UNIVERSITAS INDONESIA

ANALISIS TITIK TETAP *SET- VALUED FUNCTION* MENGGUNAKAN METRIK HAUSDORFF

TESIS

SAGITA CHAROLINA SIHOMBING
1006786266

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK

JULI 2012

UNIVERSITAS INDONESIA

ANALISIS TITIK TETAP *SET- VALUED FUNCTION* MENGGUNAKAN METRIK HAUSDORFF

TESIS
Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

SAGITA CHAROLINA SIHOMBING
1006786266

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2012

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,

semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	**: Sagita Charolina Sihombing**
NPM	**: 1006786266**
Tanda Tangan	**:**
Tanggal	**: Juli 2012**

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh	:
Nama	: Sagita Charolina Sihombing
NPM	: 1006786266
Program Studi	: Magister Matematika
Judul Tesis	: Analisis Titik Tetap *Set-Valued Function* Menggunakan Metrik Hausdorff

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister pada Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I	:Prof. Dr. Belawati H Widjaja	( )
Pembimbing II	:Arie Wibowo, S.Si., M.Si	( )
Penguji	:Prof. Dr. Belawati H Widjaja	( )
Penguji	:Dr. Sri Mardiyati, M.Kom	( )
Penguji	:Dr. Kiki Ariyanti S, M.Si	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 10 Juli 2012

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Pengasih, yang tak henti-hentinya mencurahkan kasih, rahmat dan memberikan kemampuan kepada penulis dalam mengerjakan tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Matematika Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia. Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan tesis ini, sangatlah sulit untuk menyelesaikan tesis ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Ibu Prof. Dr. Belawati H Widjaja selaku pembimbing I yang telah menyediakan waktu, tenaga dan pikiran dalam mengarahkan penulis dalam penyusunan tesis ini;
(2) Bapak Arie Wibowo, M.Si selaku pembimbing II yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan penulis dalam penyusunan tesis ini;
(3) Bapak Prof. Dr. Djati Kerami selaku ketua Program Studi Magister Matematika yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis selama menyelesaikan proses studi;
(4) Bapak Dr. rer. nat. Hendri Murfi selaku pembimbing akademik, ibu Rahmi Rusin S.Si, M.Sc.Tech, selaku Sekretaris Departemen Matematika, dan ibu Dr. Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah membantu dalam proses penyelesaian tesis ini;
(5) Seluruh staf pengajar di Departemen Matematika FMIPA UI, terima kasih atas segala ilmu yang diberikan;
(6) Seluruh karyawan di Departemen Matematika FMIPA UI, terima kasih atas segala bantuan yang telah diberikan kepada penulis;
(7) Orang tua tercinta S. Sihombing dan H. Hutapea yang selalu memberikan nasihat, motivasi, dukungan, doa, kasih sayang kepada penulis, juga kepada adik-adik tersayang (Dina, Riris, Indra).

(8) Rekan-rekan mahasiswa S2 Matematika angkatan 2009, 2010 dan 2011 atas kebersamaan selama ini, terutama Teteh Siti, Mbak Endang Retno, Mbak Lia, Mbak Fathin, Mbak Lisa, Ruth Endaria;

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan tesis ini. Tuhan mengasihi dan memberkati kita semua. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

Depok, 10 Juli 2012

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Sagita Charolina Sihombing
NPM	: 1006786032
Program Studi	: Magister Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (***Non-exclusive Royalty-Free Right***) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Analisis Titik Tetap *Set-Valued Function* Menggunakan Metrik Hausdorff. Dengan Hak Bebas Royalti Noneks-klusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 10 Juli 2012

Yang menyatakan

(Sagita Charolina Sihombing)

ABSTRAK

Nama : Sagita Charolina Sihombing
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Analisis Titik Tetap *Set-Valued Function* Menggunakan Metrik Hausdorff

Set-valued function (fungsi bernilai himpunan) adalah salah satu jenis fungsi yang banyak diteliti oleh para ahli dewasa ini. Salah satu sifat pemetaan yang menjamin titik tetap pada *set-valued function* yang sudah dikenal adalah sifat kontraktif. Pada tesis ini, dikaji eksistensi titik tetap *set-valued function* dengan sifat pemetaan *C*-kontraktif menggunakan konsep metrik Hausorff. Dari hasil penelitian didapat bahwa eksistensi titik tetap *set-valued function* dengan sifat pemetaan *C*-kontraktif masih dapat dipertahankan.

Kata kunci : titik tetap, *set-valued function*, pemetaan kontraktif
xi+43 halaman : 2 gambar; 2 lampiran
Daftar Pustaka : 12 (1981-2011)

ABSTRACT

Name : Sagita Charolina Sihombing
Study Program : Magister of Mathematics
Title : Analysis Fixed Point of Set-Valued Function Using Hausdorff Metric.

Set-valued function is a kind of function that has an improvement in research. One kind of a famous mapping that guarantee a fixed point in a set-valued function is contractive mapping. In this thesis an analyse of fixed point of set-valued function with C-contractive mapping using Hausdorff metric is done. From the research, the existence of fixed point in a set-valued function with C-contractive mapping still be remained.

Key Words : fixed point, *set-valued function,* contractive mapping
xi+43 pages : 2 pictures; 2 appendix
Bibliography : 12 (1981-2011)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Perkembangan zaman dan teknologi tidak terlepas dari perkembangan ilmu pengetahuan khususnya konsep-konsep matematis. Dalam beberapa dekade terakhir ini banyak para ahli yang mengembangkan prinsip titik tetap untuk memecahkan permasalahan matematis. Selain itu, titik tetap juga mempunyai peranan yang penting dalam analisis fungsional. Titik $x \in X$ disebut titik tetap dari suatu fungsi $f: X \to X$ jika $f(x) = x$. (Istrătescu, 1981)

Set-valued function (fungsi bernilai himpunan) adalah salah satu jenis fungsi yang ditemukan dalam banyak aplikasi, sebagai contoh dalam matematika ekonomi untuk menentukan kesetimbangan (ekuilibrium) sistem ekonomi. Prinsip dari *set-valued function* lahir dari pengembangan prinsip suatu fungsi. Pada suatu fungsi terdapat jenis pemetaan yang terkenal yaitu pemetaan kontraktif atau yang dikenal dengan *Banach contraction principle* (1922). Pemetaan ini menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada suatu ruang metrik. (Widder, 2009)

Set-valued function $T: X \to \wp(X)$ dari suatu ruang metrik (X, d) didefinisikan sebagai pemetaan dari X ke $\wp(X)$ dengan $\wp(X)$ adalah himpunan semua himpunan bagian dari X. Selanjutnya, suatu titik x pada suatu ruang metrik disebut titik tetap untuk suatu *set-valued function* $T: X \to \wp(X)$ jika $x \in T(x)$. (Istrătescu, 1981)

Terdapat beberapa metode untuk menghitung jarak antara dua himpunan diantaranya dengan menggunakan jarak Hausdorff yang diperkenalkan oleh Felix Hausdorff (1962) dan *w-distance* yang diperkenalkan oleh Kada (1996).

Pada 1969, Nadler mengembangkan *Banach contraction principle* (prinsip kontraktif) dari suatu fungsi menjadi *set-valued function* $T: X \to \wp(X)$. Pada papernya, Nadler menggunakan konsep metrik Hausdorff untuk menghitung jarak dari suatu himpunan bagian ke himpunan bagian lainnya. Metrik Hausdorff diperoleh dari perluasan fungsi jarak Hausdorff dalam sebuah ruang metrik (Butt, 2010). Nadler membuktikan bahwa *set-valued function* yang memenuhi prinsip kontraktif memiliki suatu titik tetap.

Pada perkembangannya, pemetaan kontraktif mengalami perluasan. Banyak ahli yang membahas titik tetap untuk suatu fungsi berdasarkan prinsip kontraktif diantaranya Kannan (1969) dan Chatterjea (1972). Pemetaan yang diperkenalkan oleh Kannan disebut dengan pemetaan Kannan dan pemetaan yang diperkenalkan oleh Chatterjea disebut pemetaan *C*-kontraktif. Kedua pemetaan ini menjamin eksistensi titik tetap suatu fungsi pada suatu ruang metrik.

1.2. Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Apabila diberikan suatu *set-valued function* pada suatu ruang metrik, dapatkah sifat pemetaan *C*-kontraktif menjelaskan eksistensi titik tetap *set-valued function* menggunakan konsep metrik Hausdorff?

1.3.Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

Menunjukkan apakah titik tetap *set-valued function* pada suatu ruang metrik dapat dijelaskan dengan sifat pemetaan C-kontraktif menggunakan konsep metrik Hausdorff.

1.4. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara literatur yaitu dengan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, jurnal, makalah, tesis ataupun artikel yang relevan dengan titik tetap pada *set-valued function* yang memenuhi sifat pemetaan kontraktif, kemudian dikaji titik tetap pada *set-valued function* dengan sifat pemetaan *C*-kontraktif.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab 2 ini akan dijelaskan mengenai konsep dasar yang akan digunakan dalam menganalisis titik tetap *set-valued function* dengan menggunakan metrik Hausdorff diantaranya ruang metrik, ruang metrik lengkap, himpunan buka dan himpunan tutup di suatu ruang metrik serta barisan konvergen dan barisan Cauchy. Selanjutnya dibahas pula pengertian titik tetap dari suatu fungsi di ruang metrik.

2.1 Ruang Metrik

Sistem bilangan real $\mathbb{R}$ mempunyai dua tipe sifat. Tipe yang pertama terdiri dari aljabar, yang berhubungan dengan penjumlahan, perkalian dan lain sebagainya. Tipe yang lain terdiri dari sifat-sifat yang berhubungan dengan jarak antar bilangan. Sifat yang terakhir ini disebut metrik. Metrik pada bilangan real, $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$d(x,y) = |x-y| \text{ dengan } x,y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Jika $X = \mathbb{R}^2$ dengan koordinat $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ metrik dapat didefinisikan sebagai:

a) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ atau
b) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ atau
c) $d_\infty(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ atau
d) $d_p(x,y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$ untuk $p \geq 1, p \in \mathbb{Q}$

Adapun tujuan dari sub bab ini adalah mempelajari sifat-sifat metrik pada ruang yang lebih umum. Berikut diberikan definisi dari ruang metrik.

Definisi 2.1 Misalkan X adalah sebuah himpunan yang tak kosong. Suatu fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$

4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x,y,z \in X$

Himpunan X bersama dengan metrik d disebut ruang metrik dan ditulis (X,d). (Shirali & Vasudeva, 2006)

Contoh 2.1

$\mathbb{Q}$: Himpunan bilangan rasional.

Fungsi $d: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $d(x,y) = |x-y|$ adalah metrik pada $\mathbb{Q}$, sehingga $(\mathbb{Q}, d)$ adalah ruang metrik.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x,y \in \mathbb{Q}$.

   Ambil $x,y \in \mathbb{Q}$, maka $d(x,y) = |x-y| \geq 0$

   Jadi, $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x,y \in \mathbb{Q}$.

2. Akan ditunjukkan $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

   $(\Leftarrow)$ Jika $d(x,y) = 0$ maka $x = y$

   Ambil $x,y \in \mathbb{Q}$,

   $d(x,y) = |x-y| = 0$ maka $x = y$

   $(\Rightarrow)$ Jika $x = y$ maka $d(x,y) = 0$

   Ambil $x,y \in \mathbb{Q}$, dengan $x = y$, maka

   $d(x,y) = |x-y| = 0$

   Jadi, $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

3. Akan ditunjukkan $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x,y \in \mathbb{Q}$

   Ambil $x,y \in \mathbb{Q}$, maka

   $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

   Jadi, $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x,y \in \mathbb{Q}$

4. Akan ditunjukkan $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x,y,z \in \mathbb{Q}$

   Ambil $x,y,z \in \mathbb{Q}$, maka

   $d(x,y) = |x-y|$

   $\qquad\quad = |(x-y) + (y-z)|$

$$\leq |x-y| + |y-z|$$
$$= d(x,y) + d(y,z)$$

Jadi, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Q}$

Dari 1, 2, 3, dan 4 terbukti bahwa $(\mathbb{Q}, d)$ adalah ruang metrik. ■

2.1.1 Himpunan Buka dan Himpunan Tutup

Berikut ini akan diberikan definisi dari himpunan buka dan himpunan tutup di suatu ruang metrik (X, d).

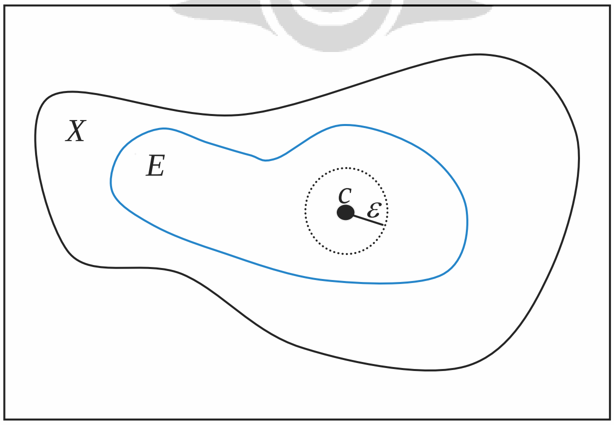
Definisi 2.2 Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Suatu bola buka $B(a, r)$ dengan pusat a dan jari-jari r di X adalah sebuah himpunan yang didefinisikan sebagai

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\} \tag{2.2}$$

dimana $a \in X$ dan $r \in \mathbb{R}$ dengan $r > 0$.
(Kreyszig, 1989).

Definisi 2.3 Misalkan $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$. Suatu titik $c \in E$ dikatakan titik dalam (*interior point*) dari E jika terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $B(c, \varepsilon) \subseteq E$.
(Kreyszig, 1989).

Definisi 2.4 Suatu himpunan bagian $E \subseteq X$ dikatakan buka di himpunan X jika setiap titik di E adalah titik dalam di E. (Kreyszig, 1989)



Gambar 2.1 Ilustrasi titik dalam dari E

Definisi 2.5 Misalkan bahwa $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$.

1. Suatu titik $c \in X$ dikatakan titik akumulasi (*accumulation point*) dari E jika

$$\forall \varepsilon > 0: (B(c,\varepsilon)\backslash\{c\}) \cap E \neq \emptyset \tag{2.3}$$

   Himpunan semua titik akumulasi dari E dinotasikan dengan E'.

2. E beserta semua titik akumulasinya, dinotasikan dengan $cl(E)$ didefinisikan sebagai

$$cl(E) = E \cup E' \tag{2.4}$$

3. Suatu titik $c \in X$ dikatakan titik terisolasi (*isolated point*) dari E jika bukan merupakan titik akumulasi dari E.

(Kreyszig, 1989)

Proposisi 2.6 Misalkan E adalah himpunan bagian dari suatu ruang metrik (X,d). Maka

i. $E \subset cl(E)$
ii. $cl(E)$ adalah himpunan bagian tertutup
iii. E adalah himpunan bagian tertutup jika dan hanya jika $E = cl(E)$

(Gelutu, 2006)

Definisi 2.7 Misalkan (X,d) adalah suatu ruang metrik dan $E \subseteq X$. Himpunan bagian E dikatakan tertutup jika dan hanya jika $X\backslash E$ adalah terbuka.

(Gelutu, 2006)

Teorema 2.8 Misalkan (X,d) adalah suatu ruang metrik dan E adalah suatu himpunan berhingga tak kosong dari X. Maka setiap titik di E adalah titik terisolasi di E.

(O'Searcoid, 2005)

2.1.2 Barisan dan Kekonvergenan Barisan

Konsep tentang kekonvergenan suatu barisan di ruang metrik (X,d) sangat diperlukan untuk menganalisis titik tetap dari suatu fungsi. Di sini akan diberikan definisi barisan dan konvergensi barisan di suatu ruang metrik (X,d).

Definisi 2.9 Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Suatu barisan dari titik-titik di X adalah suatu fungsi $f: \mathbb{N} \to X$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n \in X$. Suku-suku x_n di X merupakan barisan titik di X dan dinotasikan dengan (x_n). (Shirali & Vasudeva, 2006)

Definisi 2.10 Barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni d(x_n, x) < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \tag{2.5}$$

ditulis $x_n \to x$ dan x disebut sebagai limit dari barisan (x_n), $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. (Gelutu, 2006)

Contoh 2.2

Misalkan $X = [0,1]$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$. Maka barisan (x_n) yang didefinisikan oleh $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik (X, d) konvergen ke 0.

Bukti.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka menurut *archimedian property* terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Oleh karena itu, jika $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \tag{2.6}$$

Ini menunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen di X. ■

Lemma 2.11 Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan misalkan A adalah himpunan bagian tertutup dari X. Jika (x_n) konvergen ke x dan $x_n \in A$ untuk semua n, maka $x \in A$. (Barich, 2011)

2.1.3 Ruang Metrik Lengkap

Sebelum membahas tentang ruang metrik lengkap, berikut ini akan dijelaskan terlebih dahulu tentang barisan Cauchy di suatu ruang metrik.

Definisi 2.12 Barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \ \forall n, m \geq n_0 \tag{2.7}$$

(Shirali & Vasudeva, 2006)

Teorema 2.13 Setiap barisan yang konvergen dalam ruang metrik (X, d) merupakan barisan Cauchy. (Shirali & Vasudeva, 2006)

Bukti.

Misalkan (x_n) adalah barisan dalam ruang metrik (X, d), dan misalkan $x \in X$ sedemikian sehingga $x_n \to x$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Ambil $m \geq n_0$, maka juga berlaku $d(x_m,\ x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sehingga untuk $m, n \geq n_0$ berlaku pertidaksamaan segitiga

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{2.8}$$

Dengan demikian, (x_n) adalah barisan Cauchy. ∎

Pada Teorema 2.13 dijelaskan bahwa di suatu ruang metrik, barisan konvergen merupakan barisan Cauchy. Secara umum, sifat sebaliknya tidak berlaku yaitu setiap barisan Cauchy belum tentu konvergen. Berikut ini adalah salah satu contoh dari barisan Cauchy yang tidak konvergen.

Contoh 2.3

Himpunan $X = (0,1]$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ dan barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$ di dalam ruang metrik (X, d). Barisan (x_n) adalah barisan Cauchy tapi tidak konvergen di X.

Bukti.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Oleh karena itu, jika $n, m \geq n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$. Sehinga jika $n, m \geq n_0$ maka

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon \tag{2.9}$$

Jadi barisan (x_n) adalah barisan Cauchy. Akan tetapi 0 yang merupakan limit dari barisan tersebut bukan anggota X. Jadi barisan (x_n) di dalam $X = (0,1]$ bukan merupakan barisan konvergen di X. ■

Definisi 2.14 Suatu ruang metrik (X, d) dikatakan **lengkap** jika setiap barisan Cauchy (x_n) di dalam X adalah konvergen. (Shirali & Vasudeva, 2006)

Berikut ini akan dibahas tentang himpunan bagian dari suatu himpunan X dengan (X, d) adalah ruang metrik lengkap.

Proposisi 2.15 Misalkan (X, d) adalah suatu ruang metrik lengkap dan $S \subseteq X$. Maka:

i. Jika S himpunan bagian tertutup di X, maka (S, d) adalah subruang metrik lengkap dari X
ii. Jika (S, d) adalah subruang metrik lengkap, maka S adalah tertutup di X.

(Gelutu, 2006)

Bukti.

i. Diketahui bahwa $S \subseteq X$, dengan S adalah himpunan bagian tertutup di X. Ambil suatu barisan Cauchy (x_n) di S, sedemikian sehingga

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni\ d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \ \forall n, m \geq n_0 \tag{2.10}$$

Karena $S \subseteq X$, maka barisan (x_n) juga ada di X. Dan karena (X, d) adalah ruang metrik lengkap, maka barisan Cauchy (x_n) konvergen ke suatu titik di X, ditulis

$$d(x_n, x) \to 0 \tag{2.11}$$

Dari Lemma 2.12, karena (x_n) konvergen ke x dan $x_n \in S$, maka $x \in S$. Ini menunjukkan (S, d) adalah subruang metrik lengkap.

ii. Diketahui (S, d) adalah subruang metrik lengkap.

Misalkan $x \in cl(S)$. Ambil barisan (x_n) di S. Maka terdapat barisan (x_n) yang konvergen ke $x \in cl(S)$. Ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{2.12}$$

Oleh karena itu, (x_n) adalah barisan Cauchy di S. Karena (S, d) adalah ruang metrik lengkap, barisan (x_n) konvergen ke suatu titik, sebut y di S. Ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y \tag{2.13}$$

Dari (2.12) dan (2.13), didapat $x = y \in S$.

Oleh karena itu, $cl(S) = S$. Ini menunjukkan S tertutup. ■

Selanjutnya, akan dibahas kekontinuan suatu fungsi di suatu ruang metrik.

Definisi 2.16 Misalkan T adalah suatu pemetaan dari suatu ruang metrik (X, d_x) ke ruang metrik (Y, d_y), ditulis $T: X \to Y$. Maka

i. Fungsi T dikatakan kontinu di titik $x_0 \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$d_y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon, \text{ untuk setiap } x \in X \text{ dengan } d_x(x, x_0) < \delta \tag{2.14}$$

ii. Fungsi T dikatakan fungsi kontinu jika T kontinu pada setiap titik x di X.

(Gelutu, 2006)

Teorema 2.17 Suatu pemetaan $T: X \to Y$ dari ruang metrik (X, d_x) ke ruang metrik (Y, d_y) adalah kontinu di titik $x_0 \in X$ jika dan hanya jika

$$x_n \to x_0 \text{ maka } T(x_n) \to T(x_0) \tag{2.15}$$

(Agarwal, O'Regan & Sahu, 2009)

Bukti.

($\Rightarrow$) Asumsikan T kontinu di x_0. Untuk $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$d_x(x, x_0) < \delta \text{ maka } d_y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon \tag{2.16}$$

Misalkan $x_n \to x$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, untuk semua $n > n_0$ didapat

$$d_x(x_n, x_0) < \delta \tag{2.17}$$

Karena itu untuk semua $n > n_0$,

$$d_y(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon \tag{2.18}$$

Berdasarkan definisi konvergensi ini menunjukkan

$$T(x_n) \to T(x_0) \tag{2.19}$$

($\Leftarrow$) Asumsikan bahwa

$$x_n \to x_0 \text{ maka } T(x_n) \to T(x_0) \tag{2.20}$$

Akan dibuktikan bahwa T kontinu di x_0. Andaikan T tidak kontinu di x_0 maka ada $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$ ada $x \neq x_0$ yang memenuhi

$$d_x(x, x_0) < \delta \text{ tetapi } d_y(T(x), T(x_0)) \geq \varepsilon \tag{2.21}$$

Khusus untuk $\delta = \frac{1}{n}$ ada $x_n \in X$ untuk $n \in \mathbb{N}$, yang memenuhi

$$d_x(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ tetapi } d_y(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon \tag{2.22}$$

Sehingga diperoleh $x_n \to x_0$ tetapi $\left(T(x_n)\right)$ tidak konvergen ke $T(x_0)$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $T(x_n) \to T(x_0)$. Jadi haruslah T kontinu di x_0.■

2.2 Titik Tetap

Pada bagian ini dibahas titik tetap, pemetaan kontraktif, pemetaan *C*-kontraktif dalam suatu ruang metrik, dan teorema yang terkait.

Definisi 2.18 Diberikan ruang metrik (X, d). Suatu titik $x \in X$ disebut titik tetap dari pemetaan $T: X \to X$ jika

$$T(x) = x \tag{2.23}$$

(Istrătescu, 1981)

Contoh 2.4

Fungsi $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $T(x) = x^2$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Maka T mempunyai dua titik tetap yaitu 0 dan 1.

Ada beberapa jenis pemetaan yang menjamin titik tetap dari pemetaan di suatu ruang metrik (X, d), diantaranya adalah:

- Pemetaan *Banach contraction principle* (Kontraktif Banach)
- Pemetaan Kannan
- Pemetaan Chatterjea Kontraktif

Adapun yang akan dibahas pada penelitian ini adalah pemetaan Chatterjea Kontraktif atau sering disebut dengan *C*-kontraktif.

Pemetaan kontraktif memotivasi munculnya jenis-jenis pemetaan lain di suatu ruang metrik (X, d). Berikut diberikan definisi pemetaan kontraktif.

Definisi 2.19 Diberikan ruang metrik (X, d). Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan kontraktif pada X jika terdapat bilangan riil $k \in (0,1)$, sedemikian sehingga berlaku

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq k d(x, y) \tag{2.24}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

(Istrătescu, 1981)

Contoh 2.5

Misalkan $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{4}\right\}$. Pemetaan $T: X \to X$ dengan $T(x) = x^2$ adalah pemetaan kontraktif dengan metrik yang didefinisikan oleh $d(x, y) = |x - y|$.

Bukti.

Dengan menggunakan kondisi kontraktif seperti pada (2.24), maka:

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| \\
&= |(x - y)||(x + y)| \\
&\leq |x - y| \sup_{x,y \in X} |x + y| \\
&\leq |x - y| \left(\sup_{x \in X} |x| + \sup_{y \in X} |y| \right) \\
&= |x - y| \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} |x - y|, \quad x \neq y
\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bawah T adalah pemetaan kontraktif.■

Kekontinuan pemetaan yang kontraktif diberikan pada lemma berikut ini.

Lemma 2.20 Suatu pemetaan kontraktif T di suatu ruang metrik (X, d) adalah pemetaan kontinu. (Agarwal, O'Regan & Sahu, 2009)

Bukti.

Misalkan $x \in X$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ sehingga untuk setiap $d(x, y) < \delta$ berlaku

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \tag{2.25}$$

Karena x sebarang anggota di X, maka pemetaan T kontinu di X.■

Berikut ini dijelaskan bahwa fungsi jarak d di ruang metrik (X, d) adalah suatu fungsi kontinu.

Teorema 2.21 Misalkan X adalah suatu ruang metrik. Maka fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ adalah kontinu. (Gelutu, 2006)

Bukti.

Misalkan $(x_0, y_0) \in X \times X$ dan misalkan $r = d(x_0, y_0)$. Akan ditunjukkan bahwa d adalah kontinu pada (x_0, y_0). Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, misalkan U adalah lingkungan $B(x_0, \varepsilon/2) \times B(y_0, \varepsilon/2)$ dari (x_0, y_0). Maka untuk sebarang $(x, y) \in U$, didapat

$$\begin{aligned} d(x, y) &< d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + r + \frac{\varepsilon}{2} = r + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.26}$$

Secara similar,

$$\begin{aligned} r = d(x_0, y_0) &< d(x_0, x) + d(x, y) + d(y, y_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + d(x, y) + \frac{\varepsilon}{2} = d(x, y) + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dari (2.26) dan (2.27) didapat bahwa $r - \varepsilon < d(x, y) < r + \varepsilon$ sehingga $d(U) \subset (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Karena ε adalah sebarang, ini menunjukkan bahwa d adalah kontinu pada (x_0, y_0).■

Teorema berikut ini menjamin adanya titik tetap dari suatu fungsi yang memenuhi kondisi pemetaan kontraktif di suatu ruang metrik.

Teorema 2.22 Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik **lengkap** dan misalkan $T: X \to X$ adalah sebuah pemetaan yang memenuhi kondisi kontraktif. Maka T mempunyai titik tetap. (Istrătescu, 1981)
(Catatan: bukti pada Lampiran)

Sifat pemetaan kontraktif dapat dipergunakan untuk fungsi T yang selalu kontinu (Břetislav & Zdeněk, 2010). Pada 1972, Chatterjea memperkenalkan sifat pemetaan lain yang dapat dipergunakan untuk fungsi yang tidak selalu kontinu. Berikut ini diberikan definisi pemetaan yang memenuhi kondisi *C*-kontraktif dari suatu fungsi di ruang metrik (X, d).

Definisi 2.23 Diberikan ruang metrik (X, d). Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan *C*-kontraktif pada X jika terdapat bilangan riil $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq k\left(d\big(x, T(y)\big) + d\big(y, T(x)\big)\right) \tag{2.28}$$

(Břetislav & Zdeněk, 2010)

Contoh 2.6

Misalkan $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{4}\right\}$. Pemetaan $T: X \to X$ dengan $T(x) = x^2$ adalah pemetaan *C*-kontraktif dengan metrik yang didefinisikan oleh $d(x, y) = |x - y|$.

Bukti.

Dengan menggunakan sifat pemetaan *C*-kontraktif seperti pada (2.28), maka:

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &= |x^2 - y^2| \\
&= |(x - y)(x + y)| \\
&= \left|(x - x^2 + x^2 + y^2 - y^2 - y)(x + y)\right| \\
&= \left|\left\{\left((x - y^2) + (x^2 - y)\right) + (y^2 - x^2)\right\}(x + y)\right| \\
&\leq \left|\left\{\left((x - y^2) + (x^2 - y)\right)\right\}(x + y) + (x^2 - y^2)(x + y)\right|
\end{aligned}$$

$$|x^2 - y^2| - |(x^2 - y^2)(x+y)| \le \left|\left\{\left((x - y^2) + (y - x^2)\right)\right\}(x+y)\right|$$
$$|x^2 - y^2|(1 - |x+y|) \le |x+y||(x-y^2) + (y-x^2)|$$
$$d(x^2, y^2)(1 - |x+y|) \le |x+y|\left(d(x,y^2) + d(y,x^2)\right)$$
$$d(x^2, y^2) \le \frac{|x+y|}{1-|x+y|}\left(d(x,y^2) + d(y,x^2)\right)$$
$$d(x^2,\ y^2) \le \max_{x,y\in X}\left(\frac{|x+y|}{1-|x+y|}\right)\{d(x,\ y^2) + d(y,\ x^2)\}$$

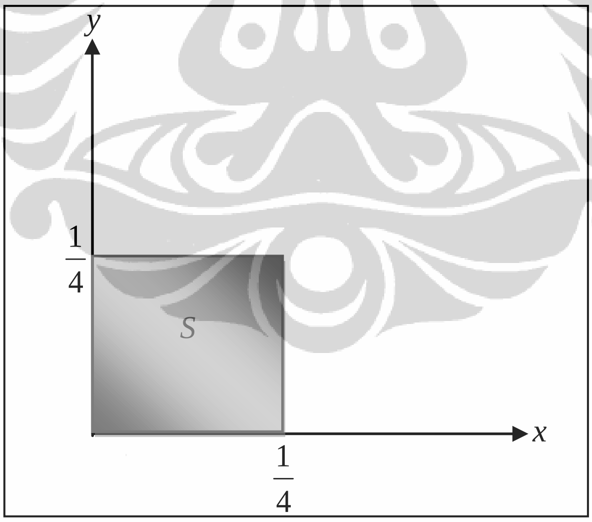
Karena $0 \le x, y \le \frac{1}{4}$ maka $|x+y| = x+y$ sehingga

$$k = \max_{x,y\in X}\left(\frac{|x+y|}{1-|x+y|}\right) = \max_{x,y\in X}\left(\frac{x+y}{1-(x+y)}\right)$$

Berikut ini akan dicari nilai k:

Misalkan daerah $S = \left\{(x,y)|0 \le x, y \le \frac{1}{4}\right\}$.

Ilustrasi daerah S diberikan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Ilustrasi daerah $S = \left\{(x,y)|0 \le x, y \le \frac{1}{4}\right\}$

Misalkan $f(x,y) = \frac{x+y}{1-x-y}$, maka:

1) Titik stasioner:

➢ $f_x = 0 \Leftrightarrow \frac{1(1-x-y)-(x+y)(-1)}{(1-x-y)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x-y)^2} = 0$$

➢ $f_y = 0 \Leftrightarrow \frac{1(1-x-y)-(x+y)(-1)}{(1-x-y)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x-y)^2} = 0$$

Karena tidak ada (x, y) yang menyebabkan $f_x = 0$ dan $f_y = 0$, maka tidak ada titik stasioner.

2) Titik Batas

➢ Batas $x = 0$, $0 \leq y \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow g(y) = f(0, y) = \frac{y}{1-y}$

Karena $g'(y) = \frac{1}{(1-y)^2}$ maka $g(y)$ tidak mempunyai titik stasioner

Pilih $y = \frac{1}{4} \Longrightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$

Pilih $y = 0 \Longrightarrow g(0) = 0$

➢ Batas $x = \frac{1}{4}$, $0 \leq y \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow g(y) = f\left(\frac{1}{4}, y\right) = \frac{\frac{1}{4}+y}{1-\frac{1}{4}-y} = \frac{1+4y}{3-4y}$

Karena $g'(y) = \frac{16}{(3-4y)^2}$ maka $g(y)$ tidak mempunyai titik stasioner

Pilih $y = \frac{1}{4} \Longrightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

Pilih $y = 0 \Longrightarrow g(0) = \frac{1}{3}$

➢ Batas $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow h(x) = f(x, 0) = \frac{x}{1-x}$

Karena $h'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ maka $h(x)$ tidak mempunyai titik stasioner

Pilih $x = \frac{1}{4} \Longrightarrow h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$

Pilih $x = 0 \Longrightarrow h(0) = 0$

➢ Batas $y = \frac{1}{4}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow h(x) = f\left(x, \frac{1}{4}\right) = \frac{1+4x}{3-4x}$

Karena $h'(x) = \frac{16}{(3-4x)^2}$ maka $h(x)$ tidak mempunyai titik stasioner

Pilih $x = \frac{1}{4} \Longrightarrow h\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

Pilih $x = 0 \Longrightarrow h(0) = \frac{1}{3}$

Karena titik $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ dan $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ bukan di daerah $S = \left\{(x, y) | 0 \leq x, y \leq \frac{1}{4}\right\}$, maka $max_{x,y \in X} \left(\frac{(x+y)}{1-(x+y)}\right) = \frac{1}{3}$

3) Titik singular:

$$x + y = 1$$

Didapat bahwa garis $x + y = 1$ bukan di daerah $S = \left\{(x, y) | 0 \leq x, y \leq \frac{1}{4}\right\}$

Dari ketiga hal di atas diketahui bahwa $max_{x,y \in X} \left(\frac{x+y}{1-(x+y)}\right) = \frac{1}{3}$.

Karena $max_{x,y \in X} \left(\frac{x+y}{1-(x+y)}\right) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ini menunjukkan bahwa T pemetaan yang *C*-kontraktif.

Teorema 2.24 Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik **lengkap** dan misalkan $T: X \to X$ adalah sebuah pemetaan yang memenuhi kondisi *C*-kontraktif. Maka T mempunyai titik tetap. (Břetislav & Zdeněk, 2010)

Bukti.

Ambil $x_0 \in X$ dan $x_1 = T(x_0)$ sehingga dapat dibentuk barisan (x_n) di X sebagai berikut:

$$x_0,\ x_1 = T(x_0),\ x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \cdots,\ x_n = T^n(x_0) \qquad (2.29)$$

Barisan pada (2.29) merupakan peta (*image*) dari x_0 atas pemakaian berulang T.

Akan ditunjukkan (x_n) adalah barisan Cauchy. Berdasarkan (2.28) dan (2.29),

$$\begin{aligned} d(x_m, x_{m+1}) &= d\big(T(x_{m-1}), T(x_m)\big) \\ &\leq k\left(d\left(x_{m-1}, T(x_m) + d\big(x_m, T(x_{m-1})\big)\right)\right) \\ &= k\big(d(x_{m-1}, x_{m+1} + d(x_m, x_m)\ )\big) \\ &\leq k\{d(x_{m-1}, x_m\ ) + d(x_m, x_{m+1}\ )\} \\ &\leq \frac{k}{(1-k)} d(x_{m-1}, x_m) \qquad (2.30) \end{aligned}$$

Diketahui bahwa k adalah suatu bilangan riil,

$$0 < \ k < \frac{1}{2} \tag{2.31}$$

maka

$$0 < \ 2k < 1 \Leftrightarrow -k < \ k < 1 - k \tag{2.32}$$

Karena $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

$$0 < \ k < 1 - k \Leftrightarrow 0 < \frac{k}{1-k} < 1 \tag{2.33}$$

Dengan mengambil $\alpha = \frac{k}{(1-k)}$ maka $\alpha \in (0,1)$ sehingga pertidaksamaan (2.30) menjadi

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq \alpha d(x_{m-1}, x_m) \tag{2.34}$$

untuk semua $m \in \mathbb{N}$.

Ambil $x_0 \in X$, berdasarkan pertidaksamaan (2.34) didapat:

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) \leq \alpha d(x_1, x_2) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1)$$

$$\vdots$$

$$d(x_m, x_{m+1}) \ \leq \alpha d(x_{m-1}, x_m) \leq \alpha^m d(x_0, x_1), \quad m \in \mathbb{N} \tag{2.35}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned} \tag{2.36}$$

untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$,

Dari pertidaksamaan (2.36), karena $\alpha \in (0,1)$ dan $d(x_0, x_1)$ adalah suatu bilangan positif tertentu, maka ruas kanan pertidaksamaan (2.36) konvergen ke nol ketika n dan m sangat besar. Sehingga mengakibatkan$d(x_n, x_m) \to 0$ ketika

$n \to \infty$ dan $m \to \infty$. Hal ini menunjukkan (x_n) adalah barisan Cauchy. Karena X **lengkap** maka barisan (x_n) konvergen di X yaitu $x_n \to x$.

Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga,

$$
\begin{aligned}
d\big(x, T(x_n)\big) &\le d(x, x_n) + d\big(x_n, T(x_n)\big) \\
&\le d(x, x_n) + d\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) \\
&\le d(x, x_n) + k\left\{d\left(x_{n-1}, T(x_n) + d\big(x_n, T(x_{n-1})\big)\right)\right\} \\
&= d(x, x_n) + k\big\{d\big(x_{n-1}, x_{n+1} + d(x_n, x_n)\big)\big\} \\
&= d(x, x_n) + k\{d(x_{n-1}, x) + d(x, x_{n+1})\} \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

Sehingga untuk $x_n \to x$ didapat:

$$d\big(x, T(x_n)\big) \to 0 + k(0) = 0 \qquad (2.38)$$

Karena d adalah fungsi jarak yang kontinu, maka untuk $x_n \to x$ didapat:

$$d\big(x, T(x_n)\big) \to d\big(x, T(x)\big) \qquad (2.39)$$

Sehingga $d\big(x, T(x)\big) = 0$.

Hal ini menunjukkan $x = T(x)$. Jadi, x merupakan titik tetap dari pemetaan C-kontraktif T.■

BAB 3
PEMBAHASAN

Bahasan utama pada bab ini adalah mengkaji titik tetap dari *set-valued function* pada suatu ruang metrik yang memenuhi kondisi pemetaan Chaterjea Kontraktif (C-kontraktif). Pada bab ini akan dijelaskan tentang *set-valued function*, metrik Hausdorff dan titik tetap *set-valued function* yang memenuhi kondisi C-kontraktif di suatu ruang metrik.

3.1 Sifat-Sifat Metrik Hausdorff

Sebelum membahas tentang metrik Hausdorff akan dijelaskan terlebih dahulu tentang *set-valued function*. Definisi *set-valued function* di suatu ruang metrik diberikan sebagai berikut:

Definisi 3.1 Misalkan (X, d) adalah suatu ruang metrik. *Set-valued function* didefinisikan sebagai pemetaan dari X ke $\wp(X)$, ditulis:

$$T: X \to \wp(X) \tag{3.1}$$

dengan $\wp(X) = \{S | S \subset X, S \neq \emptyset\}$.
(Widder, 2009)

Untuk mendapatkan sebuah hasil yang analog dari suatu fungsi menjadi *set-valued function*, $\wp(X)$ harus dilengkapi dengan sebuah metrik dalam menentukan jarak antar himpunan bagian di $\wp(X)$.

Pada tahun 1927, dikenal jarak Hausdorff yang diambil dari nama Felix Hausdorff. Berikut ini diberikan definisi jarak Hausdorff untuk menentukan jarak antar himpunan bagian di $\wp(X)$.

Definisi 3.2 Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik. Untuk $A, B \in \wp(X)$ dan $A, B \neq \emptyset$, jarak Hausdorff untuk setiap dua himpunan bagian A dan B didefinisikan sebagai berikut:

- Jika $x \in X$, jarak dari x ke B adalah

$$d(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b) \tag{3.2}$$

- Jarak dari A ke B adalah

$$D(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B) \tag{3.3}$$

- Jarak Hausdorff antar himpunan bagian A ke B adalah

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A,B) &= max\{D(A,B), D(B,A)\} \\ &= max\left\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{x\in B} d(x,A)\right\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

(Widder, 2009)

Proposisi 3.3 Misalkan (X,d) adalah suatu ruang metrik, $b \in X$ dan $A \in \wp(X)$. Maka:

1. $d(b,A) \geq 0$
2. Jika $b \in A$ maka $d(b,A) = 0$
3. Jika $d(b,A) = 0$, maka $b \in cl(A)$

(Gelutu, 2006)

Bukti.

1. Diketahui $b \in X$ dan $A \in \wp(X)$. Akan ditunjukkan $d(b,A) \geq 0$.

   Dari (3.2) diketahui

   $$d(b,A) = \inf_{a\in A} d(b,a) \tag{3.5}$$

   Karena d adalah sebuah metrik, maka $d(b,a) \geq 0$. Sehingga (3.5) menjadi

   $$d(b,A) = \inf_{a\in A} d(b,a) \geq 0 \tag{3.6}$$

   Hal ini menunjukkan bahwa $d(b,A) \geq 0$.

2. Diketahui $b \in A$. Akan ditunjukkan bahwa $d(b,A) = 0$.

   Dari (3.2) diketahui

   $$d(b,A) = \inf_{a\in A} d(b,a) \tag{3.7}$$

   Karena $b \in A$ dan $a \in A$ maka $d(b,a) = 0$ terpenuhi ketika $a = b$. Sehingga (3.7) menjadi

   $$d(b,A) = \inf_{a\in A} d(b,a) = 0 \tag{3.8}$$

   Hal ini menunjukkan bahwa $d(b,A) = 0$.

3. Diketahui $d(b, A) = 0$. Akan ditunjukkan bahwa $b \in cl(A)$

   Untuk menunjukkan $b \in cl(A)$ akan ditunjukkan:

   (i) $b \in A$ (ii) b sebagai titik akumulasi dari A

   Berikut buktinya:

   (i) Karena $d(b, A) = 0$, maka pastilah $b \in A$.

   (ii) Diketahui $d(b, A) = inf_{a \in A}\, d(b, a) = 0$ maka

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists y_\varepsilon \in \{d(b, a) | a \in A\} \ni 0 < y_\varepsilon < \varepsilon \tag{3.9}$$

   Karena $y_\varepsilon \in \{d(b, a) | a \in A\}$ maka terdapat $a \in A \ni y_\varepsilon = d(b, a_\varepsilon)$.

   Dengan demikian untuk sebarang $\varepsilon > 0$,

   $$B(b, \varepsilon) = \{a \in A |\ d(b, a) < \varepsilon\} | \{b\} \cap A \neq \emptyset \tag{3.10}$$

   Jadi, b merupakan titik akumulasi dari A

   Dari (i) dan (ii) didapat bahwa $b \in cl(A)$. ■

Contoh 3.1

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dengan himpunan $X = \mathbb{R}$ dan metrik d didefinisikan oleh $d(x, y) = |x - y|$. Terdapat himpunan bagian A dan B dengan $A = (0, 20)$ dan $B = (22, 31)$.

- Berikut akan dihitung $D(A, B)$:

  Karena $x \in A$ dimana $x < 22$, maka:

  $d(x, B) = 22 - x$ sehingga

  $$D(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$$
  $$= sup\{22 - x : 0 < x < 20\}$$
  $$= 22$$

- Berikut akan dihitung $D(B, A)$:

  Karena $x \in B$ dimana $x > 20$, maka:

  $d(x, A) = x - 20$ sehingga

  $$D(B, A) = \sup_{x \in B} d(x, A)$$
  $$= sup\{x - 20 : 22 < x < 31\}$$
  $$= 11$$

Dari contoh di atas diketahui bahwa: $D(A,B) \neq D(B,A)$. Ini menunjukkan bahwa D tidak bersifat simetri, sehingga jelas bahwa D bukanlah sebuah metrik.

Lemma 3.4 Misalkan (X,d) adalah suatu ruang metrik dan $A,B \in \wp(X)$. Jika $D(A,B) = 0$, maka $A \subset cl(B)$. (Gelutu, 2006)

Bukti.

Berdasarkan Definisi 3.2,

$$D(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B) = 0 \Rightarrow \forall a \in A, d(a,B) \leq 0 \tag{3.11}$$

Karena d adalah sebuah metrik, maka

$$d(a,B) \geq 0 \tag{3.12}$$

Dari (3.11) dan (3.12) didapat $d(a,B) = 0$. Sehingga berdasarkan Proposisi 3.3 sifat (3) didapat bahwa $a \in cl(B)$. Jadi untuk setiap $a \in A$ didapat $\subset cl(B)$. ■

Jarak Hausdorff $\mathcal{H}$ memenuhi sifat-sifat metrik jika himpunan bagian di $\wp(X)$ adalah himpunan bagian yang tertutup dan terbatas. (Butt, 2010).

Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

- ❑ $\mathcal{H}(A,B) = max\{D(A,B), D(B,A)\}$, agar $\mathcal{H}(A,B) = 0$, maka haruslah $D(A,B) = 0$ dan $D(B,A) = 0$. Berdasarkan Lemma 3.4, jika $D(A,B) = 0$, maka $A \subset cl(B)$, begitu juga jika $D(B,A) = 0$ maka $B \subset cl(A)$. Oleh karena itu, agar $\mathcal{H}(A,B) = 0$, $A, B \in \wp(X)$ harus berupa himpunan bagian tertutup.

- ❑ $\mathcal{H}(A,B) = max\{D(A,B), D(B,A)\}$. Agar $\mathcal{H}(A,B)$ berhingga, $D(A,B)$ dan $D(B,A)$ juga harus berhingga, sehingga $A, B \in \wp(X)$ haruslah terbatas.

Selanjutnya, himpunan dari semua himpunan bagian tertutup dan terbatas di $\wp(X)$ akan dinotasikan dengan $CB(X)$.

Proposisi 3.5 Misalkan (X,d) adalah suatu ruang metrik dan $x \in X$. Untuk sebarang $A, B, C \in CB(X)$ dengan $A, B, C \neq \emptyset$, berlaku:

(1) $d(x,A) = 0$ jika dan hanya jika $x \in A$

(2) $D(A,B) = 0$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$

(3) $D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$

(Agarwal, O'Regan & Sahu, 2009)

Bukti.

(1) ($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan jika $x \in A$ maka $d(x,A) = 0$.

Misalkan $x \in A$. Maka jarak *infimum*nya adalah $d(x,a) = 0$ dengan $a = x$.

($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan jika $d(x,A) = 0$ maka $x \in A$.

Diketahui $d(x,A) = 0$. Karena A tertutup, maka untuk setiap $n \in N$ terdapat $a_n \in A$ sedemikian sehingga $d(x,a_n) < \frac{1}{n}$ yaitu barisan (a_n) konvergen ke x. Dapat ditulis,

$$\lim_{n\to\infty} d(x,a_n) = 0$$

Karena A himpunan bagian tertutup, maka berdasarkan Lemma 2.11 mengakibatkan $x \in A$.

(2) ($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan jika $A \subseteq B$ maka $D(A,B) = 0$.

Ambil $a \in A$. Karena $A \subseteq B$ maka $a \in B$. Sehingga oleh sifat (1),

$$d(a,B) = 0$$

Oleh karena itu,

$$D(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B) = 0$$

($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan jika $D(A,B) = 0$ maka $A \subseteq B$.

Diketahui $D(A,B) = 0$. Misalkan $a \in A$. Berdasarkan definisi jarak Hausdorff,

$$0 \leq d(a,B) \leq D(A,B) = 0$$

Sehingga $d(a,B) = 0$. Oleh sifat (1), dapat ditemukan $a \in B$. Hal ini menunjukkan $A \subseteq B$.

(3) Dari ketidaksamaan segitiga didapat,

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$$

untuk semua $a \in A, b \in B$ dan $c \in C$.

Hal ini mengakibatkan

$$\inf_{b\in B} d(a,b) \leq d(a,c) + \inf_{b\in B} d(c,b)$$

untuk semua $c \in C$. Lebih jauh hal ini mengakibatkan

$$\inf_{b\in B} d(a,b) = d(a,B) \leq d(a,c) + d(c,B)$$

dan karena berlaku untuk semua $c \in C$, maka didapat

$$d(a,B) \leq d(a,C) + D(C,B)$$

Karena $a \in A$ adalah sebarang, dengan mengambil *supremum*nya didapat:

$$D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$$

Teorema berikut ini menjelaskan bahwa $\mathcal{H}$ adalah metrik pada himpunan $CB(X)$.

Teorema 3.6 Misalkan (X,d) adalah suatu ruang metrik. Jarak $\mathcal{H}$ adalah metrik pada $(CB(X),\mathcal{H})$. (Agarwal, O'Regan & Sahu, 2009)

Bukti.

(1) Akan ditunjukkan $\mathcal{H}(A,B) \geq 0$ untuk setiap $A,B \in CB(X)$.

Ambil $A,B \in CB(X)$, maka:

$\mathcal{H}(A,B) = max\{D(A,B), D(B,A)\}$

Karena $D(A,B) \geq 0$ (tak negatif) dan $D(B,A) \geq 0$ (tak negatif) maka $\mathcal{H}(A,B) \geq 0$ (tak negatif).

Jadi, $\mathcal{H}(A,B) \geq 0$ untuk setiap $A,B \in CB(X)$.

(2) Akan ditunjukkan $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

Ambil $A,B \in CB(X)$, maka:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A,B) = 0 &\Leftrightarrow max\{D(A,B), D(B,A)\} = 0\\ &\Leftrightarrow D(A,B) = 0 \text{ dan } D(B,A) = 0\\ &\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A\\ &\Leftrightarrow A = B\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

(3) Akan ditunjukkan $\mathcal{H}(A,B) = \mathcal{H}(B,A)$ untuk setiap $A,B \in CB(X)$

Ambil $A,B \in CB(X)$, maka:

$$\mathcal{H}(A,B) = max\{D(A,B), D(B,A)\}$$
$$= max\{D(B,A), D(A,B)\}$$
$$= \mathcal{H}(B,A)$$

Jadi, $\mathcal{H}(A,B) = \mathcal{H}(B,A)$ untuk setiap $A, B \in CB(X)$

(4) Akan ditunjukkan $\mathcal{H}(A,B) \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$ untuk setiap $A, B, C \in CB(X)$

Ambil $A, B, C \in CB(X)$, maka:

Berdasarkan Proposisi 3.5 sifat (3), didapat

$$D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$$
$$\leq max\{D(A,C), D(C,A)\} + max\{D(C,B), D(B,C)\}$$
$$= \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$$

Secara similar,

$$D(B,A) \leq D(B,C) + D(C,A)$$
$$\leq max\{D(B,C), D(C,B)\} + max\{D(C,A), D(A,C)\}$$
$$= max\{D(C,A), D(A,C)\} + max\{D(B,C), D(C,B)\}$$
$$= \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$$

Oleh karena itu,

$$max\{D(A,B), D(B,A)\} \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$$
$$\mathcal{H}(A,B) \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$$

Jadi, $\mathcal{H}(A,B) \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$ untuk setiap $A, B, C \in CB(X)$

Dari (1), (2), (3) dan (4) terbukti bahwa $\mathcal{H}$ adalah metrik pada $CB(X)$. ■

Lemma 3.7 Misalkan $A, B \in CB(X)$ dengan $a \in A$. Jika $\varepsilon > 0$ maka terdapat suatu anggota $b \in B$ sedemikian sehingga $d(a,b) \leq \mathcal{H}(A,B) + \varepsilon$.
(Butt, 2010)

Bukti.

Diketahui $A, B \in CB(X)$, berdasarkan definisi:

$$\mathcal{H}(A,B) \leq max\{D(A,B), D(B,A)\} \tag{3.13}$$

Sehingga dapat ditulis

$$D(B,A) \leq \mathcal{H}(A,B) \leq max\{D(A,B), D(B,A)\} \tag{3.14}$$

atau

$$D(A,B) \leq \mathcal{H}(A,B) \leq max\{D(A,B), D(B,A)\} \tag{3.15}$$

Dari (3.14) untuk setiap $a \in A$ didapat

$$\sup_{b \in B} d(b,A) = D(B,A) \leq \mathcal{H}(A,B) \tag{3.16}$$

Karena $D(B,A)$ adalah supremum dari $\{d(b,A) | b \in B\}$ maka

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon \in B \ni D(B,A) - \varepsilon < d(b_\varepsilon, A) \leq D(B,A) \tag{3.17}$$

Maka untuk $a \in A$,

$$D(B,A) - \varepsilon < d(b_\varepsilon, a) \leq D(B,A)$$

Berdasarkan definisi metrik Hausdorff:

$$D(B,A) - \varepsilon < d(b_\varepsilon, a) \leq D(B,A) \leq \mathcal{H}(A,B) \leq \mathcal{H}(A,B) + \varepsilon \tag{3.18}$$

Jadi, untuk sebarang $\varepsilon > 0$,

$$d(b_\varepsilon, a) = d(a, b_\varepsilon) \leq \mathcal{H}(A,B) + \varepsilon. \blacksquare$$

Pada Teorema 2.22 telah dijelaskan bahwa fungsi jarak $d: X \times X \to \mathbb{R}$ adalah kontinu. Untuk suatu himpunan bagian tetap $A \subset X$, fungsi jarak $d(.,A): X \to \mathbb{R}$ juga merupakan suatu fungsi kontinu (Gelutu, 2006). Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Ambil $x \in X$, maka dapat dihitung jarak dari titik x ke himpunan A dengan menggunakan fungsi jarak d.

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga:

$$d(x,A) \leq d(x,\bar{x}) + d(\bar{x},A) \Rightarrow d(x,A) - d(\bar{x},A) \leq d(x,\bar{x}) \tag{3.19}$$

untuk sebarang $x, \bar{x} \in X$. Oleh karena itu,

$$|d(x,A) - d(\bar{x},A)| \leq d(x,\bar{x}) \tag{3.20}$$

Akibatnya, jika (x_n) adalah barisan di X sedemikian sehingga $x_n \to \bar{x}$, maka

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, A) = d(\bar{x}, A) \tag{3.21}$$

Jadi, fungsi jarak $d(.,A)$ adalah kontinu. $\blacksquare$

Jika pada Definisi 2.10 telah diberikan definisi kekonvergenan barisan titik, berikut ini diberikan definisi kekonvergenan barisan himpunan bagian menggunakan konsep metrik Hausdorff.

Definisi 3.8 Misalkan (A_n) adalah suatu barisan himpunan bagian tertutup dari X dan $A \subseteq X$ adalah juga himpunan bagian tertutup. Maka A_n konvergen ke A jika

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(A_n, A) = 0 \tag{3.22}$$

Dinotasikan dengan $A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$.
(Gelutu, 2006)

Definisi 3.9. Suatu barisan himpunan bagian tertutup yang tak kosong (A_n) dikatakan barisan Cauchy di $(CB(X), \mathcal{H})$ jika

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbb{N} \ni \mathcal{H}(A_n, A_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq \mathbb{N} \tag{3.23}$$

(Gelutu, 2006)

Teorema 3.10 Jika (X, d) adalah ruang metrik lengkap, maka $(CB(X), \mathcal{H})$ adalah ruang metrik lengkap, dimana $\mathcal{H}$ adalah metrik Hausdorff yang diinduksi oleh d.
(Widder, 2009)

Bukti.
Misalkan (A_n) adalah sebarang barisan Cauchy di $CB(X)$ dan didefinisikan A sebagai himpunan bagian dari semua titik-titik $x \in X$ sedemikian sehingga terdapat barisan (x_n) yang konvergen ke x dan memenuhi $x_n \in A_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, ditulis

$$A = \bigcap_{n\geq 1} cl\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(A_n, A) = 0 \tag{3.24}$$

Untuk membuktikan (3.24), harus ditunjukkan:

(i) A adalah tertutup (ii) A tidak kosong (iii) $A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$

Bukti.

(i). Karena $A \in CB(X)$, maka A adalah himpunan bagian tertutup.

(ii). Akan ditunjukkan bahwa A tidak kosong.

Karena (A_n) adalah barisan Cauchy, diberikan $\delta > 0$ (dengan $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, dan $\varepsilon > 0$) untuk setiap $k \geq 0$, terdapat N_k sedemikian sehingga

$$\mathcal{H}(A_n, A_m) < \frac{\delta}{2^{k+1}}, \qquad \forall n, m \geq N_k \tag{3.25}$$

- Untuk $k = 0$,

$$\exists N_0: \mathcal{H}(A_n, A_m) < \frac{\delta}{2}, \qquad \forall n, m \geq N_0 \tag{3.26}$$

Maka untuk sebarang $n_0 \geq N_0$

$$\mathcal{H}\left(A_{n_0}, A_n\right) < \frac{\delta}{2}, \forall n \geq N_0 \Rightarrow \sup_{x \in A_{n_0}} d(x, A_n) < \frac{\delta}{2}, \forall n \geq N_0 \tag{3.27}$$

Oleh karena itu, untuk sebarang $x_{n_0} \in A_{n_0}$,

$$d\left(x_{n_0}, A_n\right) < \frac{\delta}{2}, \forall n \geq N_0 \tag{3.28}$$

- Untuk $k = 1$, terdapat N_1 sedemikian sehingga

$$\mathcal{H}(A_n, A_m) < \frac{\delta}{2^2}, \forall\, n, m \geq N_1 \tag{3.29}$$

Maka untuk sebarang $n_1 \geq max\{N_0, N_1\}$ didapat

$$d(x, A_n) < \frac{\delta}{2^2}, \forall x \geq A_{n_1}, \forall n \geq N_1 \tag{3.30}$$

Pilih $x_{n_1} \in A_{n_1}$, maka

$$d\left(x_{n_1}, x_{n_0}\right) \leq d\left(x_{n_1}, x\right) + d\left(x, x_{n_0}\right), x \in A_n \text{ dan } n \geq N_1$$

$$= \frac{\delta}{2^2} + \frac{\delta}{2} = 3\frac{\delta}{2^2} = \frac{\varepsilon}{2^2} \tag{3.31}$$

Dengan melanjutkan proses ini, untuk $n_k \geq max\{N_0, N_1, \cdots, N_k\}$ dapat dipilih $x_{n_{k+1}} \in A_{n_{k+1}}$ sedemikian sehingga

$$d\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \tag{3.32}$$

Ini menunjukkan bahwa barisan $\left(x_{n_k}\right)$ adalah barisan Cauchy. Karena X lengkap, maka terdapat $\bar{x} \in X$ sedemikian sehingga $x_{n_k} \to \bar{x}$.

- Lebih jauh, untuk setiap $n \geq 1$, terdapat $n_{k_0} \geq n$ sedemikian sehingga

$$x_{n_k} \in \bigcup_{m \geq n} A_m, \forall n_k \geq n_{k_0} \Rightarrow \bar{x} \in cl\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) \tag{3.33}$$

  Hal ini berlaku untuk semua $n \geq 1$.

$$\bar{x} \in cl\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right), \forall n \geq 1 \Rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{n \geq 1} cl\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) = A \tag{3.34}$$

  Dari (3.34) didapat bahwa $A \neq \emptyset$.

(iii) Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$.

- Dari (i) diketahui A adalah tertutup. Hal ini berarti untuk setiap $n_0 \geq N_0$ maka $x_{n_0} \in A_n$, oleh kekontinuan dari $d(.,x_0)$,

$$d(\bar{x}, x_{n_0}) = \lim_{n_k \to \infty} d(x_{n_k}, x_{n_0})$$

$$\leq \lim_{n_k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} d(x_{n_i}, x_{n_{i-1}}) < \lim_{n_k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

  Didapat:

$$A_{n_0} \subset B_\varepsilon(\bar{x}) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(A), \forall n_0 \neq N_0 \tag{3.35}$$

  Maka:

$$\exists N_0 : D(A_n, A) < \varepsilon, \forall n \geq N_0 \tag{3.36}$$

- Sebaliknya, misalkan $x \in A$ adalah sebarang, maka

$$x \in cl\left(\bigcup_{m \geq N_0} A_m\right) \Rightarrow \exists m \geq N_0, \exists z \in A_m \ni d(x,z) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.37}$$

  Berdasarkan ketaksamaan segitiga diketahui bahwa

$$d(x, A_n) \leq d(x, A_m) + \mathcal{H}(A_m, A_n) \tag{3.37}$$

  Karena (A_n) adalah barisan Cauchy, maka terdapat N'_0 sedemikian sehingga

$$\mathcal{H}(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N'_0 \tag{3.38}$$

Oleh karena itu, (3.37) menjadi

$$d(x, A_n) \le d(x, A_m) + \mathcal{H}(A_m, A_n)$$
$$\le d(x, z) + \mathcal{H}(A_m, A_n)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n, m \ge max\{N_0, N'_0\}$$

Hal ini berarti,

$$x \in \mathcal{U}_\varepsilon(A_n), \forall n \ge N'_1 \tag{3.39}$$

Karena $x \in A$ adalah sebarang, maka

$$A \in \mathcal{U}_\varepsilon(A_n), \forall n \ge N'_1 \Rightarrow D(A, A_n) < \varepsilon, \forall n \ge N'_1 \tag{3.40}$$

Dari (3.36) dan (3.40) didapat

$$\mathcal{H}(A, A_n) = max\{D(A, A_n), D(A_n, A)\} < \varepsilon, \forall n \ge N'_1 \tag{3.41}$$

Ini menunjukkan bahwa $A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$

Jadi, $(CB(X), \mathcal{H})$ adalah ruang metrik lengkap.

3.2. Titik Tetap *Set-Valued Function*

Pada bagian ini akan dibahas titik tetap dan pemetaan yang memenuhi kondisi *C*-kontraktif dari suatu *set-valued function* di suatu ruang metrik.

Definisi 3.11 Diberikan ruang metrik (X, d). Suatu titik $x \in X$ disebut titik tetap dari *set-valued function* $T: X \to \wp(X)$ jika

$$x \in T(x) \tag{3.42}$$

(Istrătescu, 1981)

Contoh 3.2

Misalkan $X = [0,1]$ dan *set-valued function* T: $[0,1] \to [0,1]$ didefinisikan sebagai berikut

$$T(x) = \begin{cases} \{x + 1/2\} \text{ jika } x < 1/2 \\ [0,1] \text{ jika } x = 1/2 \\ \{x - 1/2\} \text{ jika } x > 1/2 \end{cases} \tag{3.43}$$

Dari *set-valued function* yang didefinisikan seperti pada (3.43):

- Ambil $x < \frac{1}{2}$, $T(x) = \left\{x + \frac{1}{2}\right\}$ didapat $x \notin \left\{x + \frac{1}{2}\right\}$ jadi $x \notin T(x)$
- Ambil $x = \frac{1}{2}$, $T(x) = [0,1]$ didapat $x \in [0,1]$ jadi $x \in T(x)$
- Ambil $x > \frac{1}{2}$, $T(x) = \left\{x - \frac{1}{2}\right\}$ didapat $x \notin \left\{x - \frac{1}{2}\right\}$ jadi $x \notin T(x)$

Sehingga *set-valued function* di atas memiliki titik tetap yaitu $x = \frac{1}{2}$.

Contoh 3.3

Misalkan $X = [0,1]$ dan *set-valued function* $T: [0,1] \to [0,1]$ didefinisikan sebagai berikut

$$T(x) = \begin{cases} \{x + 1/2\} \text{ jika } x < 1/2 \\ \{0,1\} \text{ jika } x = 1/2 \\ \{x - 1/2\} \text{ jika } x > 1/2 \end{cases} \tag{3.44}$$

Dari *set-valued function* yang didefinisikan seperti pada (3.44):

- Ambil $x < \frac{1}{2}$, $T(x) = \left\{x + \frac{1}{2}\right\}$ didapat $x \notin \left\{x + \frac{1}{2}\right\}$ jadi $x \notin T(x)$
- Ambil $x = \frac{1}{2}$, $T(x) = \{0,1\}$ didapat $x \notin \{0,1\}$ jadi $x \notin T(x)$
- Ambil $x > \frac{1}{2}$, $T(x) = \left\{x - \frac{1}{2}\right\}$ didapat $x \notin \left\{x - \frac{1}{2}\right\}$ jadi $x \notin T(x)$

Sehingga *set-valued function* di atas tidak memiliki titik tetap.

Berikut ini diberikan definisi *set-valued function* yang memenuhi kondisi *C*-kontraktif.

Definisi 3.12 Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik. Suatu pemetaan $T: X \to \wp(X)$ dikatakan *set-valued function* yang *C*-kontraktif jika terdapat bilangan riil $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, sedemikian sehingga berlaku

$$\mathcal{H}\big(T(x), T(y)\big) \leq k\Big(d\big(x, T(y)\big) + d\big(y, T(x)\big)\Big) \tag{3.45}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

(Chi-Ming Chen, 2011)

Teorema berikut ini menyatakan bahwa *set-valued function* yang memenuhi kondisi *C*-kontraktif mempunyai titik tetap.

Teorema 3.13 Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik **lengkap** dan misalkan $T: X \to CB(X)$ adalah sebuah *set-valued function* yang memenuhi kondisi *C*-kontraktif. Maka T mempunyai titik tetap.
(Chi-Ming Chen, 2011)

Bukti.
Akan ditunjukkan adanya titik tetap x pada *set-valued function* T sebagai titik limit dari barisan (x_n) yang dikonstruksi dari sebarang $x_0 \in X$.

Berikut ini akan dibangun suatu barisan (x_n). Ambil sebarang titik $x_0 \in X$ dan untuk x_1 sebarang titik dari $T(x_0)$. Maka dapat ditemukan suatu titik $x_2 \in T(x_1)$ sedemikian sehingga

$$d(x_1, x_2) \le \mathcal{H}\big(T(x_0), T(x_1)\big) + k \qquad (3.46)$$

dengan $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Secara similar, terdapat $x_3 \in T(x_2)$ sedemikian sehingga

$$d(x_2,\ x_3) \le \mathcal{H}(T(x_1), T(x_2)) + k^2 \qquad (3.47)$$

Oleh karena itu, terdapat barisan (x_n) di X sedemikian sehingga $x_{n+1} \in T(x_n)$ dan

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \mathcal{H}\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) + k^n, x_n \in T(x_{n-1}), n \in \mathbb{N} \quad (3.48)$$

Dari (3.48) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\le \mathcal{H}\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) + k^n \\ &\le k\Big(d(x_n, T(x_{n-1})\,) + d\big(x_{n-1}, T(x_n)\big)\Big) + k^n \\ &= k\big(d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1})\big) + k^n \\ &\le k\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n-1}, x_n)\big) + k^n \\ &\le \frac{k}{1-k}\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) + \frac{k^n}{1-k} \qquad (3.49) \end{aligned}$$

Ambil $x_0 \in X$ dan $x_n \in T(x_{n-1})$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Maka:

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{k}{1-k} d(x_0, x_1) + \frac{k}{1-k}$$

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{k}{1-k} d(x_1, x_2) + \frac{k^2}{1-k}$$

$$\leq \frac{k}{1-k}\left\{\frac{k}{1-k} d(x_0, x_1) + \frac{k}{1-k}\right\} + \frac{k^2}{1-k}$$

$$= \left(\frac{k}{1-k}\right)^2 d(x_0, x_1) + \frac{k^2}{1-k} + \frac{k^2}{(1-k)^2}$$

$$d(x_3, x_4) \leq \frac{k}{1-k} d(x_2, x_3) + \frac{k^3}{1-k}$$

$$\leq \frac{k}{1-k}\left\{\left(\frac{k}{1-k}\right)^2 d(x_0, x_1) + \frac{k^2}{1-k} + \frac{k^2}{(1-k)^2}\right\} + \frac{k^3}{1-k}$$

$$= \left(\frac{k}{1-k}\right)^3 d(x_0, x_1) + \frac{k^3}{(1-k)^2} + \frac{k^3}{(1-k)^3} + \frac{k^3}{1-k}$$

$$= \left(\frac{k}{1-k}\right)^3 d(x_0, x_1) + \frac{k^3}{1-k} + \frac{k^3}{(1-k)^2} + \frac{k^3}{(1-k)^3}$$

$$\vdots$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x_0, x_1) + k^n \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1-k)^s}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.50}$$

Oleh karena itu, untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n d(x_0, x_1) + k^n \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1-k)^s}$$

$$+ \left(\frac{k}{1-k}\right)^{n+1} d(x_0, x_1) + k^{n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \frac{1}{(1-k)^s}$$

$$+ \cdots + \left(\frac{k}{1-k}\right)^{m-1} d(x_0, x_1) + k^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{1}{(1-k)^s}$$

Sehingga didapat:

$$d(x_n, x_m\ ) \le \sum_{l=n}^{n+m-1} \left(\frac{k}{1-k}\right)^l d(x_0, x_1)$$

$$+\left\{k^n \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1-k)^s} + k^{n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \frac{1}{(1-k)^s} + \cdots + k^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{1}{(1-k)^s}\right\}$$

Diketahui bahwa:

$$\sum_{l=n}^{n+m-1} \left(\frac{k}{1-k}\right)^l = \left\{\left(\frac{k}{1-k}\right)^n + \left(\frac{k}{1-k}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{k}{1-k}\right)^{m-1}\right\}$$

$$= \frac{\left(\frac{k}{1-k}\right)^n - \left(\frac{k}{1-k}\right)^m}{1-\left(\frac{k}{1-k}\right)} \tag{3.51}$$

untuk $n \to \infty, m \to \infty$, (3.51) menjadi:

$$\sum_{l=n}^{n+m-1} \left(\frac{k}{1-k}\right)^l = 0 \tag{3.52}$$

Diketahui bahwa:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1-k)^s} = \frac{1}{(1-k)} + \frac{1}{(1-k)^2} + \cdots + \frac{1}{(1-k)^n}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{(1-k)^n}}{-k} = \left(\frac{1}{(1-k)^n k} - \frac{1}{k}\right) \tag{3.53}$$

$$k^n \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1-k)^s} = k^n \left(\frac{1}{(1-k)^n k} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{k^n}{(1-k)^n} - k^n\right)$$

Untuk $n \to \infty$,

$$k^n \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(1-k)^s} = 0 \tag{3.54}$$

demikian juga dengan

$$k^{n+1}\sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{(1-k)^s}=\frac{1}{k}\left(\frac{k^{n+1}}{(1-k)^{n+1}}-k^{n+1}\right)$$

Untuk $n\to\infty$,

$$k^{n+1}\sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{(1-k)^s}=0 \tag{3.55}$$

Dan berlaku sampai:

$$k^{m-1}\sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{(1-k)^s}=0 \tag{3.56}$$

Sehingga, untuk $n\to\infty$,

$$\left\{k^n\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(1-k)^s}+k^{n+1}\sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{(1-k)^s}+\cdots+k^{m-1}\sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{(1-k)^s}\right\}=0 \tag{3.57}$$

Dari (3.52) dan (3.57) untuk $n\to\infty, m\to\infty$, didapat:

$$\begin{aligned}d(x_n,x_m)\le&\sum_{l=n}^{n+m-1}\left(\frac{k}{1-k}\right)^l d(x_0,x_1)\\&+\left\{k^n\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(1-k)^s}+k^{n+1}\sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{(1-k)^s}+\cdots+k^{m-1}\sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{(1-k)^s}\right\}\end{aligned} \tag{3.58}$$

Ruas kanan dari pertidaksamaan (3.58) konvergen ke nol ketika n sangat besar. Sehingga mengakibatkan $d(x_n,x_m)\to 0$ ketika $n\to\infty$. Hal ini menunjukkan (x_n) adalah barisan Cauchy. Karena X **lengkap** maka barisan (x_n) konvergen di X yaitu $x_n\to x$.

Akan ditunjukkan bahwa x adalah titik tetap dari pemetaan T. Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga,

$$\begin{aligned}d\big(x,T(x_n)\big)&\le d(x,x_n)+d\big(x_n,T(x_n)\big)\\&\le d(x,x_n)+\mathcal{H}\big(T(x_{n-1}),T(x_n)\big)\\&\le d(x,x_n)+k\big\{d\big(x_{n-1},T(x_n)\big)+d\big(x_n,T(x_{n-1})\big)\big\}\end{aligned}$$

$$= d(x, x_n) + k\{d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)\}$$

$$= d(x, x_n) + k\{d(x_{n-1}, x) + d(x, x_{n+1})\} \tag{3.59}$$

Sehingga untuk $x_n \to x$ didapat:

$$d\big(x, T(x_n)\big) \to 0 + k(0) = 0 \tag{3.60}$$

Karena d adalah fungsi jarak yang kontinu, maka untuk $x_n \to x$ didapat:

$$d\big(x, T(x_n)\big) \to d\big(x, T(x)\big) \tag{3.61}$$

Sehingga $d\big(x, T(x)\big) = 0$.

Karena $T(x) \in CB(X)$, maka berdasarkan Proposisi 3.5 sifat (1) didapat bahwa $x \in T(x)$. Hal ini menunjukkan $x \in X$ merupakan titik tetap dari pemetaan *C*-kontraktif T.■

BAB 4
KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tesis ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Agar memenuhi metrik, jarak Hauddorff $\mathcal{H}$ antar kedua himpunan bagian dari suatu ruang metrik lengkap (X, d) harus dilakukan terhadap himpunan bagian yang tertutup dan terbatas dari himpunan X.
2. Himpunan dari semua himpunan bagian yang tertutup dan terbatas $CB(X)$ bersama dengan metrik Hausdorff $\mathcal{H}$ $(CB(X), \mathcal{H})$ membentuk ruang metrik lengkap.
3. Eksistensi titik tetap *set-valued function* dengan sifat pemetaan *C*-kontraktif menggunakan konsep metrik Hausdorff $\mathcal{H}$ dapat dipertahankan dalam ruang metrik lengkap.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, R. P., O'Regan, D., and Sahu, D.R. (2009). *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*. Springer.

Barich, K. (2011). *Proving Completeness of The Hausdorff Induced Metric Space,* Research Article, Whitman College.

Butt, A.R. (2010). *Fixed Points of Set Valued Maps*. Thesis, Department of Mathematics, Lahore University of Management Sciences.

Břetislav. F and Zdeněk. S.(2010). Some Generalizations of Banach Fixed Point Theorem. *Journal of Applied Mathematics*, Vol.3, No. 2, 53-58.

Chi-Ming. (2011). *Some New Fixed Point Theorems for Set-Valued Contraction in Complete Metric Space*. Springer.

Gelutu, A. (2006). *Introduction to Topological Spaces and Set-Valued Maps*. Lecture Notes, Department of Operations Research & Stochastics, Ilmenau University of Technology.

Istrătescu. (1981). *Fixed Point Theory*. Holland: Reidel Publishing Company.

Kreyszig, E. (1989). *Introduction Functional Analysis With Applications*. Canada: Jhon Wiley & Sons. Inc.

O'Searcoid, M. (2005). *Metric Space*. Springer.

Royden, H.L. (1988). *Real Analysis*. New York: Macmillan Publishing Company.

Shirali, S and Vasudeva, H.L.(2006). *Metric Spaces*. Springer.

Widder, A. (2009). *Fixed Point Theorems For Set-Valued Maps*. Thesis. Institute for Analysis and Scientific of Technology.

LAMPIRAN 1

Pemetaan Kontraktif untuk *Single-Valued Function*

Definisi 1. Diberikan ruang metrik lengkap (X, d). Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan kontraktif pada X jika terdapat bilangan riil $k \in (0,1)$, sedemikian sehingga berlaku

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq kd(x, y) \tag{1}$$

untuk setiap $x, y \in X$. (Istrătescu, 1981)

Teorema 2. Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik lengkap dan misalkan $T: X \to X$ adalah sebuah pemetaan yang memenuhi kondisi kontraktif. Maka T mempunyai titik tetap yang tunggal.
(Istrătescu, 1981)

Bukti.
Ambil $x_0 \in X$ dan $x_1 = T(x_0)$ sehingga dapat dibentuk barisan (x_n) sebagai berikut:

$$x_0, x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \cdots, x_n = T^n(x_0) \tag{2}$$

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy.

Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} d(x_m, x_{m+1}) &= d(T(x_{m-1}), T(x_m)) \\ &\leq kd(x_{m-1}, x_m) \\ &= kd(T(x_{m-2}), T(x_{m-1})) \\ &\leq k^2 d(x_{m-2}, x_{m-1}) \\ &\;\;\vdots \\ &\leq k^m d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) + k^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + k^{m-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$= \frac{k^n - k^m}{1 - k} d(x_0, x_1) < \frac{k^n}{1 - k} d(x_0, x_1) \quad (3)$$

Dari pertidaksamaan (3), karena $k \in (0,1)$ dan $d(x_0, x_1)$ adalah suatu bilangan positif tertentu, maka ruas kanan dari pertidaksamaan (3) konvergen ke nol ketika n sangat besar. Sehingga mengakibatkan $d(x_n, x_m) \to 0$ ketika $n \to \infty$. Hal ini menunjukkan (x_n) adalah barisan Cauchy. Karena X **lengkap** maka barisan (x_n) konvergen di X. Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_m = u$. Akan ditunjukkan bahwa u adalah titik tetap dari pemetaan T. Berdasarkan **Lemma 2.21**, T adalah kontinu, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(u) \quad (4)$$

Terdapat $x_{n+1} = T(x_n)$,

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = T(u) \quad (5)$$

Hal ini menunjukkan bahwa $T(u) = u$. Jadi, u merupakan titik tetap dari pemetaan kontraktif T. ■

LAMPIRAN 2

Pemetaan Kontraktif untuk *Set-Valued Function*

Definisi 1. Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik. Suatu pemetaan $T: X \to CB(X)$ dikatakan *set-valued function* yang kontraktif jika terdapat bilangan riil $k \in (0,1)$, sedemikian sehingga berlaku

$$\mathcal{H}\big(T(x), T(y)\big) \leq kd(x, y) \tag{1}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

(Butt, 2010)

Teorema 2. Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik lengkap dan misalkan $T: X \to CB(X)$ adalah sebuah *set-valued function* yang kontraktif. Maka T mempunyai titik tetap. (Butt, 2010)

Bukti.

Misalkan $x_0 \in X$ dan $x_1 \in T(x_0)$. Maka juga terdapat $x_2 \in T(x_1)$ sedemikian sehingga didapat

$$d(x_1, x_2) \leq \mathcal{H}(T(x_0), T(x_1)) + k \tag{2}$$

Secara similar, terdapat $x_3 \in T(x_2)$ sedemikian sehingga

$$d(x_2, x_3) \leq \mathcal{H}(T(x_1), T(x_2)) + k^2 \tag{3}$$

Oleh karena itu, terdapat barisan (x_n) di X sedemikian sehingga $x_{n+1} \in T(x_n)$ dan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \mathcal{H}(T(x_{n-1}), T(x_n)) + k^n \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Karena untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $x_{n+1} \in T(x_n)$ maka

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \mathcal{H}\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) + k^n \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) + k^n \\ &\leq k\Big(\mathcal{H}\big(T(x_{n-2}), T(x_{n-1})\big) + k^{n-1}\Big) + k^n \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n \end{aligned}$$

$$\leq \cdots$$

$$\leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n$$

Oleh karena itu, untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n + k^{n+1} d(x_0, x_1) + (n+1)k^{n+1} \\ &\quad + \cdots + k^{m-1} d(x_0, x_1) + (m-1)k^{m-1} \\ &\leq \sum_{l=n}^{n+m-1} k^l \, d(x_0, x_1) + \sum_{l=n}^{n+m-1} lk^l \qquad (5) \end{aligned}$$

Dari pertidaksamaan (5), karena $k \in (0,1)$ dan $d(x_0, x_1)$ adalah suatu bilangan positif tertentu, maka ruas kanan dari pertidaksamaan (5) konvergen ke nol ketika n sangat besar. Sehingga mengakibatkan $d(x_n, x_m) \to 0$ ketika $n \to \infty$. Hal ini menunjukkan (x_n) adalah barisan Cauchy. Karena X **lengkap** maka barisan (x_n) konvergen di X yaitu $d(x_n, x) \to 0$.

Karena T adalah kontinu, maka:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(T(x_n), T(x)) = 0 \qquad (6)$$

Karena $x_{n+1} \in T(x_n)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(T(x_n), T(x)) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, T(x)) = 0 \qquad (7)$$

Yang mengakibatkan $d(x, T(x)) = 0$. Karena $T(x) \in CB(X,$ hal ini mengakibatkan $x \in T(x)$. ■