendapatkan RSM dari graf  $n$  simpul untuk  $n > 5$  penulis menyarankan untuk menggunakan studi literatur, karena untuk melakukan penelitian langsung akan memerlukan waktu yang cukup lama oleh karena banyaknya kemungkinan graf yang terjadi.

## DAFTAR REFERENSI

- Brouwer, A. E., Haemers, W. H., *Spectra of Graphs*,  
<http://www.homepages.cwi.nl/~aeb/math/ipm.pdf> diunduh pada tanggal  
17 Desember 2010
- Biggs, N., (1993). *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press.
- Cvetković, D.M., *Applications of Graph Spectra, An Introduction to the  
Literature*. <http://www.elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/zr/21/n021p007> .  
diunduh pada tanggal 19 Mei 2010
- Cvetković, D.M., Doob, M., Sachs, H., (1979) *Spectra of Graphs, Theory and  
Applications*, Academic Press, Inc.
- van Dam, E.R., and Kooij, R. E., *The minimal spectral radius of graphs with a  
given diameter*.  
<http://www.citeseerλ.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.108.7938>.  
diunduh pada tanggal 3 Maret 2011
- Harary, F., (1969). *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- West, B. D., (2001). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall
- Wang, Y., Chakrabarti, D., Wang, C. and Faloutsos, C., *Epidemic spreading in  
real networks: An eigenvalue viewpoint*, 22nd Symposium in Reliable  
Distributed Computing, Florence Italy, Oct. 6-8, 2003.  
[http://www.cs.cmu.edu/~deepay/my\\_www/papers/srds03.pdf](http://www.cs.cmu.edu/~deepay/my_www/papers/srds03.pdf) diunduh  
pada tanggal 20 Desember 2010